

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

завідувач кафедри математики та економіки,

кандидат пед. наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК

«__» _____ 2025 р.

АПРОКСИМАЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ОДНОЇ СИСТЕМИ
ФУНКЦІЙ БЕССЕЛЯ У ВАГОВОМУ ПРОСТОРИ

Спеціальність 111 «Математика»

Магістерська робота
на здобуття кваліфікації – магістр математики.

Автор роботи: Гавдяк Богдан Любомирович _____

підпис

**Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук,
доцент Хаць Руслан Васильович _____**

підпис

Дрогобич, 2025

Захист магістерської роботи

Апроксимаційні властивості одної системи функцій Бесселя у
ваговому просторі

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

_____ Голова ЕК _____

Дата

підпис

прізвище, ім'я

_____ Секретар ЕК _____

підпис

прізвище, ім'я

Анотація

Гавдяк Б.Л. *Апроксимаційні властивості одної системи функцій Бесселя у ваговому просторі.* – Рукопис. – 34 с.

Досліджено апроксимаційні властивості (повнота, мінімальність, базисність) системи $\{x^{-3}\sqrt{\rho_k}J_{5/2}(\rho_k x):k \in \mathbb{N}\}$ у ваговому просторі $L^2((0;1);x^4 dx)$, де $J_{5/2}$ – функція Бесселя першого роду з індексом $5/2$ і $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – довільна послідовність різних відмінних від нуля комплексних чисел. Знайдено також аналог теореми Пелі-Вінера, пов'язаний з цією системою.

Annotation

Gavdyak B.L. *Approximation properties of one system of Bessel functions in a weighted space.* – Manuscript. – 34 p.

The approximation properties (completeness, minimality, basicity) of the system $\{x^{-3}\sqrt{\rho_k}J_{5/2}(\rho_k x):k \in \mathbb{N}\}$ in the weighted space $L^2((0;1);x^4 dx)$ are investigated, where $J_{5/2}$ be the Bessel function of the first kind of index $5/2$ and $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ be a sequence of distinct nonzero complex numbers. Also, has been found an analogue of the Paley-Wiener theorem related to this system.

Зміст

Анотація.....	3
Вступ.....	5
Розділ 1. Огляд літератури за темою та допоміжні твердження.....	11
1.1. Системи в гільбертових просторах.....	11
1.2. Цілі функції експоненційного типу.....	13
1.3. Апроксимаційні властивості систем експонент.....	15
1.4. Функції Бесселя першого роду.....	17
1.5. Апроксимаційні властивості систем функцій Бесселя.....	19
Розділ 2. Основні результати.....	23
Висновки.....	32
Список використаних джерел.....	33

Вступ

Актуальність теми. Нехай $L_\alpha^2 := L^2((0;1); x^\alpha dx)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, – простір функцій $f : (0;1) \rightarrow \mathbb{C}$, для яких $\int_0^1 t^\alpha |f(t)|^2 dt < +\infty$, зі скалярним добутком

$\langle f_1; f_2 \rangle = \int_0^1 t^\alpha f_1(t) \overline{f_2(t)} dt$ і нормою $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 t^\alpha |f(t)|^2 dt}$. Нехай

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{\nu+2k}}{2^{\nu+2k} k! \Gamma(\nu+k+1)}, \quad z = x + iy = re^{i\varphi},$$

– функція Бесселя першого роду індексу $\nu \in \mathbb{R}$, де Γ – класична гамма-функція Ейлера. Ціла функція G називається [10, с. 4] цілою функцією експоненційного типу $\sigma \in [0; +\infty)$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і деякої сталої $c(\varepsilon)$

$$|G(z)| \leq c(\varepsilon) \exp((\sigma + \varepsilon)|z|), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Нехай $PW_{\sigma,-}^2$ – клас непарних цілих функцій G експоненційного типу $\sigma \in (0; +\infty)$, звуження яких на \mathbb{R} належить простору $L^2(\mathbb{R})$. Відомо, що функція J_ν для $\nu > -1$ має (див. [8, с. 94], [18, с. 483]) нескінченну множину $\{\rho_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ нулів, де ρ_k , $k \in \mathbb{N}$, – додатні нулі, і $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, – від’ємні нулі. Всі нулі функції J_ν є простими, за можливим винятком, $\rho_0 = 0$. Система $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ елементів гільбертового простору H називається повною в H [10, с. 131], якщо $\overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}} = H$. Система $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ називається мінімальною в гільбертовому просторі H [10, с. 131], якщо $e_{n_0} \notin \overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}\}}$ для кожного $n_0 \in \mathbb{N}$. Система $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ є мінімальною в H тоді і тільки тоді [10, с. 131], коли вона має біортогональну систему $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$, тобто $\langle e_n; u_k \rangle = \delta_{kn}$, де δ_{kn} – символ Кронекера.

При вивченні багатьох крайових задач важливу роль відіграє система $\{\sqrt{x} J_\nu(\rho_k x) : k \in \mathbb{N}\}$. Тому дослідженню різноманітних апроксимаційних властивостей таких систем присвячено багато публікацій [1, 2, 4, 5, 8, 12, 14,

18]. Зокрема, добре відомо [1–5, 12, 13, 18], що система $\{\sqrt{x}J_\nu(\rho_k x): k \in \mathbb{N}\}$ є ортогональним базисом простору $L^2(0;1)$, якщо $\nu > -1$ і $\rho_k, k \in \mathbb{N}$, – додатні нулі J_ν . Система $\{\sqrt{x}J_\nu(\rho_k x): k \in \mathbb{N}\}$ є також повною в $L^2(0;1)$, якщо $\rho_k J'_\nu(\rho_k) + \alpha J_\nu(\rho_k) = 0$ і $\alpha + \nu > 0$ [3–5, 13, 18]. Із [2] отримуємо, що якщо $\nu > -1/2$ і $\rho_k, k \in \mathbb{N}$, – попарно різні додатні числа, для яких $\rho_k \leq \pi(k + \nu/2)$, $k \in \mathbb{N}$, то система $\{\sqrt{x}J_\nu(\rho_k x): k \in \mathbb{N}\}$ є повною в $L^2(0;1)$. В [15, 16] знайдено критерії повноти, мінімальності й базисності системи $\{\sqrt{x\rho_k}J_\nu(\rho_k x): k \in \mathbb{N}\}$ у просторі $L^2(0;1)$, де $\nu \geq -1/2$ і $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – довільна послідовність комплексних чисел. Ці результати отримано в термінах послідовностей нулів функцій з деяких класів цілих функцій.

Важливим є вивчення базисних властивостей систем функцій Бесселя J_ν першого роду індексу $\nu > -1$ у вагових L^2 -просторах. Зокрема, відомо [1, 2, 4, 5, 8, 12, 14, 18], що система $\{x^{-\nu}J_\nu(\rho_k x): k \in \mathbb{N}\}$ є повною й мінімальною в $L^2_{2\nu+1}$, якщо $\nu \geq -1/2$ і $\rho_k, k \in \mathbb{N}$ – додатні нулі функції J_ν . Якщо система $\{x^{-\nu}J_\nu(\rho_k x): k \in \mathbb{N}\}$ є повною в просторі $L^2_{2\nu-1}$, то вона є повною в $L^2_{2\nu+1}$. Тому актуальним є вивчення апроксимаційних властивостей системи $\{x^{-\nu}J_\nu(\rho_k x): k \in \mathbb{N}\}$ в $L^2_{2\nu-1}$ у випадку, коли числа ρ_k не обов'язково є нулями функції J_ν . Характер очікуваних результатів для довільного $\nu > -1$ пов'язаний з певними труднощами. В цьому напрямку, в [17] знайдено критерій повноти та мінімальності системи $\{x^{-p-1}\sqrt{\rho_k x}J_\nu(\rho_k x): k \in \mathbb{N}\}$ у L^2_{2p} , де $\nu \geq 1/2$, $p \in \mathbb{R}$ і $(\rho_k) \subset \mathbb{C}$ – послідовність комплексних чисел таких, що $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$, $k \neq n$.

Проте, актуальним залишається дослідження деяких апроксимаційних властивостей системи $\{x^{-\nu}J_{\nu}(\rho_k x):k \in \mathbb{N}\}$ у просторі $L^2_{2\nu-1}$ з $\nu=5/2$ і довільною послідовністю комплексних чисел $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є знаходження нових необхідних та достатніх умов повноти системи $\{\Theta_{k,5/2}:k \in \mathbb{N}\}$, $\Theta_{k,5/2}(x):=x^{-3}\sqrt{\rho_k x}J_{5/2}(\rho_k x)$, у просторі $L^2_4:=L^2((0;1);x^4 dx)$ в термінах цілої функції з послідовністю нулів $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ з деякого класу цілих функцій $E_{5/2,+}$, де $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – послідовність попарно різних відмінних від нуля комплексних чисел.

Задачі дослідження: дослідити зв'язок між повнотою системи $\{\Theta_{k,5/2}:k \in \mathbb{N}\}$ у просторі L^2_4 та властивостями послідовності $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$; встановити аналог теореми Пелі-Вінера, пов'язаний з цією системою; довести, що розглядувана система не є базисом у вказаному просторі, якщо $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – послідовність додатних нулів функції $J_{5/2}$.

Об'єктом дослідження є системи функцій Бесселя першого роду індексу $5/2$.

Предметом дослідження є апроксимаційні властивості (повнота, мінімальність та базисність) системи $\{\Theta_{k,5/2}:k \in \mathbb{N}\}$ функцій Бесселя першого роду індексу $5/2$ у просторі L^2_4 .

