

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Факультет фізики, математики, економіки та інноваційних технологій
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

завідувач кафедри математики та економіки,

кандидат педагогічних наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК «__»_____ 2025 р.

**МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРАЦІОНАЛЬНИХ
РІВНЯНЬ У КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ**

Спеціальність: 014 «Середня освіта (за предметними спеціальностями)»

Предметна спеціальність: 014.04 «Середня освіта (Математика)»

**Додаткова предметна спеціальність: 014.09 «Середня освіта
(Інформатика)»**

Магістерська робота
на здобуття кваліфікації «Магістр середньої освіти.
Вчитель математики, вчитель інформатики»

Автор роботи – **Прийма Марко Андрійович** _____
(підпис)

Науковий керівник – кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Комарницька Леся Іванівна** _____
(підпис)

Дрогобич, 2025

Захист магістерської роботи

Методи розв'язування ірраціональних рівнянь у курсі алгебри і початків аналізу

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

дата

Голова ЕК

підпис

власне ім'я та прізвище

Секретар ЕК

підпис

власне ім'я та прізвище

Анотація. Марко Прийма. Методи розв'язування ірраціональних рівнянь у курсі алгебри і початків аналізу

Магістерська робота присвячена методам розв'язування ірраціональних рівнянь у курсі алгебри і початків аналізу. У першому розділі розглянуто теоретичні основи вивчення ірраціональних рівнянь. Другий розділ присвячено аналізу основних методів розв'язування ірраціональних рівнянь. У третьому розділі розглянуті підходи до формування в учнів умінь розв'язувати ірраціональні рівняння. Розглянуто труднощі засвоєння теми та запропоновано ефективні підходи до їх вирішення. Робота містить рекомендації для вчителів і може бути корисною у навчальному процесі.

Abstract. Marko Pryjma. Methods for solving irrational levels in the course of algebra and elementary analysis

The master's thesis is devoted to methods of solving irrational equations in algebra and elementary analysis courses. The first chapter discusses the theoretical foundations of studying irrational equations. The second chapter is devoted to the analysis of the main methods of solving irrational equations. The third chapter examines approaches to developing students' skills in solving irrational equations. It considers the difficulties in mastering the topic and proposes effective approaches to solving them. The thesis contains recommendations for teachers and may be useful in the educational process.

ЗМІСТ

	Вступ.....	5
1.	РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	8
1.1.	Поняття ірраціональності.....	8
1.2.	Поняття і класифікація ірраціональних рівнянь.....	9
1.3.	Розвиток методів розв’язування ірраціональних рівнянь.....	11
1.4.	Ірраціональні рівняння у шкільному курсі алгебри і початків аналізу.	13
1.5.	Висновки до розділу 1.....	14
2.	РОЗДІЛ 2. АНАЛІЗ ОСНОВНИХ МЕТОДІВ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.....	15
2.1.	Загальні підходи до розв’язування ірраціональних рівнянь.....	15
2.2.	Метод піднесення обох частин рівняння до степеня.....	17
2.3.	Метод заміни змінної.....	19
2.4.	Графічний метод розв’язування ірраціональних рівнянь.....	21
2.5.	Метод рівносильних перетворень і перевірка коренів.....	23
2.6.	Комбіновані методи.....	26
2.7.	Висновки до розділу 2.....	27
3.	РОЗДІЛ 3. МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ В УЧНІВ УМІНЬ РОЗВ’ЯЗУВАТИ ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ.....	28
3.1.	Дидактичні цілі та завдання вивчення теми.....	28
3.2.	Методичні підходи до навчання.....	30
3.3.	Структура уроку «Ірраціональні рівняння».....	32
3.4.	Система вправ і завдань.....	33
3.5.	Типові помилки учнів і шляхи їх подолання.....	36
3.6.	Використання сучасних освітніх технологій у навчанні.....	37
3.7.	Експериментальна перевірка розробленої методики	39
3.8.	Висновки до розділу 3.....	41
	ВИСНОВКИ.....	42
	СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	44

ВСТУП

Сукупність знань є лише необхідною сходинкою до опанування людиною інтелекту та вміння ним скористатися. Саме те, як ми вміємо використовувати накопичені знання, аналізувати та синтезувати їх у нових обставинах, буде визначати наш рівень інтелекту.

Недарма ще Йоганн Карл Фрідріх Гаусс, який цілком справедливо вважається «королем математиків» усіх часів, полюбляв стверджувати, що математика є царицею всіх наук, особливо підкреслюючи її фундаментальну роль. Як жодна галузь діяльності людини, так і жодна з наук не може обійтися без застосування математичних знань, законів та закономірностей.

Тому, одним з визначальних завдань математичної освіти, а, зокрема, місії вчителя математики, є не лише передавання учням певного обсягу знань, а й розвитку в них умінь логічно мислити, аналізувати, узагальнювати, знаходити нестандартні шляхи розв'язування задач. Усі ці накопичені знання та здобуті навички практичного застосування, стануть у нагоді учням в їх майбутньому професійному та побутовому житті.

Рівняння та нерівності утворюють базис курсу алгебри, яка допомагає розв'язувати найважчі задачі найкращими методами, формуючи тим самим особливу математичну мову, що в свою чергу набуває використання в усіляких галузях науки і техніки.

Навчання розв'язуванню рівнянь формує вміння будувати математичні моделі, виконувати перетворення виразів, здійснювати перевірку отриманих результатів.

Серед різних типів рівнянь важливу роль відіграють **ірраціональні рівняння**, які містять змінну під знаком кореня. Розв'язування таких рівнянь вимагає глибокого розуміння властивостей функцій, рівносильних перетворень, уміння перевіряти допустимість знайдених коренів. Саме ці навички є основою математичної компетентності учнів старших класів і мають значний вплив на формування логічного та алгоритмічного мислення.

Актуальність теми дослідження зумовлена необхідністю вдосконалення методики навчання розв'язуванню ірраціональних рівнянь у шкільному курсі алгебри і початків аналізу. Аналіз чинних підручників і практики навчання показує, що учні часто стикаються з труднощами в розумінні суті ірраціональних рівнянь, не завжди розрізняють рівносильні перетворення, припускаються помилок під час піднесення до степеня чи перевірки знайдених коренів. Це свідчить про необхідність пошуку ефективних методичних підходів до формування вмінь і навичок розв'язування таких рівнянь.

Об'єкт дослідження – процес навчання алгебри і початків аналізу у закладах загальної середньої освіти.

Предмет дослідження – методи і прийоми розв'язування ірраціональних рівнянь у шкільному курсі алгебри.

Мета дослідження – теоретично обґрунтувати та сформулювати матеріали та експериментально перевірити ефективність методики формування в учнів умінь розв'язувати ірраціональні рівняння засобами різних методів і прийомів.

Для досягнення мети поставлено такі **завдання**:

1. Проаналізувати психолого-педагогічні та методичні основи навчання алгебри і початків аналізу.
2. З'ясувати сутність поняття ірраціонального рівняння та здійснити їх класифікацію.
3. Дослідити основні методи розв'язування ірраціональних рівнянь і визначити їх дидактичний потенціал.
4. Розробити систему вправ і завдань для формування в учнів умінь розв'язувати ірраціональні рівняння.
5. Провести педагогічний експеримент з метою перевірки ефективності запропонованої методики.

Методи дослідження:

- теоретичні (аналіз, синтез, узагальнення психолого-педагогічної та методичної літератури);
- емпіричні (спостереження, анкетування, бесіди);
- статистичні (аналіз і узагальнення результатів експериментальної роботи).

Наукова новизна полягає у визначенні педагогічних умов та методичних підходів, що забезпечують ефективне формування в учнів умінь розв'язувати ірраціональні рівняння.

Результати дослідження доповідалися на міжнародній науково-практичній студентсько-викладацькій конференції «Актуальні проблеми сучасної науки» у Дрогобицькому державному педагогічному університеті імені Івана Франка [14].

Практичне значення одержаних результатів полягає у можливості використання розробленої методики, системи вправ та дидактичних матеріалів у практиці роботи вчителів математики, а також у підготовці майбутніх учителів у закладах вищої освіти.

