

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

завідувач кафедри математики та економіки,

кандидат пед. наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК

«__» _____ 2025 р.

ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО
РІВНЯННЯ ЗГОРТКИ

Спеціальність 111 «Математика»

Магістерська робота
на здобуття кваліфікації – магістр математики.

Автор роботи: Герій Сергій Тарасович _____

підпис

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук,
доцент Матурін Юрій Петрович _____

підпис

Дрогобич, 2025

Анотація

Герій С.Т. *Властивості розв'язків одного рівняння згортки.* –
Рукопис. – 32 с.

В роботі вивчається одне рівняння типу згортки. Знайдено необхідні та достатні умови для того, щоб функція з деякого класу була розв'язком цього рівняння. Розглянуто приклади і досліджено певні класи функцій.

Annotation

Heriy S.T. *Properties of solutions of one convolution equation.* – Manuscript.
– 32 p.

In the work, we study one convolution type equation. Necessary and sufficient conditions were found for a function from some class to be a solution of this equation. Examples are considered and certain classes of functions are investigated.

Зміст

Анотація.....	3
Вступ.....	5
Розділ 1. Огляд літератури та допоміжні твердження.....	10
1.1. Перетворення Фур'є.....	10
1.2. Голоморфні функції.....	12
1.3. Простори Гарді.....	14
1.4. Згортка функцій. Рівняння згортки.....	16
Розділ 2. Основні результати.....	21
Висновки.....	30
Список використаних джерел.....	31

Вступ

Актуальність теми. Рівняння згортки на півосі

$$\int_{-\infty}^0 f(t)g(t-\tau)dt = 0, \quad \tau \leq 0, \quad g \in L_2(-\infty; 0),$$

і деякі його аналоги, є одним з важливих рівнянь, яке має численні застосування [1-26]. Його дослідженню присвячені праці А. Берлінга [5, 6], Ю. Домара [9], Б. Німана [21], П. Лакса [16, 17], Б. Левіна [19], А. Боричева і Х. Хеденмальма [7] та інших. Нехай $1 \leq p < +\infty$ і $H_p(\mathbb{C}_+)$ – простір Гарді у правій півплощині, тобто простір голоморфних у правій півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ функцій f , для яких [8, 10, 13, 15, 19, 22]

$$\|f\|^p := \sup \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dy : x \in (0; +\infty) \right\} < +\infty.$$

Кожна функція $f \in H_p(\mathbb{C}_+)$ має [13, 15] майже скрізь на уявній осі $i\mathbb{R}$ кутові граничні значення $f_0(t) = f(it)$, $f(it) \in L_p(\mathbb{R})$. Функція $G \in H_2(\mathbb{C}_+)$ називається [15, 19, 22] зовнішньою для простору $H_2(\mathbb{C}_+)$, якщо вона подається у вигляді

$$G(z) = e^{i\alpha} \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(tz+i)}{(1+t^2)(t+iz)} \ln |G_0(it)| dt \right\},$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$ і $G_0 \in L_2(i\mathbb{R})$ така функція, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |G_0(it)||}{1+t^2} dt < +\infty.$$

Незростаюча на $(-\infty; +\infty)$ функція h , похідна якої дорівнює нулю майже скрізь, називається сингулярною (інтегральною) граничною функцією функції f , якщо вона визначається рівністю [1-4, 8, 15, 19, 22, 24, 25]

$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{t_1}^{t_2} \ln |f(x+iy)| dy - \int_{t_1}^{t_2} \ln |f(iy)| dy, \quad t_1 < t_2,$$

з точністю до адитивної сталої і значень в точках неперервності, де $f(iy)$ – кутові граничні значення функції f на уявній осі.

Добре відомими є наступні твердження [5, 6, 16, 17, 20].

Теорема Б-Л.1 (Берлінга-Лакса). Нехай $g \in L_2(-\infty; 0)$ і $g(t) = 0$, якщо $t \in (0; +\infty)$. Для того щоб рівняння

$$\int_{-\infty}^0 f(t)g(t-\tau)dt = 0, \quad \tau \leq 0.$$

мало ненульовий розв'язок $f \in L_2(-\infty; 0)$, необхідно і достатньо, щоб функція

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 g(t)e^{tz} dt$$

не була зовнішньою в $H_2(\mathbb{C}_+)$.

Теорема Б-Л.2 (Берлінга-Лакса). Нехай $g \in L_2(-\infty; 0)$ і $g(t) = 0$, якщо $t \in (0; +\infty)$. Для того щоб функція $f \in L_2(-\infty; 0)$ була розв'язком рівняння

$$\int_{-\infty}^0 f(t)g(t-\tau)dt = 0, \quad \tau \in (-\infty; 0),$$

необхідно і достатньо, щоб функція $Q(iy) = F(iy)G(iy)$ була кутовою граничною функцією на $i\mathbb{R}$ деякої функції $P \in H_1(\mathbb{C}_+)$, де

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(v)e^{-vz} dv, \quad G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 g(v)e^{vz} dv.$$

Актуальним є питання про знаходження аналогів теорем Б-Л.1 і Б-Л.2 для нових класів функцій. Знайти аналог теореми Б-Л.1 нам не вдалося. Ми знайшли деякий аналог теореми Б-Л.2. Замість умови $g(t) = 0$, $t \in (0; +\infty)$, ми вимагаємо, щоб функція $g(t)$ швидко спадала при $t \rightarrow +\infty$. З функцією g ми асоціюємо функцію

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{tz} dt, \quad (2.1)$$

і розглядаємо рівняння згортки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(u-\tau)du = 0, \quad \tau \leq 0, \quad g \in L_2(-\infty; +\infty). \quad (2.2)$$

Об'єктом дослідження є рівняння згортки.

Предметом дослідження є властивості розв'язків рівняння згортки.

Мета роботи – знайти необхідні та достатні умови для того, щоб функція з певного класу була розв'язком рівняння згортки (2.2), що передбачає вирішення наступних задач:

1. Знаходження асимптотичних оцінок деяких невластивих інтегралів.

2. Вивчення властивостей та інтегральних зображень спеціальних класів функцій.

3. Аналіз прикладів.

Основні результати роботи містяться в наступних твердженнях та прикладі.

Теорема 2.1. Нехай $g(t) = h(t)e^{-t}$ і $h \in L_2(-\infty; +\infty)$. Для того щоб функція $f \in L_2(-\infty; +\infty)$ була розв'язком рівняння (2.2), необхідно і достатньо, щоб функція $\hat{f}(y)G(iy)$ була кутовою граничною функцією деякої функції $P \in H_1(\mathbb{C}_+)$, де

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt} dt.$$

Приклад 2.1. Якщо

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty), \\ 1, & t \in (0; 1), \end{cases}$$

то функція

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in (1; 2), \\ 0, & t \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty), \end{cases}$$

є розв'язком рівняння (2.2), $\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iy} - e^{-2iy}}{iy}$, $G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^z - 1}{z} \right)$ і функція

$\hat{f}(y)G(iy) := \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-iy} - e^{-2iy}}{iy} \frac{e^{iy} - 1}{iy}$ є кутовою граничною функцією функції

$P(z) := \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1 - e^{-z}}{z} \right)^2$, яка належить до простору $H_1(\mathbb{C}_+)$.