Методи дослідження. У роботі використовуються методи комплексного аналізу і деякі прийоми з праць А. Седлецького [11], Б. Винницького і Р. Хаця [6, 7, 15–17].

В магістерській роботі доведено наступні твердження, які доповнюють результати робіт [6, 7, 15–17].

Теорема 2.1. *Функція Ω подається у вигляді*

$$\Omega(z) = \int_0^1 z^{-3} \sqrt{zt} J_{5/2}(zt) h(t) dt, \quad h \in L^2_4, \quad (2.1)$$

тоді і тільки тоді, коли вона є парною цілою функцією експоненційного типу

$$\sigma \leq 1 \text{ такою, що } (z^5 \Omega(z))|_{z=0} = 0, \left(z^{-1} (z^5 \Omega(z))' \right)|_{z=0} = 0 \text{ і } z^{-1} \left(z^{-1} (z^5 \Omega(z))' \right)' \in PW_{1,-}^2.$$

При цьому,

$$h(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\left(z^{-1} (z^5 \Omega(z))' \right)' \sin(tz) dz}{zt^3}.$$

Клас цілих функцій Ω , які подаються у вигляді (2.1), позначимо через $\tilde{E}_{5/2,+}$, а клас парних цілих функцій Ω експоненційного типу $\sigma \leq 1$ таких, що

$$(z^5 \Omega(z))|_{z=0} = 0, \left(z^{-1} (z^5 \Omega(z))' \right)|_{z=0} = 0 \text{ і } z^{-1} \left(z^{-1} (z^5 \Omega(z))' \right)' \in PW_{1,-}^2 \text{ — через } E_{5/2,+}.$$

Зауважимо, що $\tilde{E}_{5/2,+} = E_{5/2,+}$ і клас $E_{5/2,+}$ співпадає з множиною цілих функцій Ω , які подаються у вигляді

$$\Omega(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \frac{3tz \cos(tz) - 3 \sin(tz) + t^2 z^2 \sin(tz)}{z^5 t^3} q(t) dt, \quad q \in L^2(0;1). \quad (2.2)$$

Теорема 2.2. Нехай $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — довільна послідовність відмінних від нуля комплексних чисел таких, що $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$, $k \neq n$. Система $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$ не є повною в L_4^2 тоді і тільки тоді, коли послідовність $(\rho_k)_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, є підпослідовністю нулів деякої ненульової функції $\Omega \in E_{5/2,+}$.

Через C_1, C_2, \dots , позначаємо деякі додатні сталі.

Теорема 2.3. Нехай $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — послідовність різних відмінних від нуля комплексних чисел таких, що $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$, $k \neq n$, і послідовність $(\rho_k)_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, є послідовністю нулів деякої парної цілої функції $G \notin E_{5/2,+}$ експоненційного типу $\sigma \leq 1$, для якої

$$|G(z)| \geq \frac{C_1}{(1+|z|)^3} e^{|\operatorname{Im} z|}, \quad \arg z = \pi/4 + j\pi/2, \quad j \in \{0;1;2;3\}. \quad (2.3)$$

Тоді система $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$ є повною в L_4^2 .

Теорема 2.4. Якщо $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – послідовність додатних нулів функції $J_{5/2}$, то система $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$ є повною й мінімальною в L_4^2 , але не є базисом цього простору. При цьому, біортогональну систему $\{g_k : k \in \mathbb{N}\}$ утворюють функції g_k , визначені формулою

$$\overline{g_k(t)} = \frac{2J_{5/2}(\rho_k t)}{\sqrt{t\rho_k} J_{7/2}^2(\rho_k)}. \quad (2.5)$$

Теорема 2.5. Нехай $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – послідовність різних відмінних від нуля комплексних чисел таких, що $\rho_k^2 \neq \rho_m^2$, $k \neq m$, і послідовність $(\rho_k)_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, є послідовністю нулів деякої парної цілої функції G експоненційного типу $\sigma \leq 1$, для якої

$$|G(z)| \geq \frac{C_7}{(1+|z|)^\alpha} e^{|\operatorname{Im} z|}, \quad \arg z = \pi/4 + j\pi/2, \quad (2.6)$$

де $\alpha < 5/2$ і $j \in \{0; 1; 2; 3\}$. Тоді система $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$ є повною в L_4^2 .

Теорема 2.6. Нехай $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – послідовність різних відмінних від нуля комплексних чисел таких, що $\rho_k^2 \neq \rho_m^2$, $k \neq m$, і послідовність $(\rho_k)_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, є послідовністю нулів деякої парної цілої функції $D \notin E_{5/2,+}$ експоненційного типу $\sigma \leq 1$, для якої за деяких $\alpha < 2$ і $h \in \mathbb{R}$ виконується

$$|D(x+ih)| \geq \delta/|x|^\alpha, \quad |x| > 1, \quad \delta > 0. \quad (2.7)$$

Тоді система $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$ є повною в L_4^2 .

Теорема 2.7. Нехай $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – послідовність різних відмінних від нуля комплексних чисел таких, що $|\operatorname{Im} \rho_k| \geq \delta|\rho_k|$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і деякого $\delta > 0$. Якщо система $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$ є повною в $L^2((0;1); x^4 dx)$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\rho_k|} = +\infty. \quad (2.8)$$

Наукова новизна одержаних результатів. Усі отримані результати магістерської роботи є новими. У роботі встановлено деякі необхідні та

достатні умови повноти системи $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$ функцій Бесселя з індексом $5/2$ в термінах послідовностей нулів функцій з деякого класу цілих функцій експоненційного типу. Знайдено також аналог теореми Пелі-Вінера, пов'язаний з цією системою.

Практичне значення отриманих результатів. Результати магістерської роботи мають теоретичний характер. Вони можуть знайти застосування у подальших дослідженнях апроксимаційних властивостей систем функцій Бесселя першого роду.

Апробація результатів магістерської роботи. Результати досліджень викладено у доповіді на XII науково-практичній конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій [20].

Структура і обсяг роботи. Робота складається з анотації, вступу, двох розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел, що налічує 20 найменувань. В першому розділі зроблено огляд літератури за темою, а в другому доведено основні результати роботи. Загальний обсяг роботи становить 34 сторінки.

Розділ 1. Огляд літератури за темою та допоміжні твердження

1.1. Системи в гільбертових просторах

Основні властивості систем елементів в гільбертових просторах висвітлено, наприклад, в [9–11, 13]. Нехай H – гільбертів простір зі скалярним добутком $\langle \cdot; \cdot \rangle: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$. Система $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ елементів гільбертового простору H називається повною в H ([10, с. 19], [11, с. 4258]), якщо замикання її лінійної оболонки співпадає з H , тобто, якщо для кожного елемента $f \in H$ знайдуться такі послідовності $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ комплексних чисел та $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ натуральних чисел, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{p_n} d_k u_k = f$. Згідно з теоремою С. Банаха [10, с. 131] система $(u_k : k \in \mathbb{N})$ є повною в H тоді і тільки тоді, коли з системи рівностей $\langle \varphi; u_k \rangle = 0, k \in \mathbb{N}$, для деякого елемента $\varphi \in H$ випливає, що $\varphi = 0$. Система $\{v_k : k \in \mathbb{N}\}$ елементів гільбертового простору H називається біортогональною системою системи $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$, якщо [11, с. 4258]

$$\langle u_k; v_n \rangle = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Система $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ гільбертового простору H називається мінімальною ([10, с. 131], [11, с. 4258]), якщо для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ елемент u_n не належить замиканню лінійної оболонки системи $\{u_k : k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{n\}\}$. Система є мінімальною тоді і тільки тоді, коли вона має біортогональну систему ([9], [10, с. 131], [11, с. 4258]). Повна система може мати не більше однієї біортогональної системи. Якщо ряд

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} d_k u_k \tag{1.1.1}$$

є збіжним в гільбертовому просторі H і система $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ має біортогональну систему $\{v_k : k \in \mathbb{N}\}$, то коефіцієнти d_k у розвиненні (1.1.1) знаходяться за формулою

$$d_k = \langle f; v_k \rangle. \tag{1.1.2}$$

Ряд $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} d_k u_k$, в якому коефіцієнти d_k знайдені за формулою (1.1.2), називається рядом Фур'є ([5, с. 4259], [9]) елемента $f \in H$ за системою $(u_k : k \in \mathbb{N})$.

Система елементів $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ гільбертового простору H називається базисом [11, с. 4258] цього простору, якщо кожний елемент $f \in H$ єдиним чином подається у вигляді збіжного в H ряду (1.1.1). Якщо система $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ є базисом, то $u_k \neq u_j$ для $k \neq j$. Система $\{u_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ гільбертового простору називається рівномірно мінімальною ([9, 10], [11, с. 4258]), якщо знайдеться таке $\delta > 0$, що для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ відстань від елемента u_n до замикання лінійної оболонки системи $\{u_k : k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{n\}\}$ є не меншою за $\delta \|u_n\|$. Повна і мінімальна система $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ з біортогональною системою $\{v_k : k \in \mathbb{N}\}$ є рівномірно мінімальною тоді і тільки тоді [11, с. 4258], коли $\sup\{\|u_k\| \|v_k\| : k \in \mathbb{N}\} < +\infty$. Кожний базис є повною і рівномірно мінімальною системою [11, с. 4258]. Проте не кожна повна, мінімальна і рівномірно мінімальна система є базисом. Ряд прикладів таких систем наведено в [9–11, 13].