Структура магістерської роботи:

Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг роботи становить 45 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1.1. Поняття ірраціональності

Термін «раціональне» (число) походить від латиноамериканського слова *ratio* – відношення, яке є перекладом грецького слова «логос». На відміну від раціональних чисел, числа, що виражають відношення несумірних величин, були названі ще в старовину ірраціональними, тобто нераціональними (по-грецьки «алогос»). Правда, спочатку терміни «раціональний» і «ірраціональний» відносилися не до чисел, а до сумірних і відповідно несумірних величин, які піфагорійці називали вираженими і невираженими, Теодор Киренський же симетричними і асиметричними. У V-VI століттях римські автори Капела і Касіодор перекладали ці терміни на латинь словами *rationalis* і *irrationalis*. [11]

У науковій літературі зустрічаємо безліч дефініцій до слова «ірраціональність», які слугують цілям конкретного наукового напрямку у вивченні цього поняття, характеризуючи його в певному контексті та розкриваючи аспекти і особливості.

Поняття «ірраціональність» має інтегруючі характеристики по відношенню до різних явищ, а також певних психологічних ефектів, як наслідків певних дій та поведінкових реакцій особистостей та цілих груп. [2]

Філософський контекст поняття ірраціональності полягає у прагненні до універсальності як однієї з визначних властивостей поняття «ірраціональне».

Ірраціоналізм (лат. *irrationalis* – несвідоме, нерозумне) – напрям у філософії, що проголошує верховенство почуттєвого начала і робить його основною характеристикою як самого світу, так і світосприйняття, визнаючи дійсність такою, що не може бути вираженою у логічних поняттях. [2]

Ірраціональність у гуманітарному вченні. У сфері психології поняття «ірраціональність» розглядається щодо міри включення когнітивних процесів з відповідним трактуванням як процесу емоційного, нелогічного, як продукту установок або хибного пізнання (ілюзорного), містичного мислення. В контексті

соціології поняття ірраціональності розкривається крізь особливості реакцій соціальних суб'єктів та вибір ними засобів для досягнення цілей. [3]

В економічній теорії трактування терміну «ірраціональність» як нелогічність дій, відсутність цілей, неефективність використання ресурсів та застосування не відповідних методів.

Ірраціональність у мистецтві. Однією з ключових передумов виникнення ірраціоналізму у мистецтві стало розчарування в силі розуму пізнати дійсність. Ірраціональні засади символізму, романтизму та неоромантизму помітні в поезії, живописі, театральному мистецтві тощо.

Ірраціональність у математиці. Ірраціональні числа виникли в геометрії при вивченні довжин ще піфагорійцями. Геометричне ірраціональне число виражає собою довжину відрізка, неспівмірного з відрізком одиничної довжини.

Остаточного розвитку теорія ірраціональних чисел, як ми її знаємо зараз, сформувалася лише в другій половині XIX ст. та знайшла відображення в працях німецьких математиків Дедекінда, Кантора і Вейєрштрасса. В середині XVII ст. великий французький математик П'єр де Ферма запропонував загальний метод ірраціональних рівнянь, зводячи їх до системи цілих алгебраїчних рівнянь. [2]

1.2. Поняття і класифікація ірраціональних рівнянь

Рівняння є одним із засадничих понять математики, яке означає рівність із невідомим числом, яке позначається змінною (літерою). Розв'язати рівняння, означає знайти таке значення змінної, яке перетворить рівняння на правильну рівність. За допомогою різного типу рівнянь можна змоделювати велику кількість природних явищ, фізичних процесів, скласти та вирішити задачі для різних галузей людської діяльності.

У шкільному курсі алгебри та початків аналізу учні знайомляться з різними типами рівнянь: лінійними, квадратними, показниковими, логарифмічними, ірраціональними тощо. Особливе місце серед них займають **ірраціональні**

рівняння, які потребують глибшого розуміння властивостей функцій і рівносильних перетворень. [1], [5], [6]

Рівнянням зі змінною x називається рівність двох виразів $f(x) = g(x)$. Число a називається коренем даного рівняння зі змінною x , якщо при підстановці числа a в обидві частини рівняння отримаємо правильну числову рівність. Розв'язати рівняння – означає знайти всі його корені або довести, що їх не існує.

Два рівняння називаються рівносильними, якщо вони мають однакову множину розв'язків або обидва не мають коренів. Якщо два рівняння рівносильні, то кожне з них є наслідком іншого.

Ірраціональними називаються рівняння, в яких невідома величина знаходиться під знаком кореня (радикала) або під знаком дії піднесення до дробового показника степеня. [4]

Тобто, рівняння називають ірраціональним, якщо в ньому, крім дій додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня з натуральним показником, є також добування кореня з алгебраїчних виразів, які містять невідоме. Корені, які входять у рівняння, є арифметичними. [10].

Наприклад:

$$\sqrt{x} = 2 ;$$

$$\sqrt{x+3} = x - 1;$$

$$\sqrt{2x-5} + \sqrt{x-1} = 3;$$

$$\sqrt[3]{x^2-2} = \sqrt[3]{x}$$

Такі рівняння часто не можна розв'язати звичайними алгебраїчними методами без застосування спеціальних перетворень.

Класифікація ірраціональних рівнянь за ознаками:

1. За кількістю ірраціональних виразів:

- з однією ірраціональністю

наприклад, $\sqrt{x+2} = x - 1;$

- з кількома ірраціональними виразами

наприклад, $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} = 5.$

2. За видом кореня:

- рівняння з квадратним коренем
наприклад, $\sqrt{f(x)} = g(x)$;
- рівняння з кубічним або коренем вищого порядку
наприклад, $\sqrt[3]{x+1} = 2x-3$.

3. За розміщенням ірраціональних виразів:

- ірраціональність у лівій або правій частині;
- ірраціональні вирази в обох частинах рівняння.

4. За способом зведення до раціональної форми:

- ті, що зводяться до алгебраїчних рівнянь піднесенням до степеня;
- ті, що потребують заміни змінної чи введення допоміжних виразів.

Важливо зазначити, що при будь-яких перетвореннях ірраціональних рівнянь необхідно враховувати **область допустимих значень змінної (ОДЗ)**, оскільки підкореневі вирази повинні бути невід'ємними (для парних коренів).

Областю визначення рівняння, або областю його допустимих значень (ОДЗ), називається множина значень невідомого, при яких мають зміст його ліва і права частини. В одних випадках знаходження ОДЗ є корисним для розв'язання рівнянь, в інших задача визначення ОДЗ є складною і непотрібною. [4]

1.3. Розвиток методів розв'язування ірраціональних рівнянь

Перші ірраціональні рівняння виникли ще в античній математиці, коли з'явилися задачі, пов'язані з геометричними побудовами. Давньогрецькі математики, зокрема **Піфагор** і його послідовники, зіткнулися з ірраціональними величинами, коли відкрили, що діагональ квадрата не виражається раціональним числом (вона дорівнює $\sqrt{2}$).

Відомий математик Арабського Сходу, з Персії Аль-Хорезмі, від імені якого походить термін «алгоритм», вивчав алгебраїчні методи, які дозволяли розв'язувати рівняння, що містили корені.

Франсуа Вієт (XVI ст.), французький математик, основоположник сучасної системи нотації в алгебрі, для позначення не тільки невідомих, але й коефіцієнтів, почав використовувати літери, що дозволило розв'язувати рівняння в загальному вигляді. Це відкрило шлях до створення систематичних алгоритмів для роботи з ірраціональними рівняннями, включаючи піднесення до степеня.

Ірраціональними числами активно оперував основоположник математичного аналізу Блез Паскаль (1623–1662 рр.), а також англійський математик Ісаак Барроу (1630–1677 рр.), який навчав самого Ісаака Ньютона (1643–1727 рр.). Він стверджував, що число $\sqrt{2}$ трактується лише як геометрична величина і ніяк інакше.

Практично в той самий період, Рене Декарт (1596–1650 рр.), французький філософ і математик, а також і англійський математик Джон Валліс (1616–1703 рр.) обґрунтовували, що ірраціональні числа існують самі по собі, без обов'язкових зв'язків з геометрією. У XVI столітті знову виникли суперечки з приводу правомірності використання від'ємних та комплексних чисел, як розв'язків квадратних рівнянь. Такі числа Декарт називав «уявними». Ці числа вважали сумнівними аж до XVIII століття, хоча науковці їх використовували. Лише в XIX столітті комплексні числа, після їх геометричної інтерпретації нарешті були визнані математичною спільнотою.

