

Міністерство освіти і науки України

**Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана
Франка**

Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

Завідувач кафедри математики та економіки,

Кандидат педагогічних наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК

«___» грудня 2025 р.

**ШЛЯХИ ВИВЧЕННЯ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ,
ВИЗНАЧЕНИХ НА КОЛІ НА ЗАНЯТТЯХ З МАТЕМАТИКИ У
ЗАКЛАДАХ ФАХОВОЇ ПЕРЕДВИЩОЇ ОСВІТИ**

Предметна спеціальність: 014.04 «Середня освіта (Математика)»

**Додаткова предметна спеціальність: 014.09 «Середня освіта
(Інформатика)»**

Магістерська робота

на здобуття освітньої кваліфікації: «Магістр середньої освіти»

Професійна кваліфікація: «Вчитель математики, вчитель
інформатики»

Автор роботи: Косолович Оксана Романівна _____

підпис

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук,

професор Дільний Володимир Миколайович _____

підпис

Дрогобич, 2025

Захист магістерської роботи

Шляхи вивчення властивості функцій, визначених на колі на заняттях з математики у закладах фахової передвищої освіти

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

_____	Голова ЕК	_____	_____
Дата		підпис	прізвище, ім.'я

Секретар ЕК	_____	_____
	підпис	прізвище, ім'я

АНОТАЦІЯ

Косолович О. Р. *Шляхи вивчення властивості функцій, визначених на колі на заняттях з математики у закладах фахової передвищої освіти.*
– Рукопис. – 37 с.

Дана магістерська робота присвячена просторам Гарді, а саме ваговим в одиничному крузі. Розглянуто та досліджено експоненційні ваги, одноточкові та двоточкові. Отримано результати про зображення у цих просторах. Отримані твердження є новими. Дані результати можуть бути застосовані у подальших дослідженнях з теорії просторів аналітичних функцій та для підготовки до студентських математичних олімпіад.

Abstract

Kosolovych O. R. *Ways to study the properties of functions defined on a circle in mathematics classes in institutions of professional pre-higher education.* – Manuscript. – 37 p.

This master's thesis is devoted to Hardy spaces, namely weighted spaces in the unit circle. Exponential weights, one-point and two-point, are considered and investigated. Results about images in these spaces are obtained. The obtained statements are new. These results can be applied in further research on the theory of spaces of analytic functions and for preparation for student mathematical olympiads.

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ.....	3
ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПРОСТОРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ	8
1.1 Означення і властивості деяких просторів.....	8
1.2 Огляд літератури.....	14
РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ	20
РОЗДІЛ 3. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ, ВИЗНАЧЕНИХ НА КОЛІ, У ЗАКЛАДАХ ФАХОВОЇ ПЕРЕДВИЩОЇ ОСВІТИ	31
ВИСНОВКИ.....	35
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	36

ВСТУП

Актуальність теми. Простори Гарді мають важливе значення у функціональному та комплексному аналізі. Теорія цих просторів активно використовується в економічних дослідженнях, квантовій механіці, теорії сигналів та інших галузях науки. Круг та півплощина є класичними областями у яких вивчаються простори Гарді. Природним узагальненням просторів Гарді є вагові простори. Цей принцип буде взято за основу нашого дослідження у даній магістерській роботі.

З початку другої половини 20-го століття досліджувалися степеневі ваги. Більшість властивостей даних просторів повторювали властивості класичних просторів. Простори Гарді у півплощині з експоненційною вагою досліджували Б. В. Винницький та його учні. У функціональному аналізі зручніше працювати з просторами Гарді в крузі для простішого використання.

Випадок одиничного круга буде розглянуто в даній магістерській роботі. Як відомо функції з просторів Гарді в крузі визначаються повністю своїми межовими значеннями на межі одиничного круга, тобто на одиничному колі. А. Гарсія, Дж. Машрегі, В. Росс та інші видатні математики досліджували властивості просторів Гарді та відновили інтерес до них впродовж останніх років. Не мають аналогів для одиничного круга багато якісно нових результатів Б. В. Винницького та його співробітників. Наше дослідження цьому присвячено.

Метою роботи є дослідження властивостей вагових просторів Гарді у випадку одиничного круга.

Задачі дослідження. Опис властивостей вагових просторів Гарді з одноточною та двоточною експоненційними вагами. Отримати результати про зображення функцій у цих просторах. Одержати методи

для опису інтегралів функції комплексної змінної. Описати пропедевтику вивчення функцій, визначених на колі, у закладах передвищої освіти.

Об'єктом дослідження є вагові простори Гарді для одиничного круга.

Предметом дослідження є властивості вагових просторів Гарді з одноточковими та двоточковими експоненційними вагами.

Методи дослідження. У даній магістерській роботі використані сучасні методи міри та інтегралів Лебега, комплексного та функціонального аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів. Одержані результати магістерської роботи є новими. У роботі наводиться аналог теореми Коші, а також леми, які описують властивості просторів Гарді.

Практичне значення отриманих результатів. Результати даної магістерської роботи мають теоретичний характер. Використовується в квантовій механіці, теорії сигналів, економічних дослідженнях та інших галузях науки теорія даних просторів.

Апробація результатів магістерської роботи. Результати даних досліджень доповідались на XII-й міжнародній науково-практичній конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій [8], опубліковані у журналі категорії Б [11].

Структура і обсяг роботи. Робота складається з анотації, вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел, який налічує 11 найменувань. В першому розділі наводиться огляд літератури та наведено допоміжні твердження, які необхідні для дослідження даної теми. В другому розділі є основні результати роботи з доведеннями. У третьому

розділі наводяться шляхи вивчення властивості функцій, визначених на колі, на заняттях з математики у закладах фахової передвищої освіти. Загальний обсяг роботи складає 37 сторінки.

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПРОСТОРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

1.1 Означення і властивості деяких просторів

Простори Гарді в крузі активно досліджуються математиками впродовж поточного століття [9, 10] з огляду на те, що простори Гарді є модельними просторами для деяких важливих операторів. Також властивості просторів Гарді застосовуються у прикладних дослідженнях [5].

