

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

Завідувач кафедри математики та економіки,

Кандидат педагогічних наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК _____ 2025 р.

**ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ
НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ТЕМИ
«ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ»
Спеціальність 014.04 Середня освіта (Математика)**

Магістерська робота

на здобуття кваліфікації

Магістр освіти.

Вчитель математики, вчитель інформатики

Автор роботи: Павло- Антон ПРУДИУС

_____ *підпис*

Науковий керівник: к. ф.-м. н., доцент
Ірина ШЕПАРОВИЧ

_____ *підпис*

Дрогобич - 2025

Захист кваліфікаційної магістерської роботи

Тема: Використання програмних засобів на уроках математики під час вивчення теми «Логарифмічна функція та її властивості»

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

_____ Голова ЕК _____

Дата

підпис

прізвище, ім'я

Секретар ЕК _____

підпис

прізвище, ім'я

АНОТАЦІЯ

Дана робота «Використання програмних засобів на уроках математики під час вивчення теми «Логарифмічна функція та її властивості» виконана студентом групи МІЗ-2425М Прудиусом Павлом-Антоном. У дипломній роботі охарактеризовано деякі види програмних засобів з метою їх ефективного використання для навчання учнів теми «Логарифмічна функція та її властивості» в курсі Алгебра і початки аналізу в 11 класі.

ANNOTATION

This work "The using of software tools in mathematics lessons when studying the topic "Logarithmic function and its properties" was completed by Prudius Pavel-Antoni, a student of the MIZ-2425M group. The thesis describes some types of software tools with the purpose of their effective use for teaching students the topic "Logarithmic function and its properties" in the course of Algebra and Elementary Analysis in grade 11.

ЗМІСТ

Вступ.....	5
Розділ 1. Програмні засоби навчання та їх роль у вивченні математики.	
1.1. Деякі методичні аспекти використання програмних засобів при вивченні математики.....	7
1.2. Аналіз програмних засобів, призначених для вирішення основних завдань у навчанні математики.....	16
Розділ 2. Вибір програмних засобів при вивченні теми «Логарифмічна функція»	
2.1. Програмні засади вивчення теми «Логарифмічна функція» в школі.....	29
2.2. Застосування програмних засобів для вирішення основних методичних аспектів з теми «Логарифмічна функція»	39
Висновки.....	52
Список використаних джерел.....	53

ВСТУП

Актуальність теми. У час посиленої інформатизації суспільства змінюються засоби і методи навчання. Перед «Новою українською школою» стоять нові виклики та завдання. Чутливі до яскравих кольорових динамічних зображень здобувачі освіти потребують якісно нових технологій в навчанні. Намагаючись оптимізувати, прискорити усі процеси і при цьому збільшити ефективність навчання, використовуємо інноваційні технології, що враховують психологічні особливості учнів, збільшуючи їх мотивацію і зацікавленість навчанням, зосередженість і продуктивність у роботі, як наслідок – ефективність навчання. Тут на допомогу приходять дещо інші програмні засоби, аніж були (умовно) кільканадцять років тому. Розглянемо як можна подати тему «Логарифмічна функція та її властивості», використовуючи деякі інноваційні технології. Звичайно, основні поняття та властивості не змінюються, а змінюються деякі форми і методи їх викладу та способи їх демонстрацій.

Об’єкт дослідження: Програмні засоби навчання математики в школі.

Предмет дослідження: Використання програмних засобів для ефективного вивчення теми «Логарифмічна функція та її властивості».

Мета магістерської роботи. Охарактеризувати та вибрати програмні засоби, які доцільно використовувати для вивчення теми «Логарифмічна функція та її властивості».

Завдання. Розробити методичні рекомендації стосовно використання доцільних програмних засобів при вивченні теми «Логарифмічна функція та її властивості».

Наукова новизна одержаних результатів. Ці напрацювання є оригінальними методичними рекомендаціями для використання інноваційних технологій у школі.

Практичне значення одержаних результатів. Результати магістерської роботи можна використовувати в шкільній практиці і не тільки, їх можна розвивати і вдосконалювати.

Апробація результатів магістерської роботи. Результати дослідження були представлені на XII-й Міжнародній науково-практичній конференції *Актуальні проблеми сучасної науки*, Дрогобич, 2025,

Структура і об'єм роботи. Магістерська робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел. Обсяг роботи 53 сторінки.