Рене Декарт систематизував способи розв'язування рівнянь різних типів. У XVII–XVIII століття англійський науковець Ісаак Ньютон, французький математик Жозеф-Луї Лагранж, швейцарський математик Леонард Ейлер розробили методи, які шляхом піднесення до степеня ірраціональних виразів дозволяли переходити до рівнянь вищих степенів.

У XIX–XX століттях завдяки розвитку шкільної освіти і введенню систематичного курсу алгебри, методика розв'язування ірраціональних рівнянь увійшла до навчальних програм. Зокрема, у працях російсько-радянського математика Андрія Кисельова, українського математика Георгія Вороного, якого справедливо називали вченим, що випередив час на століття. Кожен крок при розв'язуванні таких рівнянь ретельно вивчався, аналізувався та обґрунтовувався.

Отже, короткий історичний екскурс розвитку методів розв’язування ірраціональних рівнянь дозволяє побачити, як еволюціонувала математична думка від геометричного підходу до абстрактнішого алгебраїчного. Починаючи з розв’язування конкретних рівнянь, створювалися загальні алгоритми для цілих класів рівнянь.

У сучасній математичній освіті ірраціональні рівняння розглядаються не лише як інструмент обчислень, але й як засіб розвитку логічного мислення, уміння обґрунтовувати свої дії та перевіряти правильність отриманих результатів.

1.4. Ірраціональні рівняння у шкільному курсі алгебри і початків аналізу.

Тема «Ірраціональні рівняння» традиційно вивчається у **10–11 класах** у розділі «Рівняння та нерівності». [1], [5], [10] Її зміст і обсяг визначаються чинною навчальною програмою з математики, затвердженою Міністерством освіти і науки України.

Вивчення цієї теми сприяє:

- узагальненню знань учнів про властивості числових виразів і функцій;
- формуванню навичок застосування рівносильних перетворень;
- розвитку навичок **самостійного аналізу умов розв’язку** (ОДЗ, перевірка коренів);
- підготовці до розв’язування складніших задач з алгебри, аналізу, фізики та інформатики.

Методичний аспект цієї теми володіє високим **розвиваючим потенціалом**: учні навчаються не лише знаходити числові розв’язки, а й аргументувати свої дії, перевіряти отримані результати, застосовувати графічні методи.

Розглядаючи тему в курсі алгебри, вчитель має забезпечити:

1. Формування поняття ірраціонального рівняння та умов його розв’язування.
2. Ознайомлення з основними методами розв’язування.
3. Навчання правильному використанню рівносильних перетворень.
4. Формування вміння **перевіряти отримані корені та аналізувати ОДЗ**.

Тема є важливою складовою **компетентнісного підходу** в освіті, адже передбачає розвиток аналітичного, логічного та критичного мислення. Вона також готує учнів до успішного складання **Національного мультипредметного тесту (НМТ)** та **Зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО)**, де часто трапляються завдання цього типу.

1.5. Висновки до розділу 1

У цьому розділі розглянуто етіологію поняття та сутність ірраціональних рівнянь, наведено їх класифікацію, охарактеризовано історичні етапи розвитку методів розв'язування та визначено місце цієї теми у шкільному курсі математики. Ірраціональні рівняння є важливою складовою шкільної алгебри, оскільки сприяють формуванню в учнів логічного мислення, уміння працювати з рівносильними перетвореннями та розвивати математичну культуру.

Таким чином, подальше дослідження методів розв'язування ірраціональних рівнянь і розробка ефективної методики їх навчання є актуальним завданням сучасної математичної освіти.

РОЗДІЛ 2. АНАЛІЗ ОСНОВНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Загальні підходи до розв'язування ірраціональних рівнянь

Розв'язування ірраціональних рівнянь базується на застосуванні рівносильних перетворень, які не змінюють множини розв'язків рівняння. Основна складність полягає в тому, що не всі перетворення, які здаються очевидними, є рівносильними. Тому при роботі з ірраціональними рівняннями необхідно:

1. Уважно визначати **область допустимих значень (ОДЗ)**.
2. Виконувати перетворення з дотриманням умов рівносильності.
3. Проводити **обов'язкову перевірку** знайдених коренів.

Основна ідея більшості методів – зведення ірраціонального рівняння до **алгебраїчного**, яке є наслідком вихідного і для якого вже відомі методи розв'язування.

При розв'язанні ірраціональних рівнянь доцільно спочатку визначити ОДЗ, оскільки існує імовірність, що дане рівняння не визначене в області дійсних чисел. Спочатку знаходимо ОДЗ, зважаючи на те, що $\sqrt{f(x)}$ має зміст за умови $f(x) \geq 0$. Таким чином перевіряємо, чи знайдені корені входять до ОДЗ.

Тут важливо звернути увагу, що:

1. Усі корені парного степеня, які входять в рівняння, є арифметичними. Це означає, що якщо підкореневий вираз від'ємний, то рівняння не буде мати кореня. Якщо підкореневий вираз дорівнює нулю, то корінь рівняння також буде дорівнювати нулю. Якщо підкореневий вираз додатний, то і корінь рівняння буде додатним.

2. Усі корені непарного степеня, які входять в рівняння, визначені при будь-якому дійсному значенні підкореневого виразу. Це означає, що якщо підкореневий вираз від'ємний, то і корінь буде від'ємним. Якщо підкореневий вираз дорівнює

нулю, то і корінь дорівнюватиме нулю. Якщо підкореневий вираз додатний, то і корінь буде додатним.

Таким чином, навіть не розв'язуючи рівняння, можна визначити, що воно не має розв'язку.

Приклад 1

Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+5} = -7$$

Розв'язання:

Арифметичний корінь не може дорівнювати від'ємному числу, тому рівняння не має розв'язку.

Відповідь: коренів немає.

Приклад 2

Розв'язати рівняння

$$\sqrt{3x+6} + \sqrt{x+3} = 0$$

Розв'язання:

У лівій частині рівняння кожен доданок невід'ємний, тому сума рівна нулю, якщо обидва доданки рівні нулю одночасно. Перший доданок рівний нулю коли $x=-2$, а другий коли $x=-3$. Тому рівняння не має розв'язку.

Відповідь: коренів немає.

Приклад 3

Розв'язати рівняння

$$\sqrt{4-x} - \sqrt{x-6} = 2$$

Розв'язання:

Вираз $\sqrt{4-x}$ визначений при $x \leq 4$, а вираз $\sqrt{x-6}$ при $x \geq 6$. Отже, не існує такого x , при якому обидві частини мають розв'язок. Тому рівняння розв'язку не має.

Відповідь: коренів немає.

2.2. Метод піднесення обох частин рівняння до степеня

Цей метод є одним із найпоширеніших і базується на тому, що піднесення обох частин рівняння до парного степеня (найчастіше до квадрату) дає змогу позбутися знаку кореня.

Варіант алгоритму розв'язання ірраціональних рівнянь шляхом піднесення обох частин рівняння до степеня:

1. Піднести обидві частини рівняння до степеня, що відповідає показнику кореня.
2. Розв'язати утворене раціональне рівняння.
3. Провести перевірку, підставивши знайдені корені в початкове рівняння, особливо якщо піднесення було до парного степеня.

**Примітка:*

При піднесенні до парного степеня можуть з'явитися сторонні корені, тому обов'язково потрібно проводити перевірку, тоді як піднесення до непарного степеня зазвичай не призводить до появи зайвих коренів,

Приклад 4.

Розв'язати рівняння:

$$\sqrt{x+3} = x-1$$

Розв'язання:

1. Визначаємо ОДЗ:

$$x+3 \geq 0; x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

2. Підносимо обидві частини до квадрату:

$$x+3 = (x-1)^2 \rightarrow x+3 = x^2-2x+1$$

3. Зводимо подібні доданки:

$$x^2-3x-2 = 0$$

4. Розв'язуємо квадратне рівняння:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

5. Перевірка:

лише

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \approx 3,56$$

задовольняє початкове рівняння (для $x_2 \approx -0.56$ не виконується умова $x \geq 1$).

