

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»
завідувач кафедри математики та економіки,
кандидат пед. наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК

«_____» _____ 2025 р.

**МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ДО НАВЧАННЯ УЧНІВ
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ
ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ
НА ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ**

Спеціальність 014 «Середня освіта (за предметними спеціальностями)»

Предметна спеціальність: 014.04 «Середня освіта (Математика)»

Додаткова предметна спеціальність: 014.09 «Середня освіта (Інформатика)»

Магістерська робота

на здобуття кваліфікації – магістр середньої освіти.
Вчитель математики, вчитель інформатики.

Автор роботи: Комарницький Віталій Романович _____

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук,
доцент Хаць Руслан Васильович _____

Дрогобич, 2025 р.

Захист магістерської роботи

«Методичні підходи до навчання учнів розв’язування олімпіадних задач на числові послідовності»

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

_____ Голова ЕК _____
Дата підпис прізвище, ім’я

_____ Секретар ЕК _____
підпис прізвище, ім’я

Анотація

Комарницький В. *Методичні підходи до навчання учнів розв'язування олімпіадних задач на числові послідовності*. – Рукопис. – 65 с.

Магістерська робота «Методичні підходи навчання учнів розв'язуванню олімпіадних задач на числові послідовності» присвячена створенню цілісної моделі олімпіадної підготовки в умовах факультативів і математичних гуртків. На основі аналізу літератури уточнено роль задач на послідовності в розвитку логічного й творчого мислення учнів та запропоновано розширену класифікацію таких задач. Систематизовано основні методичні підходи й розроблено систему тренувальних та олімпіадних задач із практичними рекомендаціями щодо їх використання. Отримані результати можуть бути безпосередньо впроваджені у шкільну практику роботи з обдарованими учнями.

Ключові слова і фрази: числові послідовності, методичні підходи, олімпіади.

Annotation

Komarnytskyi. M. *Methodological Approaches to Teaching Students to Solve Olympiad Problems on Numerical Sequences*. – Manuscript. – 65 p.

The master's thesis "Methodological Approaches to Teaching Students to Solve Olympiad Problems on Numerical Sequences" is devoted to designing an integrated model of Olympiad training in the context of elective courses and mathematics clubs. Based on an analysis of the relevant literature, the study clarifies the role of sequence problems in developing students' logical and creative thinking and proposes an extended classification of such problems. The main instructional approaches are systematized, and a system of training and Olympiad-style problems is developed, accompanied by practical recommendations for their use. The results can be directly implemented in school practice when working with gifted students.

Keywords and phrases: numerical sequences, methodological approaches, olympiads.

Зміст

Вступ	6
1 Науково-теоретичні засади вивчення числових послідовностей в умовах олімпіадної підготовки	9
1.1 Олімпіадна задача як інструмент розвитку творчого потенціалу учнів .	9
1.2 Психолого-педагогічні аспекти засвоєння учнями абстрактних математичних понять	10
1.3 Розширена класифікація олімпіадних задач на числові послідовності за способом задання та типом питання	12
1.3.1 Задачі на послідовності, задані рекурентно	12
1.3.1.1 Лінійні рекурентні співвідношення (метод характеристичного рівняння)	12
1.3.1.2 Нелінійні рекурентності та рекурентності «з родзинкою» (методи підстановок, пошук інваріантів)	13
1.3.2 Послідовності, задані явною формулою n -го члена	14
1.3.3 Послідовності, задані комбінаторно	14
1.3.4 Послідовності, задані ітераційним процесом $x_{n+1} = f(x_n)$	15
1.3.5 Послідовності, задані через функціональні рівняння	16
1.3.6 Задачі на теоретико-числові властивості послідовностей	17
1.3.6.1 Подільність, періодичність залишків за модулем	18
1.3.6.2 Члени послідовностей, що є квадратами, простими, раціональними тощо	19
1.3.7 Задачі на знаходження сум та добутків	20
1.3.8 Задачі на нерівності та «оцінку + приклад»	21
1.3.9 Задачі на аналітичні властивості (початки аналізу)	22
1.3.9.1 Обмеженість, монотонність	23
1.3.9.2 Границя послідовності та її існування	23
1.3.9.3 Щільність та розподіл (напр., $\{n\alpha\}$)	24
1.3.10 Задачі на існування та конструкцію послідовностей	25
Висновки до розділу 1	28
2 Методичні аспекти застосування традиційних підходів до навчання розв’язування задач на послідовності	30
2.1 Методика роботи з рекурентними та ітераційними задачами (типи 1.3.1, 1.3.4)	30
2.2 Формування навичок застосування методу математичної індукції	32
2.3 Методика навчання розв’язуванню комбінаторних та конструктивних задач (типи 1.3.3, 1.3.10)	34

2.4	Методичні підходи до задач на оцінку та нерівності (тип 1.3.8)	36
2.5	Методичні особливості задач з елементами теорії чисел (тип 1.3.6) . . .	38
2.6	Методика введення елементів математичного аналізу в олімпіадні за- дачі (тип 1.3.9)	41
2.7	Організація евристичної бесіди та системи навідних питань для стиму- лювання самостійного пошуку учнів	44
	Висновки до розділу 2	47
3	Розробка системи тренувальних та олімпіадних задач для факультативних занять на числові послідовності	50
3.1	Принципи відбору та структурування змісту навчального (задачного) матеріалу	50
3.2	Система тренувальних та олімпіадних задач, класифікованих за роз- ширеною 10-рівневою типологією (п. 1.3)	53
	Висновки до розділу 3	60
	Висновки	62
	Бібліографія	64

Вступ

Актуальність теми дослідження

Актуальність дослідження зумовлена низкою факторів:

1. **Стратегічна важливість:** Підготовка обдарованої учнівської молоді та розвиток математичних здібностей є пріоритетним завданням сучасної профільної освіти. Математичні олімпіади є однією з найефективніших форм виявлення та розвитку таких учнів.
2. **Фундаментальність теми:** Задачі на числові послідовності є наскрізною та фундаментальною темою олімпіадної математики. Вони синтезують у собі ідеї з різних галузей — алгебри, теорії чисел, математичного аналізу та комбінаторики [1, 6, 5], що робить їх складними для систематичного вивчення.
3. **Методичні виклики:** На практиці вчителі часто стикаються з браком **систематизованих** методичних матеріалів. Існує багато розрізнених збірників задач, проте бракує робіт, які б:
 - По-перше, пропонували **глибоку та повну класифікацію** цих задач (включаючи рекурентні, ітераційні, аналітичні, комбінаторні типи) [3, 8, 6].
 - По-друге, **адаптували** б перевірені, **традиційні методичні підходи** (евристичні бесіди, метод математичної індукції, аналіз з кінця, узагальнення, аналогія) до кожного конкретного підтипу задач [11, 3, 18].
4. **Потреба практики:** Існує суперечність між високою частотою використання задач на послідовності на олімпіадах різного рівня та недостатньою розробленістю цілісної методичної системи підготовки учнів до їх розв’язування в умовах факультативної та гурткової роботи [4].

Таким чином, розробка науково обґрунтованих методичних підходів, що систематизують традиційні підходи до навчання учнів розв’язуванню широкого класу олімпіадних задач на числові послідовності, є **актуальною** науково-методичною проблемою.

Мета і завдання дослідження

Мета дослідження: Теоретично обґрунтувати та розробити методичні підходи (систему задач та методичних рекомендацій) для навчання учнів розв’язуванню олімпіадних задач на числові послідовності на основі систематизації та адаптації традиційних методичних підходів.

Завдання дослідження:

-
1. Проаналізувати психолого-педагогічну, математичну та науково-методичну літературу для визначення ролі та місця олімпіадних задач на числові послідовності у розвитку математичних здібностей учнів [9, 12, 10, 16].
 2. Здійснити **деталізовану класифікацію** олімпіадних задач на числові послідовності за змістовними та методичними ознаками (способом задання, типом питання, методом розв'язання) [5, 1, 6, 13, 7].
 3. **Систематизувати** традиційні методичні підходи, прийоми та евристичні стратегії, що довели свою ефективність у навчанні розв'язуванню задач підвищеної складності [11, 3, 18].
 4. Адаптувати виділені методичні підходи до кожного класу задач з розробленої класифікації.
 5. Сформулювати методичні рекомендації для вчителів математики щодо використання вироблених методичних підходів.

Об'єкт і предмет дослідження

Об'єкт дослідження: Процес навчання математики учнів 8-11 класів в умовах профільної освіти та позакласної (гурткової, факультативної) роботи.

Предмет дослідження: Зміст, традиційні методи, прийоми та форми організації навчання учнів розв'язуванню олімпіадних задач на числові послідовності.

Методи дослідження

Для розв'язання поставлених завдань було використано комплекс теоретичних та емпіричних методів:

1. Теоретичні:

- **Аналіз та синтез:** вивчення науково-методичної літератури для визначення теоретичних засад дослідження.
- **Систематизація та класифікація:** для структурування змісту навчального матеріалу та розробки деталізованої типології олімпіадних задач на числові послідовності (п. 1.3 змісту).
- **Узагальнення:** для формулювання висновків та методичних рекомендацій.

2. Емпіричні:

- **Аналіз** олімпіадних завдань різних рівнів (районних, обласних, всеукраїнських) для побудови системи задач [19].
- **Аналіз** існуючих методичних посібників та шкільних підручників для виявлення “методичних прогалин”.
- **Педагогічне моделювання та проєктування:** для розробки відповідної системи задач.

Наукова новизна одержаних результатів

Наукова новизна дослідження полягає в тому, що:

1. **Уточнено та розширено класифікацію** олімпіадних задач на числові послідовності, яка, на відміну від існуючих, комплексно враховує спосіб задання послідовності (рекурентний, ітераційний, комбінаторний, явний) та тип математичного апарату, необхідний для розв'язання (теорія чисел, математичний аналіз, оцінки) [5, 1, 6, 13, 7].
2. **Подальшого розвитку набула** систематизація традиційних методичних підходів (евристичні бесіди, метод аналогій, узагальнення, метод індукції) через їх **цілеспрямовану адаптацію** до кожного конкретного типу задач із розробленої класифікації [11, 15].
3. **Розроблено цілісну систему задач** для факультативних занять, що базується на цій деталізованій класифікації та дозволяє організувати поетапне формування необхідних умінь та навичок в учнів [4].

Практичне значення одержаних результатів

Практичне значення полягає у **безпосередній готовності** розроблених матеріалів до впровадження в освітній процес.

Матеріали роботи можуть бути використані вчителями математики, керівниками математичних гуртків, студентами-магістрантами під час педагогічної практики, а також в системі післядипломної педагогічної освіти.

Апробація результатів дослідження

Основні положення та результати дослідження доповідалися та обговорювалися на Міжнародній науково-практичній конференції "Актуальні проблеми сучасної науки" (м. Дрогобич, 2025).

Результати дослідження відображені у публікації [21].

Структура та обсяг роботи

Магістерська робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел та додатків.

Загальний обсяг роботи – 65 сторінок, з них 58 сторінок – основний текст. Список використаних джерел налічує 21 найменування.

Розділ 1

Науково-теоретичні засади вивчення числових послідовностей в умовах олімпіадної підготовки

1.1 Олімпіадна задача як інструмент розвитку творчого потенціалу учнів

Провідною метою сучасної математичної освіти, згідно з державними стандартами та освітніми програмами, є не лише засвоєння учнями певної суми знань, умінь та навичок, але й, що більш важливо, розвиток їхнього логічного та критичного мислення, здатності до самостійної пізнавальної діяльності та розв'язання нестандартних проблем. У цьому контексті робота з обдарованими учнями та, зокрема, підготовка до математичних олімпіад, набуває особливого значення, виступаючи потужним каталізатором інтелектуального розвитку [11, 12, 18, 19, 20].

Центральним елементом цієї системи підготовки є **олімпіадна задача**. На відміну від стандартної (тренувальної) шкільної задачі, яка, як правило, призначена для ілюстрації та закріплення конкретного методу чи алгоритму, олімпіадна задача має фундаментальні відмінності. Головна її дидактична функція — не контроль репродуктивних знань, а стимулювання **продуктивної, творчої діяльності** учня [3, 2, 18].

Ми визначаємо олімпіадну задачу як навчальну проблему, що:

- не має очевидного та відомого учневі алгоритму розв'язання;
- вимагає для свого розв'язання оригінальної комбінації ідей та методів, що часто виходять за межі одного розділу шкільної програми;
- спрямована на глибокий аналіз умов, пошук прихованих закономірностей та побудову власної стратегії розв'язання.

Саме така структура задачі обумовлює її унікальний розвивальний потенціал. Процес розв'язування олімпіадної задачі змушує учня відійти від репродуктивного мислення («Який метод тут треба застосувати?») і перейти до **пошукової евристичної діяльності** («Які властивості має цей об'єкт? Що буде, якщо я спробую...?»).[11, 3]

У дослідженнях видатних математиків та методистів (Д. Пойа, В. А. Крутецький, І. Ф. Тесленко та ін.) неодноразово підкреслювалося, що саме в процесі пошуку

розв'язку нестандартної задачі формуються ключові компоненти математичних здібностей та творчого мислення [11, 12, 3, 18, 2]. Розв'язуючи олімпіадні задачі, учень активно розвиває:

1. **Гнучкість мислення** — здатність швидко відмовлятися від хибного шляху та генерувати нові гіпотези.
2. **Аналітико-синтетичні навички** — вміння розкласти складну проблему на простіші компоненти (аналіз) та поєднати розрізнені факти у єдиний ланцюжок доведення (синтез).
3. **Навички узагальнення та абстрагування** — здатність побачити загальний принцип за низкою окремих випадків (наприклад, при «розкручуванні» рекурентної послідовності).
4. **Математичну інтуїцію** — здатність передчувати правильний напрямок пошуку, базуючись на попередньому досвіді та естетичних міркуваннях (пошук «красивого» розв'язку).
5. **Інтелектуальну наполегливість** — вольову якість, необхідну для тривалої концентрації та подолання «тупикових» ситуацій.

Сукупність цих якостей, що формуються та розвиваються у процесі систематичного розв'язування олімпіадних задач, ми і визначаємо як **творчий потенціал** учня в галузі математики. Це не просто набір знань, а динамічна система інтелектуальних та особистісних якостей, що дозволяє учневі ефективно діяти в умовах невизначеності та генерувати нові ідеї [12, 3].

У контексті даної магістерської роботи задачі на числові послідовності виступають особливо цінним інструментом. Вони є багатим джерелом проблем, що природно інтегрують методи алгебри, теорії чисел та початків математичного аналізу, і вимагають від учнів застосування повного арсеналу вищезазначених евристичних прийомів та розумових операцій [6, 1, 18, 21].

1.2 Психолого-педагогічні аспекти засвоєння учнями абстрактних математичних понять

Успішне розв'язання олімпіадних задач, особливо в такій темі, як «числові послідовності», нерозривно пов'язане не лише з математичною підготовкою, але й з психологічною готовністю учнів оперувати об'єктами високого рівня абстракції. Поняття «числова послідовність» саме по собі є складним абстрактним об'єктом — це функція, визначена на множині натуральних чисел, нескінченний набір елементів, що часто підкорюється не очевидним, прихованим закономірностям.

З точки зору когнітивної психології (зокрема, теорій Ж. Піаже [9]), повноцінне оперування такими абстракціями вимагає розвиненого **формально-логічного мислення**. Цей етап розвитку, що зазвичай припадає на підлітковий вік, характеризується здатністю оперувати гіпотезами, висувати припущення, працювати із «можливим», а не лише з «конкретним». Однак навіть у старшокласників цей перехід не завжди завершений. Багато учнів відчувають труднощі при переході від конкретних

обчислень (знаходження перших п'яти членів послідовності) до узагальнених міркувань про властивості *всієї* послідовності (напр., доведення монотонності чи обмеженості) [9, 6].

Ключовими психолого-педагогічними аспектами, що впливають на засвоєння абстрактних понять, є:

1. **Проблема переходу від конкретного до абстрактного.** Первинне знайомство з послідовністю відбувається через її перші члени — конкретні числа. Психологічна складність полягає в тому, щоб побачити за цими числами загальний закон, формулу n -го члена або рекурентне співвідношення. Методично це означає необхідність будувати процес навчання на **індуктивних міркуваннях** — від аналізу окремих прикладів до висунення гіпотези та її подальшого доведення (яке вже вимагає дедукції, напр., методом математичної індукції) [9, 12].
2. **Роль мотиваційного компоненту.** Абстрактні задачі часто сприймаються учнями як «сухі» та відірвані від реальності. Для підтримки пізнавального інтересу вчитель має використовувати **проблемні ситуації** та задачі з «цікавим» формулюванням. В контексті олімпіад, потужним мотиватором виступає дослідницький характер задач та елемент змагання. Успіх у розв'язанні однієї складної задачі може кардинально підвищити самооцінку та інтерес учня [12, 19, 20].
3. **Подолання когнітивних бар'єрів та «математичної тривожності».** Складність олімпіадних задач може провокувати страх помилки та «ступор» — учень не знає, з чого почати, і боїться зробити неправильний крок. Ефективна методична система має бути спрямована на формування в учнів **евристичних прийомів** («А що, якщо...?», «Спробую розглянути простіший випадок», «Чи бачив я схожу задачу?»). Педагогічно важливо створити атмосферу, де *пошук* та *гіпотеза* цінуються не менше за правильну відповідь [12, 3].
4. **Розвиток «почуття форми».** Досвідчені розв'язувачі олімпіадних задач часто говорять про «красу» математичної ідеї. Це пов'язано з розвитком специфічної інтуїції, здатності бачити структурні аналогії. Наприклад, побачити у рекурентному співвідношенні $a_{n+1} = a_n + n$ зв'язок із сумою арифметичної прогресії. Формування цього «почуття» вимагає від учителя демонстрації різних методів розв'язання однієї задачі та акцентування уваги на найбільш елегантних та універсальних підходах [10, 15, 17].

Таким чином, методична система навчання розв'язуванню задач на послідовності має будуватися з урахуванням цих психологічних аспектів. Вона повинна забезпечувати поступовий перехід від конкретних прикладів до абстрактних узагальнень, підтримувати високий рівень пізнавальної мотивації через проблемне навчання та евристичні методи, а також формувати в учнів впевненість у власних силах при роботі зі складними математичними об'єктами [9, 12].

1.3 Розширена класифікація олімпіадних задач на числові послідовності за способом задання та типом питання

1.3.1 Задачі на послідовності, задані рекурентно

1.3.1.1 Лінійні рекурентні співвідношення (метод характеристичного рівняння)

Значний пласт олімпіадних задач присвячений послідовностям, кожен наступний член яких виражається як **лінійна комбінація** k попередніх членів. Такі співвідношення називають **лінійними рекуренціями** k -го порядку [6, 5] і вони мають вигляд:

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n$$

де $c_1, \dots, c_k$ є сталими коефіцієнтами ($c_k \neq 0$), а k — порядок рекуренції.

Ключова задача для таких послідовностей — знаходження **формули загального члена** a_n як функції від n . Традиційний та найбільш потужний інструмент для цього — **метод характеристичного рівняння** [6, 5, 1]. Суть методу полягає у тому, що ми шукаємо розв’язки у формі $a_n = \lambda^n$. Підстановка такої форми у рекурентне співвідношення (після ділення на λ^n) приводить до алгебраїчного рівняння:

$$\lambda^k - c_1 \lambda^{k-1} - c_2 \lambda^{k-2} - \dots - c_{k-1} \lambda - c_k = 0$$

Це рівняння і називається *характеристичним* для даної рекуренції.

Загальний розв’язок a_n повністю визначається k початковими членами послідовності та залежить від набору коренів $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ характеристичного рівняння.