У першому розділі розкриваються деякі методичні аспекти вивчення математики та їх реалізації з допомогою різних програмних засобів. У другому розділі охарактеризовано певні програмні засоби та способи їх застосування при вивченні теми «Логарифмічна функція та її властивості».

Ключові слова: Програмні засоби, логарифм, логарифмічна і показникова функції, Geogebra, Maple.

Розділ 1. ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ НАВЧАННЯ ТА ЇХ РОЛЬ У ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ.

1.1. Деякі методичні аспекти використання програмних засобів при вивчення математики.

Під *програмними засобами* будемо розуміти широкий спектр програм, що допомагають в навчанні та організації інформації. Вони включають програми для побудови графіків та розрахунків, системи для створення навчальних матеріалів, педагогічні програмні засоби та електронні посібники. Для конкретного вивчення теми можна використовувати додатки для створення нотаток, перегляду документів, пошуку інформації, а також спеціалізовані освітні платформи для навчання та самонавчання, програми для візуалізації даних тощо. Варто згадати також і засоби тестування та моніторингу якості набутих знань.

Інноваційні процеси в освіті відбуваються постійно, але в кожен історичний період на іншому рівні. Процес навчання у минулому столітті відзначився реалізацією особистісного підходу до студента як визначального суб'єкта навчання [1].

Особистісно-зорієнтоване навчання (ОЗОН) як таке ґрунтується на повазі до особистості, врахуванні індивідуальних особливостей та ставленні до учня як до активного суб'єкта освітнього процесу. Воно передбачає створення умов для розвитку потенціалу кожного учня, його самореалізації та професійного становлення.

У цьому контексті ключову роль відіграє впровадження *індивідуальних освітніх траєкторій*, застосування персональних комп'ютерів та сучасних цифрових інструментів. Ці технології дозволяють:

- ✓ **Персоналізувати навчання:** Адаптувати зміст, темп та методи навчання до потреб і можливостей кожного учня.
- ✓ **Забезпечити доступ до інформації:** Використовувати різноманітні освітні ресурси, онлайн-платформи та цифрові інструменти.

- ✓ **Стимулювати самостійність та відповідальність:** Заохочувати учнів до активного пошуку інформації, самоорганізації та самооцінки.
- ✓ **Підвищити мотивацію:** Зацікавлювати учнів інтерактивними завданнями, мультимедійними матеріалами та можливістю вибору.

Якщо заглибитися в історію індивідуалізованого навчання, то ще на початку ХХ століття виникла система, так званий дальтонівський метод, педагогічний підхід до індивідуального навчання, який надає учням свободу планувати власний час та обирати темп роботи, що розвиває самостійність та відповідальність. Цю методику вперше запропонувала і застосувала Елен Паркхерст з американського міста Дальтон (звідси і назва). Це була альтернатива тодішнім методам навчання – заучування та повторення. Замість традиційних уроків - навчання за індивідуальними планами у спеціально обладнаних приміщеннях. Вчитель лише консультує та допомагає, відповідає на запитання, скеровує до джерел інформації. Учні працюють самостійно або в малих групах, здаючи завдання у визначений термін. Школа Дальтона і зараз працює, має три будівлі на Мангетені. Має контрактну основу — учні підписують договори різної складності. Це залежить від того, у якому темпі та на яку оцінку вони хочуть освоїти матеріал. Учень має викладача, котрий і формує для нього індивідуальну програму та завдання. У кожному договорі вказані: рекомендована література, контрольні запитання та інформація для роздумів. Це одна із найдорожчих шкіл в Америці, на середній і вищій рівень якої доволі непросто потрапити. Проходить за конкурсом 1 з 7 абітурієнтів.

Одна із основних цілей у навчанні математики [2] – розвиток *критичного, раціонального та самостійного мислення*, тому важливо так подавати *нову інформацію*, щоб вона сприймалася не догматично, а осмислено.

Можна виділити *три рівні* у процесі формування знань:

- 1) вищий (формування основних, фундаментальних понять, найбільш абстрактних),

- 2) середній (основні ідеї, принципи або узагальнення середнього рівня абстракції),
- 3) низький (конкретні, часткові факти, деталі найменш абстрактні) [2].