Відповідь:

$$x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

**Примітка.*

Піднесення до парного степеня може призвести до появи **зайвих коренів**, тому перевірка – обов’язкова частина алгоритму.

Якщо обидві частини рівняння піднести до непарного степеня, то отримаємо рівняння, рівносильне даному [6].

Приклад 5.

Розв’язати рівняння:

$$\sqrt[7]{x^2 - 2} = \sqrt[7]{x}$$

Розв’язання:

Піднесемо обидві сторони рівняння до сьомого степеня та отримаємо рівносильне рівняння

$$\left(\sqrt[7]{x^2 - 2}\right)^7 = \left(\sqrt[7]{x}\right)^7$$

Звідси,

$$x^2 - 2 = x, \quad x^2 - x - 2 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

Відповідь: $-1; 2$.

2.3. Метод заміни змінної

Якщо в рівнянні зустрічаються повторювані підкореневі вирази, доцільно ввести замість них **нову змінну**. Це дозволяє спростити вигляд рівняння та звести його до стандартного алгебраїчного виду.

Варіант алгоритму розв'язку ірраціональних рівнянь шляхом заміни його підкореневого виразу:

1. Знайти ОДЗ вихідного рівняння.
2. Перейти від вихідного рівняння до рівняння з заміною.
3. Знайти корені отриманого рівняння.
4. Перевірити, чи знайдені корені є коренями вихідного рівняння.

Перевірка полягає в наступному:

а) перевірити належність кожного знайденого кореня ОДЗ початкового рівняння. Ці корені, які не належать ОДЗ, є сторонніми для вихідного рівняння;

б) для кожного кореня, який належить ОДЗ вихідного рівняння, перевіряється, чи мають однакові знаки ліва і права частини кожного з рівнянь, які виникли в процесі розв'язання вихідного рівняння. Ці корені, для яких частини рівнянь мають різні знаки, є сторонніми коренями для вихідного рівняння;

с) тільки ці корені, які належать ОДЗ вихідного рівняння і для яких обидві частини кожного із рівнянь, які виникли в процесі розв'язання вихідного рівняння, мають однакові знаки, перевіряються безпосередньою підстановкою в вихідне рівняння.

Заміна підкореневого виразу спрощує зведення ірраціонального рівняння до раціонального. [11].

Приклад 6.

Розв'язати рівняння

$$\sqrt{2x^2 - 6x + 8} + \sqrt{2x^2 - 6x + 1} = 7$$

Розв'язання:

Введемо заміну:

$$\sqrt{2x^2 - 6x + 1} = t \geq 0$$

Тоді отримаємо:

$$\sqrt{t^2 + 7} + t = 7, \quad t^2 + 7 = 49 - 14t + t^2, \quad 14t = 49 - 7, \quad 14t = 42, \quad t = 3$$

Повертаючись до початкових змінних, отримаємо рівняння:

$$2x^2 - 6x + 1 = 9, \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 4$$

Відповідь: $x_1 = -1; \quad x_2 = 4$.

Приклад 7.

Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+6} - \sqrt[3]{x-2} = 2$$

Розв'язання:

Введемо заміну:

$$\sqrt[3]{x-2} = t, \quad x = t^3 + 2$$

Тоді отримаємо:

$$\sqrt{t^3 + 8} = t + 2, \quad t^3 + 8 = (t + 2)^2, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2, \quad t_3 = -2.$$

Повертаючись до початкових змінних, отримаємо:

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 10; \quad x_3 = -6$$

Відповідь: $x_1 = 3; \quad x_2 = 10; \quad x_3 = -6$.

Приклад 8.

Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{x} = 2$$

Розв'язання:

$$\text{Позначимо: } \sqrt{x} = t, \quad t \geq 0$$

$$\text{Тоді отримаємо: } \sqrt{t^2 + 4} - t = 2$$

Переносимо t вправо та підносимо до квадрату:

$$t^2 + 4 = (t + 2)^2$$

$$t^2 + 4 = t^2 + 4t + 4$$

Отже, $t = 0$.

Повертаємось: $\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x=0$

Перевірка:

$$\sqrt{0+4} - \sqrt{0} = 2 \Rightarrow 2=2 - \text{істинно.}$$

Відповідь: $x=0$.

2.4. Графічний метод розв'язування ірраціональних рівнянь

Графічний метод базується на побудові в одній системі координат графіків функцій, які стоять у лівій і правій частинах рівняння, і визначенні їхніх точок перетину.

Розв'язання ірраціональних рівнянь графічним методом проводять наступним чином:

1. Перетворення рівняння:

зведення ірраціонального рівняння до вигляду $f(x)=g(x)$, де $f(x)$ та $g(x)$ – функції). Для зручності, зазвичай, ізолюють один радикал в одній частині рівняння.

2. Побудова графіків:

в одній системі координат будуємо графіки функцій $y=f(x)$ та $y=g(x)$.

3. Пошук точок перетину:

потрібно знайти точки, де графіки перетинаються.

4. Визначення розв'язків:

абсциси знайдених точок перетину і є розв'язками початкового ірраціонального рівняння.

Важливо звернути увагу на наступне:

Визначити ОДЗ перед побудовою графіків. Для кореня парного степеня вираз під коренем повинен бути невід'ємним.

Щоб правильно визначити координати точок перетину, потрібно точно побудувати графіки.

Після визначення розв'язків шляхом графічного методу, рекомендується провести перевірку – в початкове рівняння підставити знайдені значення.

У сучасній школі графічний метод зручно реалізувати з використанням цифрових інструментів **GeoGebra**, **Desmos**, **WolframAlpha**, які дають змогу візуалізувати процес розв'язування і допомагають учням усвідомити зміст рівняння.

Приклад 9.

Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x-2} = \frac{3}{x}$$

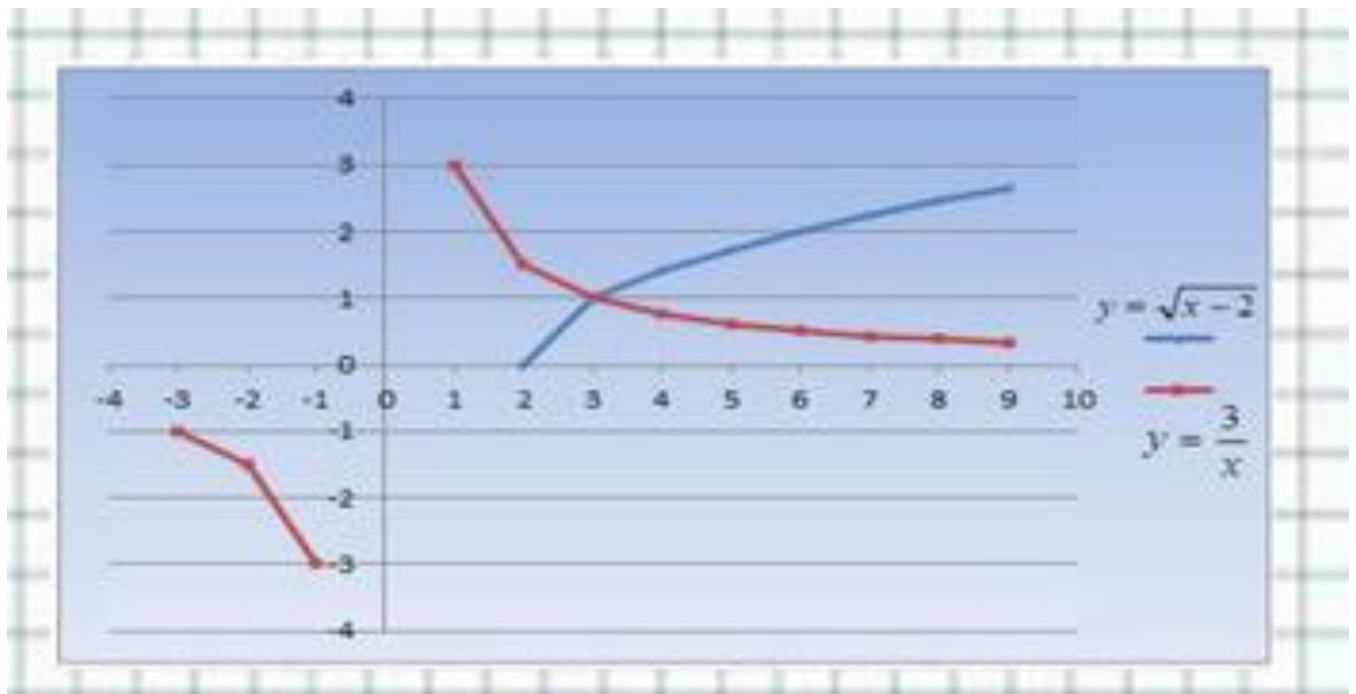
Розв'язання:

Зведемо ірраціональне рівняння до вигляду $f(x)=g(x)$,

$$f(x) = \sqrt{x-2},$$

$$g(x) = \frac{3}{x}$$

Побудуємо в одній системі координат графік функції $\sqrt{x-2}$ – це вітка параболи, яка знаходиться в правій півплощині та $\frac{3}{x}$, – гіпербола



Пошук точок перетину:

графіки перетинаються в точці А (3;1), отже, абсциса точки перетину $x=3$.