Теорема 1.1.1 [9]. *Нехай $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ – ортонормована система гільбертового простору H . Тоді еквівалентними є наступні умови: 1) система $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ є повною в H ; 2) кожний елемент простору H розвивається в збіжний в H ряд Фур'є за цією системою; 3) для кожного $f \in H$ справедлива рівність Парсеваля $\sum_{k=1}^{\infty} |d_k|^2 = \|f\|^2$; 4) система $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ є базисом простору H ; 5) якщо $\langle f; u_k \rangle = 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, то $f = 0$.*

Приклад 1.1.1 [9-11]. Система $\{e^{ikx} / \sqrt{2\pi} : k \in \mathbb{Z}\}$ є базисом простору $L^2(-\pi; \pi)$ і кожна функція $f \in L^2(-\pi; \pi)$ єдиним чином розвивається у збіжний в

$L^2(-\pi; \pi)$ ряд $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k e^{ikx}$. При цьому, коефіцієнти d_k визначаються за формулами $d_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$ і справедлива рівність Парсеваля:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |d_k|^2.$$

Базис $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ гільбертового простору H називається базисом Рісса [11, с. 4259], якщо $(\exists c_1 > 0)(\forall f \in H) : c_1^{-1} \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |d_k|^2 \leq c_1 \|f\|^2$. Кожний базис Рісса $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ є майже нормованим ([9, 10], [11, с. 4259]), тобто $(\exists c_1 > 0)(\forall k \in \mathbb{N}) : c_1^{-1} \leq \|u_k\| \leq c_1$. Базис $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ називається безумовним [11, с. 4259], якщо за будь-якої перестановки його членів він залишається базисом.

Теорема 1.1.2 [9–11, 13]. Система $\{|x|^\alpha e^{inx} : n \in \mathbb{N}\}$ є базисом Рісса простору $L^2(-\pi; \pi)$ для кожного $\alpha \in (-1/2; 1/2)$ і $n \in \mathbb{N}$.

1.2. Цілі функції експоненційного типу

Основні властивості цілих функцій висвітлені в [10, 11, 13]. Функція $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ називається голоморфною в області D , якщо вона є голоморфною в кожній точці цієї області, тобто має похідну в деякому околі кожної точки $a \in D$. Якщо функція $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ є голоморфною в \mathbb{C} , тобто має похідну в кожній точці $a \in \mathbb{C}$, то вона називається цілою функцією [10, с. 1].

Нулем функції f називається таке число a , для якого $f(a) = 0$. Нуль $a \in D$ голоморфної в області D функції $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ називається нулем скінченного порядку $m \in \mathbb{N}$ або нулем, кратності $m \in \mathbb{N}$, якщо $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0$, $f^{(m)}(a) \neq 0$. Якщо $(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : f^{(n)}(a) = 0$, то нуль $a \in D$ функції $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ має нескінченний порядок. У випадку $m = 1$, нуль $a \in D$ називається простим нулем.

Послідовність (λ_n) така, що $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{m_1} = z_1$, $\lambda_{m_1+1} = \lambda_{m_1+2} = \dots = \lambda_{m_2} = z_2, \dots$, називається послідовністю нулів функції f [10, 11, 13], де $Z = \{z_k\}$ – множина нулів функції f , голоморфної в області D , а m_k – порядок (кратність) нуля

z_k . При цьому, число $n_{f,E} = \sum_{z_k \in E} m_k$, тобто $n_{f,D} = \sum_{\lambda_k \in E} 1$, – це кількість нулів функції f на множині $E \subset D$. Згідно з теоремою єдиності, якщо функція $f \neq 0$ є голоморфною в області D , то на кожному компактї із D вона має скінченну кількість нулів або зовсім їх не має. Послідовність $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ є послідовністю нулів [10, 11] деякої цілої функції тоді і тільки тоді, коли вона не має скінченних часткових границь.

Максимумом модуля цілої функції f називається [10, с. 1] функція $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z|=r\}$, яка є монотонно зростаючою. Порядком цілої функції f називається число [10, с. 4]:

$$\rho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}.$$

Якщо $\rho \in (0; +\infty)$, то тип цілої функції f визначається формулою [10, с. 4]:

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}.$$

Якщо $\sigma = 0$, $0 < \sigma < +\infty$ і $\sigma = +\infty$, то ціла функція f називається функцією мінімального, нормального і максимального типу, відповідно.

З означень порядку і типу цілої функції f випливає [10, с. 4], що $\rho_{fg} \leq \max\{\rho_f; \rho_g\}$, $\rho_{f+g} \leq \max\{\rho_f; \rho_g\}$, $\sigma_{fg} \leq \sigma_f + \sigma_g$ і $\sigma_{f+g} \leq \max\{\sigma_f; \sigma_g\}$.

Ціла функція G називається [10, с. 4] цілою функцією експоненційного типу $\sigma \in [0; +\infty)$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і деякої сталої $c(\varepsilon)$

$$|G(z)| \leq c(\varepsilon) \exp((\sigma + \varepsilon)|z|), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Нехай PW_σ^2 – клас цілих функцій G експоненційного типу $\sigma \in (0; +\infty)$, звуження яких на \mathbb{R} належить простору $L^2(\mathbb{R})$; $PW_{\sigma,+}^2$ – клас парних функцій з PW_σ^2 , а клас $PW_{\sigma,-}^2$ – клас непарних функцій $G \in PW_\sigma^2$.

Теорема 1.2.1 (Пелі-Вінера) ([10, с. 69], [11, с. 4263]). Клас PW_σ^2 співпадає з множиною цілих функцій G , які допускають зображення

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{itz} g(t) dt, \quad g \in L^2(-\sigma; \sigma).$$

При цьому, $\|g\|_{L^2(-\sigma;\sigma)} = \|G\|_{L^2(\mathbb{R})}$ і

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itz} G(z) dz.$$

Наслідок 1.2.1. Клас $PW_{\sigma,+}^2$ співпадає з множиною парних цілих функцій G , які допускають зображення

$$G(z) = \int_0^{\sigma} \cos(tz) g(t) dt, \quad g \in L^2(0;\sigma).$$

Клас $PW_{\sigma,-}^2$ співпадає з множиною непарних цілих функцій G , які мають вигляд

$$G(z) = \int_0^{\sigma} \sin(tz) g(t) dt, \quad g \in L^2(0;\sigma).$$

При цьому, $\|g\|_{L^2(0;\sigma)} = \sqrt{2/\pi} \|G\|_{L^2(0;+\infty)}$ і

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(tz) G(z) dz, \quad g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin(tz) G(z) dz.$$

Приклад 1.2.1 [10, 11]. Функція $f(z) = z^{-1} \sin \pi z$ належить до $PW_{\pi,+}^2$.

До класу C (класу Картрайт) належать [11, с. 4263] всі цілі функції G експоненційного типу, для яких

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\ln^+ |G(x)|}{1+x^2} dx < +\infty, \quad \ln^+ x = \max\{0; \ln x\}, \quad x > 0.$$

Кожна функція із класу Пелі-Вінера належить до класу Картрайт.

Теорема 1.2.2 (Картрайт) [11, с. 4263]. Нехай $G(z) \in C$ і (z_n) – послідовність нулів функції $G(z)$. Тоді

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{z_n} \right| < +\infty.$$

1.3. Апроксимаційні властивості систем експонент

Добре відомо, що система $\{e^{ik} : k \in \mathbb{Z}\}$ є повною у просторі $L^2(-\pi;\pi)$ і є ортогональним базисом цього простору [9–11, 13]. Подібне справедливе для загальніших систем $\{e^{i\lambda_k} : k \in \mathbb{N}\}$. Апроксимаційні властивості таких систем залежать від властивостей послідовності $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ комплексних чисел. Основні результати викладені в [9–11, 13]. Наведемо деякі з них.

Теорема 1.3.1 [9–11, 13]. Нехай $\sigma \in (0; +\infty)$ – деяке число. Для того щоб система $\{e^{it\lambda_k} : k \in \mathbb{N}\}$ була неповною в $L^2(-\sigma; \sigma)$, необхідно і достатньо, щоб існувала ненульова функція $g \in L^2(-\sigma; \sigma)$ така, що для всіх $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda_k} g(t) dt = 0.$$

Теорема 1.3.2 [9–11, 13]. Нехай $\sigma \in (0; +\infty)$ – деяке число і $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – довільна послідовність різних комплексних чисел. Для того щоб система $\{e^{it\lambda_k} : k \in \mathbb{N}\}$ була неповною в $L^2(-\sigma; \sigma)$, необхідно і достатньо, щоб послідовність $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ була підпослідовністю нулів деякої цілої функції $G \in PW_{\sigma}^2$.

Теорема 1.3.3 [9–11, 13]. Нехай $\sigma \in (0; +\infty)$ – деяке число і $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – довільна послідовність різних комплексних чисел. Система $\{e^{it\lambda_k} : k \in \mathbb{N}\}$ є повною в $L^2(-\sigma; \sigma)$ тоді і тільки тоді, коли з умов $G \in PW_{\sigma}^2$ і $G(\lambda_k) = 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ випливає, що $G \equiv 0$.

Теорема 1.3.4 [9–11, 13]. Нехай $\sigma \in (0; +\infty)$ – деяке число і $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – довільна послідовність різних комплексних чисел. Система $\{e^{it\lambda_k} : k \in \mathbb{N}\}$ є повною і мінімальною в $L^2(-\sigma; \sigma)$ тоді і тільки тоді, коли послідовність $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ є послідовністю нулів деякої цілої функції G експоненційного типу σ такої, що $(1+z^2)^{-1/2}G(z) \in L^2(\mathbb{R})$.