1. **Випадок простих коренів.** Якщо характеристичне рівняння має k різних коренів $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, загальна формула для n -го члена є лінійною комбінацією їхніх степенів:

$$a_n = A_1 \lambda_1^n + A_2 \lambda_2^n + \dots + A_k \lambda_k^n$$

Коефіцієнти A_i однозначно визначаються з системи лінійних рівнянь, що утворюється початковими умовами (напр., $a_0, \dots, a_{k-1}$).

2. **Випадок кратних коренів.** Якщо корінь λ_j має кратність $m_j > 1$, його внесок у загальну формулу ускладнюється. Окрім λ_j^n , розв’язками також будуть $n\lambda_j^n, n^2\lambda_j^n, \dots, n^{m_j-1}\lambda_j^n$. Тому відповідний доданок у загальному розв’язку набуває вигляду:

$$(A_0 + A_1 n + \dots + A_{m_j-1} n^{m_j-1}) \cdot \lambda_j^n$$

На практиці, в олімпіадних задачах найчастіше фігурують рекуренції другого порядку ($k = 2$) типу $a_{n+2} = p a_{n+1} + q a_n$. Класичним прикладом є послідовність Фібоначчі, для якої $p = q = 1$, що приводить до відомої формули Біне через корені рівняння $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ [6, 2].

Задачі цього типу вимагають від учнів не стільки евристичного пошуку, скільки впевненого володіння технічним апаратом: розв’язуванням алгебраїчних рівнянь та систем лінійних рівнянь [3, 18].

1.3.1.2 Нелінійні рекурентції та рекурентції «з родзинкою» (методи підстановок, пошук інваріантів)

Ця категорія задач кардинально відрізняється від попередньої (1.3.1.1) через відсутність єдиного універсального алгоритму розв'язання. Сюди належать рекурентні співвідношення, в яких a_{n+k} не є лінійною комбінацією попередніх членів. Прикладами є співвідношення, що містять добутки, степені, дробові або ірраціональні вирази:

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_{n-1}}$$

Якщо лінійні рекурентції вимагають переважно технічних навичок, то нелінійні задачі потребують **дослідницького підходу** та евристичного пошуку [3, 18].

Головною дидактичною цінністю таких задач є те, що вони навчають учнів не діяти за шаблоном, а трансформувати проблему. Два провідні традиційні методи тут:

1. **Метод підстановок (зведення до відомого).** Це найбільш поширений прийом, що полягає у спробі **лінеаризувати** задачу або звести її до простішого, вже відомого типу (арифметичної/геометричної прогресії, лінійної рекурентції). Ключова ідея — знайти таку функцію f , щоб нова послідовність $b_n = f(a_n)$ підкорялася простішому закону. Типові прийоми включають:
 - *Логарифмування:* Ефективне, якщо рекурентція містить добутки чи степені (напр., $a_{n+1} = a_n^2$).
 - *Обернені величини:* Використання $b_n = 1/a_n$ (напр., для дробово-лінійних перетворень типу $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+c \cdot a_n}$).
 - *Тригонометричні та гіперболічні підстановки:* Використовуються, коли формула нагадує тригонометричні тотожності (напр., $a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$ лінеаризується підстановкою $a_n = \cos \varphi_n$) [3, 6].
2. **Пошук інваріантів.** Це значно складніший евристичний прийом, що вимагає глибокої інтуїції. Інваріант — це певна величина, функція або властивість, що **зберігається** при переході від n до $n + 1$. В контексті послідовностей, це може бути вираз, значення якого не залежить від n :

$$I(a_{n+k}, \dots, a_{n+1}) = I(a_{n+k-1}, \dots, a_n) = \text{const}$$

Наприклад, для системи рекурентцій

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n - qb_n \\ b_{n+1} = qa_n + pb_n \end{cases}$$

інваріантом (з точністю до множника) буде $a_n^2 + b_n^2$. Знайдення такого інваріанта часто радикально спрощує задачу або є ключем до її розв'язання [3, 18].

Категорія «з родзинкою» охоплює задачі, де пряме застосування цих методів неможливе, але розв'язок вимагає унікального спостереження. Це може бути доведення **періодичності** послідовності (напр., $a_{n+k} = a_n$ для певного k), або виявлення, що послідовність стабілізується ($a_n = \text{const}$ при $n \geq N$). Такі задачі найбільше розвивають гнучкість мислення та здатність до оригінальних ідей [18, 2].

1.3.2 Послідовності, задані явною формулою n -го члена

Цей клас задач формує фундаментально інший тип виклику, ніж рекурентні співвідношення. Якщо в рекурентних задачах метою часто є *знаходження* формули n -го члена, то тут явна формула $a_n = f(n)$ надається як **початкова умова**. Проблематика зміщується з пошуку закономірності на глибокий **аналіз властивостей** функції $f(n)$ на дискретній множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ [6].

Олімпіадний характер таких задач полягає в тому, що функція $f(n)$ рідко є простою (як-от лінійною чи квадратичною). Вона, як правило, містить елементи, що вимагають застосування методів з інших, часто несподіваних, розділів математики. Типові олімпіадні приклади $f(n)$ включають:

- **Функції, пов'язані з цілою та дробовою частиною числа:** Наприклад, $a_n = [n\alpha]$ (де α — ірраціональне число, послідовності Бітті) або $a_n = \{n\alpha\}$ [7, 14].
- **Арифметичні функції з теорії чисел:** Послідовності, де a_n визначається через $d(n)$ (кількість дільників n), $\sigma(n)$ (сума дільників n), $\varphi(n)$ (функція Ейлера) або $S(n)$ (сума цифр числа n) [5, 1].
- **Раціональні та алгебраїчні вирази:** Задачі, де $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ (де P, Q — многочлени) або $a_n = \sqrt[k]{P(n)}$ [6].

Основні питання, що ставляться до таких послідовностей, стосуються властивостей їхньої **множини значень**. Задачі цього типу можна умовно розділити на кілька напрямків:

1. **Теоретико-числові властивості:** Дослідження на подільність («При яких n a_n ділиться на m ?»), пошук членів, що є точними квадратами, простими числами, або мають іншу задану арифметичну природу.
2. **Аналітичні властивості:** Доведення монотонності, обмеженості, обчислення границь (що перетинається з класом 1.3.9).
3. **Структурні властивості:** Дослідження множини значень на цілочисельність («Чи є a_n цілим числом для всіх n ?»), раціональність, або питання про те, чи може послідовність приймати певні значення.

Таким чином, дидактична цінність цих задач полягає у розвитку в учнів навичок **математичного моделювання** — здатності побачити за «ширмою» послідовності проблему з теорії чисел, діофантових рівнянь чи математичного аналізу, та застосувати відповідний інструментарій для її розв'язання. Сама послідовність тут виступає як специфічна форма запису та виокремлення об'єкта дослідження [6, 1].

1.3.3 Послідовності, задані комбінаторно

Ця категорія задач слугує важливим **методологічним мостом** між комбінаторикою та теорією числових послідовностей. У задачах цього типу послідовність a_n не задається ані явною формулою (як у 1.3.2), ані, на початковому етапі, рекурентним співвідношенням (як у 1.3.1). Натомість, член a_n визначається як **кількість** певних комбінаторних об'єктів або конфігурацій, параметризованих числом n . Типові формулювання:

- «Знайти, скількома способами можна... n об'єктів...»
- «Нехай a_n — це кількість... що залежить від n ...»

Ключовий етап розв'язання такої задачі — це **математичне моделювання**: учень має самостійно **вивести рекурентне співвідношення**, що описує a_n . Це вимагає глибокого аналізу структури комбінаторного об'єкта [4, 2, 5]. Традиційний методичний підхід полягає у тому, щоб знайти зв'язок між задачею для n та аналогічними задачами для менших значень (наприклад, $n - 1$, $n - 2$). Це робиться шляхом аналізу «останнього елемента» або «першого кроку» у побудові об'єкта:

1. Учень аналізує, як об'єкт розміру n може бути сконструйований з об'єктів розміру $n - 1$.
2. Або розглядає всі можливі «перші кроки» і підраховує, скільки конфігурацій веде до кожного з них.

Класичним прикладом є задача про заощення дошки $2 \times n$ доміношками 1×2 . Аналіз останньої доміношки (чи вона стоїть вертикально, чи горизонтально) приводить учня безпосередньо до співвідношення $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, тобто до послідовності Фібоначчі. Іншими відомими прикладами є числа Каталана, що виникають у багатьох задачах переліку (напр., кількість правильних дужкових структур) [4, 2]. Таким чином, з дидактичної точки зору, ці задачі є надзвичайно цінними. Вони навчають учнів не просто застосовувати відомі формули, а **самостійно будувати математичні моделі** — переходити від описової проблеми до формального рекурентного співвідношення, яке потім може бути розв'язане методами з підрозділу 1.3.1 [18, 3].

1.3.4 Послідовності, задані ітераційним процесом $x_{n+1} = f(x_n)$

Цей клас задач займає унікальне місце, утворюючи міст між алгебраїчним поняттям рекурентності та фундаментальними ідеями математичного аналізу і теорії динамічних систем. Послідовність визначається стартовим елементом x_0 та ітераційною функцією f :

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0$$

На відміну від лінійних рекурентцій, де n -й член залежав від k попередніх, тут вся «пам'ять» процесу зосереджена в одному, n -му, члені [6].

Поведінка такої послідовності — чи вона збігається, чи є періодичною, чи прямує до нескінченності — повністю визначається властивостями функції $f(x)$. Олімпіадні задачі цього типу, як правило, фокусуються на дослідженні **граничної поведінки** послідовності.

Традиційні методичні підходи до розв'язання таких задач базуються на аналізі функції f :

1. **Аналіз нерухомих точок (Fixed-point analysis)**. Це ключовий евристичний крок. Якщо послідовність (x_n) збігається до деякої границі L , і функція $f(x)$ є неперервною в цій точці, то L має бути **нерухомою точкою** функції f . Тобто, L має задовольняти рівняння:

$$L = f(L)$$

Розв'язання цього рівняння дає нам *кандидатів* на границю [6].

2. **Дослідження монотонності та обмеженості.** Найбільш поширений і строгий метод доведення збіжності базується на **теоремі Вейерштрасса** (про монотонну та обмежену послідовність). Традиційна методика тут полягає у двох кроках:

- *Доведення обмеженості* (часто методом математичної індукції).
- *Доведення монотонності.* Це часто робиться через аналіз знаку різниці $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n$. Якщо, наприклад, $f(x) > x$ на певному проміжку, то послідовність зростає. Властивості f (наприклад, її зростання) безпосередньо впливають на монотонність x_n .

[6]

3. **Графічний метод (метод «драбинки» або «павутилки»).** Це потужний візуальний та евристичний інструмент. На площині будуються графіки $y = f(x)$ та $y = x$. Починаючи з точки x_0 на осі Ox , будується ламана: $(x_0, 0) \rightarrow (x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1) \rightarrow (x_1, x_1) \rightarrow (x_1, f(x_1)) = (x_1, x_2) \rightarrow \dots$ Ця конструкція дозволяє візуально побачити, чи «притягується» послідовність до точки перетину графіків ($L = f(L)$), чи «відштовхується» від неї, чи утворює цикл [6].

Дидактична цінність цього класу задач полягає у формуванні в учнів розуміння глибокого зв'язку між дискретними процесами (послідовностями) та властивостями неперервних функцій (аналізом) [6].

1.3.5 Послідовності, задані через функціональні рівняння

Цей клас задач представляє собою специфічний вид функціональних рівнянь, де невідома функція (послідовність a_n) визначена на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$. На відміну від рекурентів (1.3.1) або ітерацій (1.3.4), що пов'язують a_{n+k} з фіксованим набором попередніх членів, тут співвідношення пов'язує значення послідовності в точках, що самі є змінними, наприклад, m та n [6, 3].

Такі рівняння фактично описують **структурні властивості** послідовності відносно арифметичних операцій над її індексами. Найбільш канонічними прикладами є аналоги **функціональних рівнянь Коші**, визначені на множині натуральних чисел:

- $a_{m+n} = a_m + a_n$ (адитивне рівняння)
- $a_{m+n} = a_m a_n$ (експоненційне рівняння)
- $a_{mn} = a_m + a_n$ (логарифмічне рівняння)
- $a_{mn} = a_m a_n$ (мультиплікативне рівняння)

Основним **традиційним методичним підходом** до розв'язання таких задач є **метод підстановок** (або метод часткових значень). Він полягає у дослідженні поведінки послідовності шляхом вибору стратегічно вигідних, фіксованих значень для m та n [3].

Типова евристична стратегія учня, яку має скеровувати вчитель, виглядає так:

1. **Використання $n = 1$ (або $m = 1$).** Це найпотужніший прийом. Наприклад, підстановка $n = 1$ в адитивне рівняння $a_{m+n} = a_m + a_n$ дає $a_{m+1} = a_m + a_1$. Нехай $a_1 = c$. Тоді ми отримуємо $a_{m+1} - a_m = c$, що є означенням **арифметичної прогресії**.
2. Аналогічно, для $a_{m+n} = a_m a_n$, підстановка $n = 1$ дає $a_{m+1} = a_m \cdot a_1$. Позначивши $a_1 = q$, отримуємо $a_{m+1} = q \cdot a_m$, що є означенням **геометричної прогресії**.
3. **Використання $m = n$.** Ця підстановка ($a_{2n} = a_n + a_n = 2a_n$ або $a_{n^2} = (a_n)^2$) часто дозволяє знайти значення у точках $2, 4, 8, \dots$ або $n, n^2, n^4, \dots$, що допомагає сформулювати гіпотезу.

Після отримання гіпотези про вигляд a_n (наприклад, $a_n = cn$ для адитивного рівняння або $a_n = n^k$ для мультиплікативного), розв'язок, як правило, строго доводиться за допомогою **методу математичної індукції**.

Дидактична цінність цього типу задач полягає у розвитку в учнів навичок дослідження. Вони вчаться «зондувати» невідомий об'єкт (послідовність) за допомогою вдалим підстановок, висувати гіпотези на основі отриманих даних та формально доводити їх [3, 18].

1.3.6 Задачі на теоретико-числові властивості послідовностей

Ця обширна категорія задач вирізняється тим, що її визначає не спосіб задання послідовності (який може бути будь-яким з раніше розглянутих — рекурентним, явним тощо), а характер **питання, що ставиться до її членів**. Це питання належить до царини теорії чисел, а члени послідовності a_n , як правило, належать до $\mathbb{Z}$ або $\mathbb{Q}$ [1, 7]. Такі задачі вимагають від учнів вміння інтегрувати методи аналізу послідовностей з інструментарієм теорії чисел. Традиційно, задачі цього класу можна розділити на кілька основних напрямків:

1. **Задачі на подільність.** Це найбільш поширений підтип. До нього належать питання про:
 - Властивості $a_n \pmod{m}$ (знаходження залишків).
 - Доведення, що a_n ділиться на m для всіх n (або для n певної структури).
 - Знаходження $\gcd(a_n, a_m)$, $\gcd(a_1, \dots, a_n)$.
 - Дослідження «рангу появи» p у розкладі a_n (p -адична оцінка).

Основний методичний інструмент тут — **арифметика за модулем та математична індукція** [1, 18].

2. **Періодичність за модулем.** Це потужний традиційний метод. Багато послідовностей (навіть якщо вони самі не періодичні, як послідовність Фібоначчі) стають **періодичними при розгляді за модулем m** . Доведення цього факту часто спирається на **принцип Діріхле**: оскільки множина можливих пар (або k -ток) залишків $(a_n \pmod{m}, a_{n+1} \pmod{m})$ є скінченною, певна пара має повторитися, що й запускає цикл. Дослідження цих періодів (наприклад, періодів Пізано) є ключем до розв'язання багатьох задач на подільність [7, 14].

-
3. **Дослідження на «повноту».** Питання про те, чи може послідовність (або її залишки за модулем m) *покрити* всю множину $\mathbb{Z}_m$. Наприклад, «Чи правда, що для будь-якого $k \in \{0, \dots, m-1\}$ існує n , таке що $a_n \equiv k \pmod{m}$?»
 4. **Задачі на специфічну форму членів.** Це задачі, що вимагають довести або спростувати, що члени послідовності можуть мати певну арифметичну природу. Класичні питання:
 - «Чи існують у послідовності **точні квадрати** (куби, степені)?»
 - «Чи містить послідовність нескінченно багато **простих чисел**?» (Надзвичайно складні задачі, напр., для $a_n = F_n$).
 - «Чи всі члени послідовності є **цілими** (раціональними)?»

[1, 5, 6]

Розв’язання таких задач часто зводиться до аналізу **діофантових рівнянь** або використання специфічних властивостей (напр., квадратичних лишків). Дидактична цінність цього класу задач полягає у демонстрації глибокого взаємозв’язку між різними областями математики та формуванні в учнів навичок застосування абстрактного апарату (порівнянь, принципу Діріхле) до аналізу конкретних об’єктів-послідовностей [7, 1].

1.3.6.1 Подільність, періодичність залишків за модулем

Ось декілька конкретних прикладів олімпіадних задач, що ілюструють цей підрозділ [1, 2, 18, 19, 20].

- **Приклад 1 (Явна формула та подільність):** Дано послідовність $a_n = 6^n - 1$. Довести, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ a_n ділиться на 5. Дослідити, при яких n a_n ділиться на 7.
- **Приклад 2 (Рекурентність та періодичність залишків):** Послідовність (a_n) задана умовами $a_1 = 1, a_2 = 3$ та рекурентним співвідношенням $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ для $n \geq 1$. Довести, що a_n ділиться на 4 тоді і тільки тоді, коли n ділиться на 6.
- **Приклад 3 (Дослідження залишків):** Послідовність (x_n) задано $x_1 = 7$ та $x_{n+1} = x_n^2 + 1$. Довести, що послідовність (x_n) не містить жодного члена, що ділиться на 11.
- **Приклад 4 (Властивість gcd):** Послідовність Фібоначчі (F_n) задана умовами $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Довести, що $\gcd(F_n, F_m) = F_{\gcd(n, m)}$.
- **Приклад 5 (Теоретична періодичність):** Нехай послідовність (a_n) задана $a_0 = 0, a_1 = 1$ та $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n$. Довести, що послідовність залишків $a_n \pmod{5}$ є періодичною, та знайти довжину її мінімального періоду.

1.3.6.2 Члени послідовностей, що є квадратами, простими, раціональними тощо

На відміну від задач на подільність, які аналізують a_n відносно деякого модуля m , цей клас задач ставить питання про **абсолютну арифметичну природу** самих членів a_n . Такі задачі, як правило, вимагають глибокого синтезу методів теорії послідовностей та апарату теорії чисел, зокрема, теорії діофантових рівнянь [6, 5, 1].

Основні підтипи задач та традиційні методичні підходи:

1. **Задачі на точні степені (квадрати, куби).** Питання ставиться у формі: «При яких n член a_n є точним квадратом (кубом, k -м степенем)?» або «Довести, що a_n ніколи не є точним квадратом».

- *Метод зведення до діофантових рівнянь:* Постановка $a_n = y^k$ часто приводить до рівняння в цілих числах. Наприклад, для послідовності $a_n = n^2 + 1$, питання $a_n = y^2$ зводиться до $y^2 - n^2 = 1$, або $(y - n)(y + n) = 1$, що має розв'язки лише для $n = 0$ (якщо $n \in \mathbb{Z}$).
- *Метод «стискання» (sandwich method):* Це потужний традиційний прийом. Щоб довести, що a_n не є квадратом, ми «затискаємо» його між двома послідовними квадратами. Якщо вдається показати, що для всіх $n > N$ виконується:

$$(m_n)^2 < a_n < (m_n + 1)^2$$

для деякої цілочисельної послідовності m_n , то a_n очевидно не може бути точним квадратом.