Перевірка розв'язку:

$$\sqrt{3-2} = \frac{3}{3}$$

$$\sqrt{1} = 1$$

Відповідь: $x=3$

2.5. Метод рівносильних перетворень і перевірка коренів

Рівняння виду $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \text{ або } g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Під час розв'язування ірраціональних рівнянь важливо розрізняти:

- **рівносильні перетворення** (не змінюють множину розв'язків);
- **нерівносильні перетворення** (можуть додати або втратити корені).

Основні рівносильні перетворення:

1. Додавання або віднімання одного й того самого виразу до обох частин рівняння.
2. Множення (ділення) обох частин на однаковий ненульовий вираз.
3. Піднесення обох частин до непарного степеня.

Нерівносильним, але часто застосовуваним, є **піднесення до парного степеня**, тому після нього **завжди потрібно робити перевірку** кожного зі знайдених коренів: задовольняє він розв'язок початкового рівняння чи ні.

Перевірка відбувається шляхом підстановки в початкове рівняння кожного із коренів отриманого рівняння. Якщо число, яке підставляємо, перетворює рівняння в правильну числову рівність, то число є коренем рівняння; в протилежному випадку говорять, що це число є стороннім коренем. [11]

Приклад 10.

Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{x - 1}$$

Розв'язання:

Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 - 3x = x - 1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 1 = 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Відповідь: $x = 2 + \sqrt{3}$

Рівняння виду $\sqrt{f(x)} = g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

Приклад 11.

Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+7} = x - 3$$

Розв'язання:

Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x + 7 = (x - 3)^2 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 2 = 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = \frac{7 + \sqrt{41}}{2} \\ x = \frac{7 - \sqrt{41}}{2} \end{cases} \\ x \geq 3 \end{cases}$$

Відповідь: $x = \frac{7 + \sqrt{41}}{2}$

Якщо для будь-якого $x \in \text{ОДЗ}$ виконуються нерівності $f(x) \geq 0$; $g(x) \geq 0$ то рівняння $f(x) = g(x)$ і $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, рівносильні в ОДЗ. [11]

Приклад 12.

Розв'язати рівняння

$$\sqrt{2x - 5} + \sqrt{x + 2} = \sqrt{2x + 1}$$

Розв'язання:

Дане рівняння рівносильне системі

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x - 5 \geq 0, \\ x + 2 \geq 0, \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Звідси $x \geq 2,5$

Обидві частини цього рівняння в ОДЗ набувають невід'ємних значень. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$(\sqrt{2x - 5} + \sqrt{x + 2})^2 = (\sqrt{2x + 1})^2$$

Звідси

$$2\sqrt{2x - 5}\sqrt{x + 2} = 4 - x;$$

Тоді

$$\begin{cases} 4(2x - 5)(x + 2) = (4 - x)^2 \\ 2,5 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-2 - 6\sqrt{11}}{7} \\ x = \frac{-2 + 6\sqrt{11}}{7} \\ 2,5 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Відповідь: $x = \frac{-2 + 6\sqrt{11}}{7}$

2.6. Комбіновані методи

У складних рівняннях застосовується комбінація декількох підходів – заміна змінної (підстановка), щоб спростити рівняння на початковому етапі, з наступним піднесенням до степеня обох частин рівняння, перетворення виразів, розв’язання та перевірка знайдених коренів.

Розв’язок комбінованими методами проводять наступним чином:

1. Введення нової змінної (заміна змінної) з метою спрощення виразу, який міститься під коренем або який повторюється в рівнянні. Наприклад, якщо маємо $\sqrt{x-2}$, можна ввести змінну $t = \sqrt{x-2}$.
2. Перехід до раціонального рівняння з метою позбутися кореня. наприклад, шляхом піднесення обох частин рівняння до відповідного степеня.
3. Розв’язання раціонального рівняння стандартними методами.
4. Зворотна заміна (підстановка) для кожного знайденого значення t .
5. Перевірка коренів шляхом підстановки знайдених значень t у вихідне рівняння. Проводити обов’язково, оскільки піднесення до степеня може призвести до появи сторонніх коренів.

Приклад 13.

Розв’язати рівняння

$$\sqrt{x+5} - 3\sqrt[4]{x+5} + 2 = 0$$

Розв’язання:

1. Вводимо нову змінну.

$$\sqrt[4]{x+5} = t, \text{ тоді } \sqrt{x+5} = t^2$$

Підставляємо нову змінну в рівняння та отримуємо:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{3-1}{2} = 1$$

Тоді

$\sqrt[4]{x+5} = 1$	$\sqrt[4]{x+5} = 2$
$(\sqrt[4]{x+5})^4 = 1^4$	$(\sqrt[4]{x+5})^4 = 2^4$
$x + 5 = 1$	$x + 5 = 16$
$x = -4$	$x = 11$

Перевіряємо отримані розв'язки.

$\sqrt{-4+5} - 3\sqrt[4]{-4+5} + 2 = 0$	$\sqrt{11+5} - 3\sqrt[4]{11+5} + 2 = 0$
$1 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$	$\sqrt{16} - 3\sqrt[4]{16} + 2 = 0$
$0 = 0$	$4 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$
	$0 = 0$

Відповідь: $x = 1; 2$.

2.8. Висновки до розділу 2

У цьому розділі ми розглянули основні методи розв'язування ірраціональних рівнянь. Очевидно, що ефективність використання кожного методу залежить від форми рівняння та рівня підготовленості учнів. Особливу увагу слід приділяти формуванню в учнів уміння **перевіряти правильність розв'язку**, визначати область допустимих значень та застосовувати **рівносильні перетворення**. Лише системний підхід здатен забезпечити не лише розуміння методів та їх комбінацій, але й точність отриманих результатів.

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У СТАРШІЙ ШКОЛІ

3.1. Дидактичні цілі та завдання вивчення теми

Вивчення теми «Ірраціональні рівняння» у шкільному курсі алгебри і початків аналізу має на меті не лише формування уявлення про предмет вивчення та засвоєння алгоритмів розв'язування, але й розвиток **логічного, аналітичного та критичного мислення** учнів, тим самим збільшуючи інтерес до вивчення математики.

Основні дидактичні цілі

1. Освітні (пізнавальні):

- Засвоєння теоретичних знань: формування чітких уявлень про ірраціональні рівняння як окремий тип алгебраїчних рівнянь, як таких, що містять змінну під знаком кореня (радикала); розуміння поняття області допустимих значень (ОДЗ) змінної.
- Ознайомлення з методами розв'язування: вивчення та оволодіння основними методами розв'язування ірраціональних рівнянь.
- Систематизація знань: узагальнення вивчених методів та формування вміння вибрати найбільш раціональний спосіб розв'язування для конкретного типу рівняння.

1. Розвивальні:

- Розвиток логічного мислення: навчання учнів під час міркувань будувати послідовні логічні ланцюжки, відрізняти необхідні умови від достатніх, що є важливим у процесі аналізу ірраціональних рівнянь.
- Розвиток аналітичного мислення: формування вміння аналізувати структуру рівняння, визначати відповідний метод розв'язування та скласти план дій.
- Розвиток критичного мислення: заохочення учнів до самостійного осмислення результатів, критичної оцінки кожного кроку, зокрема щодо необхідності перевірки коренів та врахування ОДЗ. Це допомагає розуміти суть алгоритму розв'язування, а не просто механічно його застосовувати.