Означення 1[1,2]. Нехай $H^p(\mathbb{D}), 1 \leq p < +\infty$, простір Гарді в одиничному крузі, тобто простір аналітичних у крузі $\mathbb{D}$ функцій f для яких:

$$\|f\|^p := \sup_{r \in (0;1)} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi \right\} < +\infty.$$

Розглянемо частину дуги кола для означення аналогу цього простору із центром в точці $ib, b \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ та радіусом $\sqrt{1+b^2}$, у прямокутних декартових координатах складемо рівняння цього кола в

$$x^2 + (y - b)^2 = 1 + b^2.$$

Перейдемо в останній рівності до полярної системи координат:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

Отримаємо $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi - 2\rho b \sin \varphi + b^2 = 1 + b^2$, тому

$$\rho^2 - 2b \sin \varphi \rho + b^2 - 1 = 0.$$

Розглянемо останнє рівняння як квадратне відносно змінної ρ . Його дискримінант дорівнює

$$D = 4b^2 \sin^2 \varphi + 4 = 4(b^2 \sin^2 \varphi + 1).$$

Тому розв'язки цього рівняння рівні

$$\rho_1 = \frac{2b \sin \varphi + \sqrt{4(b^2 \sin^2 \varphi + 1)}}{2} = b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1},$$

$$\rho_2 = \frac{2b \sin \varphi - \sqrt{4(b^2 \sin^2 \varphi + 1)}}{2} = b \sin \varphi - \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1}.$$

Останній розв'язок є від'ємним, тому він сторонній.

Отримаємо, що $\rho = b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1}$.

Означення 2. Нехай $\hat{H}^p(\mathbb{D}, \alpha)$, $1 < p < +\infty$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, простір таких аналітичних в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ функцій, що

$$\begin{aligned} \|f\| &:= \sup_{b < -1} \left\{ \int_0^\pi |f(\rho(\varphi)e^{i\varphi})|^p |d(\rho(\varphi)e^{i\varphi})|, \rho(\varphi) \right. \\ &\quad \left. = b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$+ \sup_{b > 1} \left\{ \int_{-\pi}^0 |f(\rho(\varphi)e^{i\varphi})|^p |d(\rho(\varphi)e^{i\varphi})|, \rho(\varphi) = b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Ми будемо використовувати позначення ρ замість $\rho(\varphi)$ для спрощення записів, якщо це не викликатиме непорозумінь.

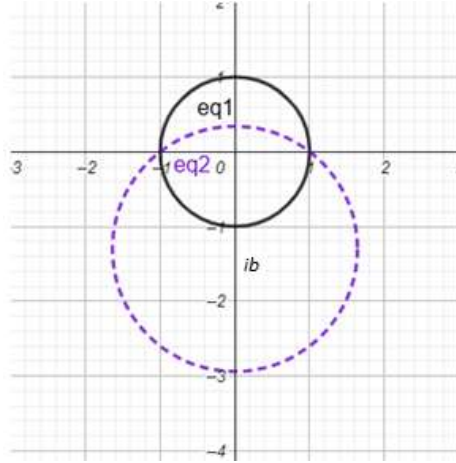


Рис.1.1

Якщо $b < -1$

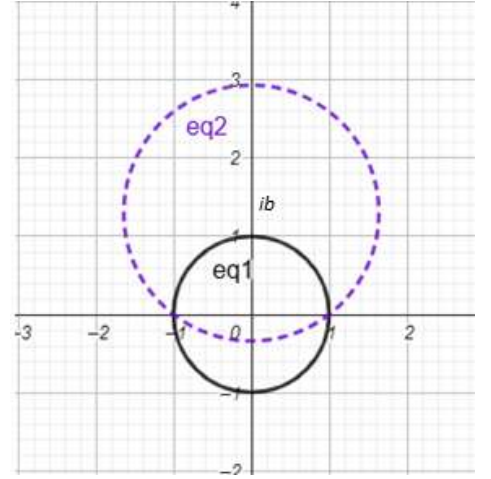


Рис.1.2

Якщо $b > 1$

Розглянемо ваговий простір Гарді. Він визначається інтегруванням по дугам кіл для одноточкової ваги,.

Означення 3. Нехай $\hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}, \alpha)$, $1 < p < +\infty$, $\sigma \geq 0$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, простір таких аналітичних в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ функцій, що

$$\begin{aligned}
 \|f\| := & \sup_{b < -1} \left\{ \int_0^\pi |f(\rho e^{i\varphi})|^p \left\{ e^{-p\sigma \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}} \right\} |d(\rho e^{i\varphi})|, \rho = \right. \\
 & \left. b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}} + \\
 & + \sup_{b > 1} \left\{ \int_{-\pi}^0 |f(\rho e^{i\varphi})|^p \left\{ e^{-p\sigma \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}} \right\} |d(\rho e^{i\varphi})|, \rho = b \sin \varphi + \right. \\
 & \left. \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.
 \end{aligned}$$

Розглянемо випадок, коли одноточкову вагу зміщуємо в точку $e^{i\alpha_1}$ на одиничному колі.

Означення 4. Нехай $\hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}, \alpha_1)$, $1 < p < +\infty$, $\sigma \geq 0$, $0 \leq \alpha_1 < 2\pi$, простір таких аналітичних в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ функцій, що

$$\begin{aligned} \|f\| := \sup_{b < -1} \left\{ \int_0^\pi |f(\rho e^{i\varphi})|^p \left\{ e^{-p\sigma \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}} \right\} |d(\rho e^{i\varphi})|, \rho = \right. \\ \left. b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}} + \\ + \sup_{b > 1} \left\{ \int_{-\pi}^0 |f(\rho e^{i\varphi})|^p \left\{ e^{-p\sigma \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}} \right\} |d(\rho e^{i\varphi})|, \rho = \right. \\ \left. b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty. \end{aligned}$$

Означення 5. Нехай $\hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}, \alpha_2)$, $1 < p < +\infty$, $\sigma \geq 0$, $0 \leq \alpha_2 < 2\pi$, простір таких аналітичних в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ функцій, що

$$\begin{aligned} \|f\| := \sup_{b < -1} \left\{ \int_0^\pi |f(\rho e^{i\varphi})|^p \left\{ e^{-p\sigma \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}} \right\} |d(\rho e^{i\varphi})|, \rho = \right. \\ \left. b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}} + \\ + \sup_{b > 1} \left\{ \int_{-\pi}^0 |f(\rho e^{i\varphi})|^p \left\{ e^{-p\sigma \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}} \right\} |d(\rho e^{i\varphi})|, \rho = \right. \\ \left. b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty. \end{aligned}$$

Ваговий простір Гарді з двоточною вагою в точках $e^{i\alpha_1}$ та $e^{i\alpha_2}$ розглянуто далі.