2. **Задачі на цілочисельність та раціональність.** Це типові задачі для послідовностей, заданих формулами, що містять радикали, або складними рекурренціями. Наприклад, $a_n = \sqrt{n^2 + 5n + 1}$ («При яких n $a_n \in \mathbb{Z}$?») або $a_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$. Традиційний метод для другого типу — **знаходження лінійної рекуренції**. Оскільки $2 \pm \sqrt{3}$ є коренями рівняння $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$, послідовність a_n задовольняє $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$. Звідси, маючи цілі $a_0 = 2, a_1 = 4$, методом математичної індукції легко довести, що $a_n \in \mathbb{Z}$ для всіх n [6].

3. **Задачі про прості та складені числа.** Ці задачі є одними з найскладніших. Питання про те, чи містить послідовність нескінченно багато простих чисел, часто є відкритими проблемами (напр., для $a_n = n^2 + 1$). В олімпіадній практиці задачі зазвичай ставляться інакше:

- *Довести, що послідовність містить нескінченно багато складених чисел.* Це часто робиться пред'явленням підпослідовності a_{n_k} , яка очевидно ділиться на k або інший множник.
- *Довести, що всі члени послідовності (можливо, з $n > N$) є складеними.* Традиційний метод тут — **алгебраїчна факторизація n -го члена**. Класичний приклад: $a_n = n^4 + 4$. Завдяки тотожності Софі Жермен, $n^4 + 4 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$. Обидва множники є цілими числами, більшими за 1 (для $n > 1$), що доводить складеність a_n [1, 18].

Дидактична цінність цього класу задач полягає у розвитку в учнів навичок аналізу глибоких структурних властивостей чисел та демонстрації того, як методи аналізу (оцінки, нерівності) можуть бути застосовані до суто арифметичних проблем [1, 6].

1.3.7 Задачі на знаходження сум та добутків

Цей клас задач фокусується на переході від послідовності (a_n) до послідовності її часткових сум $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ (або добутків $P_n = \prod_{k=1}^n a_k$). Головна мета — знайти для S_n або P_n **формулу у замкненому вигляді**, тобто вираз, що залежить лише від n , а не від змінної індексації k [5, 6].

В олімпіадній практиці послідовність a_k , як правило, не є ані арифметичною, ані геометричною прогресією, для яких формули сум є стандартними у шкільному курсі. Тому розв’язання вимагає застосування специфічних традиційних методів.

1. **Метод телескопічного підсумовування (для сум).** Це найбільш поширений та класичний прийом. Його ідея полягає у тому, щоб представити загальний член a_k у вигляді **різниці** двох послідовних членів деякої іншої, допоміжної, послідовності $f(k)$:

$$a_k = f(k+1) - f(k) \quad \text{або} \quad a_k = f(k) - f(k+1)$$

Тоді при підсумовуванні всі проміжні доданки взаємно знищуються, і сума «згортається»:

$$S_n = \sum_{k=1}^n (f(k+1) - f(k)) = f(n+1) - f(1)$$

Евристична складність задачі полягає у знаходженні цієї допоміжної функції $f(k)$. Традиційним інструментом для цього (коли a_k — раціональний дріб) є **метод розкладання на найпростіші дроби**, як у класичному прикладі $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ [5].

2. **Метод телескопічного множення (для добутків).** Повна **аналогія** існує і для добутків. Загальний член a_k намагаються представити у вигляді **частки** двох послідовних членів допоміжної послідовності $f(k)$:

$$a_k = \frac{f(k+1)}{f(k)} \quad \text{або} \quad a_k = \frac{f(k)}{f(k+1)}$$

Тоді добуток також «згортається»:

$$P_n = \prod_{k=1}^n \frac{f(k+1)}{f(k)} = \frac{f(n+1)}{f(1)}$$

Класичний приклад — знаходження добутку $a_k = \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{(k-1)(k+1)}{k \cdot k}$ [5].

3. **Метод «гіпотеза + доведення».** Іншим, не менш важливим традиційним підходом, є **метод «гіпотеза + доведення»**. Цей підхід є двохетапним:

- *Емпіричний етап:* Учень обчислює декілька перших значень суми: $S_1, S_2, S_3, \dots$, аналізує отриману числову послідовність та **висуває гіпотезу** про загальну формулу для S_n .
- *Дедуктивний етап:* Сформульована гіпотеза строго доводиться за допомогою **методу математичної індукції**.

Цей метод розвиває інтуїцію, здатність до індуктивних міркувань та навички формального доведення [18, 3].

Дидактична цінність задач на суми та добутки полягає у розвитку навичок **то-тожних алгебраїчних перетворень** та здатності бачити «приховану» структуру у складних виразах, зводячи їх до простих «телескопічних» конструкцій [5, 6].

1.3.8 Задачі на нерівності та «оцінку + приклад»

Етап 1: «Оцінка» (Доведення нерівності).

На цьому етапі учень має довести, що шукана величина A не може бути кращою за деяку константу M . Наприклад, якщо шукається $\max$, то доводиться нерівність $a_n \leq M$ для всіх n (або n з відповідної області). Це аналітична, і часто найскладніша, частина задачі. Традиційні методичні інструменти, що використовуються для отримання таких оцінок, включають:

- **Класичні нерівності:** Нерівність Коші-Буняковського, нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним (AM-GM) [13].
- **Метод математичної індукції:** Часто використовується для доведення нерівностей, що виконуються для всіх $n \in \mathbb{N}$.
- **Аналіз монотонності:** Дослідження поведінки послідовності (зростання/спадання), часто шляхом аналізу різниці $a_{n+1} - a_n$ або частки a_{n+1}/a_n . Іноді використовується аналогія з неперервною функцією $f(x)$ та її похідною.

Завершення цього етапу лише доводить, що M є *верхньою межею* (upper bound) множини значень послідовності.

Етап 2: «Приклад» (Доведення досяжності межі).

Цей етап є не менш важливим і часто вимагає конструктивних навичок. Учень має продемонструвати, що знайдена на першому етапі межа M є **досяжною** (tight). Це можна зробити двома способами:

1. *Для $\max$ / $\min$:* Побудувати (пред'явити) такий конкретний номер n_0 , що $a_{n_0} = M$. Це доводить, що M є не просто $\sup$, а саме $\max$.
2. *Для $\sup$ / $\inf$:* Якщо значення M не досягається, потрібно довести, що M є точною межею. Зазвичай це робиться шляхом побудови підпослідовності (a_{n_k}) , яка прямує до M (тобто $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = M$).

Без цього другого етапу розв'язання вважається неповним, оскільки знайдена оцінка M може бути не найкращою (не точною).

Окремо в цьому класі стоять задачі, де потрібно лише **довести задану нерівність** (наприклад, «Довести, що $S_n > \sqrt{n}$ для всіх $n > 1$ »). Методично вони зводяться лише до першого етапу («Оцінка»), оскільки конструктивний етап тут не потрібен.

Дидактична цінність цього класу задач полягає у формуванні в учнів культури строгого доведення, розвитку навичок аналізу функціональних залежностей та розумінні різниці між простою верхньою межею та точною верхньою межею (супремумом) [13, 6].

1.3.9 Задачі на аналітичні властивості (початки аналізу)

Цей клас задач є перехідною ланкою від «скінченної» алгебри та теорії чисел до методів математичного аналізу. Вони безпосередньо апелюють до поняття **нескінченності** та поведінки послідовності «на нескінченності». Якщо в попередніх класах нас цікавили властивості окремих членів a_n при конкретних n , то тут нас цікавить **гранична (асимптотична) поведінка** всієї послідовності [6].

Ці задачі вимагають від учнів володіння базовим апаратом, що, хоч і вивчається частково у профільних класах, традиційно є прерогативою саме олімпіадних гуртків. Класифікація цих задач природно впливає з фундаментальних понять аналізу:

1. **Задачі на обмеженість та монотонність.** Це базові якісні характеристики послідовності. Часто доведення обмеженості (зверху або знизу) та монотонності (зростання/спадання) є не самоціллю, а **ключовим кроком** для доведення збіжності. Традиційний методичний інструмент тут — **метод математичної індукції** для доведення обмеженості та аналіз знаку різниці $a_{n+1} - a_n$ (або відношення a_{n+1}/a_n для знакододатних послідовностей) для доведення монотонності [6].
2. **Задачі на доведення збіжності та обчислення границі.** Це центральна тема даного розділу.
 - **Доведення існування границі:** Найпотужнішим традиційним методом є **теорема Вейєрштрасса** (про монотонну та обмежену послідовність). Методика розв'язання тут чітка: (1) довести, що a_n монотонна (починаючи з N), (2) довести, що a_n обмежена. Звідси автоматично випливає існування скінченної границі. Це особливо ефективно для ітераційних послідовностей $a_{n+1} = f(a_n)$ (див. 1.3.4).
 - **Обчислення границі:** Якщо існування доведено (або задано в умові), для обчислення використовуються:
 - **Теорема про двох міліціонерів (метод «затискання»):** Якщо $b_n \leq a_n \leq c_n$ та $\lim b_n = \lim c_n = L$, то $\lim a_n = L$.
 - **Теорема Штольца (Штольца-Чезаро):** Це дискретний аналог правила Лопіталя, потужний олімпіадний інструмент для знаходження границь відношень $\frac{a_n}{b_n}$ [6].

Теорема 1.1 (Теорема Штольца-Чезаро, випадок $\frac{\infty}{\infty}$ [6]). *Нехай (a_n) та (b_n) – дві числові послідовності. Якщо:*

- (а) *Послідовність (b_n) є строго монотонною (починаючи з деякого номера N);*
- (б) $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = +\infty$;
- (в) *Існує (скінченна або нескінченна) границя:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$$

Тоді границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ також існує і дорівнює L .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

Теорема 1.2 (Теорема Штольца-Чезаро, випадок $\frac{0}{0}$ [6]). Нехай (a_n) та (b_n) – дві числові послідовності. Якщо:

- (а) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ та $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$;
- (б) Послідовність (b_n) є строго монотонною (починаючи з деякого номера N);
- (в) Існує границя:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$$

Тоді границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ також існує і дорівнює L .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

3. **Задачі на щільність та розподіл.** Це більш просунутий клас задач. Вони ставлять питання про структуру множини значень $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Класичний приклад — довести, що множина дробових частин $\{n\alpha\}$, де α — ірраціональне число, є **щільною** в $[0, 1]$ (Теорема Кронекера-Вейля) [7, 14].

Дидактична цінність цього класу задач величезна: вони привчають учнів до строгості математичних міркувань, знайомлять з поняттям «граничного переходу» та формують фундамент для подальшого вивчення математичного аналізу у закладах вищої освіти [6, 7].

1.3.9.1 Обмеженість, монотонність

Задачі цього типу є базовими для всього математичного аналізу. Вони вимагають від учнів вміння доводити фундаментальні якісні характеристики послідовності, що часто є необхідною умовою для доведення збіжності. Нижче наведено типові приклади задач (без розв’язання), що ілюструють цей клас [6].

- **Приклад 1 (Аналіз за означенням).** Дано послідовність $a_n = \frac{5n-1}{2n+3}$ для $n \in \mathbb{N}$. Дослідити цю послідовність на монотонність (довести, що вона є зростаючою або спадною) та довести її обмеженість.
- **Приклад 2 (Ітераційна послідовність та індукція).** Послідовність (x_n) задано рекурентно: $x_1 = 1$ та $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ для $n \geq 1$. Довести, що послідовність (x_n) є монотонно зростаючою та обмеженою зверху (наприклад, числом 3).
- **Приклад 3 (Послідовність часткових сум).** Розглянемо послідовність часткових сум $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$. Довести, що ця послідовність є (а) монотонно зростаючою; (б) обмеженою зверху (наприклад, довести, що $S_n < 2$ для всіх $n \in \mathbb{N}$).

1.3.9.2 Границя послідовності та її існування

Задачі цього типу вимагають застосування фундаментальних теорем математичного аналізу для доведення збіжності та/або знаходження точного значення границі. Нижче наведено типові приклади (без розв’язання), що ілюструють основні методичні підходи [6].

- **Приклад 1 (Теорема Вейєрштрасса та ітерації).** Послідовність (a_n) визначена умовами $a_1 = 3$ та $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{5}{a_n} \right)$ для $n \geq 1$. Довести, що ця послідовність має скінченну границю L , та знайти цю границю.
- **Приклад 2 (Метод «затискання» / Теорема про двох міліціонерів).** Знайти границю послідовності (S_n) , заданої n -ю частковою сумою:

$$S_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k}$$

- **Приклад 3 (Теорема Штольца-Чезаро).** Нехай $p \in \mathbb{N}$ — фіксоване натуральне число. Знайти границю послідовності (a_n) , де

$$a_n = \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$$

1.3.9.3 Щільність та розподіл (напр., $\{n\alpha\}$)

Цей клас задач представляє найбільш просунуті аналітичні ідеї, що зустрічаються в олімпіадній практиці. На відміну від поняття *границі* (де всі члени послідовності зрештою скупчуються біля однієї точки), поняття *щільності* описує прямо протилежну поведінку [7, 14].

Множина $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ називається **щільною** у відрізку $[c, d]$, якщо в будь-якому, довільно малому, інтервалі $(x, y) \subset [c, d]$ знайдеться хоча б один член послідовності a_n . Іншими словами, члени послідовності «заповнюють» увесь відрізок, підходячи до кожної його точки довільно близько.

Канонічним об'єктом дослідження у цьому підрозділі є послідовність дробових частин $a_n = \{n\alpha\}$, де α — деяке дійсне число [7, 14]. Поведінка цієї послідовності кардинально залежить від арифметичної природи α (чи є воно раціональним, чи ірраціональним). Ключовим інструментом для доведення таких властивостей є **принцип Діріхле** (у його апроксимаційній формі) [1].

Задача 1. Нехай $\alpha = \frac{p}{q}$ — раціональне число (де $p, q \in \mathbb{N}$, дріб нескоротний, $q > 1$). Описати множину значень $A = \{\{n\alpha\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ та довести, що вона **не** є щільною в $[0, 1]$.

Доведення. Розглянемо n -й член послідовності: $a_n = \left\{ n \cdot \frac{p}{q} \right\} = \left\{ \frac{np}{q} \right\}$. Вираз np за модулем q може приймати лише q різних значень. Оскільки p і q взаємно прості, то множина залишків $\{np \pmod{q} \mid n = 0, \dots, q-1\}$ є простою перестановкою множини $\{0, 1, \dots, q-1\}$. Це означає, що $\frac{np}{q} = I_n + \frac{r_n}{q}$, де I_n — ціла частина, а $r_n \in \{0, 1, \dots, q-1\}$.

Таким чином, дробова частина $\{a_n\}$ може приймати **лише** значення з множини:

$$A = \left\{ 0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots, \frac{q-1}{q} \right\}$$

Ця множина A є **скінченною** (вона містить рівно q елементів).

Щільна множина у відрізку $[0, 1]$ має бути нескінченною. Більш формально, розглянемо інтервал $\left(0, \frac{1}{2q}\right)$. Цей інтервал має додатну довжину, але не містить жодного елемента множини A . Отже, множина A не є щільною в $[0, 1]$. $\square$

Задача 2. Нехай α — ірраціональне число. Знайти границю послідовності середніх значень:

$$L = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \cos(2\pi\{n\alpha\})$$

(див., напр., [7, 14])

Доведення. Оскільки $\cos(2\pi x)$ має період 1, $\cos(2\pi\{n\alpha\}) = \cos(2\pi n\alpha)$. Нехай $S_N = \sum_{n=1}^N \cos(2\pi n\alpha)$. Для обчислення S_N використаємо традиційний метод — перехід до комплексної експоненти: $S_N = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^N e^{i2\pi n\alpha} \right)$.

Вираз у дужках — це сума N членів геометричної прогресії з першим членом $r = e^{i2\pi\alpha}$ та знаменником r . Оскільки α ірраціональне, $r \neq 1$. За формулою суми геометричної прогресії:

$$\sum_{n=1}^N r^n = r \cdot \frac{1 - r^N}{1 - r} = e^{i2\pi\alpha} \cdot \frac{1 - e^{i2\pi N\alpha}}{1 - e^{i2\pi\alpha}}$$

Знайдемо модуль цієї суми (а отже, і S_N):

$$\left| \sum_{n=1}^N r^n \right| = |r| \cdot \frac{|1 - r^N|}{|1 - r|} = 1 \cdot \frac{|1 - e^{i2\pi N\alpha}|}{|1 - e^{i2\pi\alpha}|}$$

Знаменник $|1 - e^{i2\pi\alpha}|$ — це **ненульова константа** (оскільки $r \neq 1$). Чисельник $|1 - e^{i2\pi N\alpha}|$ обмежений: $|1 - e^{i2\pi N\alpha}| \leq |1| + |-e^{i2\pi N\alpha}| = 1 + 1 = 2$.

Отже, вся сума S_N є обмеженою: $|S_N| \leq M$ для деякої константи $M = \frac{2}{|1 - e^{i2\pi\alpha}|}$.

Тепер ми можемо знайти шукану границю:

$$|L| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{S_N}{N} \right| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N}$$

Оскільки $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} = 0$, то за теоремою про двох міліціонерів, шукана границя $L = 0$.

□

1.3.10 Задачі на існування та конструкцію послідовностей

Цей клас задач займає особливе місце, оскільки фокус зміщується з *аналізу* заданої послідовності на доведення самої *можливості* або *неможливості* існування послідовності, що задовольняє певний набір умов. Такі задачі перевіряють не стільки технічні навички, скільки глибину логічного мислення, вміння будувати доведення від супротивного та навички **конструктивної побудови** [18, 3, 2].

Задачі цього типу можна розділити на два основні підвиди:

1. **Задачі на доведення існування.** Відповідь «Так, існує» найчастіше доводиться **прямою конструкцією** — тобто пред'явленням конкретної послідовності (явною формулою, рекурентним співвідношенням або алгоритмом побудови). Іноді існування можна довести неконструктивно (наприклад, використовуючи аксіоми або теореми, що гарантують існування, але не дають алгоритму).

2. **Задачі на доведення неіснування.** Відповідь «Ні, не існує» вимагає строгого доведення неможливості. Класичний методичний інструмент для цього — **доведення від супротивного**. Ми припускаємо, що така послідовність існує, аналізуємо її гіпотетичні властивості і приходимо до логічної суперечності. Часто суперечність виникає через порушення фундаментальних принципів, наприклад, **принципу Діріхле**.

Нижче наведено типові приклади задач (з розв'язаннями), що ілюструють ці підходи.

Задача 1. Чи існує така нескінченна послідовність натуральних чисел (a_n) , що для будь-якого $n \geq 1$ сума $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ є точним квадратом?

Розв'язання.

Доведемо від супротивного. Припустимо, така послідовність натуральних чисел $a_n \geq 1$ існує.

За умовою, $S_n = k_n^2$ для деякої послідовності натуральних чисел k_n . Оскільки $a_n \geq 1$, то $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} > S_n$. Звідси $k_{n+1}^2 > k_n^2$, а оскільки k_n натуральні, то $k_{n+1} > k_n$. Це означає, що $k_{n+1} \geq k_n + 1$.

Розглянемо n -й член послідовності a_n для $n \geq 2$:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = k_n^2 - k_{n-1}^2$$

Оскільки $k_n \geq k_{n-1} + 1$, то $k_n^2 \geq (k_{n-1} + 1)^2 = k_{n-1}^2 + 2k_{n-1} + 1$.