Теорема 1.3.5 [9–11, 13]. Нехай $\sigma \in (0; +\infty)$ – деяке число і $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – довільна послідовність різних комплексних чисел. Система $\{e^{it\lambda_k} : k \in \mathbb{N}\}$ є повною і мінімальною в $L^2(-\sigma; \sigma)$ тоді і тільки тоді, коли послідовність $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ є послідовністю нулів деякої цілої функції G експоненційного типу σ такої, що $(z - \lambda_1)^{-1}G(z) \in PW_{\sigma}^2$.

Теорема 1.3.6 [9–11, 13]. Нехай $\sigma \in (0; +\infty)$ – деяке число і $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – довільна послідовність різних комплексних чисел таких, що $|\operatorname{Im} \lambda_k| \geq \delta |\lambda_k|$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і деякого $\delta > 0$. Система $\{e^{it\lambda_k} : k \in \mathbb{N}\}$ є повною в $L^2(-\sigma; \sigma)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{|\lambda_k|>0} \frac{1}{|\lambda_k|} = +\infty.$$

Теорема 1.3.7 [9–11, 13]. Нехай $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – довільна послідовність різних комплексних чисел є послідовністю нулів деякої цілої функції $G \notin PW_\sigma^2$, для якої за деяких $m > 0$, $h \in \mathbb{R}$ і $\delta > 0$ виконується $|G(x+ih)| \geq \delta|x|^{-m}$, $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 1$. Тоді система $\{e^{it\lambda_k} : k \in \mathbb{N}\}$ є повною в $L^2(-\sigma; \sigma)$.

1.4. Функції Бесселя першого роду

Функцією Бесселя першого роду індексу $\nu \in \mathbb{R}$ називається [8, 14, 18] функція

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{\nu+2k}}{\Gamma(\nu+k+1)k!}.$$

Функція J_ν є розв'язком рівняння Бесселя $y'' + y'/x + (1-\nu^2/x^2)y = 0$, функція $y(x) = J_\nu(x\rho)$ є розв'язком рівняння $y'' + y'/x - \nu^2/x^2 = -\rho^2 y$, а функція $y(x) = \sqrt{x\rho} J_\nu(x\rho)$ є розв'язком диференціального рівняння

$$-y'' + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} y = \rho^2 y.$$

Теорія функцій Бесселя детально викладена в [8, 14, 18]. В наступних прикладах розглянуто основні властивості функцій Бесселя першого роду.

Приклад 1.4.1. $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \cos x$, $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \sin x$,

$$J_{3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{x \cos x - \sin x}{x}, \quad J_{5/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{x^2 \sin x + 3x \cos x - 3 \sin x}{x^2},$$

$$J_{n+1/2}(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \frac{d^n}{d^n x} \left(\frac{\sin x}{x} \right), \quad J_{-n-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \frac{d^n}{d^n x} \left(\frac{\cos x}{x} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Приклад 1.4.2. Якщо $\nu \geq 0$ і $\nu \notin \mathbb{Z}$, то функції J_ν і $J_{-\nu}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння Бесселя на будь-якому проміжку Δ , який не містить точки 0. При цьому, вронскіан дорівнює

$$W_{J_\nu, J_{-\nu}}(x) := \begin{vmatrix} J_\nu & J_{-\nu} \\ J'_\nu & J'_{-\nu} \end{vmatrix} = J_\nu J'_{-\nu} - J_{-\nu} J'_\nu = -\frac{2 \sin(\nu\pi)}{\pi x}.$$

Приклад 1.4.3. $(z^\nu J_\nu(z))' = z^\nu J_{\nu-1}(z)$, $(z^{-\nu} J_\nu(z))' = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z)$,

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_{\nu}(z), \quad J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_{\nu}(z),$$

$$J'_{\nu}(z) = J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z), \quad J'_{\nu}(z) = \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z) - J_{\nu+1}(z),$$

$$\int_{u_0}^u z^{\nu} J_{\nu-1}(z) dz = \left(z^{\nu} J_{\nu}(z) \right) \Big|_{u_0}^u = u^{\nu} J_{\nu}(u) - u_0^{\nu} J_{\nu}(u_0).$$

Приклад 1.4.4. $J_{\nu}(z) = \frac{z^{\nu}}{2^{\nu} \Gamma(\nu+1)} + O(z^{\nu+2}), \quad z \rightarrow 0+,$

$$J_{\nu}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{|z|^{3/2}}\right), \quad |\arg z| < \pi, \quad z \rightarrow \infty.$$

$$|\sqrt{z} J_{\nu}(z)| \leq C e^{|\operatorname{Im} z|} \left(\frac{|z|}{1+|z|}\right)^{\nu+1/2}, \quad C > 0, \quad \nu > -1/2, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Приклад 1.4.5. $\int_0^1 t J_{\nu}(at) J_{\nu}(bt) dt = \frac{1}{a^2 - b^2} (a J_{\nu+1}(a) J_{\nu}(b) - b J_{\nu}(a) J_{\nu+1}(b)),$

$$\int_0^1 t J_{\nu}^2(at) dt = \frac{1}{2} J_{\nu}'^2(a) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{a^2}\right) J_{\nu}^2(a), \quad \int_0^1 t J_{\nu}^2(at) dt = \frac{1}{2} (J_{\nu}'^2(a) - J_{\nu-1}(a) J_{\nu+1}(a)),$$

$$\int_0^t J_{\nu}(at) J_{\nu}(bt) dt = \frac{t}{a^2 - b^2} (a J_{\nu+1}(at) J_{\nu}(bt) - b J_{\nu}(at) J_{\nu+1}(bt)), \quad a^2 \neq b^2, \quad \nu > -1,$$

$$\int_0^x t J_{\nu}(\beta t) J_{\nu}(\tilde{\beta} t) dt = \frac{x}{\beta^2 - \tilde{\beta}^2} (J_{\nu}(\beta x) \tilde{\beta} J_{\nu}'(\tilde{\beta} x) - J_{\nu}(\tilde{\beta} x) \beta J_{\nu}'(\beta x)), \quad \nu > -1.$$

Нехай $\alpha \in \mathbb{R}$ і $L_{\alpha}^2 := L^2((0;1); t^{\alpha} dt)$ – гільбертів простір функцій $f: (0;1) \rightarrow \mathbb{C}$, для яких $t^{\alpha/2} f(t) \in L^2(0;1)$. Скалярний добуток та норма в L_{α}^2 визначені відповідно рівностями:

$$\langle f_1; f_2 \rangle = \int_0^1 t^{\alpha} f_1(t) \overline{f_2(t)} dt, \quad \|f\| := \sqrt{\int_0^1 t^{\alpha} |f(t)|^2 dt}.$$

Приклад 1.4.6 [8, 14, 18]. Функція $f(t) = \sqrt{t\rho} J_{\nu}(t\rho)$ належить до $L^2((0;1); t^p dt)$, якщо $p > -2\nu - 2$ і, зокрема, якщо $p = -2\nu - 1$. Функція $f(t) = \sqrt{t\rho} J_{\nu}(t\rho)$ належить до $L^2(0;1)$, якщо $\nu > -1$, і $f(t) = t^{-p-1} \sqrt{t\rho} J_{\nu}(t\rho) \in L_{2p}^2$ для кожного $\nu \in (0; +\infty)$, $p \in \mathbb{R}$ і $\rho \in \mathbb{C}$.

Теорема 1.4.1 [8, 14, 18]. Якщо $\nu > -1$, то функція J_{ν} має нескінченну множину нулів $\{\rho_{k,\nu} : k \in \mathbb{Z}\} := \{\rho_k : k \in \mathbb{Z}\}$, всі нулі є дійсними і простими, за

винятком, можливо, $\rho_{0,\nu} = 0$. Множина нулів не має скінченних граничних точок, $\rho_{-k,\nu} := -\rho_{k,\nu}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, і

$$\frac{2}{J_{\nu+1}^2(\rho_k)} \int_0^1 x J_\nu^2(\rho_k x) dx = 1, \quad \int_0^1 x J_\nu(\rho_k x) J_\nu(\rho_m x) dx = 0, \quad \rho_k^2 \neq \rho_m^2,$$

де $\{\rho_k : k \in \mathbb{N}\}$ – множина додатних нулів функції J_ν . Крім того,

$$\rho_k = \pi \left(k + \frac{\nu}{2} \right) - \frac{\pi}{4} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow +\infty.$$

1.5. Апроксимаційні властивості систем функцій Бесселя

Відомо, що апроксимаційні властивості системи $\{x^{-\nu} J_\nu(\rho_k x) : k \in \mathbb{N}\}$ функцій Бесселя J_ν першого роду індексу $\nu > -1$ залежать від властивостей послідовності $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Класичні результати можна знайти [1, 2, 4, 5, 8, 12, 14, 18] і стосуються вони переважно випадку, коли $\rho_k, k \in \mathbb{N}$, – додатні нулі функції J_ν . В зв'язку з цим, цікавим видається випадок, в якому числа $\rho_k, k \in \mathbb{N}$, не обов'язково є нулями J_ν [6, 7, 15–17, 19]. Тут ми розглянемо деякі базисні властивості систем функцій Бесселя у невагових та вагових L^2 -просторах на відрізку дійсної осі.