Лема 2.2. Нехай голоморфна в півплощині \mathbb{C}_+ функція f подається у вигляді

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{tz} dt, \quad g(t) = h(t)e^{-\eta(t)}, \quad (2.3)$$

де $h \in L_2(\mathbb{R})$ і $\eta: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$ – деяка неспадна функція така, що

$$t = o(\eta(t)), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (2.4)$$

Тоді

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\gamma(x)} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy)|^2 dy < +\infty, \quad (2.5)$$

де $\gamma: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ така функція, що

$$\sup \left\{ e^{-2\eta(t)} \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma(x)+2tx} dx : t \in [0; +\infty) \right\} = c_1 < +\infty. \quad (2.6)$$

При цьому, функція G має майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення $G(iy)$, $G(x+iy) \in L_2(\mathbb{R})$ для кожного $x \in [0; +\infty)$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy) - G(iy)|^2 dy = 0, \quad (2.7)$$

$G = G_1 + G_2$, де $G_1 \in H_2(\mathbb{C}_+)$ і G_2 – ціла функція.

Наслідок 2.2. Нехай $\eta(t) = e^t$ і голоморфна в півплощині \mathbb{C}_+ функція G подається у вигляді (2.3) з $h \in L_2(\mathbb{R})$. Тоді

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x \ln x + 2x}}{\sqrt{1+x}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy)|^2 dy < +\infty. \quad (2.8)$$

Наслідок 2.3. Нехай $\eta: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$ – деяка неспадна функція така, що виконується (2.4) і існує неспадна функція $\gamma: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$, для якої

$$0 < c_2 \leq \inf \left\{ e^{-2\eta(t)} \int_0^{+\infty} e^{2tx-2\gamma(x)} dx : t \in [0; +\infty) \right\} \leq \sup \left\{ e^{-2\eta(t)} \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma(x)+2tx} dx : t \in [0; +\infty) \right\} = c_1 < +\infty.$$

Тоді голоморфна в півплощині \mathbb{C}_+ функція G подається у вигляді (2.3) з $g(t) = h(t)e^{-\eta(t)}$ і $h \in L_2(-\infty; +\infty)$ тоді й тільки тоді, коли вона задовольняє умову (2.8).

Наслідок 2.4. Функція G подається у вигляді (2.3) з $g(t) = h(t)e^{-e^t}$ і $h \in L_2(-\infty; +\infty)$ тоді й тільки тоді, коли вона є голоморфною в півплощині \mathbb{C}_+ і задовольняє умову

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x \ln x + 2x}}{\sqrt{1+x}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy)|^2 dy < +\infty. \quad (2.10)$$

Теорема 2.2. Нехай $g(t) = h(t)e^{-e^t}$, $h \in L_2(-\infty; +\infty)$ і функція G вигляду (2.3) має нуль λ , кратності m . Тоді функції $f(t) = t^k e^{\lambda t}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq m-1$, є розв'язками рівняння

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t-\tau)dt = 0, \quad \tau \leq 0.$$

Наукова новизна одержаних результатів. Усі отримані результати магістерської роботи є новими. У роботі встановлено нові необхідні й достатні умови для того, щоб функція з певного класу була розв'язком деякого рівняння згортки.

Практичне значення отриманих результатів. Результати магістерської роботи мають теоретичний характер. Вони можуть знайти застосування в комплексному аналізі, теорії диференціальних рівнянь, теорії керування, теорії розсіяння, квантовій механіці та інших галузях [7, 13-15, 17-23].

Апробація результатів магістерської роботи. Результати досліджень доповідались на XII-й міжнародній науково-практичній конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій [27].

Структура і обсяг роботи. Робота складається з анотації, вступу, двох розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел, який налічує 27 найменувань. В першому розділі зроблено огляд літератури за темою та наведено необхідні допоміжні твердження, а в другому розділі доведено основні результати роботи. Загальний обсяг роботи становить 32 сторінки.

Розділ 1. Огляд літератури та допоміжні твердження

1.1. Перетворення Фур'є. Згідно з теорією рядів Фур'є, за виконання відповідних умов функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ подається у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{i\pi kx/T} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i\pi kt/l} dt e^{i\pi kx/T}.$$

Перейшовши в останній рівності до границі при $l \rightarrow +\infty$ можна знайти умови, за яких справедливою є формула

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt \right) dy. \quad (1.1)$$

Ця формула називається інтегральною формулою Фур'є [10, 13, 15, 22, 26].

Нехай

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt. \quad (1.2)$$

Тоді формулу (1.1) можна переписати так

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy. \quad (1.3)$$

Оператор F , який функції f ставить у відповідність функцію \hat{f} за формулою (1.2) називається [10, 13, 15, 22, 26] оператором Фур'є, а функція

\hat{f} – перетворенням Фур'є або образом Фур'є функції f . Формулу (1.2)

можна переписати у вигляді $\hat{f} = F(f)$. Оператор F^{-1} , який функції \hat{f} ставить у

відповідність функцію f за формулою (1.3) називається оберненим

оператором Фур'є [10, 13, 15, 22, 26]. Формулу (1.2) можна переписати у

вигляді $f = F^{-1}(\hat{f})$, а формулу (1.1) у вигляді $f = F^{-1}(F(f))$. Обернене

перетворення Фур'є функції f будемо позначати через \check{f} . Зрозуміло, що

$$\check{f}(y) = \hat{f}(-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iyt} dt.$$

Функції [10, 13, 15, 22, 26]

$$f_c(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos(yt) dt \quad \text{і} \quad f_s(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin(yt) dt$$

називаються відповідно косинус-перетворенням та синус-перетворенням Фур'є функції f .

Приклад 1.1. Якщо

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \sigma, \\ 0, & |x| > \sigma, \end{cases}$$

то

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-iyt} dt = \frac{e^{iy\sigma} - e^{-iy\sigma}}{iy\sqrt{2\pi}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\sigma y)}{y}, & y \neq 0, \\ \sigma\sqrt{2/\pi}, & y = 0. \end{cases}$$

Приклад 1.2. Нехай $f(x) = \frac{1}{x^2 + \alpha^2}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тоді за теоремою про

лишки

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \alpha^2} e^{-iyt} dt = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha|y|}.$$

Приклад 1.3. Нехай $f(x) = e^{-\gamma x^2}$, $\gamma > 0$. Тоді за теоремою Коші

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma t^2} e^{-iyt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty - iy}^{+\infty + iy} e^{-\gamma \xi^2} e^{-iy\xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/4\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma \xi^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} e^{-y^2/4\gamma},$$

$$\begin{aligned} \left(\hat{f}\right)'(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma t^2} (-it) e^{-iyt} dt = \\ &= \frac{i}{2\gamma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt} d\left(e^{-\gamma t^2}\right) = -\frac{y}{2\gamma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma t^2} e^{-iyt} dt = \frac{y}{2\gamma} \hat{f}(y), \end{aligned}$$

оскільки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma \xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}.$$

Отже, $\hat{f}(y) = \lambda f(y)$, якщо $\lambda = \sqrt{\pi}$ і $f(x) = e^{-x^2/2}$.

Приклад 1.4. Для кожної функції $f \in L_1(\mathbb{R})$ і кожного $y_0 \in \mathbb{R}$ виконується

$\hat{f}(y - y_0) = e^{iy_0 t} \hat{f}(y)$. Справді,

$$\hat{f}(y - y_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(y-y_0)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iy_0 t} e^{-iyt} dt$$

Приклад 1.5. Для кожної функції $f \in L_1(\mathbb{R})$ і кожного $t_0 \in \mathbb{R}$ виконується $f(t-t_0) = e^{-it_0 y} \hat{f}$. Справді,

$$f(t-t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0) e^{-iyt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iy(u+t_0)} du = e^{-iyt_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iyu} du.$$

Приклад 1.6.