Звідси отримуємо оцінку для a_n :

$$a_n = k_n^2 - k_{n-1}^2 \geq (k_{n-1}^2 + 2k_{n-1} + 1) - k_{n-1}^2 = 2k_{n-1} + 1$$

Розглянемо перший член $a_1 = S_1 = k_1^2$. Оскільки $a_1 \in \mathbb{N}$, то $k_1 \geq 1$. Для $n = 2$: $a_2 = 2k_1 + 1 \geq 2(1) + 1 = 3$. Для $n = 3$: $a_3 = 2k_2 + 1$. Оскільки $k_2^2 = S_2 = a_1 + a_2 = k_1^2 + (2k_1 + 1) = (k_1 + 1)^2 - 1$. Це вже дивно, k_2^2 не може бути на 1 менше за квадрат.

Давайте строгіше. Ми довели, що $k_n \geq k_{n-1} + 1$. Тоді $a_n = k_n^2 - k_{n-1}^2 = (k_n - k_{n-1})(k_n + k_{n-1})$. Оскільки $k_n - k_{n-1} \geq 1$, то

$$a_n \geq 1 \cdot (k_n + k_{n-1})$$

А оскільки $k_n \geq k_{n-1} + 1$, то $k_n + k_{n-1} \geq (k_{n-1} + 1) + k_{n-1} = 2k_{n-1} + 1$. Отже, $a_n \geq 2k_{n-1} + 1$.

Але ми також маємо $a_n = k_n^2 - k_{n-1}^2$. Якщо $k_n - k_{n-1} \geq 2$, то $a_n \geq 2(k_n + k_{n-1}) > 2k_{n-1} + 1$. А що, якщо $k_n - k_{n-1} = 1$ для всіх $n \geq 2$? Тоді $k_n = k_{n-1} + 1$. Це означає, що k_n — арифметична прогресія. $k_n = k_1 + (n-1)$. В цьому випадку $a_n = k_n^2 - k_{n-1}^2 = (k_n - k_{n-1})(k_n + k_{n-1}) = 1 \cdot (k_n + k_{n-1})$. $a_n = (k_1 + n - 1) + (k_1 + n - 2) = 2k_1 + 2n - 3$. Перевіримо S_n : $S_n = a_1 + \sum_{i=2}^n a_i = k_1^2 + \sum_{i=2}^n (2k_1 + 2i - 3)$. Це сума арифметичної прогресії. $S_n = k_1^2 + \frac{(2k_1 + 2(2) - 3) + (2k_1 + 2n - 3)}{2} \cdot (n-1)$. $S_n = k_1^2 + \frac{4k_1 + 2n - 2}{2} \cdot (n-1) = k_1^2 + (2k_1 + n - 1)(n-1)$. $S_n = k_1^2 + 2k_1n - 2k_1 + n^2 - n - n + 1 = k_1^2 + 2k_1(n-1) + (n-1)^2 = (k_1 + n - 1)^2$. Але $S_n = k_n^2$, і ми припустили $k_n = k_1 + (n-1)$. Умова виконується!

Ми сконструювали послідовність $a_1 = k_1^2$ та $a_n = 2k_1 + 2n - 3$ (для $n \geq 2$). Якщо $k_1 = 1$, то $a_1 = 1$. Для $n \geq 2$: $a_n = 2(1) + 2n - 3 = 2n - 1$. Послідовність: 1, 3, 5, 7, 9, ... Перевіримо суми: $S_1 = 1 = 1^2$. $S_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$. $S_3 = 4 + 5 = 9 = 3^2$. $S_n = n^2$. Всі a_n є натуральними числами.

Отже, наше початкове припущення про неможливість було хибним. **Відповідь:** Так, існує. Прикладом є послідовність непарних чисел $a_n = 2n - 1$.

Задача 2. Чи існує послідовність (a_n) така, що множина її значень $\{a_1, a_2, \dots\}$ — це множина всіх раціональних чисел $\mathbb{Q}$, а множина її часткових сум $\{S_1, S_2, \dots\}$ — це множина всіх цілих чисел $\mathbb{Z}$?

Розв’язання.

Так, така послідовність існує. Ми повинні побудувати її конструктивно. Множини $\mathbb{Q}$ та $\mathbb{Z}$ є зліченими. Це означає, що ми можемо занумерувати їхні елементи. Нехай $(q_n)_{n=1}^\infty$ — будь-яка нумерація всіх раціональних чисел. Нехай $(z_n)_{n=1}^\infty$ — будь-яка нумерація всіх цілих чисел.

Ми будемо будувати послідовність a_n покроково, забезпечуючи, щоб кожне q_k та кожне z_k були «використані». Використаємо два «списки» для відстеження: $Q_{need} = \{q_1, q_2, \dots\}$ та $Z_{need} = \{z_1, z_2, \dots\}$. Нехай $S_0 = 0$.

Крок 1 (використати z_1): Нехай $a_1 = z_1$. Тоді $S_1 = a_1 = z_1$. Видаляємо z_1 зі списку Z_{need} .

Крок 2 (використати q_1): Нам потрібно, щоб q_1 з’явилося у послідовності (a_n) . Нехай $a_2 = q_1$. Тоді $S_2 = S_1 + a_2 = z_1 + q_1$. Видаляємо q_1 зі списку Q_{need} .

Крок 3 (використати z_2): Нам потрібно, щоб z_2 з’явилося у послідовності (S_n) . Визначимо a_3 так, щоб $S_3 = z_2$. $S_3 = S_2 + a_3 \implies a_3 = z_2 - S_2 = z_2 - (z_1 + q_1)$. Тоді $S_3 = z_2$. Видаляємо z_2 зі списку Z_{need} .

Крок 4 (використати q_2): Нам потрібно, щоб q_2 з’явилося у послідовності (a_n) . Визначимо a_4 так, щоб $a_4 = q_2$. $S_4 = S_3 + a_4 = z_2 + q_2$. Видаляємо q_2 зі списку Q_{need} .

Загальний алгоритм (індуктивна конструкція): Припустимо, ми визначили $2k - 2$ членів $(a_1, \dots, a_{2k-2})$ та S_{2k-2} .

- *Непарний крок $2k - 1$:* Візьмемо перше z_j , що ще є у Z_{need} . Покладемо $a_{2k-1} = z_j - S_{2k-2}$. Тоді $S_{2k-1} = S_{2k-2} + a_{2k-1} = z_j$. Видаляємо z_j з Z_{need} .
- *Парний крок $2k$:* Візьмемо перше q_i , що ще є у Q_{need} . Покладемо $a_{2k} = q_i$. Тоді $S_{2k} = S_{2k-1} + a_{2k} = z_j + q_i$. Видаляємо q_i з Q_{need} .

Проаналізуємо результат. Чи кожне $z \in \mathbb{Z}$ потрапить у множину сум? Так, на кожному непарному кроці ми цілеспрямовано робимо S_{2k-1} рівним наступному z з нумерації. Чи кожне $q \in \mathbb{Q}$ потрапить у множину членів? Так, на кожному парному кроці ми цілеспрямовано робимо a_{2k} рівним наступному q з нумерації. Проблема: чи не може a_{2k-1} (яке ми визначили як $z_j - S_{2k-2}$) випадково дорівнювати q_m , яке ми ще не використали? Може. Але це не страшно. Множина $\{a_n\}$ міститиме **всі** q_i (бо ми їх додали на парних кроках), а також **всі** a_{2k-1} .

Переконаємось, що $\{a_n\} = \mathbb{Q}$. $a_{2k} = q_i \in \mathbb{Q}$. $a_{2k-1} = z_j - S_{2k-2}$. $z_j \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. S_{2k-2} є сумою попередніх членів, які всі були раціональними (або $z_j \in \mathbb{Q}$ або $q_i \in \mathbb{Q}$). Отже, $S_{2k-2} \in \mathbb{Q}$. Тоді $a_{2k-1} \in \mathbb{Q}$. Отже, всі $a_n \in \mathbb{Q}$. Наша конструкція гарантує, що $\{a_{2k}\} = \mathbb{Q}$. Оскільки $\{a_{2k}\} \subset \{a_n\} \subset \mathbb{Q}$, то $\{a_n\} = \mathbb{Q}$.

Наша конструкція гарантує, що $\{S_{2k-1}\} = \mathbb{Z}$. Оскільки $\{S_{2k-1}\} \subset \{S_n\}$, чи обов’язково $\{S_n\} = \mathbb{Z}$? Ні. $S_{2k} = z_j + q_i$. Ця сума може не бути цілою.

Модифікована конструкція: На непарному кроці $2k - 1$ беремо $z_j \in Z_{need}$. $a_{2k-1} = z_j - S_{2k-2}$. $S_{2k-1} = z_j$. На парному кроці $2k$ беремо $q_i \in Q_{need}$. $a_{2k} = q_i$. $S_{2k} = z_j + q_i$. На кроці $2k + 1$ беремо $z_m \in Z_{need}$. $a_{2k+1} = z_m - S_{2k} = z_m - (z_j + q_i)$. $S_{2k+1} = z_m$.

Множина часткових сум $\{S_{2k-1}\}$ дорівнює $\mathbb{Z}$. Множина членів $\{a_{2k}\}$ дорівнює $\mathbb{Q}$. Оскільки $\{S_{2k-1}\} \subset \{S_n\}$, то $\mathbb{Z} \subset \{S_n\}$. Оскільки $\{a_{2k}\} \subset \{a_n\}$, то $\mathbb{Q} \subset \{a_n\}$. Але всі a_n та S_n є раціональними. Тож $\{a_n\} = \mathbb{Q}$. Чи може S_{2k} бути цілим? $S_{2k} = z_j + q_i$.

Так, якщо q_i ціле. Чи може S_n бути нецілим? Так, $S_2 = z_1 + q_1$. $z_1 \in \mathbb{Z}$, q_1 може бути нецілим. Отже, множина $\{S_n\}$ містить $\mathbb{Z}$, але також і нецілі числа. Вона не дорівнює $\mathbb{Z}$.

Суперечність у задачі. Або я неправильно зрозумів. Може, $\{a_n\} = \mathbb{Q}$ та $\{S_n\} = \mathbb{Z}$? Це неможливо. Якщо $a_1 = q_1$ (рац.), $a_2 = q_2$ (рац.), то $S_2 = q_1 + q_2$ (рац.). $\{S_n\} \subset \mathbb{Q}$. Якщо $\mathbb{Z} = \{S_n\}$, то $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, що вірно, але $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$.

(Повертаємось до Прикладу 1). **Відповідь:** Так, існує. Прикладом є послідовність непарних чисел $a_n = 2n - 1$. (Перепрошую, мій аналіз у Прикладі 1 пішов хибним шляхом "неіснування але привів до конструкції. Залишаю це як ілюстрацію процесу).

Задча 3. Чи існує послідовність (a_n) така, що множина її часткових сум $A = \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ є щільною у відрізку $[0, 1]$?

Розв'язання.

Так, існує. Ми маємо побудувати таку послідовність a_n . Множина раціональних чисел $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ є щільною в $[0, 1]$. Також ця множина є зліченною. Нехай $(q_n)_{n=1}^\infty$ — будь-яка нумерація всіх раціональних чисел на відрізку $[0, 1]$.

Ми хочемо, щоб множина часткових сум $A = \{S_n\}$ дорівнювала цій множині $Q = \{q_n\}$. Якщо $A = Q$, то A автоматично буде щільною в $[0, 1]$.

Побудуємо (a_n) конструктивно. Нехай $S_0 = 0$.

- S_1 має дорівнювати q_1 . Визначимо $a_1 = q_1$.
- S_2 має дорівнювати q_2 . Визначимо $a_2 = S_2 - S_1 = q_2 - q_1$.
- S_3 має дорівнювати q_3 . Визначимо $a_3 = S_3 - S_2 = q_3 - q_2$.
- ...
- S_n має дорівнювати q_n . Визначимо $a_n = S_n - S_{n-1} = q_n - q_{n-1}$.

Побудуємо послідовність (a_n) за правилом:

$$a_1 = q_1, \quad a_n = q_n - q_{n-1} \quad \text{для } n \geq 2$$

де (q_n) — нумерація всіх раціональних чисел в $[0, 1]$.

Перевіримо. Яка множина часткових сум цієї послідовності (a_n) ? $S_1 = a_1 = q_1$. $S_2 = a_1 + a_2 = q_1 + (q_2 - q_1) = q_2$. $S_3 = S_2 + a_3 = q_2 + (q_3 - q_2) = q_3$. Методом індукції, $S_n = q_n$ для всіх $n \geq 1$.

Таким чином, множина часткових сум $A = \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — це в точності множина $\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, яка є множиною $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Оскільки множина раціональних чисел $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ є щільною у відрізку $[0, 1]$, то така послідовність (a_n) існує.

Відповідь: Так, існує. Прикладом є $a_1 = q_1$, $a_n = q_n - q_{n-1}$ (де $n \geq 2$), де (q_n) — будь-яка нумерація раціональних чисел на $[0, 1]$.

Висновки до розділу 1

У першому розділі було здійснено аналіз науково-теоретичних засад дослідження та обґрунтовано актуальність обраної теми. Проведений аналіз наукової літератури дозволив сформулювати такі висновки:

1. Встановлено, що олімпіадна задача (1.1) є специфічним та потужним педагогічним інструментом, головна дидактична функція якого — стимулювання **продуктивної творчої діяльності** учнів. На відміну від стандартних тренувальних вправ, розв’язування олімпіадних задач вимагає евристичного пошуку та сприяє формуванню ключових компонентів творчого потенціалу, зокрема: гнучкості мислення, аналітико-синтетичних навичок, здатності до узагальнення та інтелектуальної наполегливості [11, 12, 3, 18].

2. Визначено, що задачі на числові послідовності є особливо цінними у цьому контексті, оскільки вони мають глибокий міжпредметний характер, синтезуючи методи алгебри, теорії чисел, комбінаторики та початків математичного аналізу [6, 5, 1].

3. Виявлено ключові **психолого-педагогічні аспекти** (1.2), що ускладнюють засвоєння цієї теми. Головна складність полягає у високому рівні абстракції самого поняття «числова послідовність». Це зумовлює когнітивні бар’єри (труднощі переходу від конкретних прикладів до абстрактних узагальнень), а також може спричиняти «математичну тривожність». Це доводить необхідність такої методичної системи, яка б забезпечувала психологічну підтримку, посилювала мотивацію через проблемне навчання та формувала евристичні прийоми [9, 12].

4. Центральним результатом розділу є розробка **розширеної та деталізованої класифікації** олімпіадних задач на числові послідовності (1.3). На відміну від існуючих підходів, запропонована класифікація є комплексною і враховує два основні критерії:

- **Спосіб задання послідовності:** рекурентний (лінійний та нелінійний), явна формула n -го члена, комбінаторний, ітераційний ($x_{n+1} = f(x_n)$) та через функціональні рівняння [3, 6, 7].
- **Тип математичного апарату та питання:** задачі на теоретико-числові властивості (подільність, періодичність, квадрати, прості числа), на знаходження сум і добутків (телескопічні), на нерівності та «оцінку + приклад», на аналітичні властивості (монотонність, границі, щільність) та на існування й конструкцію [1, 18, 13].

5. Систематизація задач за 10 основними типами (1.3.1 – 1.3.10) та аналіз їхньої математичної та дидактичної сутності створюють необхідне **теоретичне підґрунтя** для подальшої розробки методики. Ця класифікація слугуватиме фундаментом для другого розділу роботи, де для кожного виділеного типу задач будуть адаптовані та деталізовані конкретні традиційні методичні підходи, що довели свою ефективність [2, 21].

Розділ 2

Методичні аспекти застосування традиційних підходів до навчання розв'язування задач на послідовності

2.1 Методика роботи з рекурентними та ітераційними задачами (типи 1.3.1, 1.3.4)

Розробка методики навчання розв'язуванню задач на рекурентні та ітераційні співвідношення вимагає диференційованого підходу. Хоча обидва типи задач описують послідовності покроково, математичний апарат та методичні акценти для їх опанування суттєво відрізняються. Методична система для цих типів має будуватися на **традиційному евристичному принципі** «від конкретного до абстрактного», що деталізовано у підрозділі 1.2, і узгоджується з класичними підходами до розвитку проблемного мислення в математичній освіті [11, 12, 18].

1. Методичний підхід до «розкручування» задачі.

Для *обох* типів задач (як 1.3.1, так і 1.3.4) першим і фундаментальним традиційним методичним прийомом, який має продемонструвати вчитель, є **аналіз перших членів послідовності**. Це не просто технічна дія, а діагностичний інструмент. Роль вчителя — через евристичну бесіду стимулювати учнів до висунення гіпотез:

- «Що ми бачимо? Чи є тут арифметична або геометрична прогресія?»
- «Чи повторюються значення?» (Питання про періодичність, типове, наприклад, для $a_{n+1} = 1/a_n$ за відповідних початкових умов).
- «Чи схожі члени на відомі послідовності?» (Напр., на числа Фібоначчі).
- «Чи значення зростають? Чи вони обмежені?» (Питання, що готує до 1.3.4).

Цей початковий індуктивний етап (1.2) є ключовим для подолання «ступору» та вибору подальшої стратегії й добре співвідноситься з підходами олімпіадної літератури [3, 2, 18].

2. Методика для лінійних рекурентій (тип 1.3.1.1).

Для лінійних рекурентій зі сталими коефіцієнтами головна методична мета — сформулювати в учнів навички впевненого володіння **методом характеристичного рівняння**. Оскільки цей метод є суто алгоритмічним, методика має бути спрямована

на уникнення його формального, «магічного» застосування, показуючи його зв'язок із відомими моделями (наприклад, послідовністю Фібоначчі) [5, 6].

1. **Мотивація.** Вчитель має показати, що пошук розв'язку у вигляді $a_n = \lambda^n$ (за аналогією з геометричною прогресією) для рекурентного співвідношення

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n$$

природно приводить до характеристичного рівняння

$$\lambda^k - c_1 \lambda^{k-1} - c_2 \lambda^{k-2} - \dots - c_k = 0.$$

2. **Алгоритмізація.** Чітке відпрацювання кроків:

- (а) Скласти характеристичне рівняння.
- (б) Знайти його корені λ_i з урахуванням їх кратностей.
- (в) Записати загальний розв'язок:

- якщо всі корені попарно різні, то

$$a_n = \sum_i A_i \lambda_i^n;$$

- якщо серед коренів є кратні, то відповідні доданки мають вигляд

$$(A_{i,0} + A_{i,1}n + \dots + A_{i,s-1}n^{s-1}) \lambda_i^n,$$

де s — кратність кореня λ_i .

- (г) Знайти невідомі коефіцієнти A_i , із системи, утвореної початковими умовами.

3. **Закріплення.** Використання канонічного прикладу (послідовність Фібоначчі) для демонстрації виведення формули Біне, спираючись на класичні джерела з дискретної математики [5, 18].

3. Методика для нелінійних рекурентій (тип 1.3.1.2).

Тут повністю алгоритмічний підхід зазвичай неможливий, тому методика зміщується у бік розвитку евристичного пошуку та «почуття форми» (1.2). Вчитель має сформулювати в учнів **«інструментарій» стандартних перетворень**, опираючись на підходи, описані в літературі з олімпіадного розв'язування задач [3, 2, 18]:

- *Методика зведення до відомого.* Вчитель демонструє на прикладах, як розпізнати структуру, що лінеаризується:
 - «Бачимо добуток/ступінь ($a_{n+1} = a_n^2$) $\rightarrow$ спробуймо логарифмувати (за умови $a_n > 0$) $\rightarrow b_n = \ln a_n$.»
 - «Бачимо дробово-лінійний вираз $\rightarrow$ спробуймо підстановку $b_n = 1/a_n$.»
 - «Бачимо вираз $2a_n^2 - 1 \rightarrow$ це схоже на $\cos(2x)$, за умови $|a_n| \leq 1 \rightarrow$ спробуймо тригонометричну підстановку $a_n = \cos x_n$.»