Означення 6. Нехай $\hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}, \alpha_1, \alpha_2)$, $1 < p < +\infty$, $\sigma \geq 0$, простір таких аналітичних в $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ функцій, що

$$\begin{aligned}
& \|f\| := \\
& \sup_{b < -1} \left\{ \int_0^\pi |f(\rho e^{i\varphi})|^p \left\{ e^{-p\sigma \left(\frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_1)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_1) + \rho^2} + \frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_2)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_2) + \rho^2} \right)} \right\} |d(\rho e^{i\varphi})|, \rho = \right. \\
& \quad \left. b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}} + \\
& \sup_{b > 1} \left\{ \int_{-\pi}^0 |f(\rho e^{i\varphi})|^p \left\{ e^{-p\sigma \left(\frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_1)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_1) + \rho^2} + \frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_2)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_2) + \rho^2} \right)} \right\} |d(\rho e^{i\varphi})|, \rho = \right. \\
& \quad \left. b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty
\end{aligned}$$

Означення 7. Позначимо через $L^\infty(0; +\infty)$ множину всіх вимірних функцій, для яких

$$\operatorname{esssup}\{|f(x)| : x \in (0; +\infty)\} < +\infty.$$

Означення 8. Нехай $\hat{H}_\sigma^\infty(\mathbb{D}, \alpha_1, \alpha_2)$, $\sigma \geq 0$, простір таких аналітичних в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функцій, що

$$\operatorname{esssup} \left\{ |f(\rho e^{i\varphi})| e^{-\sigma \left(\frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_1)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_1) + \rho^2} + \frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_2)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_2) + \rho^2} \right)} \right\} < +\infty.$$

Означення 9. Нехай $\hat{H}_{\sigma_1, \sigma_2}^p(\mathbb{D}, \alpha_1, \alpha_2)$, $1 < p < +\infty$, $\sigma \geq 0$, простір таких аналітичних в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функцій, що

$$\begin{aligned}
& \|f\| := \\
& \sup_{b < -1} \left\{ \int_0^\pi |f(\rho e^{i\varphi})|^p \left\{ e^{-p \left(\frac{2\rho \sigma_1 |\sin(\varphi - \alpha_1)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_1) + \rho^2} + \frac{2\rho \sigma_2 |\sin(\varphi - \alpha_2)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_2) + \rho^2} \right)} \right\} |d(\rho e^{i\varphi})|, \rho = \right. \\
& \quad \left. b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sup_{b>1} \left\{ \int_{-\pi}^0 |f(\rho e^{i\varphi})|^p \left\{ e^{-p \left(\frac{2\rho\sigma_1 |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho c} + \frac{2\rho\sigma_2 |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho\sigma_2 |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho c} + \frac{2\rho\sigma_2 |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{(\varphi-\alpha_2)+\rho^2} \right)} \right\} |d(\rho e^{i\varphi})|, \rho = \\
& b \sin \varphi + \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + 1} \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.
\end{aligned}$$

1.2 Огляд літератури

Лема 1.2 (формула Коші). Нехай $F \in H^p(\mathbb{D})$. Тоді справедливе зображення

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{F(e^{it}) d(e^{it})}{e^{it} - z}, z \in \mathbb{D}.$$

Б. Винницький, В. Шаран, В. Дільний та інші математики досліджували властивості вагового простору Гарді у півплощині.

Означення 10. Через $H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \leq p < +\infty$, позначимо простір Гарді аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ функцій, для яких

$$\|f\| := \sup_{x>0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Наступне твердження пов'язує вагові простори Гарді в крузі та півплощині.

Лема 1.3 [4]. Функція f належить простору $\hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D})$, $\sigma \geq 0$,

$1 \leq p < \infty$, тоді і тільки тоді, коли $f_3 \in H_\sigma^p(\mathbb{C}_+)$, де

$$f_3\left(\frac{w+1}{1-w}\right) = f(w) \cdot \left(\frac{2}{1-w}\right)^{\frac{2}{p}}. \quad (1.1)$$

Наведемо приклади функцій, що належать даному простору.

Приклад 1. Розглянемо $H_\sigma^p(\mathbb{C}_+)$, $p > 1$. Тоді функція $f_3(z) = \frac{\sin(\sigma \cdot z)}{z}$ належить цьому простору. Знайдемо $f(w)$.

Виконаємо заміну $\frac{z-1}{z+1} = w$, звідси отримаємо $z = \frac{w+1}{1-w}$.

$$f_3\left(\frac{w+1}{1-w}\right) = \frac{\sin\left(\sigma \cdot \frac{w+1}{1-w}\right)}{\frac{w+1}{1-w}}$$

За формулою (1.1) отримаємо

$$\frac{\sin\left(\sigma \cdot \frac{w+1}{1-w}\right)}{\frac{w+1}{1-w}} = f(w) \cdot \left(\frac{2}{1-w}\right)^{\frac{2}{p}}.$$

Тоді отримаємо

$$f(w) = \frac{\sin\left(\sigma \cdot \frac{w+1}{1-w}\right)}{\frac{w+1}{1-w} \cdot \left(\frac{2}{1-w}\right)^{\frac{2}{p}}} = \frac{\sin\left(\sigma \cdot \frac{w+1}{1-w}\right) \cdot (1-w) \cdot (1-w)^{\frac{2}{p}}}{2^{\frac{2}{p}} \cdot (w+1)} = \frac{\sin\left(\sigma \cdot \frac{w+1}{1-w}\right) \cdot (1-w)^{1+\frac{2}{p}}}{2^{\frac{2}{p}} \cdot (w+1)}.$$

Приклад 2. Розглянемо $H_{\sigma}^p(\mathbb{C}_+)$, $f_3(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$. Знайдемо $f(w)$.

Виконаємо заміну $\frac{z-1}{z+1} = w$, звідси отримаємо $z = \frac{w+1}{1-w}$.

$$f_3\left(\frac{w+1}{1-w}\right) = \frac{1}{\left(\frac{w+1}{1-w} + 1\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{w+1+1-w}{1-w}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{1-w}\right)^2} = \left(\frac{1-w}{2}\right)^2.$$

За формулою (1.1) отримаємо

$$\left(\frac{1-w}{2}\right)^2 = f(w) \left(\frac{2}{1-w}\right)^{\frac{2}{p}}$$

$$f(w) = \frac{\left(\frac{1-w}{2}\right)^2}{\left(\frac{2}{1-w}\right)^{\frac{2}{p}}} = \frac{(1-w)^2 \cdot (1-w)^{\frac{2}{p}}}{2^2 \cdot 2^{\frac{2}{p}}} = \left(\frac{1-w}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1-w}{2}\right)^{\frac{2}{p}} = \left(\frac{1-w}{2}\right)^{2+\frac{2}{p}}.$$

Розглянемо нерівність Мінковського у вигляді

$$\left(\int_L |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_L |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_L |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Використаємо нерівність Коші-Буняковського у вигляді

$$\int_a^b |f(x) \cdot g(x)|^1 dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \cdot \int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.2)$$

Приклад 3. Нехай $f_3(z) = e^{i\sigma z}$. Знайдемо лінійне відображення $w = \frac{z-1}{z+1}$ функції $e^{i\sigma z}$.