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \cos(yt) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} e^{iyt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-iy)/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2/2} d\tau = e^{-y^2/2}.$$

Для функцій f і g з певних класів справедливі рівності Парсеваля [9, 12, 19, 22, 26]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g(y) \overline{\widehat{f(y)}}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \overline{f(t)} dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g(y) f(y)} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \widehat{f(t)} dt,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \widehat{f(t)} dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \widehat{g(t)} dt.$$

Ці рівності правильні, зокрема, для функцій $f \in L_2(-\infty; +\infty)$ та $g \in L_2(-\infty; +\infty)$. Якщо $f = g$, то з останньої рівності випливає також класична рівність Парсеваля [9, 12, 19, 22, 26]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f(t)}|^2 dt.$$

1.2. Голоморфні функції. Однозначна функція $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ називається голоморфною в точці z , якщо вона має похідну в деякому околі цієї точки. Функція $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ є голоморфною в точці z тоді і тільки тоді, коли функції $u = \operatorname{Re} f$ та $v = \operatorname{Im} f \in \mathbb{R}^2$ -диференційовними функціями в деякому ε -околі точки z і в цьому околі виконуються умови Коші-Рімана [11, 13, 19, 22]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Функція $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ називається голоморфною в деякій області D , якщо вона в цій області однозначна, неперервна і в кожній її точці голоморфна. Отже, функція f є голоморфною в області D тоді і тільки тоді, коли вона має неперервну похідну f' в кожній точці цієї області. Функція f , яка є

голоморфною в \mathbb{C} , називається цілою [11, 19, 22]. Точка a називається нулем функції f , якщо $f(a)=0$. Нехай функція $f:D\rightarrow\mathbb{C}$ є голоморфною в області D . Точку $a\in D$ функції $f:D\rightarrow\mathbb{C}$ називають нулем кратності $m\in\mathbb{N}$, якщо

$$f(a)=f'(a)=\dots=f^{(m-1)}(a)=0, f^{(m)}(a)\neq 0.$$

Нуль $a\in D$ називається нулем нескінченного порядку, якщо

$$(\forall n\in\mathbb{Z}_+): f^{(n)}(a)=0.$$

Якщо $m=1$, то маємо простий нуль функції f . В курсі комплексного аналізу доводиться, що всі нулі функції $f\neq 0$, голоморфної в області D , мають скінченну кратність. Добре відомими є наступні твердження.

Теорема 1.2.1 (єдиності). *Якщо множина нулів голоморфної в області D функції f має граничну точку, яка належить D , то $f(z)\equiv 0, z\in D$.*

Наслідок 1.2.1. *Якщо функції f і g є голоморфними в області D і $f(z)=g(z)$ для всіх z з деякої множини, яка має граничну точку в області D , то $f(z)=g(z)$ для всіх $z\in D$.*

Наслідок 1.2.2. *Якщо функція $f\neq 0$ є голоморфною в області D , то на кожному компактi з D вона має скінченну кількість нулів або зовсім їх не має.*

Теорема 1.2.2 [10, 11, 13, 15, 22]. *Нехай функція f є голоморфною в області D . Тоді наступні умови є еквівалентними: 1) в точці $a\in D\setminus\{\infty\}$ функція f має нуль порядку $m\in\mathbb{N}$; 2) функція f подається у вигляді $f(z)=(z-a)^m g(z)$, де g – голоморфна функція в точці a , причому $g(a)\neq 0$; 3) розвинення функції f в ряд Тейлора в околі точки a має вигляд*

$$f(z)=\sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^k.$$

Теорема 1.2.3 [10, 11, 13, 15, 19, 22]. *Нехай функція $f:D\rightarrow\mathbb{C}$ є голоморфною в області $D\subset\mathbb{C}$. Тоді наступні умови є еквівалентними: 4) в деякій точці $a\in D$ функція f має нуль нескінченного порядку; 5) $f(z)\equiv 0, z\in D$.*

Теорема 1.2.4 [10, 11, 13, 15, 19, 22]. Нехай функція f є голоморфною в області D і $\infty \subset D$. Тоді наступні умови є еквівалентними: б) в точці ∞ функція f має нуль порядку m ; 7) f подається у вигляді $f(z) = z^{-m}g(z)$, де g – голоморфна ∞ і $g(\infty) \neq 0$; 8) розвинення функції f в ряд Тейлора в околі ∞ має вигляд $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-m} b_k z^k$.

Приклад 1.2.1. Нехай $f(z) = |z|^2 z$. Тоді $u = x^3 + y^2 x$ і $v = y^3 + x^2 y$. Тому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3y^2 + x^2.$$

Бачимо, що умови Коші-Рімана виконуються тільки в точці $z=0$ і розглядувана функція має похідну тільки в цій точці, причому $f'(0) = 0$.

Приклад 1.2.2. Функції e^z , $\cos z$, $\sin z$ та z^2 є цілими. Поліном також є цілою функцією. Раціональна функція $R = P/Q$, де P і Q – нескоротні поліноми, є голоморфною в усіх точках $z \in \mathbb{C}$, за винятком тих точок z , для яких $Q(z) = 0$. Функції $f(z) = \sqrt{z}$ та $f(z) = \operatorname{Ln} z$ не є голоморфними і, тим більше, цілими, оскільки не є однозначними.

Приклад 1.2.3. Число $a=1$ є простим нулем функції $f(z) = -z^8 + z^7 + 5z^4 - 5z^3$, бо $f(1) = 0$ і $f'(1) \neq 0$.

Приклад 1.2.4. Функція $f(z) = z^9(z-2)^5 \sin z$ має нуль десятого порядку в точці $a_0 = 0$, нуль п'ятого порядку в точці $\tilde{a}_0 = 2$ та прості нулі в точках $a_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

1.3. Простори Гарді. Нехай $1 \leq p < +\infty$ і $H_p(\mathbb{C}_+)$ – клас функцій, голоморфних у правій півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z: \operatorname{Re} z > 0\}$, для яких [1, 8, 10, 13, 15, 19, 20, 22, 26]

$$\|f\|^p := \sup \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dy : x \in (0; +\infty) \right\} < +\infty. \quad (1.3.1)$$

Кожна функція $f \in H_p(\mathbb{C}_+)$ має майже скрізь на уявній осі кутові граничні значення $f_0(t) = f(it)$, $f \in L_p(i\mathbb{R})$. Окрім цього, функція $f \in H_p(\mathbb{C}_+)$ подається у вигляді [13, с. 81-82; 10 с. 25; 24, 25]

$$f(z) = e^{ia_0 + a_1 z} \prod_{|\lambda_n| \leq 1} \frac{z - \lambda_n}{z + \lambda_n} \prod_{|\lambda_n| > 1} \frac{1 - z / \lambda_n}{1 + z / \lambda_n} \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(tz+i)}{(1+t^2)(t+iz)} \ln |f_0(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(tz+i)}{(1+t^2)(t+iz)} dh(t) \right\}, \quad (1.3.2)$$

де $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – послідовність різних комплексних чисел з \mathbb{C}_+ , a_0 і a_1 – дійсні сталі, $a_1 \leq 0$, h – незростаюча на $(-\infty; +\infty)$ функція, похідна якої дорівнює нулеві майже скрізь і при цьому виконуються умови:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} < +\infty, \quad (1.3.3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |f_0(t)||}{1+t^2} dt < +\infty, \quad (1.3.4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} |dh(t)| < +\infty. \quad (1.3.5)$$

Функція h називається сингулярною (інтегральною) граничною функцією функції f . Вона може бути визначена рівністю [1-4, 15, 19, 22, 25]

$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{t_1}^{t_2} \ln |f(x+iy)| dy - \int_{t_1}^{t_2} \ln |f(iy)| dy$$

з точністю до сталого доданка та її значень в точках неперервності. Навпаки, якщо послідовність (λ_n) різних комплексних чисел з \mathbb{C}_+ є незростаючою на $(-\infty; +\infty)$, функція h , похідна якої дорівнює нулеві майже скрізь і функція $f_0(t) = f(it)$ є такими, що виконуються умови (1.3.3)-(1.3.5) і $f \in L_p(i\mathbb{R})$, то [13, с. 81-82; 10, с. 25] функція (1.3.2) є голоморфною в півплощині \mathbb{C}_+ і належить простору $H_p(\mathbb{C}_+)$. Простір $H_p(\mathbb{C}_+)$ можна також визначити як множину голоморфних у півплощині \mathbb{C}_+ функцій f , для яких [8, 19, 22]

$$\|f\|_*^p := \sup \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr : \varphi \in (-\pi/2; \pi/2) \right\} < +\infty. \quad (1.3.6)$$

При цьому, норма $\|f\|_*$ є еквівалентною [19, 22] нормі $\|f\|$, тобто знайдеться така стала $c \in (0; +\infty)$, що $\|f\|/c \leq \|f\|_* \leq c\|f\|$ для всіх $f \in H_p(\mathbb{C}_+)$.