Теорема 1.5.1 [3–5, 13, 18]. Нехай $\nu \geq -1/2$. Функція F подається у вигляді $F_\nu(z) = z^{-\nu} \int_0^1 \sqrt{t} J_\nu(zt) \gamma(t) dt$ з деякою функцією $\gamma \in L^2(0;1)$ тоді і тільки тоді, коли вона є парною цілою функцією експоненційного типу $\sigma \leq 1$ і $z^{\nu+1/2} F_\nu(z) \in L^2(0;+\infty)$.

Теорема 1.5.2 [3–5, 13, 18]. Нехай $\nu > -1$. Тоді кожна функція $f_\nu \in L^2(0;+\infty)$ подається у вигляді $f_\nu(z) = \int_0^{+\infty} \sqrt{zt} J_\nu(zt) h_f(t) dt$ з деякою функцією $h_f \in L^2(0;+\infty)$. При цьому, $\|f_\nu\|_{L^2(0;+\infty)} = \|h_f\|_{L^2(0;+\infty)}$ і $h_f(t) = \int_0^{+\infty} \sqrt{zt} J_\nu(zt) f_\nu(z) dz$.

Лема 1.5.1 [12, с. 226]. Нехай $\nu > -1$, $1 \leq s < +\infty$ і $-1 + s/2 < \beta < +\infty$. Тоді існує така стала $C > 0$, що $\int_0^N |J_\nu(x)|^s x^\beta dx \geq CN^{\beta+1-s/2}$, $N \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.5.3 [3–5, 13, 18]. Нехай $\nu > -1/2$. Тоді кожна функція $f_\nu \in L^2((0; +\infty); x^{2\nu+1})$ подається у вигляді

$$f_\nu(z) = \int_0^{+\infty} (zt)^{-\nu} J_\nu(zt) h_f(t) dt$$

з деякою функцією $h_f \in L^2((0; +\infty); x^{2\nu+1})$ і

$$h_f(t) = \int_0^{+\infty} (zt)^\nu J_\nu(zt) f_\nu(z) dz.$$

Теорема 1.5.4 [1–5, 12, 13, 18]. Якщо $\nu > -1$ і $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – послідовність додатних нулів функції J_ν , то система $\{\sqrt{x} J_\nu(\rho_k x) : k \in \mathbb{N}\}$ є ортогональним базисом в $L^2(0; 1)$.

Наслідок 1.5.1 [1–5, 12, 13, 18]. Нехай $\nu > -1$ і $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – послідовність додатних нулів функції J_ν . Тоді система $\{\sqrt{x} J_\nu(\rho_k x) : k \in \mathbb{N}\}$ є повною і мінімальною в $L^2(0; 1)$, а система $\{x^{-\nu} J_\nu(\rho_k x) : k \in \mathbb{N}\}$ є ортогональним базисом простору $L^2_{2\nu+1}$.

Наслідок 1.5.2 [3–5, 13, 18]. Якщо $\nu > -1$ і $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – послідовність додатних нулів функції J_ν , то система $\{\sqrt{x} J_\nu(\rho_k x) : k \in \mathbb{N}\}$ є повною в $L^2(0; 1)$, якщо $\rho_k J'_\nu(\rho_k) + \alpha J_\nu(\rho_k) = 0$, $\alpha + \nu > 0$.

Теорема 1.5.5 [2]. Якщо $\nu > -1/2$ і $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – послідовність різних додатних чисел таких, що $\rho_k \leq \pi(k + \nu/2)$ для всіх достатньо великих $k \in \mathbb{N}$, то система $\{\sqrt{x} J_\nu(\rho_k x) : k \in \mathbb{N}\}$ є повною в $L^2(0; 1)$.

Теорема 1.5.6 [15, 16]. Нехай $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – довільна послідовність різних відмінних від нуля комплексних чисел. Якщо $\nu \geq -1/2$, то система $\{\sqrt{\rho_k x} J_\nu(\rho_k x) : k \in \mathbb{N}\}$ є неповною в $L^2(0; 1)$ тоді і тільки тоді, коли послідовність $(\rho_k)_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, є підпослідовністю нулів деякої парної цілої функції G експоненційного типу $\sigma \leq 1$ такої, що $z^{\nu+1/2} G(z) \in L^2(\mathbb{R})$.

Теорема 1.5.7 [15, 16]. Нехай $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – довільна послідовність різних відмінних від нуля комплексних чисел таких, що $\rho_k^2 \neq \rho_m^2$, якщо $k \neq m$. Якщо

$\nu \geq -1/2$, то система $\{\sqrt{\rho_k x} J_\nu(\rho_k x) : k \in \mathbb{N}\}$ є повною і мінімальною в $L^2(0;1)$ тоді і тільки тоді, коли послідовність $(\rho_k)_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, є послідовністю нулів деякої парної цілої функції G експоненційного типу $\sigma \leq 1$ такої, що $z^{\nu+1/2} G(z) \notin L^2(0;+\infty)$ і $(z^2 - \rho_1^2)^{-1} z^{\nu+1/2} G(z) \in L^2(0;+\infty)$. При цьому, біортогональну систему $\{\gamma_k : k \in \mathbb{N}\}$ утворюють, зокрема, функції γ_k , визначені рівністю

$$\overline{\gamma_k(t)} = \frac{2}{\rho_k^{\nu-1/2} G'(\rho_k)} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{zt} J_\nu(zt) z^{\nu+1/2} G(z)}{z^2 - \rho_k^2} dz.$$

Теорема 1.5.8 [6, 7, 15]. Нехай $\nu \geq -1/2$ і $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – послідовність різних відмінних від нуля комплексних чисел таких, що $|\operatorname{Im} \rho_k| \geq \delta |\rho_k|$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і деякого $\delta > 0$. Для того щоб система $\{\sqrt{\rho_k x} J_\nu(\rho_k x) : k \in \mathbb{N}\}$ була повною в $L^2(0;1)$, необхідно і достатньо, щоб $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\rho_k|} = +\infty$.

Теорема 1.5.9 [6, 7, 16, 17]. Нехай $\nu \geq 1/2$ і $p \in \mathbb{R}$. Ціла функція Ω подається у вигляді

$$\Omega(z) = \int_0^1 z^{-\nu} \sqrt{t} J_\nu(zt) t^{p-1} h(t) dt, \quad h \in L_{2p}^2, \quad (1.5.1)$$

тоді і тільки тоді, коли вона є парною цілою функцією експоненційного типу $\sigma \leq 1$ і $z^{-\nu+1/2} (z^{2\nu} \Omega(z))' \in L^2(0;+\infty)$. При цьому,

$$h(t) = t^{-p} \int_0^{+\infty} \sqrt{zt} J_{\nu-1}(zt) z^{-\nu+1/2} (z^{2\nu} \Omega(z))' dz.$$

Нехай $\tilde{E}_{p,2}$ – клас цілих функцій Ω , які подаються у вигляді (1.5.1), а $E_{p,2}$ – клас парних цілих функцій Ω експоненційного типу $\sigma \leq 1$ таких, що $z^{-\nu+1/2} (z^{2\nu} \Omega(z))' \in L^2(0;+\infty)$. Маємо $\tilde{E}_{p,2} = E_{p,2}$, $p \in \mathbb{R}$.

Лема 1.5.2 [17]. Нехай $\nu \geq 1/2$, $p \in \mathbb{R}$ і ціла функція $\Omega \in E_{p,2}$ визначена формулою (1.5.1). Тоді $|\Omega(z)| \leq C_1 (1+|z|)^{-\nu} e^{|\operatorname{Im} z|}$, $C_1 > 0$, $z \in \mathbb{C}$.

Теорема 1.5.10 [16, 17]. Нехай $\nu \geq 1/2$, $p \in \mathbb{R}$ і $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – довільна послідовність відмінних від нуля комплексних чисел таких, що $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$, $k \neq n$.

Система $\{x^{-p-1}\sqrt{\rho_k x}J_\nu(\rho_k x): k \in \mathbb{N}\}$ є неповною в L^2_p тоді і тільки тоді, коли послідовність $(\rho_k)_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, є підпослідовністю нулів деякої ненульової функції $\Omega \in E_{p,2}$.

Теорема 1.5.11 [16, 17]. Нехай $\nu \geq 1/2$, $p \in \mathbb{R}$ і $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – довільна послідовність відмінних від нуля комплексних чисел таких, що $\rho_k^2 \neq \rho_m^2$, $k \neq m$. Якщо послідовність $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ є підпослідовністю нулів деякої парної цілої функції G , яка має в усіх точках ρ_k прості нулі і $(z^2 - \rho_1^2)^{-1}G(z) \in E_{p,2}$, то система $\{x^{-p-1}\sqrt{\rho_k x}J_\nu(\rho_k x): k \in \mathbb{N}\}$ має в L^2_p біортогональну систему $\{\gamma_k: k \in \mathbb{N}\}$ і її, зокрема, утворюють функції γ_k , визначені рівністю

$$\overline{\gamma_k(t)} = t^{-p} \int_0^{+\infty} \sqrt{zt} J_{\nu-1}(zt) z^{-\nu+\frac{1}{2}} (z^{2\nu} G_k(z))' dz,$$

де

$$G_k(z) := \frac{2G(z)}{\rho_k^{\nu-1/2} G'(\rho_k)(z^2 - \rho_k^2)}.$$

Теорема 1.5.12 [16, 17]. Нехай $\nu \geq 1/2$, $p \in \mathbb{R}$ і $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – довільна послідовність відмінних від нуля комплексних чисел таких, що $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$, $k \neq n$. Система $\{x^{-p-1}\sqrt{\rho_k x}J_\nu(\rho_k x): k \in \mathbb{N}\}$ є повною і мінімальною в L^2_p , тоді і тільки тоді, коли послідовність $(\rho_k: k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, є послідовністю нулів деякої парної цілої функції $G \notin E_{p,2}$ такої, що $(z^2 - \rho_1^2)^{-1}G(z) \in E_{p,2}$.