Виконаємо заміну з леми 1.3 $w = \frac{z-1}{z+1}$. Виконавши спрощення даного виразу, отримаємо

$$z - 1 = w(z + 1)$$

$$z - 1 = wz + w$$

$$z - wz = w + 1$$

$$z(1 - w) = w + 1$$

$$z = \frac{w + 1}{1 - w}$$

$$f_3(z) = f\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \cdot (z+1)^{\frac{2}{p}}.$$

Підставимо у попередню рівність

$$z = \frac{w+1}{1-w}.$$

З умови прикладу отримаємо

$$f_3\left(\frac{w+1}{1-w}\right) = e^{i\sigma \frac{w+1}{1-w}} = e^{\frac{i\sigma w + i\sigma}{1-w}}$$

За формулою (1.1) одержимо

$$e^{\frac{i\sigma w + i\sigma}{1-w}} = f(w) \cdot \left(\frac{2}{1-w}\right)^{\frac{2}{p}}.$$

З попередньої рівності виразимо $f(w)$ та отримаємо

$$f(w) = \frac{e^{\frac{i\sigma w + i\sigma}{1-w}}}{\left(\frac{2}{1-w}\right)^{\frac{2}{p}}} = \frac{e^{\frac{i\sigma(w+1)}{1-w}}}{\left(\frac{2}{1-w}\right)^{\frac{2}{p}}}.$$

Приклад 4. Виконаємо заміну $f(w) = w \cdot e^{i\alpha}$ для того, щоб вага функції $f(w) = \frac{e^{\frac{i\sigma(w+1)}{1-w}}}{\left(\frac{2}{1-w}\right)^{\frac{2}{p}}}$ була у точці α .

Після заміни отримаємо такий вираз

$$f(we^{i\alpha}) = \frac{e^{\frac{i\sigma(we^{i\alpha}+1)}{1-we^{i\alpha}}}}{\left(\frac{2}{1-we^{i\alpha}}\right)^{\frac{2}{p}}} = e^{\frac{i\sigma(we^{i\alpha}+1)}{1-we^{i\alpha}}} \cdot \frac{(1-we^{i\alpha})^{\frac{2}{p}}}{2^{\frac{2}{p}}}.$$

Обчислимо модуль даної функції

$$f(w) = \frac{e^{\frac{i\sigma(w+1)}{1-w}}}{\left(\frac{2}{1-w}\right)^{\frac{2}{p}}}.$$

Для обчислення модуля з експоненти використаємо те, що

$$|e^z| = |e^{x+i}| = e^x,$$

$$w = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Виконавши заміну, одержимо

$$e^{\frac{i\sigma(\rho e^{i\varphi}+1)}{1-\rho e^{i\varphi}}} = e^{i\sigma \frac{\rho e^{i\varphi}+1}{1-\rho e^{i\varphi}}} = e^{i\sigma \frac{(\rho e^{i\varphi}+1) \cdot (1-\rho e^{-i\varphi})}{(1-\rho e^{i\varphi}) \cdot (1-\rho e^{-i\varphi})}}.$$

Виконаємо спрощення чисельника даної експоненти

$$\begin{aligned}
(\rho e^{i\varphi} + 1) \cdot (1 - \rho e^{-i\varphi}) &= \rho e^{i\varphi} - \rho^2 e^{i\varphi} \cdot e^{-i\varphi} + 1 - \rho e^{-i\varphi} = \rho e^{i\varphi} - \\
\rho^2 e^{i\varphi} (-i\varphi) + 1 - \rho e^{-i\varphi} &= \rho e^{i\varphi} - \rho^2 + 1 - \rho e^{-i\varphi} = (1 - \rho^2) + \\
\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) - \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi) &= (1 - \rho^2) + \rho \cos \varphi + \rho i \sin \varphi - \\
\rho \cos \varphi + i \rho \sin \varphi &= (1 - \rho^2) + 2\rho i \sin \varphi.
\end{aligned}$$

Спростимо знаменник експоненти

$$\begin{aligned}
(1 - \rho e^{i\varphi}) \cdot (1 - \rho e^{-i\varphi}) &= 1 - \rho e^{-i\varphi} - \rho e^{i\varphi} + \rho^2 e^0 \\
&= 1 - \rho e^{-i\varphi} - \rho e^{i\varphi} + \rho^2 = 1 + \rho^2 - \rho(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi}) \\
&= 1 + \rho^2 - \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi + \cos \varphi + i \sin \varphi) \\
&= 1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi.
\end{aligned}$$

Підставивши отримані результати у функцію, одержимо

$$\begin{aligned}
e^{i\sigma \frac{(\rho e^{i\varphi} + 1) \cdot (1 - \rho e^{-i\varphi})}{(1 - \rho e^{i\varphi}) \cdot (1 - \rho e^{-i\varphi})}} &= e^{i\sigma \frac{(1 - \rho^2) + 2\rho i \sin \varphi}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi}} = e^{\frac{i\sigma(1 - \rho^2) + 2\sigma\rho i^2 \sin \varphi}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi}} \\
&= e^{\frac{i\sigma(1 - \rho^2)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi} - \frac{2\sigma\rho \sin \varphi}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi}}.
\end{aligned}$$

За допомогою отриманих результатів вище, отримаємо

$$\left| e^{\frac{i\sigma(1 - \rho^2)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi} - \frac{2\sigma\rho \sin \varphi}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi}} \right| = e^{-\frac{2\sigma\rho \sin \varphi}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi}} > 0.$$

Означення 11. $H^p(\mathbb{D}^+)$, $1 \leq p < +\infty$ простір Гарді в одиничному крузі, тобто простір аналітичних у півплощині $\mathbb{D}^+$ функцій f для яких:

$$\|f\|^p := \max \left\{ \sup_{r \in (0;1)} \left\{ \int_0^\pi |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi \right\}, \int_{-1}^1 |f(x)dx| \right\} < +\infty.$$

Аналогічно до формули Коші до круга отримаємо наступне твердження.

Теорема (формула Коші). Якщо $f \in H^p(\mathbb{D}^+)$ отримаємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_+} \frac{f(w)}{w-z} dw = \begin{cases} f(z), & z \in \mathbb{D}_+ \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}_+ \end{cases}.$$

Застосуємо останнє твердження до функції

$$f(z) \cdot e^{\frac{i\sigma(z+1)}{1-z}} \in H^p(\mathbb{D}^+).$$

Якщо $z \in \mathbb{D}_+$, то отримаємо

$$f(z) \cdot e^{\frac{i\sigma(z+1)}{1-z}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_+} \frac{f(w)}{w-z} \cdot e^{\frac{i\sigma(w+1)}{1-w}} dw.$$

РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Розглянемо деякі простори, які будуть необхідні для доведення подальших тверджень.