Приклад 1.3.1. Функція $G(z) = \frac{z-1}{(z+1)^2}$ належить до простору $H_2(\mathbb{C}_+)$, бо

$$|G(z)| = \left| \frac{z-1}{(z+1)^2} \right| = \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \frac{1}{|z+1|} \leq \frac{1}{|z+1|} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)^2 + y^2}} \leq \frac{1}{|1+x|}, \quad z = x+iy,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy)|^2 dy \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2 + y^2} dy = \frac{1}{1+x} \operatorname{arctg} \frac{y}{1+x} = \frac{\pi}{1+x} \leq \pi, \quad x \geq 0.$$

Теорема 1.3.1 (Пелі-Вінера) [19, 22, 26]. Функція f належить до простору $H_2(\mathbb{C}_+)$ тоді й тільки тоді, коли вона подається у вигляді

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 g(t) e^{tz} dt, \quad g \in L_2(-\infty; 0).$$

При цьому,

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x+iy) e^{-t(x+iy)} dy,$$

останній інтеграл від $x \geq 0$ не залежить,

$$g(t) e^{tx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x+iy) e^{-ity} dy,$$

$$\int_{-\infty}^0 |g(t) e^{tx}|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy)|^2 dy, \quad x \geq 0$$

і $\|g\| = \|G\|$.

Теорема 1.3.2 (Пелі-Вінера) [19, 22, 26]. Нехай $p \in (1; 2]$. Функція $f_0 \in L_p(i\mathbb{R})$ є кутовою граничною функцією деякої функції $f \in H_p(\mathbb{C}_+)$ тоді й тільки тоді, коли вона подається у вигляді

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(it) e^{it\tau} dt = 0$$

для майже всіх $\tau \in (0; +\infty)$.

Загальнішим є клас функцій функцій G , голоморфних у півплощині \mathbb{C}_+ , які подаються у вигляді

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-\eta(t)} e^{tz} dt, \quad h \in L_2(-\infty; +\infty), \quad (1.3.7)$$

де η – деяка функція. Питання про опис послідовностей нулів класу функцій вигляду (1.3.7) вивчалось в [19, 22, 24, 25].

1.4. Згортка функцій. Рівняння згортки. Згорткою двох функцій $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ і $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ називається така функція $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, яка визначається рівністю [11, 15, 19, 22, 26]

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt .$$

При цьому,

$$\begin{aligned} f * g(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt \right) e^{-iyx} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)e^{-iyx} dx \right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-iy(u+\tau)} du \right) dt = \sqrt{2\pi} \hat{f}(y) \hat{g}(y) , \end{aligned}$$

тобто $f * g = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{g}$, $F(f * g) = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{g}$ і $\sqrt{2\pi} F^{-1}(\hat{f} \hat{g}) = f * g$, де F – оператор Фур'є функції f і

$$\check{f}(y) = \hat{f}(-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iyt} dt .$$

Приклад 1.4.1. Нехай $f(x) = x$ і

$$g(x) = \begin{cases} 2, & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Тоді

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = 2 \int_{-2}^2 (x-t)dt = 8x .$$

Приклад 1.4.2. Нехай $f(x) = x$ і

$$g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Тоді

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-1}^1 (x-t)dt = 2x .$$

Розглянемо рівняння згортки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u+\tau)g(u)du = 0, \quad \tau \in (-\infty; 0), \quad (1.4.1)$$

яке можна записати також у вигляді $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(u-\tau)du = 0$. Рівняння згортки

(1.4.1) та деякі його аналоги детально вивчались в роботах А. Берлінга [5, 6], Ю. Домара [9], Б. Німана [21], П. Лакса [16, 17], Б. Левіна [19], А. Боричева і Х. Хеденмальма [7] та інших математиків [1-4, 8].

З рівностей Парсеваля випливає наступне твердження.

Лема 1.4.1. [13, 15, 22, 26]. *Якщо $f \in L_2(-\infty; +\infty)$ і $g \in L_2(-\infty; +\infty)$, то*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(u-\tau)du = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) \check{g}(t) e^{it\tau} dt.$$

Теорема 1.4.1 [13, 15, 22, 26]. *Нехай $g \in L_2(-\infty; +\infty)$. Функція $f \in L_2(-\infty; +\infty)$ є розв'язком рівняння (1.4.1) тоді й тільки тоді, коли*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) \check{g}(t) e^{it\tau} dt = 0, \quad \tau \in (-\infty; 0).$$

Справді, на підставі теореми про згортку, отримуємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u+\tau)g(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) \check{g}(t) e^{it\tau} dt.$$

Наслідок 1.4.1 [13, 15, 22, 26]. *Нехай $g \in L_2(-\infty; +\infty)$. Функція $f \in L_2(-\infty; +\infty)$ є розв'язком рівняння (1.4.1) тоді й тільки тоді, коли функція $\hat{f}(t) \check{g}(t)$ є кутовою граничною функцією деякої функції $P \in H_1(\mathbb{C}_+)$.*

Розглянемо рівняння згортки на півпрямій

$$\int_{-\infty}^0 f(t+\tau)g(t)dt = 0, \quad g \in L_2(-\infty; 0), \quad f \in L_2(-\infty; 0), \quad \tau \leq 0. \quad (1.4.2)$$

Вважаючи, що $g(t)=0$ і $f(t)=0$, якщо $t \in (0; +\infty)$, останнє рівняння можна переписати у вигляді

$$\int_{-\infty}^0 f(t)g(t-\tau)dt = 0, \quad \tau \leq 0. \quad (1.4.3)$$

Добре відомими є наступні твердження [5, 6, 16, 17, 19, 22, 26].

Теорема 1.4.2 (Берлінга-Лакса). *Нехай $g \in L_2(-\infty; 0)$ і $g(t)=0$, якщо $t \in (0; +\infty)$. Для того щоб рівняння (1.4.2) мало ненульовий розв'язок $f \in L_2(-\infty; 0)$, необхідно й достатньо, щоб функція*

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 g(t) e^{tz} dt$$

не була зовнішньою для простору Гарді $H_2(\mathbb{C}_+)$.