Теорема 1.5.13 [19]. Функція P подається у вигляді

$$P(z) = \int_0^1 z^2 \sqrt{zt} J_{5/2}(zt) t^4 h(t) dt, \quad h \in L^2_4,$$

тоді і тільки тоді, коли P – непарна ціла функція експоненційного типу $\sigma \leq 1$, $P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$, $(z^{-1}P'(z))\big|_{z=0} = 0$ і $z^{-1}(z^{-1}P'(z))' \in PW_{1,-}^2$. При цьому,

$$h(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{(z^{-1}P'(z))'}{zt^6} \sin(tz) dz.$$

Розділ 2. Основні результати

В цьому розділі досліджуються деякі апроксимаційні властивості системи $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$, $\Theta_{k,5/2}(x) := x^{-3} \sqrt{\rho_k x} J_{5/2}(\rho_k x)$, в просторі L_4^2 , де $J_{5/2}$ – функція Бесселя першого роду з індексом $5/2$ і $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ – послідовність відмінних від нуля комплексних чисел таких, що $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$, $k \neq n$. Знайдено також аналог теореми Пелі-Вінера, пов'язаний з цією системою.

Теорема 2.1. *Функція Ω подається у вигляді*

$$\Omega(z) = \int_0^1 z^{-3} \sqrt{zt} J_{5/2}(zt) h(t) dt, \quad h \in L_4^2, \quad (2.1)$$

тоді і тільки тоді, коли вона є парною цілою функцією експоненційного типу

$\sigma \leq 1$ *такою, що $(z^5 \Omega(z))|_{z=0} = 0$, $\left(z^{-1} (z^5 \Omega(z))' \right)|_{z=0} = 0$ і $z^{-1} \left(z^{-1} (z^5 \Omega(z))' \right)' \in PW_{1,-}^2$. При цьому,*

$$h(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\left(z^{-1} (z^5 \Omega(z))' \right)'}{z t^3} \sin(tz) dz.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай функція Ω подається у вигляді (2.1).

Оскільки [8, 14, 18]

$$z^2 \sqrt{tz} J_{5/2}(tz) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{3tz \cos(tz) - 3 \sin(tz) + t^2 z^2 \sin(tz)}{t^2},$$

то

$$z^{-3} \sqrt{zt} J_{5/2}(zt) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{3tz \cos(tz) - 3 \sin(tz) + t^2 z^2 \sin(tz)}{z^5 t^2},$$

і

$$\Omega(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \frac{3tz \cos(tz) - 3 \sin(tz) + t^2 z^2 \sin(tz)}{z^5 t} h(t) dt.$$

Використовуючи нерівність Шварца та відому формулу [10, с. 6 (6,7)] для знаходження типу цілої функції через її тейлорові коефіцієнти, безпосередньою перевіркою переконуємось, що Ω є парною цілою функцією експоненційного типу $\sigma \leq 1$. Далі,

$$z^5 \Omega(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \frac{3tz \cos(tz) - 3 \sin(tz) + t^2 z^2 \sin(tz)}{t} h(t) dt, \quad (z^5 \Omega(z)) \Big|_{z=0} = 0,$$

$$(z^5 \Omega(z))' = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (-tz \sin(tz) + t^2 z^2 \cos(tz)) h(t) dt, \quad (z^5 \Omega(z))' \Big|_{z=0} = 0,$$

$$\frac{(z^5 \Omega(z))'}{z} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (-t \sin(tz) + t^2 z \cos(tz)) h(t) dt, \quad z^{-1} (z^5 \Omega(z))' \Big|_{z=0} = 0,$$

$$\left(\frac{(z^5 \Omega(z))'}{z} \right)' = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 t^3 z \sin(tz) h(t) dt,$$

$$\frac{\left(\frac{(z^5 \Omega(z))'}{z} \right)'}{z} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 t^3 \sin(tz) h(t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 t \sin(tz) q(t) dt,$$

де $q(t) := t^2 h(t)$. Оскільки $h \in L^2_4$, то $q \in L^2(0;1)$ і, згідно з наслідком 1.2.1 з теореми Пелі-Вінера, маємо $z^{-1} \left(z^{-1} (z^5 \Omega(z))' \right)' \in PW_{1,-}^2$.

Достатність. Навпаки, за умов теореми, функція

$$q(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{z^{-1} \left(z^{-1} (z^5 \Omega(z))' \right)'}{t} \sin(tz) dz$$

належить простору $L^2(0;1)$ і

$$\frac{\left(\frac{(z^5 \Omega(z))'}{z} \right)'}{z} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 t \sin(tz) q(t) dt.$$

За теоремою Фубіні для інтегралів з параметром, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{(z^5 \Omega(z))'}{z} &= \frac{(z^5 \Omega(z))'}{z} - \frac{(z^5 \Omega(z))'}{z} \Big|_{z=0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 t q(t) dt \int_0^z w \sin(tw) dw = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (\sin(tz) - tz \cos(tz)) t^{-1} q(t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (\sin(tz) - tz \cos(tz)) h(t) dt, \end{aligned}$$

де $h(t) := t^{-2} q(t) \in L^2_4$. Далі,

$$(z^5\Omega(z))' = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (z \sin(tz) - tz^2 \cos(tz)) th(t) dt.$$

Застосовуючи знову теорему Фубіні, одержимо

$$\begin{aligned} z^5\Omega(z) &= z^5\Omega(z) - (z^5\Omega(z))\Big|_{z=0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 th(t) dt \int_0^z (w \sin(tw) - tw^2 \cos(tw)) dw = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \frac{3tz \cos(tz) - 3 \sin(tz) + t^2 z^2 \sin(tz)}{t^2} th(t) dt = \int_0^1 z^2 \sqrt{zt} J_{5/2}(zt) th(t) dt, \end{aligned}$$

тобто

$$\Omega(z) = \int_0^1 z^{-3} \sqrt{zt} J_{5/2}(zt) th(t) dt, \quad h \in L_2((0;1); x^4 dx).$$

Теорему 2.1 доведено.

Клас цілих функцій Ω , які подаються у вигляді (2.1), позначимо через $\tilde{E}_{5/2,+}$, а клас парних цілих функцій Ω експоненційного типу $\sigma \leq 1$ таких, що

$$(z^5\Omega(z))\Big|_{z=0} = 0, \quad \left(z^{-1} (z^5\Omega(z))' \right)\Big|_{z=0} = 0 \quad \text{і} \quad z^{-1} \left(z^{-1} (z^5\Omega(z))' \right)' \in PW_{1,-}^2 \quad - \quad \text{через} \quad E_{5/2,+}.$$

Зауважимо, що $\tilde{E}_{5/2,+} = E_{5/2,+}$ і клас $E_{5/2,+}$ співпадає з множиною цілих функцій Ω , які подаються у вигляді

$$\Omega(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \frac{3tz \cos(tz) - 3 \sin(tz) + t^2 z^2 \sin(tz)}{z^5 t^3} q(t) dt, \quad q \in L^2(0;1). \quad (2.2)$$

Теорема 2.2. *Нехай $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – довільна послідовність відмінних від нуля комплексних чисел таких, що $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$, $k \neq n$. Система $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$ не є повною в L_4^2 тоді і тільки тоді, коли послідовність $(\rho_k)_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, є підпослідовністю нулів деякої ненульової функції $\Omega \in E_{5/2,+}$.*

Доведення. Неповнота системи $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$ рівносильна неповноті системи $\{\rho_k^{-3} \Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$. Згідно з теоремою Гана-Банаха [10, с. 131], розглядувана система є неповною в просторі L_4^2 тоді і тільки тоді, коли існує така ненульова функція $h \in L_4^2$, що

$$\int_0^1 \rho_k^{-3} \sqrt{x \rho_k} J_{5/2}(x \rho_k) x h(x) dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому на основі теореми 2.1 приходимо до потрібного твердження.

Всюди надалі через C_1, C_2, \dots , позначатимемо деякі додатні сталі.

Теорема 2.3. Нехай $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – послідовність різних відмінних від нуля комплексних чисел таких, що $\rho_k^2 \neq \rho_n^2$, $k \neq n$, і послідовність $(\rho_k)_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, є послідовністю нулів деякої парної цілої функції $G \notin E_{5/2,+}$ експоненційного типу $\sigma \leq 1$, для якої

$$|G(z)| \geq \frac{C_1}{(1+|z|)^3} e^{|\operatorname{Im} z|}, \quad \arg z = \pi/4 + j\pi/2, \quad j \in \{0;1;2;3\}. \quad (2.3)$$

Тоді система $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$ є повною в просторі L_4^2 .