Означення 12 . Нехай $H^p(\mathbb{D}^+)$, $1 \leq p < +\infty$, простір Гарді в одиничному півкрузі $\mathbb{D}^+ = \{z \in \mathbb{D}, \operatorname{Im} z > 0\}$, тобто простір аналітичних у півкрузі $\mathbb{D}^+$ функцій f для яких:

$$\|f\|^p := \max \left\{ \sup_{r \in (0;1)} \left\{ \int_0^\pi |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi \right\}, \int_{-1}^1 |f(x)dx| \right\} < +\infty.$$

Означення 13 . Нехай $H^p(\mathbb{D}^-)$, $1 \leq p < +\infty$, простір Гарді в одиничному півкрузі $\mathbb{D}^- = \{z \in \mathbb{D}, \operatorname{Im} z < 0\}$, тобто простір аналітичних у півкрузі $\mathbb{D}^-$ функцій f для яких:

$$\|f\|^p := \max \left\{ \sup_{r \in (0;1)} \left\{ \int_{-\pi}^0 |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi \right\}, \int_{-1}^1 |f(x)dx| \right\} < +\infty.$$

Лема 2.1 (формула Коші) . Якщо $f \in H^p(\mathbb{D}^+)$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}^+} \frac{f(w)}{w-z} dw = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{D}_+ \\ 0, z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_+ \end{cases}.$$

Якщо $f \in H^p(\mathbb{D}^-)$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}^+} \frac{f(w)}{w-z} dw = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{D}_- \\ 0, z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_- \end{cases}.$$

Дослідимо суму двох функцій із просторів $f_1 \in \hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}, \alpha_1)$, що визначається одноточковою вагою, зміщеною в точку $e^{i\alpha_1}$ і $f_2 \in \hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}, \alpha_2)$ — простору, що визначається вагою, яка зміщена в точку $e^{i\alpha_2}$. Зокрема, з'ясуємо чи вона належить простору $\hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}, \alpha_1, \alpha_2)$ із двоточковою вагою.

Лема 2.2. Якщо $f_1 \in \hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}, \alpha_1)$ та $f_2 \in \hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}, \alpha_2)$, де $p \geq 1, \sigma > 0$, то

$$f = f_1 + f_2 \in \hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}, \alpha_1, \alpha_2).$$

Доведення. Нам дано за умовою леми, що $f_1 \in \hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}, \alpha_1)$,

$$f_2 \in \hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}, \alpha_2), f(z) = f_1(z) + f_2(z) = f_1(\rho e^{i\varphi}) + f_2(\rho e^{i\varphi}).$$

По деякому спрямлюваному контуру γ розглянемо інтеграл, що лежить в $\mathbb{D}$

$$\begin{aligned} \int_\gamma |f(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)} |d(\rho e^{i\varphi})| = \int_\gamma |f_1(\rho e^{i\varphi}) + \\ + f_2(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)} |d(\rho e^{i\varphi})| \end{aligned} \quad (2.1)$$

Застосуємо нерівність Мінковського у такому вигляді

$$\left(\int_L |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_L |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_L |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.2)$$

Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} & \left(\int_\gamma |f_1(\rho e^{i\varphi}) + f_2(\rho e^{i\varphi})|^p \cdot \right. \\ & \cdot e^{-p\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)} |d(\rho e^{i\varphi})| \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \left(\int_\gamma \left| f_1(\rho e^{i\varphi}) e^{-\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)} \right. \right. \\ & \left. \left. + f_2(\rho e^{i\varphi}) e^{-\sigma\left(\frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}\right)} \right|^p |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Застосовуємо нерівність Мінковського (2.2)

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\gamma} |f_1(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma \left(\frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_1)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_1) + \rho^2} + \frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_2)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_2) + \rho^2} \right)} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}} + \\ & + \left(\int_{\gamma} |f_2(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma \left(\frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_1)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_1) + \rho^2} + \frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_2)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_2) + \rho^2} \right)} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Розглянемо експоненту

$$e^{-p \frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_j)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_j) + \rho^2}}, j \in \{1, 2\}.$$

Виконується нерівність

$$e^{-p\sigma \frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_j)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_j) + \rho^2}} \leq 1$$

для всіх $\rho > 0, r \in [0; 2\pi]$, для кожного $j \in \{1, 2\}$, тому що справджується нерівність

$$-p\sigma \frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_j)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_j) + \rho^2} < 0.$$

Отже,

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\gamma} |f_1(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma \left(\frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_1)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_1) + \rho^2} + \frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_2)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_2) + \rho^2} \right)} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq \left(\int_{\gamma} |f_1(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma \frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_1)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_1) + \rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Аналогічно для $f_2(\rho e^{i\varphi})$ отримаємо

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{\gamma} |f_2(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p \left(\frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2} \right)} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\
& \leq \left(\int_{\gamma} |f_2(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Отже, враховуючи нерівності (2.3) і (2.4) маємо

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{\gamma} |f_1(\rho e^{i\varphi})| \right. \\
& \left. + |f_2(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p \left(\frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2} \right)} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\
& \left(\int_{\gamma} |f_1(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p \sigma \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}} + \\
& \left(\int_{\gamma} |f_2(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p \sigma \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Справджується нерівність

$$\left(\int_{\gamma} |f_1(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p \sigma \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

за означенням 4, тому що $f_1 \in \hat{H}_{\sigma}^p(\mathbb{D}, \alpha_1)$.

Аналогічно справджується нерівність

$$\left(\int_{\gamma} |f_2(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p \sigma \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

за означенням 5, тому що $f_2 \in \hat{H}_{\sigma}^p(\mathbb{D}, \alpha_2)$.

З цих нерівностей отримаємо

$$\left(\int_{\gamma} |f_1(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma \frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_1)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_1) + \rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$\left(\int_{\gamma} |f_2(\rho e^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma \frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_2)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_2) + \rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Тому

$$f \in \hat{H}_{\sigma}^p(\mathbb{D}, \alpha_1, \alpha_2).$$

Лему доведено.

Наступні твердження можна довести схожими міркуваннями.

Лема 2.3. Нехай $f_1 \in \hat{H}_{\sigma}^2(\mathbb{D}, \alpha_1)$, $f_2 \in \hat{H}_{\sigma}^2(\mathbb{D}, \alpha_2)$, тоді

$$f_1 \cdot f_2 \in \hat{H}_{2\sigma}^1(\mathbb{D}, \alpha_1, \alpha_2).$$

Лема 2.4. Нехай $f_1 \in \hat{H}_{\sigma_1}^2(\mathbb{D}, \alpha_1)$, $f_2 \in \hat{H}_{\sigma_2}^2(\mathbb{D}, \alpha_1)$, тоді

$$f_1 \cdot f_2 \in \hat{H}_{\sigma_1 + \sigma_2}^1(\mathbb{D}, \alpha_1).$$

Доведення.