Теорема 1.4.3 (Берлінга-Лакса). *Нехай $g \in L_2(-\infty; 0)$ і $g(t)=0$, якщо $t \in (0; +\infty)$. Для того щоб функція $f \in L_2(-\infty; 0)$ була розв'язком рівняння (1.4.2)*

необхідно й достатньо, щоб функція $Q(iy) = F(iy)G(iy)$ була кутковою граничною функцією для деякої функції $P \in H_1(\mathbb{C}_+)$, де

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(v)e^{-vz} dv, \quad G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 g(v)e^{vz} dv.$$

Функція $G \in H_2(\mathbb{C}_+)$ називається зовнішньою в просторі $H_2(\mathbb{C}_+)$, якщо вона подається у вигляді [8, 15, 19, 22]

$$G(z) = e^{ia_0 + a_1 z} \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(tz + i)}{(1+t^2)(t+iz)} \ln |G_0(it)| dt \right\}$$

і задовольняє умову

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |G(x)|}{x} = 0,$$

де a_0, a_1 – дійсні сталі, і $G_0 \in L_2(i\mathbb{R})$ така функція, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |G_0(it)||}{1+t^2} dt < +\infty.$$

Приклад 1.4.2. Функція $G(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$ є зовнішньою функцією для простору $H_2(\mathbb{C}_+)$.

Приклад 1.4.3. Якщо

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-2; -1], \\ 1, & t \in [-2; -1], \end{cases}$$

то функція

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1; +\infty), \\ 0, & t \in (-\infty; -1), \end{cases}$$

є розв'язком рівняння (1.4.3), бо

$$\int_{-\infty}^0 f(t)g(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)g(t-\tau)dt + \int_{-1}^0 f(t)g(t-\tau)dt = \int_{-1}^0 f(t)g(t-\tau)dt = 0,$$

і $t-\tau \geq -1$, якщо $t \in [-1; +\infty)$ і $\tau \in (-\infty; 0)$. При цьому,

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(v)e^{-vz} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^0 e^{-vz} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-vz}}{-z} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^z - 1}{z},$$

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 g(v)e^{vz} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^{-1} e^{vz} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{vz}}{z} \Big|_{-2}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-z} - e^{-2z}}{z},$$

$$F(iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{iy} - 1}{iy}, \quad G(iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iy} - e^{-2iy}}{iy},$$

$$Q(iy) = F(iy)G(iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{iy} - 1}{iy} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iy} - e^{-2iy}}{iy} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - e^{-iy}}{iy} \frac{1 - e^{-iy}}{iy}$$

і функція

$$Q(iy) = F(iy)G(iy) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - e^{-iy}}{iy} \frac{1 - e^{-iy}}{iy}$$

є кутовою граничною функцією функції

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^z - 1}{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-z} - e^{-2z}}{z} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - e^{-z}}{z} \frac{1 - e^{-z}}{z} = \frac{1}{2\pi} \frac{(1 - e^{-z})^2}{z^2}.$$

Ця функція належить простору $H^1(\mathbb{C}_+)$. Справді,

$$\frac{1 - e^{-z}}{z} = \frac{1 - 1 + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^4}{4!} + \dots}{z} = \frac{z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^4}{4!} + \dots}{z} = 1 - \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} - \frac{z^2}{4!} + \dots,$$

Тому

$$\left| \frac{1 - e^{-z}}{z} \right| \leq \frac{1 + \frac{|z|}{2!} + \frac{|z|^2}{3!} + \frac{|z|^2}{4!} + \dots}{|z|} \leq 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = e, \quad |z| \leq 1,$$

$$\frac{|1 - e^{-z}|^2}{|z|^2} \leq e = e \frac{|z+1|^2}{|z+1|^2} \leq e \frac{(|z|+1)^2}{|z+1|^2} \leq e \frac{4}{|z+1|^2} = e \frac{4}{x^2 + 2x + 1 + y^2} \leq e \frac{4}{1 + y^2} \leq \frac{12}{1 + y^2}, \quad |z| \leq 1.$$

Якщо ж $|z| \geq 1$, то

$$\begin{aligned} \frac{|1 - e^{-z}|^2}{|z|^2} &\leq \frac{(1 + |e^{-z}|)^2}{|z|^2} = \frac{(1 + e^{-x})^2}{|z|^2} \leq \frac{2^2}{|z|^2} \\ &= 4 \frac{|z+1|^2}{|z|^2} \frac{1}{|z+1|^2} = \frac{4}{|z+1|^2} \left| 1 + \frac{1}{z} \right|^2 \leq \frac{4}{|z+1|^2} \left(1 + \frac{1}{|z|} \right)^2 \leq \frac{4}{|z+1|^2} (2)^2 = \frac{16}{|z+1|^2} \leq \frac{16}{1 + y^2}. \end{aligned}$$

і

$$|P(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{16}{1 + y^2}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Отже,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |P(x + iy)| dy \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{16}{1 + y^2} dy = \frac{8}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + y^2} dy = \frac{8}{\pi} \operatorname{arctg} y \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 8.$$

Розділ 2. Основні результати

Нашою метою є знаходження деяких аналогів теорем Берлінга-Лакса 1.4.2 і 1.4.3. Аналог теореми 1.4.2 нам знайти не вдалось. Проте, в цьому розділі буде знайдено деякі аналоги теореми 1.4.3. Замість умови $g(t)=0$, $t \in (0; +\infty)$, ми вимагаємо, щоб функція $g(t)$ швидко спадала при $t \rightarrow +\infty$. З функцією g будемо асоціювати функцію

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{tz} dt, \quad g \in L_2(-\infty; +\infty). \quad (2.1)$$

Розглянемо рівняння згортки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(u-\tau)du = 0, \quad \tau \in (-\infty; 0), \quad (2.2)$$

де $f \in L_2(-\infty; +\infty)$ і $g \in L_2(-\infty; +\infty)$.

Основні результати містяться в наступних твердженнях.

Теорема 2.1. *Нехай $g(t) = h(t)e^{-t}$, $h \in L_2(-\infty; +\infty)$. Для того щоб функція $f \in L_2(-\infty; +\infty)$ була розв'язком рівняння (2.2), необхідно і достатньо, щоб функція $\hat{f}(y)G(iy)$ була кутовою граничною функцією деякої функції $P \in H_1(\mathbb{C}_+)$, де*

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt} dt.$$

Для доведення теореми 2.1 нам будуть потрібні наступні допоміжні твердження.

Лема 2.1. *Нехай $g \in L_2(-\infty; +\infty)$ і $f \in L_2(-\infty; +\infty)$. Тоді*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(u-\tau)du = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)G(iy)e^{iy\tau} dy,$$

де

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt} dt, \quad \check{g}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{ity} dt.$$

Доведення. Згідно з теоремою про згортку [13, 15, 19, 22, 26]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(u-\tau)du = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)\check{g}(y)e^{iy\tau} dy.$$

Тому розглядуване рівняння рівносильне рівнянню

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) \check{g}(y) e^{iy\tau} dy = 0, \quad \tau \leq 0.$$

Оскільки $\hat{f}(y) \check{g}(y) \in L_1(-\infty; +\infty)$, то за теоремою Пелі-Вінера 1.3.2 остання умова рівносильна існуванню такої функції $P \in H_1(\mathbb{C}_+)$, для якої функція $\hat{f}(y) \check{g}(y)$ є її кутовою граничною функцією. З іншого боку, функція (2.1) є голоморфною в півплощині \mathbb{C}_+ , має майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення $G(iy) = \check{g}(y)$, що впливає з наступних лем.

Спершу розглянемо приклад, а далі доведемо відповідні леми.

Приклад 2.1. Якщо

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty), \\ 1, & t \in (0; 1), \end{cases}$$

то функція

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in (1; 2), \\ 0, & t \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty), \end{cases}$$

є розв'язком рівняння (2.2), $\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iy} - e^{-2iy}}{iy}$, $G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^z - 1}{z} \right)$ і функція

$\hat{f}(y)G(iy) := \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-iy} - e^{-2iy}}{iy} \frac{e^{iy} - 1}{iy}$ є кутовою граничною функцією функції

$P(z) := \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1 - e^{-z}}{z} \right)^2$, яка належить простору $H_1(\mathbb{C}_+)$.

