Ольга Овчар, *вчитель математики
вищої категорії СЗШ №67
м. Львова*

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

У статті висвітлені питання застосування похідної до наближених обчислень у геометрії, фізиці та при дослідженні функцій.

Постановка проблеми. Загальноосвітній аспект вивчення елементів математичного аналізу полягає передовсім у тому, що учні звикають до багатств, які набула багатовікова історія математики, бачать, як нестрогі геометричні уявлення, пов'язані з поняттям дотичної, перетворюються у формальний алгебраїчний аспект, як переходять у строгу форму фізичні поняття, як у фізиці виникають зовсім нові методи суджень.

Не можна недооцінювати також для якісного перетворення мислення учнів значення, яке може мати діалектика змінних величин, нескінченно малих величин і т. д., які вимагають від них нового рівня логічної культури.

У прикладному ж плані учні знайомляться із застосуванням нових методів дослідження функцій до різних завдань, які безпосередньо стосуються виробничої діяльності людини – практичних завдань.

У широкому плані загальноосвітній аспект навряд чи може бути успішно реалізований: немає достатньо часу для історичного підходу до проблеми, недостатньо розроблений в методичному плані взаємозв'язок з фізикою.

Практичне спрямування вивчення елементів математичного аналізу в теперішній час здійснюється більшою мірою: учні одержують достатньо міцні навики диференціювання функцій, знаходження їх екстремальних значень, інтервалів монотонності, засвоюють розв'язування деяких стандартних задач практичного характеру. Водночас ця діяльність учнів має, як правило, формальний характер, оскільки практично зводиться до виконання неважких кроків алгоритмічного типу. У результаті теорія перетворюється на черговий набір стандартних і часто штучних задач, хоч і з життєвим сюжетом.

Розглянемо декілька типів задач, у яких використовуються похідні. Деякі з них відрізняються від стандартних шкільних задач тільки формулюванням, інші суттєво відрізняються від них характером.

Розглянемо задачі, які найбільше близькі до стандартних шкільних задач на дослідження функцій. Ці задачі відрізняються від стандартних фактично тільки формулюванням, і тому їх розв'язок має подвійну роль: розширює для учнів поле застосування похідних і одночасно сприяє їх загальному розвитку, оскільки вміння перевести задачу з однієї мови на іншу, або просто сформулювати її в інших термінах є важливим показником математичного розвитку учнів.

Мета статті полягає в тому, щоб розкрити застосування похідної до дослідження функції.

Виклад основного матеріалу. Програмою передбачено вивчення застосування похідної до наближених обчислень у геометрії, фізиці та при дослідженні функції.

При вивченні застосування похідної до наближених обчислень слід особливу увагу звернути на виведення й запам'ятовування загальної формули наближеного значення функції у точці та порівняти її з рівнянням дотичної до графіка функції в точці. Вчителеві слід пам'ятати, що основним матеріалом, який стосується математичного аналізу, в 10 – 11-х класах є похідна та її застосування при:

1) дослідженні функції на монотонність;
2) дослідженні функції на екстремуми;
3) знаходженні найбільшого і найменшого значення функції на відрізку;
4) дослідженні їх на опуклість, угнутість та знаходженні точок перегину.

Розглянемо деякі задачі:

Приклад 1. Знайдемо проміжки монотонності функції $y=x^2-4x+13$.

$y'=2x-4$, $2x-4>0$, $x>2$. Функція спадає на проміжку $(-\infty;2)$ і зростає на проміжку $(2;+\infty)$.

Приклад 2. Дослідити функцію $y=x^3-4{,}5x^2+5$ на екстремум.

Працюємо за схемою.

1.$D(y)=R$.

2. Визначимо критичні точки:

а) $y'=3x^2-9x$;

б) $y'=0$, якщо $3x^2-9x=0$; $x_1=0$, $x_2=3$

X	(-∞;0)	0	(0;3)	3	(3;+∞)
уr(x)	+	0	-	0	+
у(x)	↗	5	↘	-8,5	↗
		max		min	

3. Встановимо проміжки монотонності.

4. Зробимо висновки:

а) точка (0;5) є точкою максимуму даної функції;

б) точка (3;-8,5) є точкою мінімуму даної функції.

Дослідимо функцію на екстремум за допомогою другої похідної

Приклад 3. Знайти екстремум функції

$y=x^3-4{,}5x^2+4.$

1. D(y)=R.

2. $y'=3x^2-9x$, $3x^2-9x=0$, $x_1=0$, $x_2=3$.

3. $y''=6x-9$,

досліджуємо знак другої похідної в кожній критичній точці:

$y''(0)=-9<0$, $y''(3)=9>0$.

4.Отже, x=0 – точка максимуму, $y_{max}(0)=4$; x= 3– точка мінімуму, $y_{min}(3)=-9{,}5$.