- Формування навичок самостійної роботи: навчання знаходити, обробляти, осмислювати та використовувати інформацію, що сприяє самостійності в навчальній діяльності.
- Удосконалення обчислювальних навичок: закріплення знань про дії з коренями та степенями.

2. Виховні:

- Формування математичної культури: виховання акуратності, точності та відповідальності при виконанні обчислень та оформленні розв'язків.
- Розвиток цілеспрямованості: навчання наполегливості та послідовності в досягненні мети, що особливо важливо при розв'язуванні складних завдань.
- Формування позитивного ставлення до математики: продемонструвати, що складні завдання можна розв'язати, що підвищує мотивацію до навчання.

Основні завдання

1. Ознайомити учнів з поняттям «ірраціональне рівняння», його різновидами та основними властивостями.
2. Навчити визначати область допустимих значень змінної (ОДЗ).
3. Навчити застосовувати різні методи їх розв'язування.
4. Показати необхідність перевірки отриманих коренів у процесі розв'язування ірраціональних рівнянь.
5. Виробити вміння контролювати правильність дій.
6. Розвивати пізнавальний інтерес до математики через практичні приклади.
7. Використовувати інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ).
8. Підготувати учнів до розв'язування завдань підвищеної складності, що зустрічаються на олімпіадах та зовнішньому незалежному оцінюванні.

3.2. Методичні підходи до навчання

При викладанні теми «Ірраціональні рівняння» доцільно спиратися на такі методичні принципи:

1. **Науковість** – чітке дотримання математичної логіки, обґрунтованість кожного перетворення, пояснення необхідності перевірки.
2. **Доступність і послідовність** – від простих прикладів до складних комбінованих рівнянь.
3. **Наочність** – використання графіків, схем, таблиць, комп'ютерних програм (GeoGebra, Desmos).
4. **Активізація пізнавальної діяльності** – постановка проблемних запитань, самостійний пошук методів.
5. **Індивідуалізація навчання** – добір завдань різного рівня складності відповідно до підготовки учнів.
6. **Компетентнісний підхід** – формування математичної компетентності, уміння застосовувати знання в практичних ситуаціях.

Відповідно до державного стандарту базової освіти України, до освітнього процесу пріоритет надається компетентнісному підходу.

«Рекомендація 2006/962/ЄС Європейського Парламенту та Ради (ЄС) "Про основні компетенції для навчання протягом усього життя" від 18 грудня 2006 року» [7], визначає компетенцію, як набір знань, навичок та відношень, що стосуються ситуації. Основні компетенції – це ті, які необхідні всім громадянам для особистої реалізації та розвитку, активного громадянського життя, соціальної єдності та можливості працевлаштування.

Еталонні рамки визначають вісім основних компетенцій, серед яких спілкування рідною мовою; спілкування іноземними мовами; знання математики та загальні знання у сфері науки і техніки; навички роботи з цифровими носіями; навчання заради здобуття знань; соціальні та громадянські навички; ініціативність та практичність; та обізнаність та самовираження у сфері культури.

Рекомендацією визначено, що знання математики – це можливість розвивати та застосовувати математичне мислення для розв'язання ряду задач в повсякденних ситуаціях. При виробленні здібності до кількісного мислення сам процес та діяльність важливі так само, як і знання. Знання математики передбачає, у різних ступенях, здатність та готовність застосовувати математичний спосіб мислення (логічне та просторове мислення) та власне застосування (формули, моделі, конструкції, графіки та діаграми).

Шляхи формування компетентностей учнів:

- демонструвати зв'язок навчання з життям;
- мотивувати на актуалізацію теми;
- формувати систему знань через розв'язання проблемних ситуацій та узагальнення й аналіз фактичного матеріалу;
- формувати вміння використовувати знання й особистий досвід через розв'язування ситуативних задач;
- формувати особисту відповідальність за рівень знань та самоосвіту;
- моніторинг і корекція розвитку особистості через виховання і самовиховання, діагностику.

Математична компетентність школяра передбачає наявність глибоких та міцних знань з предмета, умінь застосовувати набуті знання в нових реаліях, здатність досягати вагомих результатів та якості у діяльності.

Головань М.С. у своїх працях [12], [13] розглядає в різних площинах сутність поняття «компетенція» та «компетентність». Компетенція стосується змісту сфери діяльності, тоді як «компетентність» характеризує здатність особи якісно виконувати певну роботу.

Математична компетентність розглядається автором як цілісне інтегративне утворення особистості, яке поєднує в собі математичні знання, умінь, навички, досвід математичної діяльності та особистісні якості.

Сутність математичної компетентності розкривається через п'ять взаємопов'язаних компонентів, таких як:

- **Мотиваційний:** готовність до розв'язання задач.
- **Когнітивний:** знання та розуміння математичних понять.
- **Діяльнісний:** володіння математичними уміннями та навичками.
- **Ціннісно-рефлексивний:** усвідомлення цінності математики та самооцінка своєї діяльності.
- **Емоційно-вольовий:** стійкість і наполегливість у досягненні мети.

Математична компетентність проявляється у здатності структурувати дані, створювати та аналізувати математичну модель ситуації, інтерпретувати отримані результати.

Одним з важливих компонентів у формуванні математичної компетентності учня, є вміння розв'язувати ірраціональні рівняння та нерівності, що вимагає вміння застосовувати велику кількість теорем рівносильності, при тому значно збільшуючи обчислювальну складність при знаходженні їх розв'язків [9].

У даному контексті ефективним є використання проблемного навчання. Наприклад, учитель пропонує учням рівняння, яке не розв'язується відомими способами, і спонукає знайти шлях розв'язання самостійно. Тобто, створює проблемну ситуацію, де важливим буде сформулювати проблему – знайти ефективний метод переходу від ірраціонального рівняння до раціонального. Далі встановити способи розв'язання та обговорити з учнями можливі наслідки. Розв'язати рівняння та перевірити отримані корені. Обов'язково наголосити про необхідність перевірки знайдених коренів.

3.3. Структура уроку з теми «Ірраціональні рівняння»

Урок з теми «Ірраціональні рівняння» доцільно розбити на кілька етапів, щоб допомогти учням систематизувати вивчення теми, засвоїти алгоритми розв'язання та розвинути логічне та критичне мислення.

Основні етапи уроку

1. **Організаційний** – перевірка готовності до уроку та присутності учнів.
2. **Актуалізація** знань

- поняття «рівняння»;
 - види рівнянь;
 - що означає розв'язати рівняння;
 - скільки коренів може мати рівняння;
 - властивості квадратного кореня;
 - різниця між ірраціональним виразом та ірраціональним числом.
3. **Мотивація** – демонстрація реальної проблеми (наприклад, знаходження відстані чи часу, де виникає ірраціональна залежність).
4. **Пояснення нового матеріалу:**
- поняття ірраціонального рівняння;
 - алгоритм розв'язування;
 - основні методи (з прикладами).
5. **Закріплення:**
- колективне розв'язування прикладів;
 - робота в парах або групах.
6. **Самостійна робота:**
- завдання різного рівня складності (А, В, С).
7. **Перевірка та обговорення результатів.**
8. **Підсумок уроку. Домашнє завдання.**

3.4. Система вправ і завдань

Формування вмінь розв'язувати ірраціональні рівняння відбувається поступово.

Система вправ і завдань для розв'язування ірраціональних рівнянь має включати завдання різного рівня складності, що охоплюють основні методи: піднесення обох частин до степеня, введення заміни змінної, розв'язування рівнянь із модулем та перевірку коренів на ОДЗ.

Вправи підбирають за принципом "від простого до складного", починаючи з рівнянь, де доцільно піднести до степеня, а потім переходячи до складніших завдань. Для цього розробляється **система вправ**, що складається з кількох рівнів.

I. Ознайомчий рівень

Мета – навчити учнів знаходити область допустимих значень і розуміти структуру рівняння.