Розглянемо функцію $f = f_1 \cdot f_2$. Покажемо, що $f \in \hat{H}_{\sigma_1 + \sigma_2}^1(\mathbb{D}, \alpha_1)$, якщо $f_1 \in \hat{H}_{\sigma_1}^2(\mathbb{D}, \alpha_1)$, $f_2 \in \hat{H}_{\sigma_2}^2(\mathbb{D}, \alpha_1)$.

З означення 4 простору $\hat{H}_{\sigma}^p(\mathbb{D}, \alpha_1)$ маємо

$$\left(\int_{\varphi \in \eta} |f(\rho e^{i\varphi})|^p \left\{ e^{-p\sigma \frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_1)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_1) + \rho^2}} \right\} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \forall \varphi \in [0; 2\pi].$$

Для простору $\hat{H}_{\sigma_1 + \sigma_2}^1(\mathbb{D}, \alpha_1)$, де $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, отримаємо

$$\left(\int_{\varphi \in \eta} |f(\rho e^{i\varphi})| e^{-1(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_1)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_1) + \rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right) =$$

$$\int_{\varphi \in \eta} |f(\rho e^{i\varphi})| e^{-\sigma_1 \frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_1)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_1) + \rho^2} - \sigma_2 \frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_1)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_1) + \rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})|.$$

Для функції $f_1 \in \hat{H}_{\sigma_1}^2(\mathbb{D}, \alpha_1)$ отримаємо

$$\left(\int_{\varphi \in \eta} |f_1(\rho e^{i\varphi})|^2 e^{-2\sigma_1 \frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_1)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_1) + \rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \quad (2.5)$$

Для функції $f_2 \in \hat{H}_{\sigma_2}^2(\mathbb{D}, \alpha_1)$ отримаємо

$$\left(\int_{\varphi \in \eta} |f_2(\rho e^{i\varphi})|^2 e^{-2\sigma_2 \frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_1)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_1) + \rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \quad (2.6)$$

Використаємо нерівність Коші-Буняковського у вигляді

$$\int_a^b |f(x) \cdot g(x)|^1 dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \cdot \int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.7)$$

Розглянемо інтеграл:

$$\int_{\varphi \in \eta} |f(\rho e^{i\varphi})| e^{-\sigma_1 \frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_1)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_1) + \rho^2} - \sigma_2 \frac{2\rho |\sin(\varphi - \alpha_1)|}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \alpha_1) + \rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})|. \quad (2.8)$$

Застосувавши нерівність Коші-Буняковського (2.7) до нерівності (2.8), отримаємо

$$\left(\int_{\gamma} |f(\rho e^{i\varphi})| e^{-\sigma_1 \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} - \sigma_2 \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^1 \leq$$

$$\left(\int_{\gamma} |f_1(\rho e^{i\varphi})|^2 e^{-2\sigma_1 \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

на основі нерівностей (2.5) і (2.6).

Отже, $f_1 \cdot f_2 \in \hat{H}_{\sigma_1+\sigma_2}^1(\mathbb{D}, \alpha_1)$.

Лему доведено.

Лема 2.5. Нехай $f_1 \in \hat{H}_{\sigma_1}^2(\mathbb{D}, \alpha_1)$, $f_2 \in \hat{H}_{\sigma_2}^2(\mathbb{D}, \alpha_2)$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$ тоді

$$f_1 \cdot f_2 \in \hat{H}_{\sigma_1, \sigma_2}^1(\mathbb{D}, \alpha_1, \alpha_2).$$

Доведення.

Із означення p простору $\hat{H}_{\sigma_1, \sigma_2}^p(\mathbb{D}, \alpha_1, \alpha_2)$

$$\left(|f(\rho e^{i\varphi})|^p \left\{ e^{-p \left(\frac{2\rho \sigma_1 |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} + \frac{2\rho \sigma_2 |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2} \right)} |d(\rho e^{i\varphi})| \right\} \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Для простору $\hat{H}_{\sigma_1, \sigma_2}^1(\mathbb{D}, \alpha_1, \alpha_2)$, отримаємо

$$\left(|f(\rho e^{i\varphi})|^1 e^{-\frac{2\rho \sigma_1 |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} - \frac{2\rho \sigma_2 |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^1 =$$

$$= |f(\rho e^{i\varphi})|^1 e^{-\frac{2\rho \sigma_1 |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} - \frac{2\rho \sigma_2 |\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})|.$$

Для кожної функції з простору $f_1 \in \hat{H}_{\sigma_1}^2(\mathbb{D}, \alpha_1)$ із означення 4 маємо:

$$\left(\int_{\gamma} |f_1(\rho e^{i\varphi})|^2 e^{-2\sigma_1 \frac{2\rho |\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho \cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \quad (2.9)$$

Для кожної функції з простору $f_2 \in \hat{H}_{\sigma_2}^2(\mathbb{D}, \alpha_2)$ маємо:

$$\left(\int_{\gamma} |f_2(\rho e^{i\varphi})|^2 e^{-2\sigma_2 \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \quad (2.10)$$

Використаємо нерівність Коші-Буняковського у вигляді:

$$\int_a^b |f(x) \cdot g(x)|^1 dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \cdot \int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

Розглянемо інтеграл:

$$\int_{\gamma} |f(\rho e^{i\varphi})| e^{-\sigma_1 \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} - \sigma_2 \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \quad (2.12)$$

Застосуємо нерівність Коші-Буняковського (2.11) для нерівності (2.12) отримаємо:

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} \left(|f(\rho e^{i\varphi})| e^{-\sigma_1 \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} - \sigma_2 \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}} \right)^1 |d(\rho e^{i\varphi})| \leq \\ & \leq \int_{\gamma} \left(|f_1 \cdot f_2| e^{-\sigma_1 \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2} - \sigma_2 \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}} \right)^1 |d(\rho e^{i\varphi})| \leq \\ & \left(\int_{\gamma} |f_1(\rho e^{i\varphi})|^2 e^{-2\sigma_1 \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_1)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_1)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \cdot \right. \\ & \left. \int_{\gamma} |f_2(\rho e^{i\varphi})|^2 e^{-2\sigma_2 \frac{2\rho|\sin(\varphi-\alpha_2)|}{1-2\rho\cos(\varphi-\alpha_2)+\rho^2}} |d(\rho e^{i\varphi})| \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty, \end{aligned}$$

на основі нерівностей (2.9) і (2.10).