Приклад 4. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^3-9x^2+24x$, x Є [2; 3].

а) $y'=3x^2-18x+24=0$; $x_1=2$, $x_2=4$, y(2)=20, y(4)=16.

б) y(1)=16, y(5)=20.

$y_{max}=y(2)=y(5)=20$. $y_{min}=y(1)=y(4)=16$.

Приклад 5. Потрібно виготовити закритий циліндричний бак об'ємом 250π $см^3$. Якими повинні бути його розміри, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

Потрібно визначити радіус основи R і висоту H циліндра так, щоб при заданому об'ємі площа його поверхні була найменшою $S=2\pi RH+2\pi R^2$. Найменше значення цієї функції і потрібно обчислити. $V=\pi R^2H=250\pi$. $H=250\pi/\pi R^2=250/R^2$, тоді $S=500\pi/R+\pi R^2$.

Область визначення R>0.

1. Знаходимо похідну: $S'=-500\pi/R^2+4\pi R$.

2. Знайдемо критичні точки: $-500\pi/R^2+4\pi/R=0$, $4\pi R^3=500\pi\cdot$, $R^3=125$, R=5.

3. Знаходимо другу похідну: $S'=1000\pi/R^3+4\pi\cdot$.

4. $S''(5)>0$, то при R=5 функція досягає мінімуму, який і є найменшим значенням функції S. Тоді $H=250/R^2$, H=10см.

Приклад 6. Потрібно виготовити ящик з кришкою, сторони якого відносяться як один до двох, а площа повної поверхні 108$см^2$. Якими повинні бути його розміри, щоб його об'єм був найбільшим? [3]

За умовою: a/b=1/2, звідки a=x, b=2x. $V=a\cdot b\cdot H$, $V=2x^2\cdot H$.

Потрібно виключити змінну H.S=108$см^2$, $S=2S_{осн.}+S_{біч}$; $S_{біч.}=PH$.

$S=4x^2+6xH$; $4x^2+6xH=108$. $H=(108-4x^2)/6x=18/x-2x/3$. $V'=2x^2(18/x-2x/3)=36x-4x^3/3$.

Дослідимо дану функцію за допомогою похідної:

1.Областю визначення функції V є додатні значення x, тобто x>0.

2. Знаходимо похідну: $V'=36-4x^2$, при $V'=0$, x=3.

3. Знаходимо другу похідну: $V''=-8x$; $V''(3)<0$, тобто при x=3 функція має максимум, який і буде найбільшим значенням функції. Тоді: H=4см.

Відповідь. Об'єм ящика є найбільшим, якщо сторони його мають довжину 3 і 6 см, а висота рівна 4см.

Приклад 7. Число 10 розбити на два додатніх доданки так, щоб сума їх кубів була найменшою.

Нехай один з доданків дорівнює x, тоді другий доданок буде – (10-x). Сума кубів цих доданків дорівнює: $S=x^3+(10-x)^3=30x-300x+1000$; $S=30x^2-300x+1000$.

Найменше значення цієї функції і потрібно визначити.

1. Областю визначення функції є додатні значення x, тобто x>0.

2. Знаходимо похідну:$S''=60x-300$, при $S''=0$, 60x=300, x=5.

3. Знаходимо другу похідну: $S''=60$, $S''(5)>0$, тобто при x=5 функція S має мінімум, який і є найменшим значенням функції.

Відповідь. Число 10 потрібно розкласти на два рівних доданки: 5 і 5.

Приклад 8. Закон прямолінійного руху тіла заданий рівнянням: $S=-t^3+9t^2-24t-8$.

S – в метрах, t – в секундах. Знайти максимальну швидкість руху тіла.

Швидкість руху тіла в даний момент часу дорівнює похідній шляху S. $V(t)=S'=-3t^2+18t-24$. Досліджуємо цю функцію на екстремум за допомогою другої похідної: $V''(t)=-6t+18$, $V'(t)=0$, t=3c, $V''(t)=-6$. Друга похідна від'ємна; звідси слідує що швидкість є найбільшою при t=3c. Максимальна швидкість руху дорівнює: V(3)=3м/с.

Приклад 9. Визначити напрямки опуклості і точки перегину функції

$y=x^4+2x^3-12x^2-5x+2$ [3].

1. Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, тобто x∈R.

2. Знайдемо другу похідну функції і критичні точки другого порядку:

$y'=4x^3+6x^2-24x-5$; $y''=12x^2+12x-24=12(x^2+x-2)$; $y''=0$ при $x^2+x-2=0$, $x_1=-2$, $x_2=1$.

3. Відмітимо критичні точки другого роду на числовій прямій, дані занесемо у таблицю.

x	(-∞;-2)	-2	(-2;1)	1	(1;+∞)
y"	+	0	-	0	+
y	∪	-36	∩	-12	∪

4. Досліджуємо знак другої похідної в кожному з інтервалів: $y''(-3)>0$, $y''(0)<0$, $y''(2)>0$.