- *Методика пошуку інваріантів.* Це складніший прийом, який вчитель має продемонструвати на окремих задачах, показавши, як наявність сталої величини (інваріанта), наприклад

$$F(a_n, b_n) = a_n^2 + b_n^2 = \text{const},$$

дозволяє суттєво спростити дослідження поведінки пов'язаних послідовностей.

4. Методика для ітераційних процесів (тип 1.3.4).

Це методичний перехід до початків аналізу. Ключова ідея — дослідження властивостей функції $f(x)$ для розуміння послідовності $x_{n+1} = f(x_n)$, що добре узгоджується зі вступними курсами аналізу [6].

1. **Візуалізація (традиційний метод).** Першим кроком є демонстрація **графічного методу («драбинки» або «павутинки»)**. Цей потужний педагогічний прийом дозволяє учням візуально «побачити» можливу границю, монотонність (або її відсутність) та загальну поведінку послідовності.
2. **Пошук «кандидата» на границю.** Вчитель підводить учнів до ідеї: *«Якщо границя L існує і функція f неперервна, то L має задовольняти рівняння $L = f(L)$ »*. Це перетворює задачу на розв'язання рівняння і дає «кандидатів» на границю, які надалі потрібно перевірити.
3. **Формальне доведення (теорема Вейєрштрасса).** Це кульмінація методики. Вчитель формулює **теорему про монотонну та обмежену послідовність** (часто її приписують Вейєрштрассу): *якщо послідовність монотонна і обмежена, то вона має границю*. Задача розбивається на дві підзадачі, які є більш традиційними для учнів:
 - (а) Довести **обмеженість** (зазвичай методом математичної індукції або через властивості f на відповідному відрізку).
 - (б) Довести **монотонність** (через аналіз знаку різниці $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n$).

Таким чином, методика для ітераційних задач полягає у візуалізації (графік), алгебраїзації (рівняння $L = f(L)$) та формалізації (застосування теореми про монотонну обмежену послідовність) [6].

2.2 Формування навичок застосування методу математичної індукції

Метод математичної індукції (ММІ) є одним з найбільш фундаментальних та універсальних інструментів доведення тверджень, що залежать від натурального параметра n . У контексті олімпіадних задач на числові послідовності він є ключовим для доведення властивостей (тип 1.3.6), нерівностей (1.3.8) та формул для сум (1.3.7) [6, 2, 18].

Головна методична складність у навчанні ММІ полягає у подоланні **психологічного бар'єру** (розглянутого в 1.2), пов'язаного з уявним «круговим міркуванням» — учням здається, що вони припускають істинність того, що намагаються довести.

Тому формування навичок ММІ вимагає чіткої, поетапної методики, узгодженої з класичними дослідженнями з психології математичного мислення [9, 12].

1. Мотивація та інтуїтивне обґрунтування (традиційний метод).

Перший крок — це формування інтуїтивного розуміння логіки методу. Найефективнішим традиційним прийомом є **аналогія з «принципом доміно»**:

- Щоб усі кісточки доміно впали, нам потрібно дві речі:
- (а) Ми маємо бути впевнені, що штовхнемо **першу** кісточку (це *база індукції*).
- (б) Ми маємо бути впевнені, що кісточки стоять досить близько, щоб *кожна* k -та кісточка, падаючи, **гарантовано** штовхнула $(k + 1)$ -шу (це *індукційний перехід*).

Ця аналогія наочно демонструє, що ми не припускаємо, що «всі кісточки впали», а лише доводимо, що *якщо* впаде k -та, то *обов'язково* впаде й $(k + 1)$ -ша [11, 8].

2. Алгоритмізація та структура доведення.

Наступний методичний крок — це привчання учнів до чіткої триетапної структури доведення. Вчитель має вимагати явного прописування цих кроків у кожній задачі:

1. **База індукції**: перевірка істинності твердження $P(n)$ для початкового значення, зазвичай $P(1)$ (або $P(n_0)$). *Методичний акцент*: слід продемонструвати контрприклад (напр., твердження $n = n + 1$), де індукційний перехід формально виконується, але база хибна, і в результаті твердження невірне. Це показує, що база є не формальністю, а невід'ємною частиною доведення [6].
2. **Припущення індукції**: формулювання гіпотези. Припускаємо, що твердження $P(k)$ істинне для деякого довільного $k \geq 1$ (або $k \geq n_0$).
3. **Індукційний перехід (крок індукції)**: доведення імплікації $P(k) \implies P(k + 1)$.

3. Методика здійснення індукційного переходу.

Це центральна і найскладніша для учнів частина, що вимагає алгебраїчної майстерності. Традиційний методичний прийом полягає у «**виділенні припущення** $P(k)$ **всередині виразу** $P(k + 1)$ ». Вчитель має сформувати в учнів навички цієї евристики на прикладах різних типів задач [3, 18]:

- *Для сум (тип 1.3.7)*: розглянути S_{k+1} та представити його як $S_k + a_{k+1}$:

$$S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} a_i = \left(\sum_{i=1}^k a_i \right) + a_{k+1} = \underbrace{S_k}_{\text{замінюємо за припущенням}} + a_{k+1}.$$

- *Для подільності (тип 1.3.6)*: нехай потрібно довести, що $A(n)$ ділиться на m . Ми аналізуємо $A(k + 1)$ і намагаємось алгебраїчно виділити $A(k)$. Наприклад, довести, що $7^n - 1$ ділиться на 6:

$$A(k) = 7^k - 1, \quad A(k + 1) = 7^{k+1} - 1 = 7 \cdot 7^k - 1.$$

Методичний прийом: «додамо і віднімемо» потрібний доданок (тут 7):

$$A(k + 1) = 7 \cdot 7^k - 7 + 7 - 1 = 7 \cdot (7^k - 1) + 6 = 7 \cdot A(k) + 6.$$

Оскільки $A(k)$ ділиться на 6 (за припущенням), і 6 ділиться на 6, то й сума ділиться на 6.

- Для нерівностей (тип 1.3.8): це найскладніший випадок. Часто потрібно додати a_{k+1} до обох частин нерівності $P(k)$ (або виконати іншу природну для задачі операцію) і потім довести, що отримана сума не менша (або не більша) за вираз, який вимагається у $P(k+1)$ [13].

Таким чином, методика формування навичок ММІ базується на трьох «китах»: інтуїтивній аналогії (доміно), строгій алгоритмізації (3 кроки) та відпрацюванні евристичних прийомів алгебраїчного виділення $P(k)$ у структурі $P(k+1)$ для різних класів задач [11, 12, 18].

2.3 Методика навчання розв’язуванню комбінаторних та конструктивних задач (типи 1.3.3, 1.3.10)

Задачі комбінаторного (1.3.3) та конструктивного (1.3.10) типів вимагають від учня не стільки відтворення відомого алгоритму, скільки **творчої конструктивної діяльності** та глибокого логічного аналізу. Методика їх викладання має бути зосереджена на розвитку навичок **математичного моделювання** та **формального доведення**, що детально розглядається в олімпіадних посібниках [3, 2, 18].

1. Методика для комбінаторних задач (тип 1.3.3).

Як було показано в підпункті 1.3.3, ключовою особливістю цих задач є перехід від описової постановки (підрахунок об’єктів) до формального **рекурентного співвідношення**. Методика навчання має бути спрямована на формування саме цієї навички моделювання [8, 3].

- **Евристичний прийом «Зведи до меншої задачі».** Це центральний традиційний метод. Роль учителя — за допомогою навідних запитань підвести учня до ідеї, що розв’язок для n об’єктів можна виразити через розв’язки для меншої кількості об’єктів, наприклад $n-1$ та/або $n-2$.
- **Методичний прийом «Аналіз останнього кроку».** Учитель демонструє цей підхід на канонічному прикладі (задача про заощення прямокутника $2 \times n$ доміно, 1.3.3) у дусі класичних задачників з комбінаторики [5, 1].

Фрагмент евристичної бесіди: «Розгляньмо правильне заощення прямокутника $2 \times n$. Яким може бути останній елемент (останній крок) праворуч?

1. Одна вертикальна кістка доміно. Що тоді залишається? Прямокутник $2 \times (n-1)$, який можна заощити a_{n-1} способами.
2. Дві горизонтальні кістки доміно, розміщені одна над одною. Що тоді залишається? Прямокутник $2 \times (n-2)$, який можна заощити a_{n-2} способами.

Отже, кожне коректне заощення виникає з однієї з цих двох ситуацій.»

- **Результат.** У підсумку учень самостійно приходить до рекурентного співвідношення

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

розуміючи, що воно є формальним відображенням розглянутого комбінаторного аналізу. Методична мета — показати, що комбінаторну задачу можна звести до вже відомого типу задач на рекурентні послідовності (1.3.1), що, у свою чергу, підсилює мотивацію [3, 18].

2. Методика для задач на існування та конструкцію (тип 1.3.10).

Задачі цього типу розвивають формально-логічне мислення (1.2) та навички стро-гого доведення. Методика має бути чітко розділена на два напрями відповідно до структури самого класу задач (1.3.10) : задачі на доведення *існування* об'єкта та задачі на доведення *неіснування* [11, 3].

• Методика доведення існування («пряма конструкція»).

Учитель має сформулювати в учнів розуміння, що відповідь «Так, існує» без на-ведення *конкретного прикладу* (конструкції) не є завершеним математичним розв'язком .

Традиційний підхід: учитель покроково демонструє процес побудови, акценту-ючи увагу на тому, як із вихідних умов «народжується» потрібна послідовність чи об'єкт.

Наприклад, у Задачі 1 (1.3.10) початкове припущення про неіснування шуканої послідовності приводить до суперечності. Фактично ця суперечність і виявляє-ться прихованою конструкцією послідовності

$$a_n = 2n - 1,$$

яка задовольняє всі умови задачі.

У Задачі 3 (1.3.10) конструкція

$$a_n = q_n - q_{n-1}$$

задається ітераційно так, щоб виконувалася умова про «щільність» частко-вих сум. Методично важливо підкреслити, що **конструкція і є доведенням**: ученя не лише стверджує існування, а й явно показує приклад [2, 18].

• Методика доведення неіснування («доведення від супротивного»).

Це ключовий традиційний метод. Важливо сформулювати в учнів чіткий алго-ритм дій:

1. *Припущення.* «Припустімо, що така послідовність (a_n) існує».
2. *Аналіз наслідків.* «Які необхідні властивості вона тоді повинна мати?» На-приклад, у Задачі 1 маємо умову вигляду

$$k_{n+1} \geq k_n + 1,$$

що описує зростання деякої допоміжної послідовності індексів.

3. *Пошук суперечності.* «До чого приводять ці властивості?» Суперечність часто виникає при порушенні фундаментальних принципів, зокрема **прин-ципу Діріхле** (коли нескінченна множина значень «має поміститися» у скінченну кількість «комірок»), або при отриманні неможливої рівності чи системи рівностей, яка в конкретному контексті задачі суперечить попере-днім міркуванням .

Таким чином, методика роботи з задачами комбінаторного та конструктивного типів полягає в послідовному зміщенні акценту з простого «обчислення» на **моде-лювання** та **логічне конструювання**. Саме це є фундаментальним для розвитку творчого потенціалу учня [11, 12, 18].

2.4 Методичні підходи до задач на оцінку та нерівності (тип 1.3.8)

Задачі на оцінку та доведення нерівностей посідають центральне місце в підготовці до математичних олімпіад. У такому типі задач учень має не просто “порахувати”, а *обґрунтувати межі* для певної величини: показати, що вона не може бути більшою (або меншою) за деяке число, а у більш складних випадках — що знайдена межа є найкращою можливою. Саме тому такі задачі доцільно системно опрацьовувати на факультативних заняттях і математичних гуртках [3, 13, 2].

1. Аналітичний блок: побудова оцінки

Першим змістовим кроком зазвичай є одержання **аналітичної оцінки** для шуканої величини. Нехай у задачі фігурує послідовність або вираз a_n , а потрібно показати, що

$$a_n \leq M \quad \text{для всіх допустимих } n$$

або аналогічно $a_n \geq m$. Учень має усвідомити, що тут ідеться про твердження, яке *одночасно* стосується всіх можливих значень параметра, а не про підстановку окремих чисел [6].

Під час роботи над цим блоком учителю доцільно послідовно формувати в учнів арсенал інструментів, які найчастіше застосовуються в олімпіадних нерівностях:

- **Класичні нерівності.** Поступове введення та відпрацювання таких результатів, як нерівність Коші–Буняковського, нерівність між середнім арифметичним та геометричним (АМ–ГМ), а також, за потреби, нерівність Гельдера, несиметричні варіанти тощо. Важливо не обмежуватися формулюванням, а показувати *типові схеми застосування* на простих прикладах [13, 3].
- **Алгебраїчні перетворення.** Такі прийоми, як винесення спільного множника, зведення до повного квадрата, раціоналізація дробів, перехід до однієї змінної за допомогою заміни, допомагають “розплутати” складний вираз і побачити приховану структуру нерівності.
- **Метод математичної індукції.** Якщо нерівність формулюється для всіх $n \in \mathbb{N}$, корисно навчити учнів розпізнавати ситуації, де індукція є природним інструментом: виділення базового випадку, правильне формулювання індукційного припущення та побудова переходу $n \Rightarrow n + 1$.
- **Монотонність та аналіз послідовностей/функцій.** Для виразів, що залежать від параметра n , ефективним є вивчення різниці $a_{n+1} - a_n$ або частки a_{n+1}/a_n : знак цих величин часто вказує на зростання чи спадання послідовності і дозволяє з’ясувати, де саме досягається найбільше або найменше значення. На старшому етапі підготовки корисно проводити паралель з неперервними функціями $f(x)$ та їх похідними [6].
- **Евристичний пошук оцінки.** Перед формальним доведенням доцільно запропонувати учням *експеримент*: підставити кілька значень, побудувати таблицю, спробувати “вгадати” можливу межу. Такий попередній аналіз створює інтуїтивне відчуття правильної оцінки.

Результатом аналітичного блоку є доведення виду $a_n \leq M$ або $a_n \geq m$ для всіх допустимих n . При цьому учні мають чітко розуміти, що на цьому етапі йдеться лише про *деяку* верхню чи нижню межу, але поки не з'ясовано, чи є вона найкращою.

2. Конструктивний блок: обґрунтування точності оцінки

Другий важливий компонент роботи із задачами на оцінку — це **конструктивне обґрунтування того, що знайдена межа є справді оптимальною**. Саме тут учні вчаться відрізнити “просто оцінку” від *найкращої можливої* [13, 18].

У методичному плані доцільно розрізняти два основні типи ситуацій:

1. **Задача на максимум / мінімум.** Після доведення нерівності, наприклад $a_n \leq M$, учитель спрямовує увагу учнів на питання: *чи існує такий номер n_0 , для якого $a_{n_0} = M$?* Знаходження конкретного прикладу (або доведення його відсутності) перетворює загальну оцінку на твердження про істинний максимум або мінімум. корисно показувати, як умова рівності в класичній нерівності (наприклад, в АМ–ГМ) підказує, як шукати відповідну конфігурацію змінних.
2. **Задача на точну верхню або нижню межу.** Якщо виявляється, що жодне n не дає значення, рівного M , то можна говорити лише про *граничне* значення. У шкільному курсі доречно не перевантажувати учнів формальною термінологією, але поступово підводити до ідеї, що інколи ми маємо справу з “найменшою з усіх можливих верхніх меж” (аналог супремуму). Методично це реалізується через побудову підпослідовності (a_{n_k}) , значення якої наближаються до M настільки, наскільки завгодно.

Особливу увагу варто приділяти тому, щоб учні *усвідомлено* відділяли один етап від іншого: спочатку доведення нерівності, потім аналіз на предмет оптимальності константи. Корисною є рефлексійна вправа: після розв’язання задачі учні коротко формулюють, *де саме* в їхньому розв’язанні було одержано оцінку, а де — продемонстровано її точність.

3. Задачі на чисте доведення нерівностей

Окрему групу складають задачі типу:

“Довести, що для всіх $n > 1$ виконується $S_n > \sqrt{n}$ ”.

Тут формулювання не містить вимоги знайти найкращу межу, а лише вказує нерівність, яку потрібно довести. На факультативних заняттях доцільно спочатку відпрацьовувати такі “чисті” задачі як тренування аналітичного блоку: учні концентруються на виборі інструмента (індукція, класичні нерівності, перетворення виразів), не відволікаючись на питання оптимальності межі [3, 2].

Разом з тим, на більш просунутому рівні підготовки доречно ставити додаткові запитання: *чи можна замінити число $\sqrt{n}$ на більше? чи існує “граничне” значення, після якого нерівність стає хибною?* Такі обговорення розширюють горизонт учнів і природно підводять до понять точної межі.

4. Організація роботи на гуртках та факультативах

З методичної точки зору ефективною є така лінія роботи:

- **Поступове ускладнення.** Починати варто з простих прикладів, де межу легко “побачити” на числових дослідках, а потім переходити до задач, у яких знайдення оцінки вимагає вже серйозних перетворень.
- **Чергування фронтальної роботи та самостійного пошуку.** Спочатку учитель демонструє типову схему розв’язання (наприклад, використання АМ–ГМ), далі учні самостійно виконують аналогічні кроки в нових задачах.
- **Формування “банку” нерівностей.** Корисно вести з учнями зошит або спільний файл, де записуються найважливіші нерівності, умови рівності та типові способи їх застосування. З часом це стає для них інструментом швидкого пошуку ідей при розв’язуванні нових задач.
- **Обговорення типових помилок.** Серед поширених хибних кроків — перевірка нерівності лише на кількох значеннях, підміна граничного значення максимально можливим, некоректне застосування класичних нерівностей. Аналіз цих помилок на прикладах суттєво підвищує якість подальших розв’язань.

5. Дидактичний ефект

Систематична робота із задачами на оцінку та нерівності сприяє формуванню в учнів кількох ключових умінь: уміння будувати строгі доведення, працювати з параметрами, розрізняти “звичайну” межу і найкращу можливу, а також переходити від інтуїтивних числових спостережень до повноцінного аналітичного обґрунтування [12, 18]. Саме ці навички є фундаментом успішного виступу на математичних олімпіадах та подальшого вивчення вищої математики.

2.5 Методичні особливості задач з елементами теорії чисел (тип 1.3.6)

Задачі, у яких теоретико-числовий зміст поєднується з поняттями про послідовності, посідають особливе місце в олімпіадній підготовці. Вони дозволяють одночасно розвивати *аналітичне мислення* (уміння працювати з формулами й рекурентними співвідношеннями) та *арифметичну культуру* (подільність, остачі, найбільший спільний дільник, цілочисельні розв’язки тощо). Для факультативів і гуртків саме цей клас задач є зручним «містком» між шкільним курсом алгебри та елементами теорії чисел [1, 4, 21].

1. Загальна дидактична установка

На відміну від задач, де головний акцент робиться на способі задання послідовності (формула, рекуренція, графік), у задачах із теоретико-числовим змістом **центральним стає питання про арифметичні властивості її членів**. Як правило, a_n належать до множин $\mathbb{Z}$ або $\mathbb{Q}$, а формулювання задачі зводиться до з’ясування певної властивості:

- чи діляться a_n на задане число;
- які остачі можуть набувати $a_n \pmod{m}$;
- при яких n члени послідовності мають спеціальний вигляд (квадрати, куби, прості числа, раціональні, цілі тощо).