Приклади:

1. Знайти ОДЗ:

а) $\sqrt{x - 2} = 3$

б) $\sqrt{5 - 2x} = x$

2. Визначити, які з рівнянь є ірраціональними.

$$2x + \sqrt{x} = 4;$$

$$x\sqrt{9} = 1 + x;$$

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = 3;$$

$$x^2 - 2x\sqrt{4} = 8$$

II. Репродуктивний рівень

Мета – відпрацювання основних методів.

Приклади:

1. $\sqrt{x + 1} = 3$

2. $\sqrt{2x - 3} = x - 1$

3. $\sqrt{x + 2} = 5 - x$

III. Аналітичний рівень

Мета – навчити застосовувати кілька методів одночасно.

Приклади:

1. $\sqrt{x + 3} + \sqrt{x - 2} = 5$

$$2. \sqrt{3x - 4} = 2 - \sqrt{x - 1}$$

IV. Творчий рівень

Мета – розвиток логічного мислення і дослідницьких умінь.

Приклади:

1. Скласти власне ірраціональне рівняння, яке має два корені.
2. Знайти параметр a , при якому рівняння

$$\sqrt{x + a} = x - 2 \quad \text{має єдиний розв'язок.}$$

V. Використання ІКТ

Учням пропонується побудувати графіки функцій

$$y_1 = \sqrt{x + 2}$$

$$y_2 = x$$

у середовищі **GeoGebra** і знайти точки їх перетину.

VI. Розбір типових помилок

Мета – закріпити правила, які найчастіше порушуються.

Учням пропонується знайти та виправити помилку розв'язання рівняння.

$$\text{Розв'язок рівняння } \sqrt{x^2} = 9$$

$$\text{Неправильно: } x = 9$$

Правильно: під коренем вираз, що може бути як додатним, так і від'ємним.

Отже,

$$\sqrt{x^2} = |x| \Rightarrow |x| = 9,$$

$$\text{а } x_1 = 9; x_2 = -9$$

3.5. Типові помилки учнів та шляхи їх подолання

Найбільш поширені помилки та шляхи їх подолання в процесі вивчення даної теми:

1. Ігнорування області допустимих значень.

Причина: ігнорування того, що вираз під коренем парного степеня ($\sqrt{f(x)}$) не повинен бути від'ємним ($f(x) \geq 0$).

Шлях подолання: систематичне підкреслення важливості визначення ОДЗ на кожному етапі. Після знаходження коренів обов'язково перевіряти, чи належать вони цій області.

2. Пропуск перевірки коренів після піднесення до степеня.

Причина: Піднесення обох частин рівняння до парного степеня не є рівносильним перетворенням, що може призвести до появи сторонніх коренів.

Шлях подолання: використання спеціальних вправ на пошук «зайвих» розв'язків. Завжди виконувати перевірку підстановкою отриманих коренів у початкове рівняння. Це надійний спосіб виявити сторонні корені.

3. Невміння правильно застосовувати рівносильні перетворення.

Причина: спроба піднести до степеня, коли радикал ще не ізольований, або неправильне піднесення до квадрата двочлена.

Шлях подолання: детальний розбір прикладів з поясненням, які перетворення рівносильні, а які – ні.

4. Механічне виконання дій без розуміння логіки.

Причина: не бажання занурення в суть питання, або поспіх.

Шлях подолання: впровадження проблемних запитань типу «чому саме так?», «що буде, якщо...?».

5. Помилки при роботі з піднесенням до степеня.

Причина: спроба піднести до степеня, коли радикал ще не ізольований, або неправильне піднесення до квадрата двочлена.

Шлях подолання: введення поетапного алгоритму, запис проміжних дій і самоперевірка. Перед піднесенням до степеня завжди ізолювати радикал на одній стороні рівняння.

Для уникнення типових помилок потрібно застосовувати:

- I. Чіткий алгоритм дій:
 1. Визначити ОДЗ.
 2. Ізолювати радикал.
 3. Піднести обидві частини до потрібного степеня.
 4. Розв'язати отримане раціональне рівняння.
 5. Перевірити знайдені корені підстановкою в початкове рівняння.
- II. Теоретична база: закріплювати знання методом систематичного повторення властивостей коренів, особливо для коренів парного степеня, та наслідки піднесення до степеня.
- III. Аналіз помилок: аналізувати найпоширеніші помилки та зосереджуватися на їх запобіганні, розробляючи та розв'язуючи відповідні завдання.
- IV. Практика: виконувати велику кількість вправ, які ілюструють різні методи розв'язання та потенційні пастки. Розглядати приклади з різними типами помилок.
- V. Інтерактивні методи: використання сучасних технологій, які можуть допомогти учням виявити та виправити свої помилки.
- VI. Альтернативні методи: замість громіздкого піднесення до степеня, розглядати інші способи, такі як метод заміни змінних, якщо це можливо.

3.6. Використання сучасних освітніх технологій

Сучасний урок математики неможливий без залучення цифрових технологій.

Використання ІКТ (інформаційно-комунікаційних технологій) допомагає розв'язувати ірраціональні рівняння, використовуючи графічні калькулятори та онлайн-сервіси для візуалізації графіків функцій, що дозволяє знайти корені рівняння в точках перетину графіків. ІКТ надають інструменти для автоматизації

процесу розв'язання за допомогою спеціалізованого програмного забезпечення (WolframAlpha, GeoGebra).

Неабияк допомагають у вивченні та засвоєнні нового матеріалу мультимедійні презентації наприклад, у програмі PowerPoint, дистанційне навчання за допомогою відеоуроків, створених за допомогою ІКТ.

Використання ІКТ має ряд значущих переваг, таких як візуалізація (наприклад графіків функцій), ефективність (автоматизація при виконанні складних обчислень) та доступність (у будь-якому місці та в будь-який час), розвиток критичного мислення шляхом пошуку різних методів розв'язання та аналізу отриманих результатів. Особливою перевагою є можливість персоналізувати навчання для кожного учня шляхом зосередження на темах, які потребують більшої уваги. отримуючи при цьому індивідуальну підтримку та зворотний зв'язок.

Інноваційні педагогічні підходи

Гейміфікація: Перетворення навчального процесу на гру з правилами та цілями допомагає підвищити мотивацію учнів, а також робить процес розв'язання ірраціональних рівнянь більш захопливим.

Проектна діяльність: Учні можуть працювати над власними проектами, які пов'язані з реальним життям, використовуючи ірраціональні рівняння для розв'язання практичних завдань, що сприяє глибшому розумінню математики.

Для теми «Ірраціональні рівняння» можуть бути ефективними такі засоби:

- **GeoGebra** – для побудови графіків та візуалізації точок перетину;
- **WolframAlpha** – база знань і набір обчислювальних алгоритмів;
- **Desmos** – для швидкого аналізу функцій і перевірки рівнянь;
- **Онлайн-тести (Google Forms, Classtime)** – для миттєвої перевірки результатів;
- **Інтерактивні вправи (LearningApps, Kahoot)** – для закріплення матеріалу у формі гри.
- **Microsoft PowerPoint** – застосунок для створення та відтворення презентацій

Застосування ІКТ робить навчання більш **динамічним, наочним і мотивуючим**, сприяє формуванню цифрової грамотності учнів.

3.7. Експериментальна перевірка розробленої методики

З метою оцінювання ефективності запропонованої методики перевірки знань учнів з теми «Ірраціональні рівняння» було проведено експериментальне дослідження серед учнів загальноосвітньої середньої школи І-ІІІ ступенів № 3 Бориславської міської ради.

У дослідженні взяли участь 28 учнів 10-А класу. Учням було запропоновано виконати контрольну роботу, що включала завдання трьох рівнів складності:

- I. Ознайомчий рівень – перевірка вміння учнів знаходити область допустимих значень і розуміти структуру рівняння.
- II. Репродуктивний рівень – перевірка навиків відпрацювання основних методів;
- III. Аналітичний рівень – перевірка вміння застосовувати кілька методів одночасно.
- IV. Творчий рівень – перевірка рівня розвитку логічного мислення та дослідницьких умінь.