5. Крива опукла вниз при $x<-2$ і $x>1$, крива опукла вверх при $-2<x<1$.

6. Знайдемо координати точок перегину (т.п.) $x_{т.п.}=-2$, $y_{т.п.}=y(-2)=-36$, $x_{т.п.}=1$,

$y_{т.п.}=y(1)=-12$. Відповідь. Точки перегину (-2;-36), (1;-12).

Приклад 10. Побудувати графік функції

$y=\frac{1}{5}(4x^3-x^4)$ [3].

1. Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, тобто $x\in R$.

2. Досліджуємо на парність чи непарність функцію. $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$. Функція є ні парною ні непарною.

3. Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат:

з віссю Ox : (0;0), (4;0);

з віссю Oy: (0;0).

4. Знаходимо проміжки монотонності і екстремуми функції: $y'=\frac{4}{5}x^2(3-x)$, $y'=0$, при $x_1=0$ і $x_2=3$.

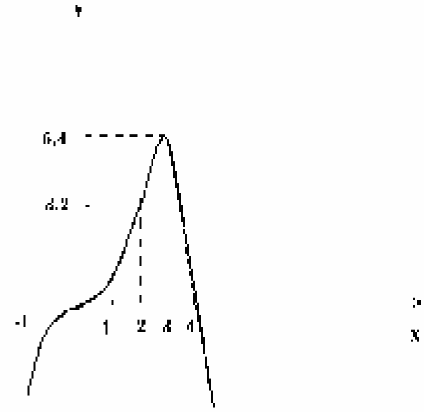
Відмітимо критичні точки першого роду x=0 і x=3 на числовій прямій і досліджуємо знак похідної в кожному із одержаних проміжків: $y'(-1)>0$, $y'(4)<0$. Функція зростає при $x<3$ і спадає при $x>3$;

x	(-? ;0)	0	(0;3)	3	(3;+ ?)
y '	+	0	+	0	-
y	↗	0	↗	5,4	↘
				max	

x=3 – точка максимуму. $y_{max}=y(3)=5,4$. Дані запишемо в таблицю

Знаходимо напрямки опуклості і точки перегину графіка функції: $y''=\frac{12}{5}x(2-x)$.

Отже, $y''=0$, при $x_1=0$, $x_2=2$. Відмітимо критичні точки другого роду x=0 і x=2 на числовій прямій і досліджуємо знак другої похідної в кожному із одержаних інтервалів: $y''(-9)<0$, $y''(1)>0$, $y''(3)<0$. Графік функції повернутий опуклістю вниз при $0<x<2$; і вгору при $x<0$ і $x>2$. $x_{т.п.}=0$, $y_{т.п.}=y(0)=0$, $x_{т.п.}=2$, $y_{т.п.}=y(2)=3,2$. Точки перегину графіка функції (0; 0), (2; 3, 2).



Відмітимо всі одержані точки в системі координат і з'єднаємо їх плавною кривою. Для уточнення графіка знайдемо додаткову точку y(1)=1

Приклад 11. Рухи двох тіл вздовж однієї прямої задані рівняннями $s_1(t)=4t^2+2$(м), $s_2(t)=3t^2+4t-1$(м). Знайти швидкість руху кожного тіла окремо в момент збігу в одній точці (час в секундах).

$v_1(t)=s'_1(t)=8t$(м/с); $v_2(t)=s(t)=(6t+4)$(м/с). З рівняння $s_1(t)=s_2(t)$ знаходимо момент часу, коли тіла "збігаються в одній точці". $4t^2+2=3t^2+4t-1$, $t_1=1$; $t_2=3$. При t=1c: $v_1=v_1(1)=8$(м/с); $v_2=v_2(1)=10$(м/с). При t=3c: $v_1=v_1(3)=24$(м/с); $v_2=v_2(3)=22$(м/с).

Приклад 12. Кут α (в радіанах), на який повертається колесо через t сек., змінюється за законом $\alpha=3t^2-12t+36$. Знайти кутову швидкість ω у момент t =4сек. і визначити, в який момент часу колесо зупиниться [2].

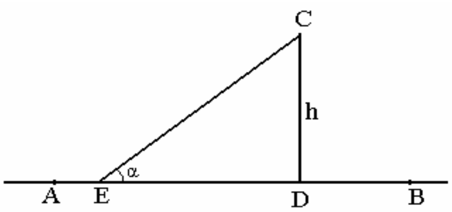
$\omega(t)=\alpha'(t)$, $\omega(t)=6t-12$; $\omega(4)=12$рад/с. Колесо зупиниться, якщо $\omega(t)=0$. $6t-12=0$, t=2c. **Приклад 13.** Радіус кулі r сантиметрів рівномірно зростає зі швидкістю 2 см/с. З якою швидкістю зростає об'єм кулі? Знайти цю швидкість у момент, коли r досягне 10 см. (При t=0 величина r=0) [2].