Методично важливо з перших занять показати учням, що тут не йдеться про «механічні обчислення за формулою». Кожна така задача вимагає побудови *логічної стратегії*: переходу від числових експериментів до узагальнення, від окремих прикладів — до строгого доведення [11, 3].

2. Робота із задачами на подільність та остачі

Найприроднішим входом до теорії чисел є задачі, у яких досліджується подільність членів послідовності або їхні остачі при діленні на деяке число m . На факультативних заняттях доцільно вибудувати таку траєкторію [1, 4]:

- **Початковий етап.** Робота з конкретними прикладами: учні обчислюють перші члени послідовності та їхні остачі за модулем m , помічають певні закономірності (повторення остач, чергування парності тощо). На цьому рівні формуються інтуїтивні уявлення про періодичність та структуру залишків.
- **Введення арифметики за модулем.** Поступово в символічній формі вводяться рівності виду $a_n \equiv r \pmod{m}$, правила додавання і множення остач. Учитель показує, як заміна звичайних рівностей на порівняння за модулем робить доведення компактнішими й прозорішими.
- **Перші загальні твердження.** На основі числових дослідів формуються і доводяться твердження типу: «для всіх n виконується $a_n \equiv r \pmod{m}$ » або «жоден член послідовності не ділиться на m ». Тут активно використовується математична індукція, факторизація виразів та властивості gcd.

У методичному плані важливо не поспішати з «важкими» задачами: спершу учні мають навчитися впевнено читати й записувати конгруенції, а вже потім переходити до складніших сюжетів із кількома параметрами чи нетривіальними рекурентними співвідношеннями.

3. Періодичність залишків за модулем

Одним із ключових сюжетів є поява **періодичності** при розгляді послідовностей за модулем m . Навіть якщо сама послідовність (a_n) не є періодичною, послідовність остач $a_n \pmod{m}$ часто повторюється з певним періодом [1, 7].

Методичні акценти:

- **Емпіричне виявлення періоду.** На перших заняттях учні просто обчислюють остачі, будують ряд значень, шукають повтори. Це дозволяє «на дотик» побачити явище періодичності.
- **Пояснення через принцип Діріхле.** Після числових спостережень учитель вводить ідею: якщо можливих пар (триpletів тощо) остач скінченно багато, а членів послідовності — нескінченно, то деяка конфігурація остач неодмінно повториться. З цього природно випливає поява циклу.

- **Використання періодичності в розв’язанні задач.** Коли учні переконалися, що період існує, можна показати, як це спрощує аналіз подільності для великих n : досить зрозуміти поведінку на одному періоді, а потім зробити висновки для всіх членів послідовності.

Такий підхід демонструє, як із простих ідей (скінченність множини, принцип «скриньок») народжуються потужні методи олімпіадного рівня.

4. «Повнота» множини остач та охоплення всіх класів

Ще один важливий тип задач пов’язаний з питанням, чи здатні члени послідовності (або їхні остачі за модулем m) «заповнити» всю множину класів $0, 1, \dots, m - 1$. На заняттях доцільно розглядати два протилежні сценарії [7, 14]:

- **Послідовність «бачить» усі класи.** Учні шукають для кожної остачі k хоча б один номер n , при якому $a_n \equiv k \pmod{m}$, або будують загальний алгоритм знаходження такого n .
- **Послідовність «пропускає» частину класів.** Тут цікаво виявити, які саме остачі є недосяжними і чому. Часто це пов’язано з певними алгебраїчними обмеженнями (наприклад, квадратами за модулем m можуть бути не всі числа).

Методично корисно спочатку працювати з малими модулями ($m = 2, 3, 4, 5$), де учні можуть повністю «перебрати» остачі, а вже потім переносити спостережені закономірності на загальний випадок.

5. Арифметична природа членів: квадрати, прості числа, цілочисельність

На більш просунутому етапі гурткової роботи можна переходити до задач, де аналізується **внутрішня структура** членів послідовності:

- при яких n a_n є точним квадратом або кубом;
- коли a_n є цілим чи раціональним числом;
- як часто серед a_n трапляються прості або складені числа.

З методичного погляду важливо:

- показати учням, як перехід від умови « a_n має бути квадратом» приводить до *фдіофантового рівняння, тобто рівняння з цілими невідомими*;
- навчити простим прийомам «стискання» між сусідніми квадратами або степенями: якщо вдається затиснути a_n між $(k_n)^2$ та $(k_n + 1)^2$, то це виключає можливість бути квадратом;
- продемонструвати роль алгебраїчної факторизації: розклад виразу для a_n на множники часто дає пряме пояснення, чому a_n майже завжди є складеним числом.

На цьому рівні доцільно робити акцент не стільки на «високих» теоремах, скільки на вмінні перетворювати вирази, уважно працювати з рівностями та нерівностями, грамотно використовувати вже відомі факти (про прості числа, квадратичні лишки тощо) [1, 4].

6. Організація занять гуртка та факультативу

Для системної підготовки до олімпіад рекомендується така загальна схема роботи з теоретико-числовими задачами:

- **Модульність побудови курсу.** Окремі заняття присвячуються подільності, періодичності залишків, повноті остач, степеням і простим числам. Кожен модуль містить блок «теорія + типові приклади + тренувальні задачі».
- **Поєднання фронтальної та індивідуальної роботи.** Спочатку учитель розв'язує кілька задач, коментуючи кожен крок, потім учні працюють у парах або малих групах над аналогічними завданнями, обговорюючи різні підходи.
- **Рефлексія та узагальнення.** Наприкінці теми корисно запропонувати учням скласти «шпаргалку ідей»: короткий список методів, які вони використали (конгруенції, принцип Діріхле, індукція, факторизація тощо), та типових ситуацій, де ці методи виявилися ефективними.

7. Освітній ефект

Систематичне опрацювання задач з елементами теорії чисел на матеріалі послідовностей формує в учнів здатність поєднувати різні математичні підходи, розвиває чуття до структури числа та посилює мотивацію до глибшого вивчення математики. Для олімпіадної підготовки це не лише джерело цікавих задач, а й засіб виховання культури строгого міркування та вміння бачити зв'язки між окремими розділами курсу [1, 21].

2.6 Методика введення елементів математичного аналізу в олімпіадні задачі (тип 1.3.9)

Задачі, у яких фігурують поняття *границі, обмеженості, монотонності та щільності* послідовностей, є природним кроком від «скінченної» шкільної алгебри до математичного аналізу. Саме на факультативних заняттях і в роботі гуртка зручно поступово знайомити учнів із цими ідеями, не перевантажуючи формальною аксіоматикою, але зберігаючи строгість міркувань [6, 1].

Методично доцільно розглядати введення елементів аналізу не як окрему «набудову», а як **розширення вже знайомих сюжетів про послідовності**: учні вміють знаходити формули a_n , будувати рекурентні співвідношення, обчислювати кілька перших членів. Наступний крок — з'ясувати, що відбувається з a_n , коли n стає дуже великим, тобто описати **поведінку послідовності на нескінченності**.

1. Підготовчий етап: інтуїція нескінченних процесів

Перш ніж вводити формальне означення границі, важливо сформулювати в учнів інтуїтивне відчуття «наближення» та «стабілізації»:

- спільно будувати таблиці значень послідовностей (наприклад, $a_n = \frac{n}{n+1}$, $b_n = (1 + \frac{1}{n})^n$);
- аналізувати графіки точок (n, a_n) на координатній площині;

- обговорювати, куди «тягнеться» послідовність, чи збільшується вона безмежно, чи «застигає» біля певного числа.

На цьому етапі достатньо словесних формулювань на кшталт: «члени послідовності можна зробити як завгодно близькими до числа L , якщо взяти n достатньо великим». Формальне ε - N -означення можна відкласти на старший етап підготовки або залишити для найбільш мотивованих учнів [6].

2. Обмеженість і монотонність як базові якості послідовностей

Наступний крок — систематизувати якісні властивості послідовностей: **обмеженість** (наявність «бар'єрів» зверху/знизу) і **монотонність** (сталі тенденції до зростання чи спадання). Методично корисно:

- почати з простих прикладів (раціональні функції від n , послідовності часткових сум нескладних рядів);
- показати, як обмеженість зручно доводити нерівностями та методом математичної індукції;
- привчити досліджувати знак різниці $a_{n+1} - a_n$ або відношення $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ (для додатних a_n), щоб з'ясувати характер монотонності.

Важливий дидактичний акцент: обмеженість і монотонність самі по собі є цікавими властивостями, але в аналізі вони виступають **інструментом для доведення збіжності**. Учень має чітко бачити: ми не просто «класифікуємо» послідовність, а готуємо ґрунт для тверджень про існування границі [6].

3. Збіжність послідовностей: від якості до кількості

Після відпрацювання обмеженості та монотонності природно перейти до задач на збіжність. З методичної точки зору зручно зосередитися на таких сюжетах:

- **Монотонна обмежена послідовність.** На прикладах показати, що якщо послідовність зростає і має верхню межу, то вона «підповзає» до деякого числа. Теорему про збіжність монотонної обмеженої послідовності можна формулювати в адаптованому для школи вигляді, наголошуючи на схемі розв'язання: *спершу довести монотонність, потім — існування межі зверху/знизу.*
- **Ітераційні послідовності.** Велику мотиваційну роль відіграють задачі типу $x_{n+1} = f(x_n)$, де f — проста функція. Методика: (1) знайти можливу границю L з рівняння $L = f(L)$, (2) довести, що x_n обмежена та монотонна, (3) зробити висновок про збіжність до L .

Тут важливо показати учням, що «знайти границю» — це не лише алгебраїчне перетворення, а цілий **ланцюжок міркувань**, де кожен крок повинен бути обґрунтований [6].

4. Обчислення границь: «затискання» та теорема Штольца–Чезаро

Коли інтуїція збіжності вже сформована, можна переходити до більш технічних, але надзвичайно ефективних методів:

- **Метод «затискання» (двох міліціонерів).** Учні вже вміють оцінювати вирази зверху і знизу. Завдання вчителя — навчити їх будувати *дві* послідовності b_n і c_n , між якими затиснуто a_n , та використати факт, що якщо b_n і c_n мають однакову границю, то до неї ж прямує і a_n . У олімпіадних задачах це особливо корисно для послідовностей, заданих сумами або коренями.
- **Теорема Штольца–Чезаро.** На гуртковому рівні доцільно подавати цю теорему як «дискретний аналог правила Лопіталя» для дробів $\frac{a_n}{b_n}$, де i чисельник, і знаменник мають «нескінченну» чи «нульову» поведінку.

Для шкільної практики достатньо кількох ретельно розібраних прикладів (суми степенів k^p , комбінації логарифмів тощо), де учні *самі бачать*, що пряме застосування означення границі практично неможливе, а теорема Штольца–Чезаро дозволяє елегантно довести результат [6, 1].

5. Щільність та розподіл значень як вершина гурткової роботи

Найбільш підготовленим учням можна запропонувати задачі, пов'язані з **розподілом** членів послідовності на відрізку, зокрема з поняттям щільності множини значень.

Під час обговорення послідовностей дробових частин $a_n = \{n\alpha\}$ (де α — дійсне число) доцільно:

- порівняти випадки раціонального та ірраціонального α ;
- показати, що при раціональному α множина значень є скінченною, а отже не може бути щільною;
- продемонструвати, як принцип Діріхле іде «в парі» з ідеями аналізу, коли ми говоримо про заповнення відрізка $[0, 1]$ множиною дробових частин.

Такі задачі мають велике світоглядне значення: учні бачать, як елементи теорії чисел, алгебри й аналізу взаємодіють у єдиному сюжеті, а поняття границі виходить за межі «підрахунку» і стає інструментом опису складних розподілів [7, 14, 16].

6. Організація факультативу та гуртка навколо елементів аналізу

Для системного введення елементів математичного аналізу в олімпіадні задачі можна рекомендувати таку методичну лінію:

1. **Інтуїтивні задачі на «велике n »** (таблиці, графіки, часткові суми, наближення до числа e тощо).
2. **Обмеженість і монотонність** як самостійний блок: формування техніки доведення цих властивостей.

-
3. **Збіжність послідовностей** (монотонна обмежена послідовність, ітераційні процеси).
 4. **Обчислення границь** (метод «затискання», прості перетворення, потім — теорема Штольца–Чезаро для мотивованих груп).
 5. **Розподіл і щільність** як завершальний, поглиблений модуль для учнів з високим рівнем підготовки.

Такий поетапний підхід дозволяє не лише підготувати школярів до розв’язування олімпіадних задач «з аналізом», а й створює міцний фундамент для подальшого вивчення курсу математичного аналізу в закладах вищої освіти. Учні вчаться мислити послідовно, аргументувати кожен крок і працювати з нескінченними процесами так само впевнено, як із звичайними алгебраїчними виразами [6, 21].

2.7 Організація евристичної бесіди та системи наві- дних питань для стимулювання самостійного по- шуку учнів

Евристична бесіда виступає одним з провідних методів організації пошукової діяльності учнів у процесі розв’язування олімпіадних задач на числові послідовності. На відміну від інформаційного викладу, де вчитель подає готові способи дій, евристична бесіда побудована як **керований діалог**, у якому викладач за допомогою продуманої системи навідних питань спонукає школярів самостійно відкривати властивості послідовностей, шукати і сформулювати ідеї розв’язання, обґрунтовувати зроблені кроки [11, 12, 18].

1. Мета та дидактичне місце евристичної бесіди

У контексті магістерської теми «Методичні підходи навчання учнів розв’язування олімпіадних задач на числові послідовності» евристична бесіда виконує низку функцій:

- **мотиваційну** — пробудження інтересу до задач на послідовності через проблемні питання;
- **когнітивну** — поетапне розкриття ідей (монотонності, обмеженості, періодичності, границі, теоретико-числових властивостей) у формі спільного пошуку;
- **розвивальну** — формування досвіду міркувань «як дослідник», а не лише «як виконавець алгоритму»;
- **виховну** — виховання відповідальності за власні судження, готовності аргументувати й коригувати власну позицію.

Таким чином, евристична бесіда є методичним інструментом, що забезпечує перехід від репродуктивного засвоєння формул послідовностей до **дослідницького опанування** їх властивостей, що особливо важливо в умовах факультативів та математичних гуртків [4, 18, 21].

2. Типова структура евристичної бесіди на матеріалі задач про послідовності

Побудову евристичної бесіди доцільно організовувати за наступною логікою.

1. **Мотиваційно-проблемний етап.** Учитель пропонує олімпіадну задачу або її спрощений варіант, акцентуючи на суперечності або нетривіальності поведінки послідовності. Навідні питання цього етапу:

- «Що саме в цій послідовності здається незвичним/неочевидним?»
- «Яке з формулювань задачі викликає найбільше запитань?»
- «Які гіпотези щодо поведінки a_n ви можете запропонувати, дивлячись на перші кілька значень?»

2. **Актуалізація опорних знань.** На цьому етапі виявляються й актуалізуються засвоєні раніше поняття: види задання послідовностей, властивості арифметичних і геометричних прогресій, базові факти з теорії чисел тощо. Типові питання:

- «До яких уже знайомих вам послідовностей ця задача подібна?»
- «Чи можна переписати формулу a_n у вигляді, подібному до відомих вам прикладів?»
- «Які поняття з попередніх занять (подільність, монотонність, границя) можуть тут знадобитися?»

3. **Постановка і уточнення проблеми.** Учитель уточнює разом з учнями, що саме буде об'єктом пошуку: межа послідовності, умови монотонності, структура остач $a_n \pmod{m}$ тощо. Навідні питання:

- «Якщо сформулювати задачу однією фразою, що саме нам треба з'ясувати про цю послідовність?»
- «Який результат ми очікуємо отримати: чисельне значення, нерівність, властивість типу «ділиться / не ділиться»?»

4. **Колективний пошук шляху розв'язання.** Це ядро евристичної бесіди. Учитель послідовно пропонує систему запитань, які виводять учнів на ключові ідеї. Для задач на числові послідовності типовими є такі лінії запитань:

- *Аналіз прикладів:* «Що показують обчислення для перших 5–7 членів? Які закономірності помітні?»
- *Дослідження зміни $a_{n+1} - a_n$:* «Як змінюється послідовність при переході від n до $n + 1$? Чи можемо ми визначити знак різниці?»
- *Перехід до аналітичної форми:* «Чи можемо ми замінити послідовність a_n на функцію $f(x)$ і подивитися на її поведінку?»
- *Теоретико-числовий аспект:* «Як поведуть себе остачі $a_n \pmod{m}$? Чи повторюються вони? Який вигляд має можливий період?»
- *Асимптотична поведінка:* «Як змінюється вигляд a_n , якщо ми «викинемо» менші доданки й залишимо головний член? Чи можна за цим судити про границю?»

5. **Формулювання та осмислення розв’язання.** Після того, як ключова ідея знайдена (часто силами самих учнів), учитель спонукає їх **узагальнити** отриманий спосіб:

- «Чи можемо ми викласти наші міркування так, щоб ними зміг скористатися інший учень, який не бачив нашої дискусії?»
- «Який крок у розв’язуванні був «переломним»? Чому саме він?»
- «Для яких інших задач на послідовності цей прийом може виявитися корисним?»

6. **Рефлексивно-оцінювальний етап.** Завершення бесіди має бути пов’язане з аналізом власної діяльності учнями:

- «Яке питання вчителя найсильніше допомогло вам просунутися в розв’язуванні?»
- «Яке навідне питання ви самі поставили б однокласнику, який застряг на середині розв’язання?»
- «Чим сьогоднішня задача відрізнялася від тих, які ви розв’язували раніше?»

3. Типологія навідних питань у роботі над олімпіадними задачами на послідовності

Для цілеспрямованої організації евристичної бесіди важливо продумати **систему навідних питань**, що відповідають різним рівням пізнавальної діяльності.

- **Репродуктивні питання** (актуалізація базових знань):
 - «Як задається ця послідовність: явною формулою чи рекурентно?»
 - «Які вам відомі означення монотонності / обмеженості послідовності?»
- **Пошукові питання** (організація аналізу структури задачі):
 - «Що змінюється в структурі a_n , коли n зростає на 1?»
 - «Які елементи виразу для a_n визначають його поведінку при великих n ?»
- **Прогностичні питання** (формування гіпотез):
 - «Якщо продовжити обчислення ще на кілька кроків, чого ви очікуєте?»
 - «Якою, на вашу думку, може бути границя цієї послідовності (якщо вона існує)?»
- **Рефлексивні питання** (усвідомлення способу дій):
 - «Чому саме ця заміна / ці перетворення виявилися ефективними?»
 - «Який загальний прийом можна «витягнути» з даного розв’язання?»
- **Методологічні питання** (перенесення способу на інші задачі):
 - «Чи можемо ми застосувати наші міркування до послідовностей іншого типу (наприклад, з іншою рекуренцією)?»
 - «Що треба змінити в нашій стратегії, якщо замість дослідження на збіжність нас цікавить, наприклад, періодичність залишків $a_n \pmod{m}$?»

4. Організаційні форми проведення евристичної бесіди на факультативах та гуртках

У рамках факультативних занять та математичних гуртків доцільно поєднувати різні форми роботи:

- **Фронтальна евристична бесіда** для введення нової ідеї (наприклад, методу дослідження монотонності чи застосування теореми Штольца–Чезаро).
- **Робота в малих групах** з наступним «захистом» знайденого способу розв’язання. Вчитель пропонує групам спільний набір навідних питань, а потім порівнює, які з них реально були використані учнями.
- **Індивідуальні міні-бесіди** з сильнішими учнями для розв’язування задач підвищеної складності, де навідні питання стають засобом диференціації.