Справді,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(u-\tau)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u+\tau)g(u)du = 0,$$

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)e^{-iyv} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^2 e^{-iyv} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iyv}}{-iy} \Big|_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-2iy} - e^{-iy}}{-iy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iy} - e^{-2iy}}{iy},$$

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{tz} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{tz} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{tz}}{z} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^z - 1}{z} \right),$$

$$\hat{f}(y)G(iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iy} - e^{-2iy}}{iy} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{iy} - 1}{iy} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-iy} - e^{-2iy}}{iy} \frac{e^{iy} - 1}{iy}.$$

Розглянемо функцію

$$P(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-z} - e^{-2z}}{z} \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - e^{-z}}{z} \frac{1 - e^{-z}}{z} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1 - e^{-z}}{z} \right)^2.$$

Ця функція є голоморфною в \mathbb{C}_+ і належить до $H_1(\mathbb{C}_+)$, бо

$$\frac{1 - e^{-z}}{z} = \frac{1 - 1 + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^4}{4!} + \dots}{z} = \frac{z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^4}{4!} + \dots}{z} = 1 - \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} - \frac{z^3}{4!} + \dots,$$

$$\left| \frac{1 - e^{-z}}{z} \right| = \left| 1 - \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} - \frac{z^3}{4!} + \dots \right| \leq 1 + \frac{|z|}{2!} + \frac{|z|^2}{3!} + \frac{|z|^3}{4!} + \dots \leq 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \leq e, \quad |z| \leq 1,$$

і

$$\frac{|1 - e^{-z}|^2}{|z|^2} \leq e^2 = e^2 \frac{|z+1|^2}{|z+1|^2} \leq e^2 \frac{(|z|+1)^2}{|z+1|^2} \leq e^2 \frac{4}{|z+1|^2} = e^2 \frac{4}{x^2 + 2x + 1 + y^2} \leq e^2 \frac{4}{1 + y^2} \leq \frac{30}{1 + y^2}, \quad |z| \leq 1.$$

Якщо $|z| \geq 1$, то

$$\frac{|1 - e^{-z}|^2}{|z|^2} \leq \frac{(1 + |e^{-z}|)^2}{|z|^2} = \frac{(1 + e^{-x})^2}{|z|^2} \leq \frac{2^2}{|z|^2} =$$

$$= 4 \frac{|z+1|^2}{|z|^2} \frac{1}{|z+1|^2} = \frac{4}{|z+1|^2} \left| 1 + \frac{1}{z} \right|^2 \leq \frac{4}{|z+1|^2} \left(1 + \frac{1}{|z|} \right)^2 \leq \frac{4}{|z+1|^2} 2^2 = \frac{16}{|z+1|^2} \leq \frac{30}{1 + y^2}.$$

Отже,

$$|P(z)| \leq \frac{15}{\pi} \frac{1}{1 + y^2}, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

і

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |P(x + iy)| dy \leq \frac{15}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + y^2} dy = \frac{15}{\pi} \operatorname{arctg} y \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 15.$$

Таким чином, функція $\hat{f}(y)G(iy)$ є кутовою граничною функцією функції $P(z)$ і ця функція належить простору $H_1(\mathbb{C}_+)$.

Лема 2.2. Нехай голоморфна в півплощині \mathbb{C}_+ функція f подається у вигляді

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{tz} dt, \quad g(t) = h(t) e^{-\eta(t)}, \quad (2.3)$$

де $h \in L_2(\mathbb{R})$ і $\eta: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$ – деяка неспадна функція така, що

$$t = o(\eta(t)), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (2.4)$$

Тоді

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\gamma(x)} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy)|^2 dy < +\infty, \quad (2.5)$$

де $\gamma: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ така функція, що

$$\sup \left\{ e^{-2\eta(t)} \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma(x)+2tx} dx : t \in [0; +\infty) \right\} = c_1 < +\infty. \quad (2.6)$$

При цьому, функція G має майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення $G(iy)$, $G(x+iy) \in L_2(\mathbb{R})$ для кожного $x \in [0; +\infty)$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy) - G(iy)|^2 dy = 0, \quad (2.7)$$

$G = G_1 + G_2$, де $G_1 \in H_2(\mathbb{C}_+)$ і G_2 – ціла функція.

Доведення. Справді, згідно з теоремою Пелі-Вінера 1.3.1, функція

$$G_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 h(t) e^{-\eta(t)} e^{tz} dt$$

належить до $H_2(\mathbb{C}_+)$, а з умови (2.4) випливає, що функція

$$G_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h(t) e^{-\eta(t)} e^{tz} dt$$

є цілою. Тому G має майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення. Далі, $h(t)e^{-\eta(t)}e^{tx} \in L_2(\mathbb{R})$ для кожного $x \in [0; +\infty)$ і

$$G(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{tx} e^{ity} dy.$$

Отже, $G(x+iy) \in L_2(\mathbb{R})$ для кожного $x \in [0; +\infty)$ і

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy)|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 e^{2tx} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 e^{-2\eta(t)} e^{2tx} dt, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Тому

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\gamma(x)} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy)|^2 dy = \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma(x)} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 e^{-2\eta(t)} e^{2tx} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt e^{-2\eta(t)} \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma(x)+2tx} dx < +\infty.$$

До того ж, за теоремою Лебега, виконується

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy) - G(iy)|^2 dy = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 |e^{tx} - 1|^2 dt = 0.$$

Лема 2.3 [11; 12, с. 102]. Нехай $S: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ – опукла функція така, що $S \in C^{(2)}[0; +\infty)$, $S'(t) \rightarrow +\infty$, $t^2 S''(t) \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow +\infty$, і існує неперервна, зростаюча і

необмежена функція $\mu: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ така, що $S''(\xi) \sim S''(t)$, $t \rightarrow +\infty$ і $|t - \xi| \leq \mu(t) |S''(t)|^{-1/2}$. Тоді

$$\int_0^{+\infty} e^{tx - S(t)} dt \sim e^{\tilde{S}(x)} \sqrt{\frac{2\pi}{S''(t_0(x))}}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

де $\tilde{S}(x) = \sup\{tx - S(t) : t \in [0; +\infty)\}$ і $t_0 = t_0(x)$ — точка така, що $t_0 x - S(t_0) = \tilde{S}(x)$.

Лема 2.4. $\int_0^{+\infty} e^{2tx - 2t \ln t + 2t} dt \sim e^{2e^x} e^{x/2} \sqrt{\pi}$, $x \rightarrow +\infty$.

Доведення. Нехай $S(t) = 2t \ln t - 2t$. Тоді

$$\tilde{S}(x) = \sup\{tx - S(t) : t \in [0; +\infty)\} = 2e^{x/2}, \quad t_0 = e^{x/2} \quad \text{і} \quad S''(t) = 2/t.$$

Тому на основі леми 2.3

$$\int_0^{+\infty} e^{tx - 2t \ln t + 2t} dt \sim e^{2e^{x/2}} e^{x/4} \sqrt{\pi}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

і ми приходимо до потрібного твердження.

Лема 2.5. $c_1 e^{2e^x} \leq \int_0^{+\infty} e^{2tx - 2t \ln t - 2t - \frac{1}{2} \ln(1+t)} dt \leq c_2 e^{2e^x}$, $x \in (0; +\infty)$, де c_1 і c_2 — додатні

сталі.