Використання цих трьох рівнів робить процес навчання неперервним. Найкраще поставлені дидактичні завдання вирішує *дослідницька* модель навчання. Вона відповідає *трьом типам навчальних завдань*, кожне з яких має власні фази [2]:

1. Формування понять (індуктивне мислення)

Фази: перелічування (складання переліку), групування, позначання (утворення категорій).

Мета: Перехід від конкретних прикладів до абстрактного поняття.

2. Інтерпретація відомостей

Фази: виявлення основних рис, пояснення виявлених даних, формулювання гіпотези.

Мета: Аналіз даних та побудова припущень.

3. Застосування правил і принципів

Фази: висунення гіпотез, передбачення наслідків, пояснення (підтвердження) передбачень і гіпотез, перевірка припущень.

Мета: Використання знань для розв'язання нових проблем та перевірки теорій.

Цей підхід є класичним прикладом реалізації теорії поетапного формування розумових дій та індуктивних методів навчання, що стимулює активну пізнавальну діяльність учнів.

Ось так виглядає модель формування понять запропонована Теннісоном Парком:

«1. Вчитель проводить змістовний аналіз системи понять та визначає місце кожного з них і взаємозв'язки між ними.

2. Вчитель наводить визначення поняття, приклади і контр-приклади.

3. Вчитель залучає учнів до процесу самостійного пошуку прикладів, які підходять для цього поняття.

4. *Учитель наводить нові приклади, які відповідають розумінню цього поняття.»*
[2].

Сучасна педагогіка фокусується на цілеспрямованому розвитку інтелектуальних умінь та пізнавального пошуку. Для цього необхідно використовувати засоби, які стимулюють творчі здібності учнів.

Слідуючи підходам [2] С. Парнса, вчитель має зосередитися на:

- **Створенні безпечного середовища:** усувати внутрішні перешкоди та страх оцінювання.
- **Стимулюванні креативності:** підтримувати уяву, залучати підсвідомість до роботи та застосовувати вправи для адаптації.
- **Розширенні світогляду:** розвивати сприйняття навколишнього світу та збільшувати обсяг знань.
- **Направленні діяльності:** допомагати учням бачити зміст та напрямок їхніх креативних пошуків.

Ефективним є вільний обмін думками, дискусії та використання інтерактивних технологій, таких як онлайн-дошки, мультимедійні проектори чи голограми, що об'єднують очне та дистанційне навчання.

Розумова діяльність учнів і студентів складається із зовнішніх, видимих дій та відповідних їм внутрішніх розумових операцій. Джерелом, що запускає таку діяльність, є спеціально сформульовані викладачем питання, які спонукають здобувачів освіти до активної пізнавальної праці. Ці питання змінюються залежно від етапу навчання [3]:

1. На **етапі формування понять** викладач фокусується на спостереженні та класифікації, ставлячи такі питання: *«Що ви побачили?»*, *«Що зауважили?»*, *«Як ці елементи пов'язані одне з одним?»*, *«За якою ознакою їх можна об'єднати?»* та *«Як би ви назвали ці групи?»*.

2. **Етап інтерпретації відомостей** вимагає глибшого аналізу та осмислення. Тут передбачаються запитання іншого типу: *«Що саме виявили?»*, *«Чому це сталося?»*, *«Що це означає?»*, *«Як це можна пояснити?»*, *«Що з цього випливає?»* і *«Які висновки можна зробити?»*. [3]

3. На останньому **етапі застосування правил і принципів** студенти переходять до використання знань на практиці, моделювання ситуацій та прогнозування. Вони повинні знайти відповіді на питання: *«Що могло би бути, якби виконувалося те чи інше, дано було би те чи інше значення?»*, *«Чому це могло би статися?»*, *«Що буде, коли певні умови виконуватимуться?»* або *«За яких умов твердження буде справедливим?»*. [3]

Дана модель індуктивного формування понять, уявлень, інтерпретації та застосування правил і принципів має багатофункціональне призначення. Вона не тільки допомагає засвоїти конкретні поняття, але й паралельно навчає учнів фундаментальним методам пізнання. Отже, у контексті моделі формування індуктивного мислення навчання перестає бути пасивним накопиченням інформації. Воно стає активним процесом підготовки студента до викликів реального життя та вимог майбутньої професійної діяльності.