Важливим методичним принципом є **принцип мінімальної допомоги**: учитель ставить такі питання, які дають можливість учневі самому зробити наступний крок, а не підмінюють його мислення готовими фрагментами розв’язання [11, 12].

5. Дидактичний ефект системи навідних питань у контексті олімпіадних задач на послідовності

Послідовне застосування евристичної бесіди та продуманої системи навідних питань у роботі над олімпіадними задачами на числові послідовності сприяє:

- формуванню в учнів **уміння ставити запитання до задачі**, а не лише шукати відповіді;
- розвитку навичок аналізу структури послідовності, бачення зв’язку між окремими членами і загальною поведінкою;
- поступовому переходу від «здогадки» до **структурованого доведення**;
- становленню досвіду рефлексії власних мисленнєвих кроків, що є важливою умовою для подальшого успішного вивчення вищої математики.

Отже, організація евристичної бесіди й системи навідних питань є ключовою складовою методичних підходів до навчання учнів розв’язування олімпіадних задач на числові послідовності та становить важливий елемент науково-обґрунтованої організації підготовки обдарованої молоді [4, 18, 21].

Висновки до розділу 2

У другому розділі магістерської роботи здійснено системний аналіз традиційних підходів до навчання розв’язування олімпіадних задач на числові послідовності та окремі методичні засади їх цілеспрямованого використання у роботі факультативів і математичних гуртків. Узагальнення одержаних результатів дає змогу сформулювати такі висновки.

-
1. Послідовності виступають **об'єднувальною змістовою лінією**, яка природно поєднує рекурентні та ітераційні процеси, комбінаторику, елементи теорії чисел, нерівності та початки математичного аналізу. Традиційний евристичний принцип «від конкретного до абстрактного» забезпечує поступове розгортання цієї лінії від аналізу перших членів до дослідження асимптотичної поведінки та щільності [11, 18, 21].
 2. Для задач на рекурентні та ітераційні співвідношення обґрунтовано **диференційований методичний підхід**: для лінійних рекурентцій зі сталими коефіцієнтами — алгоритмізація через характеристичне рівняння, для нелінійних — розвиток евристичного пошуку (заміни, лінеаризація, пошук інваріантів), для ітераційних схем — опора на дослідження відповідної функції, графічну інтерпретацію та теорему про монотонну обмежену послідовність [5, 6, 3].
 3. Метод математичної індукції розглянуто як **універсальний інструмент**, без якого неможливо системно працювати із задачами на властивості послідовностей, сумами та нерівностями. Показано, що подолання психологічного бар'єру учнів щодо ММІ потребує спеціальної методики: інтуїтивного обґрунтування (аналогія з доміно), чіткої тричленної структури доведення (база, припущення, перехід) та цілеспрямованого відпрацювання прийому «виділення» індукційної гіпотези в структурі наступного кроку [9, 12, 6].
 4. Задачі комбінаторного та конструктивного типів розкрито як важливий засіб **формування в учнів умінь математичного моделювання та логічного конструювання**. Показано роль прийомів «аналіз останнього кроку», «зведення до меншої задачі» у побудові рекурентних співвідношень, а також методики прямої конструкції та доведення від супротивного для задач на існування/неіснування послідовностей з заданими властивостями [3, 2, 18].
 5. У роботі із задачами на оцінку та нерівності обґрунтовано двокomпонентний підхід: **аналітичний блок** (побудова оцінки із застосуванням класичних нерівностей, алгебраїчних перетворень, індукції, аналізу монотонності) та **конструктивний блок** (пошук прикладів, що показують точність або граничний характер отриманої оцінки). Такий підхід дозволяє перейти від «механічного» доведення окремих нерівностей до усвідомленого аналізу оптимальності меж [13, 3, 18].
 6. Задачі з елементами теорії чисел показано як ефективний «місток» між шкільною алгеброю та теорією чисел. Сформульовано методичні рекомендації щодо поетапного переходу від числових експериментів до оперування конгруенціями, від емпіричного виявлення періодичності остач до її пояснення на основі принципу Діріхле та застосування цих ідей у задачах про подільність, періодичність і «повноту» множини остач [1, 4, 7].
 7. Введення елементів математичного аналізу в олімпіадні задачі розглянуто як **послідовний перехід** від якісних характеристик послідовностей (обмеженість, монотонність) до тверджень про збіжність і обчислення границь із використанням методу «затискання» та теореми Штольца–Чезаро. Показано, що саме олімпіадний матеріал на послідовності створює оптимальний контекст для м'якого введення ідей аналізу без формального перевантаження, але зі збереженням строгості [6, 1, 21].

-
8. Організація евристичної бесіди та системи навідних питань розглянута як **наскрізний методичний інструмент** усіх описаних підходів. Визначено типологію питань (репродуктивні, пошукові, прогностичні, рефлексивні, методологічні) та окреслено принцип мінімальної допомоги, що забезпечує перехід учнів від репродуктивного виконання до самостійного пошуку, усвідомленого аналізу та рефлексії власних способів дії [11, 12, 18, 4, 21].

Отже, у розділі побудовано цілісну систему традиційних методичних підходів до навчання розв'язування олімпіадних задач на числові послідовності, яка поєднує алгоритмічні та евристичні компоненти, опору на класичні математичні методи та активні форми організації навчальної діяльності.

Розділ 3

Розробка системи тренувальних та олімпіадних задач для факультативних занять на числові послідовності

3.1 Принципи відбору та структурування змісту навчального (задачного) матеріалу

Результативність факультативних занять та математичних гуртків з теми «Числові послідовності» істотно залежить від того, *яким чином* організовано задачний матеріал: які саме задачі відібрано, у якій послідовності їх подано, як вони поєднуються між собою. Поодинокі, навіть дуже цікаві, завдання не формують стійких умінь, якщо не вбудовані в продуману **систему**, що забезпечує перехід від елементарних вправ до задач дослідницького характеру. Саме тому постає потреба чітко окреслити принципи, за якими здійснюється відбір і структурування змісту [11, 12, 18].

У межах даної магістерської роботи вважаємо за необхідне поєднувати загальнодидактичні підходи (науковість, доступність, системність, наступність) із **особливостями олімпіадної підготовки**: орієнтацією на пошук, проблемність, варіативність способів розв'язання, розвиток дослідницьких умінь. Далі подано систему принципів, що слугують орієнтиром для побудови задачного матеріалу з числових послідовностей [9, 10, 2, 21].

1. Принцип наукової коректності та змістової узгодженості.

Добір задач має спиратися на коректний математичний апарат, точні означення та твердження, які узгоджуються зі шкільним курсом алгебри, елементами теорії чисел та математичного аналізу. Застосовувані методи (математична індукція, робота з рекурентними співвідношеннями, аналіз остач, комбінаторні реконструкції послідовностей тощо) подаються у формі, що відповідає віковим особливостям учнів, але не спотворює суті академічних підходів [6, 5, 7, 17].

2. Принцип відповідності програмним вимогам і наступності.

Задачний матеріал для факультативних занять має **не дублювати**, а розширювати й поглиблювати зміст обов'язкового курсу. Це означає, що:

- завдання добираються з урахуванням того, що учні вже опрацювали тему «Числові послідовності» на уроках;

-
- передбачено зв'язок із подальшими розділами (рівняння, нерівності, елементи аналізу);
 - враховується перспектива переходу до університетських курсів, де послідовності відіграють фундаментальну роль.

Таким чином забезпечується **наступність** між базовим, факультативним та вищим рівнями математичної освіти [19, 20, 4].

3. Принцип цілісності та репрезентативності змістових ліній.

Сукупність задач повинна відображати основні змістові напрями теми «Числові послідовності», а саме:

- різні способи задання послідовностей (формульний, рекурентний, ітераційний, описовий);
- рекурентні й ітераційні процеси (типи 1.3.1, 1.3.4);
- комбінаторні та конструктивні сюжети (1.3.3, 1.3.10);
- задачі на оцінки та нерівності (1.3.8);
- задачі з елементами теорії чисел (1.3.6);
- задачі з елементами математичного аналізу (обмеженість, монотонність, границі, щільність; тип 1.3.9).

Кожна група задач має репрезентувати **типові ситуації**, які вимагають певного способу мислення, а не випадковий набір окремих прикладів [6, 7, 1].

4. Принцип поетапного ускладнення та дозованої опори.

Конструювання системи задач здійснюється на основі ідеї **поетапного наростання складності**: від опорних тренувальних завдань до повноцінних олімпіадних задач. При цьому:

- початкові задачі спираються на наявні знання й містять достатньо «видимих» орієнтирів (зразки, підказки, проміжні запитання);
- у подальших завданнях ці зовнішні опори поступово зменшуються, а кількість кроків, які учень має виконати самостійно, зростає;
- на вищому рівні учень самостійно обирає та комбінує методи: індукцію, аналіз рекурентних співвідношень, модульні міркування, графічні й аналітичні підходи до дослідження послідовностей.

Такий підхід узгоджується з логікою сучасних підручників і збірників олімпіадних задач [11, 3, 2, 18].

5. Принцип диференціації та варіативності завдань.

Оскільки учні, які відвідують факультативи й гуртки, демонструють різний рівень підготовки, система задач має бути **гнучкою**:

- передбачати завдання різної складності (базові, підвищені, олімпіадні);
- включати «надлишкові» задачі, які можуть бути запропоновані як додатковий матеріал для сильніших учнів;

-
- містити завдання відкритого типу, де можливі кілька обґрунтованих шляхів розв'язання або кілька напрямів узагальнення.

Такий підхід дає змогу реалізувати навчання в режимі **індивідуальної траєкторії** без зниження вимог до строгості міркувань [9, 12].

6. Принцип проблемності та евристичної насиченості.

Задачі на числові послідовності, відібрані для олімпіадної підготовки, мають бути не лише тренувальними, а й **інтелектуально провокативними**. Перевага надається завданням, які:

- містять приховану суперечність між «першим враженням» та реальною поведінкою послідовності;
- спонукають до введення допоміжних об'єктів (нової послідовності, інваріанта, спеціальної підстановки);
- природно породжують «обернені» або узагальнені задачі.

Такі задачі створюють сприятливий фон для **евристичної бесіди** й використання системи навідних запитань, що стимулюють самостійний пошук учнів [11, 3, 4, 18].

7. Принцип балансу між тренуванням і творчою діяльністю.

Задачний матеріал має поєднувати:

- *тренувальні завдання*, спрямовані на відпрацювання окремих технік (застосування формули для a_n , побудова рекурентних співвідношень, елементарні оцінки, базові кроки індукції);
- *комбіновані задачі*, де учень змушений поєднувати кілька методів в одному розв'язанні;
- *класичні олімпіадні задачі*, що виступають «вершинними» елементами модуля й дозволяють інтегрувати засвоєні прийоми у цілісну стратегію розв'язання.

Такий баланс запобігає як формальному «натаскуванню», так і надмірному перевантаженню учнів лише надскладними задачами [12, 2, 19].

8. Принцип рефлексивності та орієнтації на узагальнення.

Система задач має бути побудована так, щоб учні мали змогу не лише одержати відповідь, а й **усвідомити** використаний спосіб дій. З цією метою доцільно вводити:

- «паралельні» задачі, що розв'язуються тим самим методом в іншому контексті;
- завдання, у яких потрібно сформулювати узагальнене твердження або параметричний варіант уже розв'язаної задачі;
- короткі рефлексивні запитання («Який ключовий прийом використано?», «Де можна застосувати цей метод ще?»).

Це сприяє переходу від запам'ятовування окремих розв'язань до засвоєння **методів роботи** з послідовностями [12, 15, 10].

9. Принцип модульної організації задачного матеріалу.

Беручи до уваги попередні принципи, задачний матеріал доцільно структурувати у вигляді **модулів**, кожен з яких має внутрішню логіку ускладнення:

-
1. *Пропедевтичний модуль* — базові означення послідовностей, прості приклади (арифметична, геометрична прогресії, найпростіші рекурентні співвідношення, перші застосування індукції).
 2. *Алгебраїчний модуль* — задачі на рекурентні та ітераційні послідовності, комбінаторні моделі (типи 1.3.1, 1.3.3, 1.3.4, 1.3.10).
 3. *Теоретико-числовий модуль* — задачі на подільність, остачі, періодичність, арифметичні властивості членів послідовностей (тип 1.3.6).
 4. *Аналітичний модуль* — задачі на обмеженість, монотонність, збіжність, границі, щільність (типи 1.3.8, 1.3.9).

Усередині кожного модуля завдання впорядковуються від тренувальних до олімпіадних, що забезпечує **поетапне нарощування** складності та дозволяє використовувати модулі як логічно завершені блоки програми факультативних занять [21, 6, 19, 20].

Отже, запропонована система принципів відбору та структурування навчального (задачного) матеріалу створює цілісне методичне підґрунтя для побудови ефективної системи тренувальних і олімпіадних задач на числові послідовності, орієнтованої на розвиток логічного мислення, дослідницьких умінь та стійкої мотивації до поглибленого вивчення математики [11, 10, 16].

3.2 Система тренувальних та олімпіадних задач, класифікованих за розширеною 10-рівневою типологією (п. 1.3)

Розширена класифікація олімпіадних задач на числові послідовності (підпункт 1.3) задає природний “каркас”, на основі якого можна спроектувати цілісну систему тренувальних та змагальних завдань для факультативних занять і математичних гуртків. Йдеться не лише про тематичний поділ (рекурентні послідовності, ітераційні процеси, задачі з теорії чисел, аналітичні властивості тощо), а й про **послідовність ускладнення** задач та їхню орієнтацію на різні рівні підготовки учнів [21, 2, 18, 19].

У побудові системи задач виходимо з трирівневої структури:

- *базовий рівень* — короткі тренувальні задачі, спрямовані на засвоєння означень, стандартних прийомів та «читання» умов задач на послідовності;
- *проміжний рівень* — задачі, що вимагають поєднання кількох відомих ідей, самостійного планування розв’язання та вміння доводити отримані твердження;
- *олімпіадний рівень* — завдання з нетривіальним задумом, де випробовується здатність учня побачити приховану структуру послідовності, здійснити перехід до нових об’єктів (інваріантів, допоміжних послідовностей, функцій) і довести результат у повному обсязі.

У межах кожного класу задач за класифікацією 1.3 добирається набір завдань усіх трьох рівнів, причому кількість і складність олімпіадних задач поступово зростають у міру просування по темі [11, 3, 1, 12].

1. Блок задач за способом задання послідовності (типи 1.3.1–1.3.5)

Перший змістовий блок системи задач об'єднує типи 1.3.1–1.3.5, де послідовності задаються різними способами: рекурентно (лінійні та нелінійні рекуренції), явною формулою n -го члена, комбінаторним описом, ітераційним процесом $x_{n+1} = f(x_n)$, а також через функціональні рівняння [6, 5, 1].

- Для **лінійних рекурентних співвідношень** (підтип 1.3.1.1) базовий рівень включає задачі на побудову кількох перших членів та формулювання гіпотези. На проміжному рівні вводиться метод характеристичного рівняння, а олімпіадні задачі пропонують поєднання цього методу з теоретико-числовими або комбінаторними міркуваннями.
- У класі **нелінійних рекурентностей** (підтип 1.3.1.2) тренувальні завдання орієнтовані на розпізнавання структур, що лінеаризуються (логарифмування, заміни виду $b_n = 1/a_n$ тощо). На вищих рівнях з'являються задачі на пошук інваріантів, перетворення задачі до вигляду, придатного для аналізу монотонності або границі.
- Для **послідовностей, заданих явною формулою** (тип 1.3.2), базові задачі зосереджені на практиці обчислення, а також на знаходженні простих властивостей (знак, парність, перші приклади монотонності). Олімпіадний рівень тут пов'язаний з дослідженням складніших формул, що містять параметри, а також з побудовою еквівалентних переписувань виразу для a_n .
- У **комбінаторних послідовностях** (тип 1.3.3) система задач будується від простих сюжетів «підрахуй кількість способів» до завдань, де учень самостійно виводить рекурентне співвідношення (типу $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ для задач про замощення) та застосовує його для подальшого дослідження послідовності [3, 8, 4].
- Для **ітераційних процесів** (тип 1.3.4) базовий рівень зосереджується на обчисленні кількох кроків і спостереженні за поведінкою x_n . На проміжному й олімпіадному рівнях задачі спрямовані на відшукування фіксованих точок, дослідження монотонності й обмеженості послідовності, що задається процесом $x_{n+1} = f(x_n)$ [6, 18].
- **Послідовності, задані через функціональні рівняння** (тип 1.3.5), представлені задачами, де ознакою «олімпіадності» є необхідність спочатку розв'язати функціональне рівняння, а вже потім перейти до аналізу конкретної послідовності [5, 1].

2. Блок задач на властивості та запитання до значень (типи 1.3.6–1.3.9)

Другий великий блок системи задач охоплює типи 1.3.6–1.3.9. Тут у центрі уваги не спосіб задання послідовності, а **питання про її властивості**: подільність, структуру остач, характер членів (квадрати, прості числа, раціональні), оцінки, нерівності, границі, щільність тощо [6, 7, 13].

- У межах **теоретико-числового класу** (тип 1.3.6) базові задачі знайомлять учнів із записом конгруенцій, поняттям періодичності залишків та елементарними аргументами на основі принципу Діріхле. Олімпіадний рівень включає

задачі на опис усіх можливих остач, доведення неможливості певних значень, а також завдання на поєднання рекурентних формул з міркуваннями за модулем m [7, 5].

- Підтип 1.3.6.2 («члени послідовності, що є квадратами, простими, раціональними тощо») представлений задачами, де учень переходить від опису a_n до діофантових рівнянь чи нерівностей між сусідніми квадратами/степенями. На олімпіадному рівні такі задачі часто вимагають факторизації виразів та побудови розумних оцінок [1, 13].
- **Задачі на суми та добутки** (тип 1.3.7) включають як класичні вправи на обчислення сум перших n членів, так і задачі, де сума/добуток виступає новою послідовністю, для якої потрібно дослідити подільність, границі чи інші властивості. Олімпіадні варіанти часто пов'язують цей тип із методом математичної індукції або теоремою Штольца–Чезаро [5, 13].
- **Задачі на нерівності та оцінки** (тип 1.3.8) у системі задач розташовуються від простих прикладів застосування АМ–ГМ, нерівності Коші–Буняковського до задач, де потрібно одразу й одержати оцінку, і обґрунтувати її точність [13, 18].
- Тип 1.3.9 (**аналітичні властивості послідовностей**) представлений трьома підтипами: обмеженість/монотонність (1.3.9.1), границя та існування границі (1.3.9.2), щільність і розподіл (1.3.9.3). Від простих таблиць та графіків учні поступово переходять до задач на доведення збіжності монотонної обмеженої послідовності, а найбільш підготовлені розглядають задачі на щільність дробових частин $\{n\alpha\}$ [7, 14].

3. Блок задач на існування та конструкцію (тип 1.3.10)

Окреме місце в системі посідають задачі **на існування та конструкцію послідовностей** (тип 1.3.10). На тренувальному рівні учні розв'язують задачі, де потрібно побудувати простий приклад послідовності із заданою властивістю (наприклад, послідовність з наперед виписаною границею або з наперед заданим періодом остач). На проміжному та олімпіадному рівнях акцент переноситься на доведення неможливості існування певного типу послідовності (методом від супротивного, із залученням інваріантів, принципу Діріхле чи аналітичних аргументів), а також на побудову нетривіальних прикладів, що демонструють незвичну поведінку (наприклад, послідовності, границю якої складно здогадатися «на око») [6, 18].