Доведення. Нехай $\theta(t) = 2\left(t + \frac{1}{4}\right) \ln\left(t + \frac{1}{4}\right) - 2t \ln t - \frac{1}{2} \ln(1+t)$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{2tx - 2t \ln t - 2t - \frac{1}{2} \ln(1+t)} dt &= e^{-x/2} \int_0^{+\infty} e^{2(t+1/4)x - 2t \ln t - 2t - \frac{1}{2} \ln(1+t)} dt = \\ &= e^{-x/2} \int_0^{+\infty} e^{2(t+1/4)x - 2(t+1/4) \ln(t+1/4) - 2t + \theta(t)} dt = e^{-x/2} \int_0^{+\infty} e^{2(t+1/4)x - 2(t+1/4) \ln(t+1/4) - 2t} e^{\theta(t)} dt. \end{aligned}$$

Тому функція $\theta(t)$ є обмеженою на проміжку $(0; +\infty)$, бо

$$\begin{aligned} \theta(t) &= 2\left(t + \frac{1}{4}\right) \ln\left(t + \frac{1}{4}\right) - 2t \ln t - \frac{1}{2} \ln(1+t) = \\ &= 2t \ln\left(1 + \frac{1}{4t}\right) + \frac{1}{2} \ln t + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{4t}\right) - \frac{1}{2} \ln(1+t) = 2t \ln\left(1 + \frac{1}{4t}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(t + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} \ln(1+t) = \\ &= 2t \ln\left(1 + \frac{1}{4t}\right) + \frac{1}{2} \ln \frac{t + \frac{1}{4}}{1+t}. \end{aligned}$$

Отож, для деякої сталої $c_1 > 0$, отримуємо

$$\frac{1}{c_1} \int_0^{+\infty} e^{2(t+1/4)x-2(t+1/4)\ln(t+1/4)-2t} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{2(t+1/4)x-2(t+1/4)\ln(t+1/4)-2t} e^{\theta(t)} dt \leq c_1 \int_0^{+\infty} e^{2(t+1/4)x-2(t+1/4)\ln(t+1/4)-2t} dt.$$

До того ж, згідно з лемою 2.4

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{2(t+1/4)x-2(t+1/4)\ln(t+1/4)-2t} dt &= \int_{1/4}^{+\infty} e^{2\tau x-2\tau\ln\tau-2(\tau-1/4)} d\tau = e^{1/2} \int_{1/4}^{+\infty} e^{2\tau x-2\tau\ln\tau-2\tau} d\tau = \\ &= e^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} e^{2\tau x-2\tau\ln\tau-2\tau} d\tau - \int_0^{1/4} e^{2\tau x-2\tau\ln\tau-2\tau} d\tau \right) = e^{1/2} \left((1+o(1))e^{2e^x} e^{x/2} \sqrt{\pi} - \int_0^{1/4} e^{2\tau x-2\tau\ln\tau-2\tau} d\tau \right) = \\ &= e^{1/2} \left((1+o(1))e^{2e^x} e^{x/2} \sqrt{\pi} + O(e^{x/2}) \right) = e^{1/2} (1+o(1))e^{2e^x} e^{x/2}, \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Тому ми приходимо до потрібного твердження.

Наслідок 2.1. Нехай $\eta(t) = e^t$ і $\gamma(t) = t \ln t + t + \frac{1}{4} \ln(1+t)$. Тоді

$$0 < c_2 \leq \inf \left\{ e^{-2\eta(t)} \int_0^{+\infty} e^{2tx-2\gamma(x)} dx : t \in [0; +\infty) \right\} \leq \sup \left\{ e^{-2\eta(t)} \int_0^{+\infty} e^{2tx-2\gamma(x)} dx : t \in [0; +\infty) \right\} = c_1 < +\infty.$$

Наслідок 2.2. Нехай $\eta(t) = e^t$ і голоморфна в півплощині \mathbb{C}_+ функція G подається у вигляді (2.3) з $h \in L_2(\mathbb{R})$. Тоді

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x \ln x + 2x}}{\sqrt{1+x}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy)|^2 dy < +\infty. \quad (2.8)$$

Доведення. Цей наслідок випливає з леми 2.2, оскільки функція $\eta(t) = e^t$ згідно з лемами 2.3-2.5, задовольняє умови цієї леми.

Лема 2.6 [13, 15, 19, 22]. Нехай функція G є голоморфною в смугі $D_{0,b} = \{z: 0 < \operatorname{Re} z < b\}$ і для деякого $d > -1$

$$\int_0^b x^d \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy)|^2 dy < +\infty.$$

Тоді: 1) $G(z) \rightarrow 0$, якщо $D_{a_1, b_1} \ni z \rightarrow \infty$ і $0 < a_1 < b_1 < b$; 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy)|^2 dy < +\infty$ для

кожного $x \in (0; b)$.

Лема 2.7. Нехай $\eta: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$ – деяка неспадна функція, для якої існує неспадна функція $\gamma: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ така, що

$$\inf \left\{ e^{-2\eta(t)} \int_0^{+\infty} e^{2tx-2\gamma(x)} dx : t \in [0; +\infty) \right\} \geq c_2 > 0, \quad (2.9)$$

і голоморфна в півплощині \mathbb{C}_+ функція G задовольняє умову (2.8). Тоді G подається у вигляді (2.3), де $g \in L_2(\mathbb{R})$.

Доведення. Оскільки

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\gamma(x)} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy)|^2 dy < +\infty,$$

то

$$\int_0^{b_1} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy)|^2 dy < c_3 \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma(x)} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy)|^2 dy < +\infty.$$

Згідно з попередньою лемою, для кожного $t \in (-\infty; +\infty)$ інтеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x+iy) e^{-tx} e^{-iy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} G(z) e^{-tz} dz$$

від $x \in (0; +\infty)$ не залежить. Нехай

$$\tilde{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x+iy) e^{-tx} e^{-iy} dy, \quad g(t) = \tilde{g}(t) e^{\eta(t)}.$$

Тоді

$$\tilde{g}(t) e^{tx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x+iy) e^{-iy} dy.$$

Оскільки для кожного $x \in (0; +\infty)$ і кожного $t \in (-\infty; +\infty)$ функція $G(x+iy)$ належить простору $L_2(\mathbb{R})$, то за теоремою Планшереля [15, 19, 22, 26]

$$\begin{aligned} G(x+iy) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(t) e^{tx} e^{ity} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-\eta(t)} e^{tx} e^{ity} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-\eta(t)} e^{tz} dt, \quad z = x+iy \in \mathbb{C}_+. \end{aligned}$$

При цьому,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{g}(t)|^2 e^{2tx} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy)|^2 dy, \quad \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{g}(t)|^2 e^{2tx-\gamma(x)} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\gamma(x)} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy)|^2 dy.$$

Тому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{g}(t)|^2 e^{2\eta(t)} dt \leq \frac{1}{c_2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{g}(t)|^2 \int_0^{+\infty} e^{2tx-\gamma(x)} dx = \frac{1}{c_2} \int_0^{+\infty} e^{-\gamma(x)} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy)|^2 dy \leq \frac{c_1}{c_2} < +\infty.$$

Наслідок 2.3. Нехай $\eta: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$ – деяка неспадна функція така, що виконується (2.4) і існує неспадна функція $\gamma: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$, для якої

$$0 < c_2 \leq \inf \left\{ e^{-2\eta(t)} \int_0^{+\infty} e^{2tx-2\gamma(x)} dx : t \in [0; +\infty) \right\} \leq \sup \left\{ e^{-2\eta(t)} \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma(x)+2tx} dx : t \in [0; +\infty) \right\} = c_1 < +\infty.$$

Тоді голоморфна в півплощині \mathbb{C}_+ функція G подається у вигляді (2.3) з $g(t) = h(t)e^{-\eta(t)}$ і $h \in L_2(-\infty; +\infty)$ тоді й тільки тоді, коли вона задовольняє умову (2.8).