Оцінювання здійснювалося за такими критеріями:

№	Рівень завдання	Завдання	Макс. балів	Оцінка учня
1	Перший рівень (ознайомчий)	Знайти область допустимих значень	0,5	
2		Визначити, які з рівнянь ірраціональні.	0,5	
Разом за 1 рівень:			1 бал	
3	Другий рівень (репродуктивний)	Обчислити 1.	1	
4		Обчислити 2.	1	
5		Обчислити 3.	1	
Разом за 2 рівень:			3 бали	
7	Третій рівень (аналітичний)	Розв’язати рівняння 1	1,5	
8		Розв’язати рівняння 2	1,5	
Разом за 3 рівень:			3 бали	
9	Четвертий рівень (творчий)	Скласти власне ірраціональне рівняння, яке має два корені.	2,5	
10		Знайти параметр a , при якому запропоноване рівняння має 1 розв’язок	2,5	
Разом за 4 рівень:			5 балів	
Загальна сума балів:			12 балів	

Результати експерименту:

- 92 % учнів (23 з 25) правильно виконали більшість завдань I рівня, що підтверджує добре засвоєння теоретичного матеріалу.
- 72 % учнів (19 з 25) показали достатній рівень сформованих обчислювальних навичок при виконанні завдань II рівня.

- 40 % учнів (10 з 25) успішно впоралися із завданнями III рівня, продемонструвавши вміння застосовувати знання в нестандартних ситуаціях та логічно мислити.

- 20 % учнів (5 з 25) успішно впоралися із завданнями IV рівня, продемонструвавши творчий підхід до розв'язування.

Запропонована методика є ефективною для перевірки знань з теми «Ірраціональні рівняння», адже вона:

- забезпечує диференційований підхід до оцінювання;
- сприяє підвищенню якості знань учнів;
- дозволяє визначити рівень засвоєння базових понять, вміння застосовувати на практиці кілька методів розв'язування;
- сприяє розвитку аналітичного та критичного мислення а також дослідницьких умінь учнів.

3.8. Висновки до розділу 3

У цьому розділі подано методичні основи організації навчання теми «Ірраціональні рівняння» в старшій школі. Визначено дидактичні цілі та завдання, окреслено принципи навчання, запропоновано структуру уроку, систему вправ різного рівня складності, а також наведено способи подолання типових помилок учнів.

Ефективне засвоєння теми досягається за умови:

- поетапного формування вмінь розв'язувати ірраціональні рівняння;
- обов'язкового використання перевірки коренів;
- активного застосування наочних і цифрових засобів навчання.

Запропонована методика сприяє підвищенню рівня математичної компетентності учнів, розвитку їхнього логічного мислення, самостійності та впевненості у застосуванні математичних знань на практиці.

Проведений педагогічний експеримент підтвердив ефективність розробленої методики навчання розв'язування ірраціональних рівнянь.

ВИСНОВКИ

У магістерській роботі було здійснено теоретичне та методичне дослідження проблеми навчання учнів старшої школи розв'язуванню ірраціональних рівнянь у курсі алгебри і початків аналізу.

Проведене дослідження дозволило зробити такі **узагальнені висновки**:

1. Ірраціональні рівняння є важливою складовою шкільного курсу алгебри, оскільки їх розв'язування формує в учнів уміння логічно мислити, аналізувати, узагальнювати, здійснювати рівносильні перетворення та критично оцінювати отримані результати.

2. Аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури показав, що питання удосконалення методики навчання цієї теми залишається актуальним. Учні часто допускають типові помилки, пов'язані з неправильним визначенням області допустимих значень, неврахуванням умов рівносильності при піднесенні до степеня, а також із відсутністю перевірки коренів.

3. У роботі систематизовано **основні методи розв'язування** ірраціональних рівнянь, а саме:

- піднесення обох частин рівняння до парного степеня;
- введення нової змінної;
- ізолювання кореня;
- використання властивостей функцій та графічного методу;
- комбіновані методи (послідовне застосування кількох способів).

Розроблено дидактично обґрунтовані приклади та алгоритми.

4. Запропоновано **методику навчання**, що ґрунтується на принципах науковості, послідовності, доступності, наочності, активізації пізнавальної діяльності учнів і використанні інформаційно-комунікаційних технологій. Вона включає систему вправ різного рівня складності, алгоритми дій, типові помилки і способи їх уникнення.

5. Розроблена **система навчальних завдань** передбачає поступовий перехід від простих вправ до творчих і дослідницьких, що сприяє формуванню умінь

самостійно обирати ефективний метод розв'язування, робити перевірку та аналіз результату.

6. Практичне значення роботи полягає у можливості використання її результатів у шкільній та позашкільній математичній освіті. Матеріали можуть бути застосовані під час підготовки до державної підсумкової атестації, на уроках повторення, факультативах.

7. Експериментальна перевірка ефективності методики, проведена в умовах навчального процесу, показала доцільність і результативність упровадження запропонованої методики.

8. Наукова новизна дослідження полягає в узагальненні та систематизації методів розв'язування ірраціональних рівнянь, розробці методики їх навчання з урахуванням сучасних освітніх технологій.

Отже, результати проведеного дослідження підтверджують, що **ефективне навчання розв'язування ірраціональних рівнянь** можливе за умови поєднання теоретичної підготовки, поетапного формування практичних умінь, активного застосування наочності, інформаційних технологій та рефлексивного аналізу діяльності учнів.

Перспективи подальших досліджень

Подальші дослідження доцільно спрямувати на:

- розробку інтерактивних електронних ресурсів для навчання розв'язування ірраціональних рівнянь;
- створення системи дидактичних матеріалів для індивідуального та дистанційного навчання;
- розширення методики на теми «Ірраціональні нерівності» та «Ірраціональні функції».

Результати цієї роботи можуть бути використані у подальших дослідженнях із методики викладання алгебри, підготовці студентів педагогічних університетів, а також у практичній діяльності вчителів математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз, Г. П., Бевз, В. Г. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10 класу. – Київ: Освіта, 2019. – 288 с.
2. Д.Т. Белешко. Розв'язуємо ірраціональні рівняння та нерівності: Навч. пос. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. – 80 с.
3. Н.Т. Гусева. Поняття ірраціональності у наукових розвідках. Актуальні проблеми психології. Психологія обдарованості. УДК 159.955/.956.2+316.62. С. 294-303.
4. Математика. Ірраціональні рівняння, нерівності та їх системи : практикум / уклад. : Н.П. Муранова, Л.А. Харченко, Г.В. Шевченко, О.С. Муранов. – 2-е вид., стер. – К. : НАУ, 2012. – 96 с.
5. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., Якір, М. С. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 11 класу. – Харків: Гімназія, 2021. – 320 с.
6. А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Підручник Математика 10 клас (2018 рік) – 256 с.
7. Рекомендація 2006/962/ЄС Європейського Парламенту та Ради (ЄС) "Про основні компетенції для навчання протягом усього життя" від 18 грудня 2006 року.
8. Ренчківська В.В. «Ірраціональні рівняння та нерівності, методи їх розв'язування». Методичний посібник. – Полонне, 2017. – 48 с.
9. Струк М. Р. Формування математичних компетентностей в учнів при розв'язуванні ірраціональних рівнянь та нерівностей. Форум молодих дослідників. Матеріали V Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених. 29 листопада 2024 р., м. Суми. – С. 96.
10. Слепкань З. І. та ін. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 класу. – К.: Зодіак-ЕКО, 2007. – 272 с.
11. Хохлова Л.Г., Хома-Могильська С.Г. Ірраціональні рівняння і нерівності. Навчальний посібник. Вид-во ТНПУ, 2018 – 51 с.

12. Головань М.С. Математична компетентність: сутність та структура / М.С. Головань // Науковий вісник Східноєвропейського національного університету. – 2014. – № 1. – С. 35–39.
13. Головань М. С. Сутність та структура математичної компетентності / М. С. Головань // «Математика. Інформаційні технології. Освіта»: тези доповідей II Міжнародної науково-практичної конференції (3-5 червня 2013 р., Луцьк – Світязь). Луцьк, 2013. – С.18-20.
14. Марко Прийма, Леся Комарницька. Методи розв’язування ірраціональних рівнянь у курсі алгебри і початків аналізу. Актуальні проблеми сучасної науки: Матеріали XII Міжнародної науково-практичної конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій / За ред. Юрія Матуріна, Ігоря Столярчука. – Дрогобич: Редакційно-видавничий відділ ДДПУ імені Івана Франка, 2025. – С. 215-217.