З умови випливає, що $r(t)=vt=2t$(см). r=10см, 2t=10, t=5c, $V_k(t)=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{32}{3}\pi t^3$(см^3)

Швидкість зміни об'єму кулі $v_k(t)=V'(t)=\frac{32}{3}\pi\cdot$

$3t^2 = 32\pi t^2$(см^3/с); $v_r(5)=32\pi \cdot 5^2=800$(см^3/с).

Приклад 14. Під яким кутом має проходити бічна дорога (EC) до магістралі (AB), щоб затрата



часу на перевезення по маршруту AEC була найменшою, якщо швидкість руху автомобілів по магістралі s_m, а по бічній дорозі s_d(s_m> $_d$).

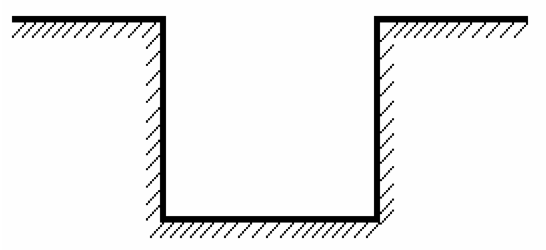
Проведемо з точки C перпендикуляр до прямої AB і позначимо довжину відрізка CD через h, а довжину відрізка AD через $\mathbf{l}$. Тоді з прямокутного трикутника EDC одержимо CE=$\frac{h}{\sin a}$, DE=h·ctgα. Звідси знаходимо час руху автомобіля по маршруту AEC

$$t=\frac{\mathbf{l}}{s_m}-\frac{hctga}{s}+\frac{h}{s_d \sin a}.$$

Так як точка A взята нами довільно, визначаючи лише напрям руху по магістралі, то αЄ(0;$\frac{p}{2}$). Задача звелася до визначення найменшого значення функції на даному проміжку.

Знаходимо похідну: $t'(\alpha)=\frac{h}{s_d \sin^2 a}\left(\frac{s_d}{s_m}-\cos\alpha\right)$. Так як $0<\frac{s_d}{s_m}<1$, то похідна на даному проміжку перетворюється в нуль тільки в одній точці $a_0=\arccos\frac{s_d}{s_m}$, при чому $t_0(\alpha)<0$ при αЄ(0;α_0) і $t'(\alpha)>0$ при αЄ(α_0;$\frac{p}{2}$). Це означає, що на проміжку (0;α_0] функція t спадає, а на проміжку [α_0;$\frac{p}{2}$) зростає. Отже, розглянута функція t при $\alpha=\alpha_0$ досягає найменшого значення. Отже, кут між бічною дорогою та магістраллю визначається за формулою $a_0=\arccos\frac{s_d}{s_m}$.

Приклад 15. При якому відношенні глибини каналу до його ширини прямокутного перерізу має гідравлічно найвигідніший профіль? [4]



Нехай c – ширина каналу, ω – площа поперечного перерізу, тоді глибина каналу буде $\frac{w}{x}$, а його змочений переріз z: z(c)= $c+\frac{2w}{c}$. Потрібно знайти найменше значення функції z на проміжку (0;+∞). Знаходимо похідну: $z'(c)=\frac{c^2-2w}{c^2}$. Так як $z'(\sqrt{2w})=0$, то $z'(c)<0$ при $0<c<\sqrt{2w}$ і $z'(c)>0$ при $c>\sqrt{2w}$, то функція z в точці $\sqrt{2w}$ досягає найменшого значення. Отже, ширина каналу в даному випадку повинна бути $\sqrt{2w}$, глибина $\frac{w}{\sqrt{2w}}$, а шукане відношення рівне $\frac{1}{2}$.

Висновки. Виконуючи такі завдання, учні натрапляють в різні життєві ситуації і вчаться відповідати на питання за допомогою знань, які одержали на уроках математики.

1. *М.І. Авраменко. Уроки алгебри і початків аналізу в 10 і 11 класах, 1989. – С. 131 – 178.*

2. *В.Н. Гладунський, А.Ф. Барвінська, Г.А. Гладунська. Малий математичний довідник. – 1992. – С. 165 – 175.*

3. *І.І. Литвин, О.М. Онончук, Г.О. Желізняк. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів, 2002.*

4. *Математика в школі. – 1980. – №6. – С. 30.*

5. *З.І. Слєпкань. Методика викладання алгебри і початків аналізу, 1978. – С. 82 – 105.*

V V V V V V V V V V V V V V V V V V V V V V V V V V V V V V