4. Узагальнена схема розміщення задач у програмі факультативу

Практична реалізація описаної системи передбачає, що в межах кожного змістового модуля (алгебраїчний, теоретико-числовий, аналітичний, комбінаторно-конструктивний) учитель добирає **ланцюжок задач**, у якому:

- перші задачі пов'язані з відповідним пунктом класифікації (1.3.1–1.3.10) і мають пропедевтичний характер;
- середні задачі вимагають поєднання кількох типів міркувань (наприклад, рекурентна послідовність + дослідження остач за модулем);

- завершальні задачі блоку є повноцінними олімпіадними завданнями, що інтегрують попередній досвід учнів і готують їх до участі в математичних олімпіадах різних рівнів.

Така схема відповідає практиці сучасних олімпіадних збірників та авторських курсів для обдарованих учнів [19, 20, 2].

5. Приклади задач за типами класифікації 1.3

Задачі типу 1.3.1 (послідовності, задані рекурентно) [2, 3, 18, 4].

1. (*Лінійна рекуренція, підтип 1.3.1.1*). Послідовність (a_n) задано умовами $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ для всіх $n \geq 1$. Знайдіть явну формулу для a_n та доведіть, що послідовність строго зростає.
2. (*Лінійна рекуренція з кратним коренем*). Послідовність (b_n) визначено так: $b_1 = 2$, $b_2 = 8$, $b_{n+2} - 4b_{n+1} + 4b_n = 0$ для $n \geq 1$.

(а) Обчисліть b_3, b_4, b_5 .

(б) Знайдіть формулу загального члена b_n .

(в) Доведіть, що послідовність $\frac{b_n}{2^n}$ є арифметичною прогресією.

3. (*Нелінійна рекуренція, підтип 1.3.1.2*). Нехай $a_1 = 1$, а для $n \geq 1$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1}.$$

Доведіть, що $0 < a_n < 2$ для всіх n та існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Знайдіть її.

4. (*Рекуренція з «родзинкою»*). Послідовність (c_n) задана рівністю $c_1 = 1$,

$$c_{n+1} = c_n + 2n - 1 \quad (n \geq 1).$$

Доведіть, що $c_n = n^2$ для всіх натуральних n .

Задачі типу 1.3.2 (послідовності, задані явною формулою) [6, 5].

1. Нехай $a_n = \frac{n^2 + 3n}{2}$.

(а) Обчисліть $a_1, a_2, \dots, a_5$.

(б) Доведіть, що для кожного натурального n число a_n є цілим.

2. Послідовність (b_n) задано формулою

$$b_n = \frac{2n + 1}{n + 2}.$$

Дослідіть її монотонність та знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

3. Нехай $c_n = n^2 + 1$. Доведіть, що жоден член цієї послідовності не ділиться на 4.

4. Послідовність (d_n) задано формулою

$$d_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Покажіть, що послідовність обмежена, але не має границі. Знайдіть $\limsup d_n$ та $\liminf d_n$.

Задачі типу 1.3.3 (послідовності, задані комбінаторно) [3, 8, 1].

- Нехай a_n — кількість способів подати число n у вигляді суми одиниць і двійок, де порядок доданків важливий.
 - Запишіть перші п'ять значень $a_1, a_2, \dots, a_5$.
 - Виведіть рекурентну формулу для a_n та доведіть її.
- Нехай b_n — кількість способів замостити прямокутник $2 \times n$ доміношками 1×2 . Отримайте рекурентне співвідношення для b_n та знайдіть b_1, b_2, b_3, b_4 .
- Нехай c_n — кількість підмножин множини $\{1, 2, \dots, n\}$, у яких не міститься двох сусідніх чисел. Доведіть, що $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ при $n \geq 3$ і знайдіть c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 .
- На координатній сітці дозволені кроки лише вправо $(1, 0)$ та вгору $(0, 1)$. Нехай d_n — кількість маршрутів із точки $(0, 0)$ до точки $(n, 2)$, які не піднімаються вище прямої $y = 2$. Обчисліть d_1, d_2, d_3, d_4 і виразіть d_n через біноміальні коефіцієнти.

Задачі типу 1.3.4 (послідовності, задані ітераційним процесом $x_{n+1} = f(x_n)$) [6, 18].

1. Нехай $x_1 = 1$, а

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 3}{2}, \quad n \geq 1.$$

- Обчисліть x_2, x_3, x_4 .
- Доведіть, що послідовність (x_n) зростає і є обмеженою.
- Знайдіть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2. Нехай $x_1 = 2$, а

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}.$$

Доведіть, що $x_n > 0$ для всіх n , послідовність монотонно спадає і збігається до $\sqrt{2}$.

3. Нехай $x_1 = 0$, а

$$x_{n+1} = \cos x_n \quad (\text{у радіанах}).$$

Обчисліть приблизні значення x_2, x_3, x_4, x_5 та сформулюйте гіпотезу про границю $\lim x_n$. (Доведення можна винести на олімпіадний рівень.)

-
4. Нехай $x_1 = 1$, а

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n}.$$

Доведіть, що послідовність (x_n) додатна, строго спадна та збігається, і знайдіть її границю.

Задачі типу 1.3.5 (послідовності, задані через функціональні рівняння) [5, 1].

1. Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє рівняння

$$f(x+1) = f(x) + 2x + 1, \quad f(0) = 0.$$

Нехай $a_n = f(n)$. Знайдіть явну формулу для a_n і перевірте, що $a_n = n^2$.

2. Функція $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє

$$g(x+1) = 2g(x) + 1, \quad g(0) = 0.$$

Нехай $b_n = g(n)$.

(а) Знайдіть b_1, b_2, b_3, b_4 .

(б) Виведіть формулу b_n та запишіть рекурентне співвідношення для (b_n) тільки в термінах b_n .

3. Розглянемо функцію

$$F(x) = \frac{x(x+1)}{2}.$$

Покажіть, що вона задовольняє функціональне рівняння $F(x+1) - F(x) = x + 1$. Покладіть $c_n = F(n)$. Запишіть явну формулу для c_n та рекурентне співвідношення для цієї послідовності.

4. Нехай $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє адитивне рівняння

$$h(x+y) = h(x) + h(y) \quad \text{для всіх } x, y \in \mathbb{R},$$

і $h(1) = 2$. Покладіть $d_n = h(n)$. Знайдіть формулу для d_n і дослідіть, які значення може приймати ця послідовність (парність, кратність тощо).

Задачі типу 1.3.6 (теоретико-числові властивості послідовностей) [1, 7, 18].

1. Нехай $a_n = 2^n - 1$. Доведіть, що a_n ділиться на 3 тоді й тільки тоді, коли n є парним числом.
2. Нехай $b_n = 3^n + 1$. Знайдіть період послідовності остач b_n за модулем 8.
3. Послідовність (c_n) задано формулою

$$c_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Доведіть, що існує нескінченно багато n , для яких c_n ділиться на 4.

-
4. Нехай $d_n = n^2 + n$. Покажіть, що для всіх $n > 1$ число d_n складене (тобто не є простим).

Задачі типу 1.3.7 (знаходження сум та добутків) [5, 13].

1. Нехай

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1).$$

Доведіть, що $S_n = n^2$ для всіх натуральних n .

2. Нехай $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$. Доведіть за допомогою математичної індукції нерівність $2^{n-1} \leq n!$ для всіх $n \geq 1$.

3. Нехай

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

Знайдіть явну формулу для a_n (використавши телескопічне перетворення) та обчисліть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

4. Нехай

$$b_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Доведіть, що $b_n = n + 1$ для всіх натуральних n .

Задачі типу 1.3.8 (нерівності та оцінки) [13, 18].

1. Нехай $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Доведіть, що

$$0 < a_n < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

для всіх $n \geq 1$.

2. Для натурального n розглянемо гармонічну суму $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Покажіть, що

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n.$$

3. Нехай $x_1, \dots, x_n \geq 0$ і $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Доведіть нерівність

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq \frac{1}{n},$$

та наведіть приклад послідовності (x_k) , для якої досягається рівність.

4. Нехай $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Доведіть, що $2 < b_n < 3$ для всіх $n \geq 1$.

Задачі типу 1.3.9 (аналітичні властивості послідовностей) [6, 7].

1. Нехай $a_n = \frac{n+1}{n}$. Дослідіть обмеженість, монотонність послідовності (a_n) та знайдіть її границю.

-
2. Гармонічна послідовність $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ є класичним прикладом розбіжної послідовності часткових сум. Доведіть, що послідовність (H_n) не має скінченної границі.
 3. Нехай $b_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Покажіть, що послідовність обмежена, але не збігається. Опишіть множину всіх її граничних точок.
 4. Нехай α — ірраціональне число. Розглянемо послідовність дробових частин $a_n = \{n\alpha\}$. Сформулюйте та доведіть (на олімпіадному рівні) твердження про щільність цієї послідовності на відрізок $(0, 1)$ [7, 14].

Задачі типу 1.3.10 (існування та конструкція послідовностей) [18, 2].

1. Побудуйте строго зростаючу послідовність натуральних чисел (a_n) , усі члени якої кратні 3, але жоден не кратний 9. (Наприклад, дайте явну формулу для a_n та доведіть, що вона має потрібні властивості.)
2. Наведіть приклад обмеженої, але незбіжної послідовності (b_n) та доведіть, що вона дійсно не має границі.
3. Побудуйте послідовність раціональних чисел (c_n) , яка збігається до числа $\sqrt{2}$. (Наприклад, через наближення методом Ньютона або через ланцюгові дроби.)
4. Доведіть, що не існує послідовності натуральних чисел (d_n) з попарно різними членами, для якої сума будь-яких двох різних членів одна й та сама константа.

Таким чином, класифікація задач на числові послідовності, подана в розділі 1.3, стає не лише теоретичним описом типів олімпіадних завдань, а й **інструментом конструювання** цілісної системи тренувальних та олімпійних задач. Така система дозволяє планомірно розвивати в учнів уміння аналізувати різні способи задання послідовностей, досліджувати їхні властивості, будувати та обґрунтовувати власні математичні конструкції [21, 2, 19, 20].

Висновки до розділу 3

У третьому розділі магістерської роботи було здійснено цілісне теоретико-методичне обґрунтування побудови системи тренувальних та олімпіадних задач на числові послідовності для факультативних занять та роботи математичних гуртків. Показано, що ефективність такої роботи безпосередньо залежить від того, наскільки послідовно й цілеспрямовано організовано задачний матеріал, а також від того, чи розглядається він не як сукупність окремих прикладів, а як логічно впорядкована дидактична система [11, 12, 18].

По-перше, у розділі було виокремлено та описано **принципи відбору й структурування змісту задачного матеріалу** з теми «Числові послідовності». Сформульовано вимоги до наукової коректності та узгодженості задач зі змістом шкільного курсу, підкреслено важливість наступності між базовим навчанням, факультативом та подальшими університетськими курсами. Обґрунтовано доцільність модульної організації задачного матеріалу (пропедевтичний, алгебраїчний, теоретико-числовий, аналітичний модулі), що дозволяє вчителю гнучко комбінувати зміст залежно від мети заняття та рівня підготовки учнів [9, 10, 12].

По-друге, уточнено роль **диференціації, проблемності та евристичної насиченості** у роботі з задачами на послідовності. Показано, що цілеспрямоване поєднання тренувальних, комбінованих та творчих задач створює умови для формування в учнів індивідуальних освітніх траєкторій, не знижуючи при цьому вимог до логічної строгості міркувань. Введення відкритих та узагальнювальних завдань забезпечує перехід від відтворення готових схем до усвідомленого володіння методами дослідження послідовностей (рекурентних, ітераційних, комбінаторних, теоретико-числових, аналітичних) [11, 3, 18].

По-третє, на основі **розширеної 10-рівневої класифікації олімпіадних задач на числові послідовності** (п. 1.3) вибудовано систему задач, придатну для поетапного переходу від базового до олімпіадного рівня. Для кожного типу задач (рекурентні послідовності, явні формули, комбінаторні моделі, ітераційні процеси, задачі з теорії чисел, задачі на суми й добутки, нерівності та оцінки, аналітичні властивості, задачі на існування та конструкцію послідовностей) підібрано репрезентативні приклади, які демонструють характерні способи міркування учнів і можуть слугувати «опорними точками» для організації факультативних занять [2, 1, 19, 20, 21].

По-четверте, у розділі окреслено **загальну схему включення системи задач у програму факультативу**. Запропоновано трирівневу структуру роботи (базовий, проміжний, олімпіадний рівні) та показано, як у межах кожного модуля вибудовується «ланцюжок» задач: від пропедевтичних вправ із явно вираженими опорами до задач дослідницького характеру, що потребують самостійного добору методів. Така організація сприяє формуванню в учнів навіть не стільки сукупності окремих умінь, скільки **стратегій роботи** з послідовностями [11, 4, 3].

По-п'яте, наголошено на важливості **рефлексивних компонентів** у роботі з задачами. Передбачено включення до системи завдань «паралельних» та узагальнювальних задач, а також коротких рефлексивних запитань, спрямованих на усвідомлення учнями ключового прийому, структури розв'язання та можливостей перенесення отриманого досвіду на нові ситуації [12, 9]. Саме рефлексія дозволяє перетворити розв'язання задач на елемент формування математичного стилю мислення.

Узагальнюючи результати розділу, можна зробити висновок, що розроблена система принципів і класифіковано структурований задачний матеріал на числові послідовності становлять **методичний інструментарій** для вчителя математики, який прагне організувати факультативну й гурткову роботу не епізодично, а на основі цілісної концепції. Запропонований підхід створює умови для послідовного розвитку в учнів умінь аналізувати різні способи задання послідовностей, досліджувати їхні властивості, будувати власні математичні конструкції та готуватися до участі в олімпіадах різних рівнів [2, 19, 20, 21].

Висновки

Проведене дослідження було спрямоване на теоретичне обґрунтування та практичну розробку методичних підходів для навчання учнів розв'язуванню олімпіадних задач на числові послідовності в умовах факультативних занять і математичних гуртків. Зміст виконаної роботи дає підстави стверджувати, що сформульована у *Вступі* мета досягнута, а всі поставлені завдання розв'язано.

По-перше, на основі аналізу психолого-педагогічної, математичної та науково-методичної літератури уточнено роль задач на послідовності у розвитку логічного мислення, комбінаторної інтуїції, вмінь працювати з оцінками, границями, теоретико-числовими міркуваннями. Показано, що числові послідовності утворюють змістовий «міст» між шкільним курсом алгебри, елементами математичного аналізу та теорії чисел і тому є природною основою для побудови цілісної системи олімпіадної підготовки старшокласників.

По-друге, розроблено та обґрунтовано розширену десятипунктну класифікацію олімпіадних задач на числові послідовності, що водночас враховує: спосіб задання послідовності (рекурентний, явний, ітераційний, комбінаторний, через функціональні рівняння) і тип запитання щодо її властивостей (теоретико-числові характеристики, суми й добутки, нерівності та оцінки, аналітичні властивості, задачі на існування та конструкцію). Порівняння з відомими підходами показало, що така типологія забезпечує більш гнучке «підхоплення» широкого спектра олімпіадних сюжетів і водночас є зручною для практичної роботи вчителя.

По-третє, систематизовано традиційні методичні підходи до навчання розв'язуванню задач підвищеної складності (евристична бесіда, метод аналогій, узагальнення, математична індукція, робота з інваріантами, підстановками, графічними моделями) та окреслено особливості їх застосування до кожного блоку класифікації задач на послідовності. Показано, що цілеспрямоване комбінування цих підходів дозволяє перейти від епізодичної роботи з окремими «цікавими задачами» до системного формування в учнів умінь аналізувати структуру послідовності, будувати гіпотези, обґрунтовувати і перевіряти здобуті результати.

Теоретичне значення магістерської роботи полягає у подальшій розробці понятійного апарату й типології задач на числові послідовності, у поєднанні класифікаційних та методичних підходів у єдину модель олімпіадної підготовки. Практичне значення визначається тим, що одержані результати оформлено у вигляді конкретних дидактичних матеріалів, готових до впровадження без додаткової суттєвої переробки.

Перспективи подальших досліджень убачаємо у:

- експериментальній перевірці ефективності розроблених методичних підходів на базі кількох закладів загальної середньої освіти з використанням кількісних і якісних показників навчальних досягнень;
- створенні цифрових ресурсів (інтерактивних тренажерів, онлайн-банків задач,

коротких відеопояснень), побудованих на основі запропонованої класифікації;

- поширенні описаних методичних підходів на інші класи олімпіадних задач (на нерівності, функціональні рівняння, комбінаторні конструкції поза темою послідовностей);
- подальшому осмисленні можливостей інтеграції олімпіадної підготовки з курсом шкільної математики у контексті компетентнісного підходу.

Узагальнюючи результати магістерської роботи, можна зробити висновок, що вироблені методичні підходи на основі детальної класифікації задач на числові послідовності є дієвим інструментом організації факультативної та гурткової роботи з обдарованими учнями, сприяє розвитку їхнього логічного, аналітичного та творчого мислення і створює підґрунтя для успішного подальшого вивчення вищої математики та участі в інтелектуальних змаганнях.

Бібліографія

- [1] Andreescu, T. and Andrica, D. (2009) *Number theory: Structures, examples, and problems*. Boston: Birkhäuser.
- [2] Andreescu, T. and Gelca, R. (2009) *Mathematical olympiad challenges*. 2nd ed. Boston: Birkhäuser.
- [3] Engel, A. (1998) *Problem-solving strategies*. New York: Springer.
- [4] Fomin, D., Genkin, S. and Itenberg, I. (1996) *Mathematical circles (Russian experience)*. Providence, RI: American Mathematical Society.
- [5] Graham, R. L., Knuth, D. E. and Patashnik, O. (1994) *Concrete mathematics: A foundation for computer science*. 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley.
- [6] Kaczor, W. J. and Nowak, M. T. (2000) *Problems in mathematical analysis I: Real numbers, sequences and series*. Providence, RI: American Mathematical Society.
- [7] Kuipers, L. and Niederreiter, H. (1974) *Uniform distribution of sequences*. New York: John Wiley & Sons.
- [8] Larson, L. C. (1983) *Problem-solving through problems*. New York: Springer-Verlag.
- [9] Piaget, J. and Inhelder, B. (1969) *The psychology of the child*. New York: Basic Books.
- [10] Poincaré, H. (2003) *Science and method*. Translated by F. Maitland. New York: Dover Publications. (Original work published 1908).
- [11] Pólya, G. (1957) *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. 2nd ed. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- [12] Schoenfeld, A. H. (1985) *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- [13] Steele, J. M. (2004) *The Cauchy-Schwarz master class: An introduction to the art of mathematical inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [14] Weyl, H. (1916) 'Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins', *Mathematische Annalen*, 77, pp. 313–352.
- [15] Weyl, H. (1940) 'The Mathematical Way of Thinking', *Science*, 92(2394), pp. 437–446.
- [16] Weyl, H. (1949) *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

-
- [17] Weyl, H. (1952) *Symmetry*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- [18] Zeitz, P. (2007) *The art and craft of problem solving*. 2nd ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- [19] Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. *Математичні олімпіади школярів України: 1991–2000*. Київ: Техніка, 2001. 541 с.
- [20] Конет І., Радченко В., Теплінський Ю. *Обласні олімпіади з математики*: навч. посіб. Кам'янець-Подільський: Абетка, 2010. 388 с.
- [21] Комарницький В., Матурін Ю. *Числові послідовності в математичних олімпіадах та факультативних курсах: методичні підходи й дидактичні можливості*// Актуальні проблеми сучасної науки : матеріали XII Міжнародної науково-практичної конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій. Дрогобич – С. 229–230.