Отже, $f_1 \cdot f_2 \in \hat{H}_{\sigma_1, \sigma_2}^1(\mathbb{D}, \alpha_1, \alpha_2)$.

Лему доведено.

Доведемо твердження, що описує значення функції у відкритому одиничному крузі через його граничні межові значення на межі цього круга, тобто на одиничному колі та відріжку $[-1; 1]$ дійсної осі. Зазначимо,

що для невагового випадку в теоремі про зображення не вимагається значень на відрізку дійсної осі.

Теорема (аналог формули Коші). Якщо $f \in \hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}; 0)$ то

$$f(z) = I_1 + I_2 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 f(u) \frac{e^{\frac{2i\sigma(u-z)}{(1-u)(1-z)}} - e^{\frac{-2i\sigma(u-z)}{(1-u)(1-z)}}}{u-z} du, z \in \mathbb{D} \setminus [-1; 1],$$

де

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} e^{i\sigma\left(\frac{e^{i\theta}+1}{1-e^{i\theta}} - \frac{z+1}{1-z}\right)} de^{i\theta},$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_\pi^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} e^{-i\sigma\left(\frac{e^{i\theta}+1}{1-e^{i\theta}} - \frac{z+1}{1-z}\right)} de^{i\theta}$$

голоморфна в $\mathbb{D}$.

Доведення. Якщо $f \in \hat{H}_\sigma^p(\mathbb{D}_+; 0)$. Тоді

$$f(z) e^{\frac{i\sigma(w+1)}{1-w}} \in H^p(\mathbb{D}_+).$$

Застосуємо формулу Коші до цієї функції:

$$f(z) \cdot e^{\frac{i\sigma(z+1)}{1-z}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_+} \frac{f(w)}{w-z} \cdot e^{\frac{i\sigma(w+1)}{1-w}} dw.$$

Обидві частини рівності поділимо на $e^{\frac{i\sigma(z+1)}{1-z}}$, отримаємо:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_+} \frac{f(w)}{w-z} \cdot e^{i\sigma\left(\frac{w+1}{1-w} - \frac{z+1}{1-z}\right)} dw = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{D}_+ \\ 0, z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_+} \end{cases} \quad (2.13)$$

Також за означенням

$$f(z) e^{\frac{-i\sigma(w+1)}{1-w}} \in H^p(\mathbb{D}_-).$$

До цієї функції застосуємо інтегральну формулу Коші для півкруга

$$f(z) \cdot e^{\frac{-i\sigma(z+1)}{1-z}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_-} \frac{f(w)}{w-z} \cdot e^{\frac{-i\sigma(w+1)}{1-w}} dw.$$

Обидві частини рівності поділимо на $e^{\frac{-i\sigma(z+1)}{1-z}}$, отримаємо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}_-} \frac{f(w)}{w-z} \cdot e^{-i\sigma\left(\frac{w+1}{1-w} - \frac{z+1}{1-z}\right)} dw = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{D}_- \\ 0, z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_-} \end{cases} \quad (2.14)$$

Додамо формули (2.13) і (2.14), отримаємо:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}_+} \frac{f(w)}{w-z} \cdot e^{i\sigma\left(\frac{w+1}{1-w} - \frac{z+1}{1-z}\right)} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_-} \frac{f(w)}{w-z} \cdot e^{-i\sigma\left(\frac{w+1}{1-w} - \frac{z+1}{1-z}\right)} dw, z \in \mathbb{D}_+ \cup \mathbb{D}_-.$$

Якщо інтегрування відбувається по частинах одиничного кола, то позначаємо $w = e^{i\theta}$. Якщо інтегрування відбувається по відрітку дійсної осі, то позначаємо $w = u$.

Виконаємо такі позначення

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} \cdot e^{i\sigma\left(\frac{e^{i\theta}+1}{1-e^{i\theta}} - \frac{z+1}{1-z}\right)} de^{i\theta} \quad (2.15)$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_\pi^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} \cdot e^{-i\sigma\left(\frac{e^{i\theta}+1}{1-e^{i\theta}} - \frac{z+1}{1-z}\right)} de^{i\theta} \quad (2.16)$$

Підставивши (2.15) і (2.16) в формулу після (2.14) отримаємо

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} \cdot e^{i\sigma\left(\frac{e^{i\theta}+1}{1-e^{i\theta}} - \frac{z+1}{1-z}\right)} de^{i\theta} \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(u)}{u - z} \cdot e^{i\sigma\left(\frac{u+1}{1-u} - \frac{z+1}{1-z}\right)} du \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_\pi^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} \cdot e^{-i\left(\frac{e^{i\theta}+1}{1-e^{i\theta}} - \frac{z+1}{1-z}\right)} de^{i\theta} \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_1^{-1} \frac{f(u)}{u - z} \cdot e^{-i\sigma\left(\frac{u+1}{1-u} - \frac{z+1}{1-z}\right)} du = I_1 + I_2 \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(u)}{u - z} \cdot e^{i\sigma\left(\frac{u+1}{1-u} - \frac{z+1}{1-z}\right)} du \\
&- \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(u)}{u - z} \cdot e^{-i\left(\frac{u+1}{1-u} - \frac{z+1}{1-z}\right)} du = \\
I_1 + I_2 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(u)}{u - z} \left(e^{i\sigma\left(\frac{u+1}{1-u} - \frac{z+1}{1-z}\right)} - e^{-i\sigma\left(\frac{u+1}{1-u} - \frac{z+1}{1-z}\right)} \right) du &= I_1 + I_2 \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 f(u) \frac{e^{\frac{2i\sigma(u-z)}{(1-u)(1-z)}} - e^{\frac{-2i\sigma(u-z)}{(1-u)(1-z)}}}{u - z} du.
\end{aligned}$$

З цього бачимо що функція f голоморфна в $\mathbb{D}$.

Ми використали те, що

$$\begin{aligned}
\frac{u+1}{1-u} - \frac{z+1}{1-z} &= \frac{(1-z)(u+1) - (1-u)(z+1)}{(1-u)(1-z)} \\
&= \frac{u+1 - uz - z - (z+1 - uz - u)}{(1-u)(1-z)} \\
&= \frac{u+1 - uz - z - z - 1 + uz + u}{(1-u)(1-z)} = \frac{2u - 2z}{(1-u)(1-z)} \\
&= \frac{2(u-z)}{(1-u)(1-z)}.
\end{aligned}$$

Отже, теорему доведено.