Доведення. Припустимо супротивне. Тоді згідно з теоремою 2.2 знайдеться така ненульова ціла функція $\Omega \in E_{5/2,+}$, для якої послідовність $(\rho_k)_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, є підпослідовністю нулів. Крім того, оскільки [12, 17]

$$|\sqrt{z} J_\nu(z)| \leq C_2 \left(\frac{|z|}{1+|z|} \right)^{\nu+1/2} e^{|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \nu > -1/2,$$

то згідно з нерівністю Шварца ($q(t) := t^2 h(t) \in L^2(0;1)$)

$$\begin{aligned} |\Omega(z)| &= \left| \int_0^1 z^{-3} \sqrt{tz} J_{5/2}(zt) t^{-1} q(t) dt \right| \leq \frac{\|q\|}{|z|^3} \left(\int_0^1 |\sqrt{tz} J_{5/2}(zt)|^2 t^{-2} dt \right)^{1/2} \leq \\ &\leq C_3 \left(\int_0^1 e^{2|\operatorname{Im} tz|} \frac{t^4}{(1+|tz|)^6} dt \right)^{1/2} \leq \frac{C_3 e^{|\operatorname{Im} z|}}{|z|^{5/2}} \left(\int_0^{|z|} \frac{u^4}{(1+u)^6} du \right)^{1/2} = \\ &= \frac{C_3 e^{|\operatorname{Im} z|}}{|z|^{5/2}} \left(\frac{|z|^5}{5(1+|z|)^5} \right)^{1/2} = \frac{C_4 e^{|\operatorname{Im} z|}}{(1+|z|)^{5/2}}, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Нехай $F(z) = \Omega(z)/G(z)$. Тоді F – парна ціла функція порядку $\tau \leq 1$, для якої

$$|F(z)| \leq \frac{C_4 (1+|z|)^{-5/2} e^{|\operatorname{Im} z|}}{C_1 (1+|z|)^{-3} e^{|\operatorname{Im} z|}} = C_5 \sqrt{1+|z|}, \quad \arg z = \pi/4 + j\pi/2, \quad j \in \{0;1;2;3\}.$$

Тому, згідно з принципом Фрагмена-Ліндельофа [10, с. 37], функція F є сталою. Отже, $\Omega(z) = C_6 G(z)$ і $\Omega \notin E_{5/2,+}$. Маємо суперечність і доведення теореми 2.3 є завершеним.

Теорема 2.4. Якщо $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – послідовність додатних нулів функції $J_{5/2}$, то система $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$ є повною й мінімальною в L_4^2 , але не є базисом цього простору. При цьому, біортогональну систему $\{g_k : k \in \mathbb{N}\}$ утворюють функції g_k , визначені формулою

$$\overline{g_k(t)} = \frac{2J_{5/2}(\rho_k t)}{\sqrt{t\rho_k} J_{7/2}^2(\rho_k)}. \quad (2.5)$$

Доведення. Функція $G(z) := z^{-5/2} J_{5/2}(z)$ є парною цілою функцією експоненційного типу $\sigma \leq 1$ і послідовність $(\rho_k)_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\rho_{-k} := \rho_k$, є послідовністю її нулів [17]. Покажемо, що функція G задовольняє умови теореми 2.3. Справді, оскільки [8, 12, 14, 17, 18]

$$J_{5/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{|z|^{3/2}}\right), \quad \arg z \in (-\pi; \pi), \quad z \rightarrow \infty,$$

то для функції $G(z)$ виконується (2.3). Крім цього, $G \notin E_{5/2,+}$, бо

$$G(z) = z^{-5/2} J_{5/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{z^2 \sin z + 3z \cos z - 3 \sin z}{z^4},$$

$$z^5 G(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} (z^3 \sin z + 3z^2 \cos z - 3z \sin z),$$

$$(z^5 G(z))' = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} (z^3 \sin z + 3z^2 \cos z - 3z \sin z)' =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} (z^3 \cos z + 3z \cos z - 3 \sin z),$$

$$z^{-1} (z^5 G(z))' = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} (z^2 \cos z + 3 \cos z - 3z^{-1} \sin z).$$

Тому система $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$ є повною в просторі L_4^2 . Крім цього, послідовність $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ є послідовністю нулів парної цілої функції $G(z) = z^{-5/2} J_{5/2}(z)$ експоненційного типу $\sigma \leq 1$ такої, що [17] $z^{-2} (z^5 G(z))' \notin L^2(0; +\infty)$ і $z^{-2} \left(z^5 \frac{G(z)}{z^2 - \rho_1^2} \right)' \in L^2(0; +\infty)$. Тому, за теоремою 1.5.11 система $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$ має в просторі L_4^2 біортогональну систему $\{g_k : k \in \mathbb{N}\}$ і її утворюють функції g_k , визначені рівністю

$$\overline{g_k(t)} = \int_0^{+\infty} t^{-2} \sqrt{zt} J_{3/2}(zt) z^{-2} (z^5 G_k(z))' dz,$$

де

$$G_k(z) = \frac{2G(z)}{\rho_k^2 G'(\rho_k)(z^2 - \rho_k^2)} = \frac{2J_{5/2}(z)}{z^{5/2} \rho_k^2 G'(\rho_k)(z^2 - \rho_k^2)}, \quad G'(\rho_k) = \frac{J'_{5/2}(\rho_k)}{\rho_k^{5/2}}.$$

Нехай $Y_{5/2}(z)$ і $H_{5/2}^{(1)}(z)$ – функції Бесселя другого і третього роду індексу $5/2$ відповідно [8, 14, 18]. Далі, оскільки [8, 14, 18]

$$\left(z^{-5/2} J_{5/2}(z) \right)' = -z^{-5/2} J_{7/2}(z),$$

$$\left((tz)^{-5/2} J_{5/2}(tz) \right)' \Big|_z = -(tz)^{-5/2} J_{7/2}(tz)t, \quad J_{5/2}(\rho_k) = 0,$$

$$J_{5/2}(z)Y'_{5/2}(z) - J'_{5/2}(z)Y_{5/2}(z) = \frac{2}{\pi z}, \quad H_{5/2}^{(1)}(z) = J_{5/2}(z) + iY_{5/2}(z),$$

$$-J'_{5/2}(\rho_k)Y_{5/2}(\rho_k) = \frac{2}{\pi \rho_k}, \quad H_{5/2}^{(1)}(\rho_k) = iY_{5/2}(\rho_k),$$

то використовуємо інтеграл Ганкеля [18, с. 429 (4)]

$$\int_0^{+\infty} J_{5/2}(z)J_{5/2}(tz) \frac{zdz}{z^2 - \rho^2} = \frac{\pi i}{2} J_{5/2}(t\rho)H_{5/2}^{(1)}(\rho), \quad \rho \in \mathbb{C}, \quad \text{Im } \rho > 0,$$

отримуємо

$$\begin{aligned} \overline{\gamma_k(t)} &= t^{-2} \int_0^{+\infty} \sqrt{zt} J_{3/2}(zt) z^{-2} \left(z^5 G_k(z) \right)' dz = t^{-2} \int_0^{+\infty} \sqrt{zt} J_{3/2}(zt) z^{-2} d \left(z^5 G_k(z) \right) = \\ &= t^{-2} \sqrt{zt} J_{3/2}(zt) z^{-2} z^5 G_k(z) \Big|_0^{+\infty} - t^{-2} \int_0^{+\infty} z^5 G_k(z) \left(\sqrt{zt} J_{3/2}(zt) z^{-2} \right)' dz = \\ &= -t^{-2} \int_0^{+\infty} z^5 G_k(z) \left(\frac{J_{3/2}(zt)}{(zt)^{3/2}} \right)' t^2 dz = -t^{-2} \int_0^{+\infty} z^5 G_k(z) \left(-\frac{tJ_{5/2}(zt)}{(zt)^{3/2}} \right) t^2 dz = \\ &= t^{-1/2} \int_0^{+\infty} z^{7/2} G_k(z) J_{5/2}(zt) dz = \frac{2\sqrt{\rho_k} t^{-1/2}}{J'_{5/2}(\rho_k)} \int_0^{+\infty} J_{5/2}(z) J_{5/2}(tz) \frac{zdz}{z^2 - \rho_k^2} = \\ &= \frac{\sqrt{\rho_k} t^{-1/2}}{J'_{5/2}(\rho_k)} \pi i J_{5/2}(t\rho_k) H_{5/2}^{(1)}(\rho_k) = -\frac{\pi \sqrt{\rho_k} t^{-1/2}}{J'_{5/2}(\rho_k)} J_{5/2}(t\rho_k) Y_{5/2}(\rho_k) = \\ &= -\frac{\pi \sqrt{\rho_k} t^{-1/2}}{(J'_{5/2}(\rho_k))^2} J_{5/2}(t\rho_k) Y_{5/2}(\rho_k) J'_{5/2}(\rho_k) = \frac{2}{\sqrt{t\rho_k} J_{7/2}(\rho_k)} J_{5/2}(\rho_k t). \end{aligned}$$

Тому система $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$ є також мінімальною в L_4^2 і має біортогональну систему $\{g_k : k \in \mathbb{N}\}$, яку утворюють функції g_k , визначені формулою (2.5).

Далі, оскільки $\rho_k \sim \pi k$, $k \rightarrow +\infty$, і

$$\begin{aligned}
\|\Theta_{k,5/2}\|^2 \|\gamma_k\|^2 &= \frac{4}{J_{7/2}^4(\rho_k)} \int_0^1 t^{-1} |J_{5/2}(t\rho_k)|^2 dt \int_0^1 t^3 |J_{5/2}(t\rho_k)|^2 dt = \\
&= \frac{4}{\rho_k^4 J_{7/2}^4(\rho_k)} \int_0^{\rho_k} u^{-1} |J_{5/2}(u)|^2 du \int_0^{\rho_k} u^3 |J_{5/2}(u)|^2 du = \\
&= \frac{1}{6J_{7/2}^2(\rho_k)} (1 + o(1)) \left(\int_0^{+\infty} u^{-1} |J_{5/2}(u)|^2 du + o(1) \right) \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow +\infty,
\end{aligned}$$

то система $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$ не є рівномірно мінімальною в L_4^2 , а тому не є базисом цього простору. Теорему 2.4 доведено.