Наслідок 2.4. Функція G подається у вигляді (2.3) з $g(t) = h(t)e^{-e^t}$ і $h \in L_2(-\infty; +\infty)$ тоді й тільки тоді, коли вона є голоморфною в півплощині \mathbb{C}_+ і задовольняє умову

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x \ln x + 2x}}{\sqrt{1+x}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy)|^2 dy < +\infty. \quad (2.10)$$

Наслідок 2.5. Функція G подається у вигляді (2.3) з $g(t) = h(t)e^{-e^t}$ і $h \in L_2(-\infty; +\infty)$ тоді й тільки тоді, коли вона є голоморфною в півплощині \mathbb{C}_+ і задовольняє умову

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |G(re^{i\varphi})|^2 d\varphi \frac{e^{-2r \cos \varphi \ln r \cos \varphi + 2r \cos \varphi}}{\sqrt{1+r \cos \varphi}} r dr < +\infty. \quad (2.11)$$

Теорема 2.1 впливає з лем 2.1, 2.2 та наслідків 2.2-2.4.

Теорема 2.2. Нехай $g(t) = h(t)e^{-e^t}$, $h \in L_2(-\infty; +\infty)$ і функція G вигляду (2.3) має нуль λ , кратності m . Тоді функції $f(t) = t^k e^{\lambda t}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq m-1$, є розв'язками рівняння

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t-\tau)dt = 0, \quad \tau \leq 0.$$

Доведення. Маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda t} g(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda(u+\tau)} g(u)du = e^{\lambda\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda u} g(u)du = e^{\lambda\tau} G(\lambda) = 0$$

Тому функція $f(t) = e^{\lambda t}$ є розв'язком рівняння. Оскільки $G'(\lambda) = 0, \dots, G^{(m-1)}(\lambda) = 0$ і

$$G'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)te^{tz} dt, \quad G''(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)t^2 e^{tz} dt, \dots, \quad G^{(m-1)}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)t^{m-1} e^{tz} dt,$$

то послідовно отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda t} t g(t-\tau) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda(u+\tau)} (u+\tau) g(u) du = e^{\lambda\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda u} g(u) du + e^{\lambda\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda u} u g(u) du = \\ &= e^{\lambda\tau} G(\lambda) + e^{\lambda\tau} G'(\lambda) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda t} t^2 g(t-\tau) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda(u+\tau)} (\tau+u)^2 g(u) du = e^{\lambda\tau} \tau^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda u} g(u) du + 2e^{\lambda\tau} \tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda u} u g(u) du + \\ &+ e^{\lambda\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda u} u^2 g(u) du = e^{\lambda\tau} \tau^2 G(\lambda) + 2e^{\lambda\tau} \tau G'(\lambda) + e^{\lambda\tau} G''(\lambda) = 0, \end{aligned}$$

.....

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda t} t^{m-1} g(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda(u+\tau)} (\tau+u)^{m-1} g(u) du = 0.$$

Висновки

Магістерська робота присвячена дослідженню властивостей розв'язків одного рівняння типу згортки. В роботі знайдено нові необхідні й достатні умови для того, щоб функція з певного класу була розв'язком деякого рівняння згортки. Розглянуто приклади, а також зроблено оцінку деяких невластивих інтегралів. Досліджено асимптотичні властивості та інтегральні зображення спеціальних класів функцій. Основні результати роботи містяться в теоремах 2.1 і 2.2, наслідках 2.2-2.4 та прикладі 2.1.

Результати магістерської роботи мають теоретичний характер. Вони можуть знайти застосування в комплексному аналізі, теорії диференціальних рівнянь, теорії керування, теорії розсіювання, квантовій механіці та інших галузях [7, 13-15, 17-23].

Список використаних джерел

1. Винницький Б.В. Рівняння згортки і кутові граничні значення аналітичних функцій. *Доп. НАН України*. 1995. № 10. С. 13-17.
2. Винницький Б.В. Про розв'язки однорідного рівняння згортки в одному класі функцій, аналітичних в півсмузі. *Мат. студії*. 1997. Т. 7, № 1. С. 41-52.
3. Винницький Б.В., Дільний В.М. Про необхідні умови існування розв'язків одного рівняння типу згортки. *Мат. студії*. 2001. Т. 16, № 1. С. 61-70.
4. Дільний В.М. Про існування розв'язків одного рівняння типу згортки. *Доп. НАН України*. 2008. № 11. С. 7-10.
5. Beurling A. On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. *Acta math.* 1949. V. 81, № 1. P. 239-255.
6. Beurling A.A. A critical topology in harmonic analysis of semigroups. *Acta Math.* 1964. V. 112, №3-4. P. 215-228.
7. Borichev A., Hedenmalm H. Completeness of translates in weighted spaces on the half-line. *Acta math.* 1995. V. 174. P. 1-84.
8. Dil'nyi V.M. On the equivalence of some conditions for weighted Hardy spaces. *Ukr. Math. J.* 2006. V. 58, № 9. P. 1425-1432.
9. Domar Y. On the analytic transform of bounded linear functionals on certain Banach algebras. *Studia Math.* 1975. V. 53. P. 203-224.
10. Duren P. Theory of H^p spaces. New York, Academic Press, 1970. 251 p.
11. Evgrafov M.A. Asymptotic estimates and entire functions. New York: Dover Publications, 1979. 192 p.
12. Fedoryuk M.V. Asymptotic methods in analysis. Berlin: Springer, 1989. 191 p.
13. Garnett J.B. Bounded analytic functions. Springer, 2007. 477 p.
14. Heitokangas J., Korhonen R., Rattya J. Linear differential equations with coefficients in weighted Bergman and Hardy spaces. *Trans. of the AMS*. 2008. V. 260, № 2. P. 1035-1055.

15. Koosis P. Introduction to H^p spaces, Second edition. Cambridge Tracts in Mathematics. V. 115. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 368 p.
16. Lax P.D. Translation invariant spaces. *Acta Math.* 1969. V. 112, №3-4. P. 163-178.
17. Lax P., Phillips R. Scattering theory. New-York-London: Academic Press, 1976. 276 p.
18. Lerer L., Olshevsky V., Spitkovski I. Convolution equations and singular integral operators. Springer, 2010. 240 p.
19. Levin B.Ya. Lectures on entire functions. Transl. Math. Monogr. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 150, 1996. 248 p.
20. Nikol'skii N.K. Treatise on the shift operator: spectral function theory. Springer Science & Business Media, 2012. 491 p.
21. Nyman B. On the one-dimensional translation semi-group in certain functions spaces. Thesis, Uppsala, 1950. 53 p.
22. Sedletskii A.M. Analytic Fourier transforms and exponential approximations. I. *J. Math. Sci.* 2005. V. 129, № 6. P. 4251-4408.
23. Srivastava H.M., Buschman R.G. Theory and applications of convolution integral equations. Springer, 2010. 260 p.
24. Vynnytskyi B.V. On zeros of functions analytic in a half plane and the completeness of systems of exponents. *Ukr. Math. J.* 1994. V. 46, № 5. P. 514-532.
25. Vynnytskyi B.V., Sharan V.L. On the factorization of one class of functions analytic in the half-plane. *Mat. Stud.* 2000. V. 14, № 1. P. 41-48.
26. Wiener N., Paley R.C. Fourier transforms in the complex domain. Colloquium Publications, V. 19. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., USA, 1934. 267 p.
27. Хаць Р.В., Герій С.Т. Властивості розв'язків одного рівняння згортки. *Актуальні проблеми сучасної науки: матеріали XII міжнародної науково-практичної конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій.* – Дрогобич, 2025. С. 153.