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ, ВИЗНАЧЕНИХ НА КОЛІ, У ЗАКЛАДАХ ФАХОВОЇ ПЕРЕДВИЩОЇ ОСВІТИ

Тема функцій, визначених на колі, органічно пов'язана з розділами математичного аналізу, тригонометрії, елементів комплексного аналізу та функціонального аналізу, які вивчаються студентами закладів фахової передвищої освіти в межах дисциплін «Вища математика», «Математичний аналіз», «Комплексний аналіз» або вибіркового математичних курсів.

Розгляд функцій, заданих на колі, сприяє:

- формуванню цілісного уявлення про функцію як об'єкт аналізу;
- поглибленню розуміння періодичності, симетрії, граничних значень;
- встановленню зв'язку між реальними та комплексними функціями;
- розвитку абстрактного мислення та навичок математичного моделювання.

Особливу дидактичну цінність має вивчення властивостей граничних значень функцій на одиничному колі, що є природним переходом до понять просторів Гарді та їх застосувань.

Основною метою методики вивчення властивостей функцій, визначених на колі, є формування в студентів умінь:

- аналізувати поведінку функцій на замкнених множинах;
- досліджувати межові значення функцій;

- застосовувати інтегральні та аналітичні методи дослідження;
- використовувати отримані знання у прикладних і теоретичних задачах.

До основних навчальних завдань належать:

1. Узагальнення знань студентів про тригонометричні та періодичні функції.
2. Ознайомлення з поняттям функцій, визначених на колі, та їх основними властивостями.
3. Формування уявлень про граничні значення та інтегральні зображення функцій.
4. Розвиток навичок роботи з математичними моделями, пов'язаними з колом.
5. Підготовка студентів до сприйняття елементів функціонального та комплексного аналізу.

Під час вивчення даної теми доцільно поєднувати традиційні та інноваційні методи навчання.

Методи навчання:

- пояснювально-ілюстративний (введення понять, формул, означень);
- проблемний (постановка запитань щодо поведінки функцій на колі);
- евристичний (самостійне виведення властивостей);
- дослідницький (аналіз прикладів, узагальнення результатів).

Форми організації навчання:

- лекційні заняття з елементами бесіди;
- практичні заняття з розв'язуванням задач;
- самостійна робота студентів;
- робота в малих групах;
- математичні гуртки та проблемні семінари.

Доцільно починати вивчення теми з геометричної інтерпретації одиничного кола, що дозволяє активізувати наочне мислення студентів. На цьому етапі корисно використовувати:

- графічні зображення кола;
- параметричне задання точок кола;
- зв'язок з тригонометричними функціями.

Наступним етапом є дослідження властивостей функцій, зокрема: періодичності, обмеженості, симетрії, граничної поведінки.

Особливу увагу слід приділяти інтегральним зображенням функцій, що дозволяє плавно перейти до ідей, пов'язаних з просторами Гарді. Навіть без глибокого теоретичного доведення студенти можуть на інтуїтивному рівні усвідомити роль межових значень функцій на колі.

Для закріплення матеріалу доцільно використовувати завдання різного рівня складності:

- дослідити властивості заданої функції на одиничному колі;
- знайти граничні значення функції;
- встановити зв'язок між значеннями функції в крузі та на його межі;

- проаналізувати приклади функцій із заданими вагами;
- виконати графічну інтерпретацію отриманих результатів.

Такі вправи сприяють розвитку аналітичного мислення, формуванню навичок узагальнення та математичної аргументації.

Вивчення властивостей функцій, визначених на колі, має важливе практичне та методичне значення, оскільки:

- розширює математичний кругозір студентів;
- формує готовність до сприйняття складніших розділів математики;
- створює підґрунтя для участі у студентських олімпіадах;
- сприяє інтеграції теоретичних знань і практичних умінь.

Методичні підходи, запропоновані в даному розділі, можуть бути використані викладачами математики у закладах фахової передвищої освіти, а також під час підготовки навчально-методичних матеріалів.

ВИСНОВКИ

У даній магістерській роботі досліджено та введено деякі вагові простори Гарді в одиничному крузі, описано співвідношення між ними, проаналізовано їхні основні властивості.

Отримано зображення функцій із одного вагового простору Гарді, які є у вигляді аналогу інтегральної теореми Коші. Що може бути основою для наступних застосувань та досліджень цих просторів. Це створює основу для дослідження функцій у таких просторах.

Отримані результати магістерської роботи мають прикладну та теоретичну цінність, тому що вони розширюють розуміння вагових просторів Гарді та можуть бути підґрунтям для наступних наукових досліджень та пошуків.

Властивості інтегралів від комплексних функцій можуть отримати застосування у студентських математичних гуртках, проблемних групах при підготовці до студентських математичних олімпіад. Деякі прийоми та методи, запропоновані у цій роботі, можуть бути цікавими і для підготовки та проведення шкільних олімпіад високого рівня та олімпіад у закладах фахової передвищої освіти.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дільний В. М. *Асимптотичні та апроксимаційні властивості функцій експоненціального типу та їх застосування*: дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.01 – математичний аналіз / Дільний В. М.; Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка. – Львів, 2015. – 322 с.
2. Garcia S. R., Mashreghi J., Ross W. T. *Introduction to Model Spaces and Their Operators*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016. 389 p.
3. Garcia S. R., Mashreghi J., Ross W. T. *Finite Blaschke Products and Their Connections*. Cham: Springer, 2018. 328 p.
4. Dilnyi, V. M. . *On the cyclicity of functions in a certain weighted Hardy space in the disk*. Bukovinian Mathematical Journal, 2014. 2(2–3[1]), 86–89.
5. Nikolski, N. K. *Operators, Functions and Systems: An Easy Reading. Hardy, Hankel, and Toeplitz* . Providence, RI: AMS, 2002. 77p.
6. Vynnytskyi, B. V. *On zeros of functions analytic in a half-plane and completeness of systems of exponents*. Ukrainian Mathematical Journal. 1994. V 46, 514–532.
7. Mashreghi, J., Verreault, W. *Nonlinear Expansions in Reproducing Kernel Hilbert Spaces*. 2023. 16 p.
8. Косолович О. Р. *Про деякі вагові простори Гарді в крузі. Актуальні проблеми сучасної науки: матеріали XII міжнародної науково-практичної конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій. Дрогобич, 2025. С.180.*
9. Mashreghi J. *Representation theorems in Hardy Spaces*. Cambridge University Press, 2009. 209 p.

10. Binder I., Kinzebulatov D., Mashregi J. *Function Spaces. Theory and Applications*. Cham: Springer, 2023. 445 p.
11. Косолович О. Р., Кучма М. І., Дільний В. М. *Про зображення функцій у вагових просторах Гарді в крузі*. Електронний науковий журнал «Математика, інформатика, фізика: наука та освіта». 2025. 2(2), 216 – 224.