Зауважимо, що біортогональну систему $\{g_k : k \in \mathbb{N}\}$ іншим методом побудовано в [17].

Теорема 2.5. *Нехай $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – послідовність різних відмінних від нуля комплексних чисел таких, що $\rho_k^2 \neq \rho_m^2$, $k \neq m$, і послідовність $(\rho_k)_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, є послідовністю нулів деякої парної цілої функції G експоненційного типу $\sigma \leq 1$, для якої*

$$|G(z)| \geq \frac{C_7}{(1+|z|)^\alpha} e^{|\operatorname{Im} z|}, \quad \arg z = \pi/4 + j\pi/2, \quad (2.6)$$

де $\alpha < 5/2$ і $j \in \{0; 1; 2; 3\}$. Тоді система $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$ є повною в просторі L_4^2 .

Доведення. Припустимо супротивне. Тоді згідно з теоремою 2.2 знайдеться така ненульова ціла функція $\Omega \in E_{5/2,+}$, для якої послідовність $(\rho_k)_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, є підпослідовністю нулів. Нехай $F(z) = \Omega(z)/G(z)$. Тоді F – парна ціла функція порядку $\tau \leq 1$, для якої з (2.4) і (2.6), отримуємо

$$|F(z)| \leq \frac{C_8}{(1+|z|)^{-\alpha+5/2}}, \quad \arg z = \pi/4 + j\pi/2, \quad j \in \{0; 1; 2; 3\}.$$

Тому, згідно з принципом Фрагмена-Ліндельофа [10, с. 37], функція $F(z) \equiv 0$. Отже, $\Omega(z) \equiv 0$. Маємо суперечність. Теорему 2.5 доведено.

Теорема 2.6. *Нехай $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – послідовність різних відмінних від нуля комплексних чисел таких, що $\rho_k^2 \neq \rho_m^2$, $k \neq m$, і послідовність $(\rho_k)_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$,*

$\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, є послідовністю нулів деякої парної цілої функції $D \notin E_{5/2,+}$ експоненційного типу $\sigma \leq 1$, для якої за деяких $\alpha < 2$ і $h \in \mathbb{R}$ виконується

$$|D(x+ih)| \geq \delta / |x|^\alpha, \quad |x| > 1, \quad \delta > 0. \quad (2.7)$$

Тоді система $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$ є повною в L_4^2 .

Доведення. Нехай $D \notin E_{5/2,+}$ і виконується (2.7). Припустимо супротивне, що система $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$ є неповною в L_4^2 . Тоді за теоремою 2.2 знайдеться така ненульова ціла функція $\Omega \in E_{5/2,+}$, для якої послідовність $(\rho_k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, є підпослідовністю нулів. Але $(\rho_k)_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ є послідовністю нулів цілої функції $D(z) \notin E_{5/2,+}$. Тому $T(z) = \Omega(z) / D(z)$ – парна ціла функція порядку $\tau \leq 1$. Позаяк $\Omega \in E_{5/2,+}$, то використовуючи (2.4) і (2.7), отримуємо

$$|T(x+ih)| \leq \frac{C_9 e^{h|x|} \left(1 + \sqrt{x^2 + h^2}\right)^{-5/2}}{\delta |x|^{-\alpha}} \leq C_{10} (1+|x|)^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Звідси випливає, що $T(z)$ – поліном степеня $\alpha < 2$. Але, оскільки, функція T є парною цілою функцією, то $T(z) = C_{11}$. Отже, $D(z) = C_{12} \Omega(z) \in E_{5/2,+}$. Маємо суперечність. Теорему 2.6 доведено.

Теорема 2.7. Нехай $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – послідовність різних відмінних від нуля комплексних чисел таких, що $|\operatorname{Im} \rho_k| \geq \delta |\rho_k|$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і деякого $\delta > 0$. Якщо система $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$ є повною в L_4^2 , то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\rho_k|} = +\infty. \quad (2.8)$$

Доведення. Припустимо протилежне, що система $\{\Theta_{k,5/2} : k \in \mathbb{N}\}$ не є повною в L_4^2 . Тоді за теоремою 2.2 знайдеться така ненульова ціла функція $\Omega \in E_{5/2,+}$, для якої послідовність $(\rho_k)_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, є підпослідовністю нулів. Враховуючи (2.4), маємо

$$|\Omega(x)| \leq C_4 (1+|x|)^{-5/2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{і} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ |\Omega(x)|}{1+x^2} dx < +\infty.$$

Тому $\Omega(z) \in C$. Отже, за теоремою 1.2.2 виконується

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\rho_k|} < +\infty,$$

бо

$$\left| \operatorname{Im} \frac{1}{\rho_k} \right| = \left| \frac{-\operatorname{Im} \rho_k}{|\rho_k|^2} \right| = \frac{|\operatorname{Im} \rho_k|}{|\rho_k|^2} \geq \frac{\delta |\rho_k|}{|\rho_k|^2} = \frac{\delta}{|\rho_k|}, \quad \delta > 0.$$

Але це суперечить умові (2.8). Теорему 2.7 доведено.

Висновки

Магістерська робота присвячена дослідженню апроксимаційних властивостей системи $\{x^{-3}\sqrt{\rho_k x}J_{5/2}(\rho_k x):k \in \mathbb{N}\}$, породженої функцією Бесселя $J_{5/2}$ першого роду індексу $5/2$ у ваговому просторі L^2_4 в залежності від властивостей послідовності $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ різних відмінних від нуля комплексних чисел. Знайдено також аналог теореми Пелі-Вінера, пов'язаний з цією системою (теорема 2.1).

Встановлено деякі необхідні та достатні умови повноти такої системи функцій Бесселя в термінах послідовностей нулів функцій з деякого класу цілих функцій експоненційного типу (теореми 2.2–2.7).

Доведено, що розглядувана система не є базисом простору L^2_4 , якщо $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ є послідовністю додатних нулів функції $J_{5/2}$ (теорема 2.4).

Результати магістерської роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані у подальших дослідженнях питань повноти, мінімальності й базисності систем функцій Бесселя першого роду.

Основні результати роботи є новими і доповнюють відповідні Б. Винницького і Р. Хаця. При їх отриманні використовувались сучасні методи теорії функцій.

Список використаних джерел

1. Abreu L.D. Completeness, special functions and uncertainty principles over q -linear grids. *J. Phys. A: Math. Gen.* 2006. V. 39, № 47. P. 14567–14580.
2. Boas R.P., Pollard H. Complete sets of Bessel and Legendre functions. *Ann. of Math.* 1947. V. 48, № 2. P. 366–384.
3. Griffith J.L. Hankel transforms of functions zero outside a finite interval. *J. Proc. Roy. Soc. New South Wales.* 1955. V. 89. P. 109–115.
4. Higgins J.R. Completeness and basis properties of sets of special functions. London-New York-Melbourne, Cambridge University Press, Cambridge, 1977. 134 p.
5. Hochstadt H. The mean convergence of Fourier-Bessel series. *SIAM Rev.* 1967. V. 9. P. 211–218.
6. Khats' R.V. On conditions of the completeness of some systems of Bessel functions in the space $L^2((0;1); x^{2p} dx)$. *Azerbaijan J. Math.* 2021. V. 11, №1. P. 3–10.
7. Khats' R.V. Completeness conditions of systems of Bessel functions in weighted L^2 -spaces in terms of entire functions. *Turk. J. Math.* 2021. V. 45, №2. P. 890–895.
8. Korenev B.G. Bessel functions and their applications. Taylor Francis, Inc., London-New York, 2002. 276 p.
9. Krein S.G. Functional analysis. Noordhoff, Groningen, 1972. 379 p.
10. Levin B.Ya. Lectures on entire functions. Transl. Math. Monogr. V. 150. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1996. 248 p.
11. Sedletskii A.M. Analytic Fourier transforms and exponential approximations. I. *J. Math. Sci.* 2005. V. 129, № 6. P. 4251–4408.
12. Stempak K. On convergence and divergence of Fourier-Bessel series. *Electron. Trans. Numer. Anal.* 2002. V. 14. P. 223–235.
13. Titchmarsh E.C. The theory of functions, 2nd edition. Oxford University Press, 1976. 464 p.

14. Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. New York: Marcel Dekker, Inc., 1971. 427 p.
15. Vynnyts'kyi B.V., Khats' R.V. Completeness and minimality of systems of Bessel functions. *Ufa Math. J.* 2013. V. 5, № 2. P. 131–141.
16. Vynnyts'kyi B.V., Khats' R.V. A remark on basis property of systems of Bessel and Mittag-Leffler type functions. *J. Contemp. Math. Anal.* 2015. V. 50. № 6. P. 300–305.
17. Vynnyts'kyi B.V., Khats' R.V. On the completeness and minimality of sets of Bessel functions in weighted L^2 -spaces. *Eurasian Math. J.* 2015. V. 6, № 1. P. 123–131.
18. Watson G.N. A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge University Press, Cambridge, 1944. 804 p.
19. Хаць Р.В., Староста А.Я. Властивості одного інтегрального перетворення типу Ганкеля. *Актуальні проблеми сучасної науки: матеріали XI міжнародної науково-практичної конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій.* Дрогобич, 2024. С. 230–231.
20. Хаць Р.В., Гавдяк Б.Л. Апроксимаційні властивості одної системи функцій Бесселя у ваговому просторі. *Актуальні проблеми сучасної науки: матеріали XII міжнародної науково-практичної конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій.* Дрогобич, 2025. С. 152.