Саме прив'язка матеріалу, який вивчається, до життя в навколишньому світі слугує ключовим чинником у підвищенні інтересу до навчання і, головне, забезпечує виконання завдання навчання як процесу вироблення вмінь і навичок, зокрема. Як сказав Локк: *«В інтелекті немає нічого, чого б не було раніше сенсу»* Кант сформулював цю думку так: *«Згідно з часом, жодне знання не передусь досвіду в нас, і з нього все починається»*. Тобто використовуємо *конкретно-індуктивний метод* [3] - метод навчання, за якого переходять від конкретних прикладів до абстрактної теорії. Цей метод навчання надає комплексний набір переваг. Він забезпечує глибше усвідомлення та якісніше засвоєння навчального матеріалу, водночас сприяючи значній активізації роботи учнів.

Завдяки своїй гнучкості, метод дозволяє подати будь-яку, навіть найскладнішу, математичну істину в доступній та зрозумілій формі. Ключовим аспектом є його здатність міцно пов'язати абстрактне навчання з реальним життям, демонструючи, що математика – це не просто набір правил, а ефективний інструмент для пізнання навколишнього світу та порівняння теоретичних знань із практикою.

«Спочатку річ та її сприйняття, потім думка або поняття, нарешті слово та письмовий знак», — пише Хофлер у своїй дидактиці.

Тому при формуванні понять доцільно створювати проблемну ситуацію, яка би зумовила мету, і в процесі викладу матеріалу показати як ця проблема вирішується. Під час вивчення нового матеріалу отримуємо відповідь на поставлене проблемне запитання. А на завершення формування навиків доцільно подавати вправи та задачі із практичного життя.

Підвищенням мотивації та пізнавальної активності у навчання слугує і зацікавленість певними нестандартними формами роботи. Так на тренінгах можна вводити ігрові методи, що легко і ненав'язливо «затягують» учнів у навчальний процес елементами змагання та конкуренції, певної винагороди у формі балів та підняттям власної самооцінки. Тут є різні додатки та платформи як для групових способів навчання так і для індивідуальних у форми тренажерів та симуляцій.

Не менш важливим чинником у підвищенні ефективності навчання є *поглиблення просторового бачення*. Про це доповідали ще у 1905 році на конгресі в Мерано («Meraner Vorschläge»), зокрема, комісія на чолі з відомим професором математики, ректором Геттінгемського університету Феліксом Кляйном. Для його реалізації необхідно використати певний набір навчально-методичних механізмів, засобів та прийомів. За 100 років людство далеко розвинулося у цьому напрямку. Саме візуалізація математичних об'єктів та зв'язків між ними допомагає у сприйнятті основних понять та їх

взаємозалежностей у математиці. *Візуальний підхід* у науці – це давно визнаний педагогічний принцип (Коменський, Песталоцці, Герберт), і тут важливе не лише його практичне застосування. Велике значення візуалізації в шкільній освіті полягає в тому, що вона загострює почуття спостереження, полегшує розуміння, міцно закріплює набуті знання в пам'яті, а також, пов'язуючи математику із зовнішнім світом та з іншими предметами, робить навчання цікавим.

У наш час інформатизації на озброєнні у вчителя математики є багато програм різної технічної складності, систем комп'ютерної динамічної математики для візуалізації даних, якими можна користуватися як з доступом до інтернету так і без.

При навчанні математики важливо враховувати психологічні особливості та можливості учнів пов'язані з їх віком та особистими здібностями. Так якщо на початку вивчення математики ми формуємо основні поняття, то в старших класах вчимо аналізувати процеси. Для прикладу, однією з основних змістових ліній курсу «Математика» є *функціональна лінія*. Поняття функції формуємо поступово. Спочатку лінійна функція, лінійна залежність, далі квадратична функція та квадратична залежність, гіпербола $y=1/x$ і обернено пропорційна залежність. У старших класах маємо інтенсивне вивчення елементарних функцій, і поряд із графічним представленням включаємо також короткі аналітичні міркування. Розгляд функцій не розглядаємо ізольовано, а включаємо за кожної нагоди, щоб вони стали засобом оживлення всього дослідження, ілюстрували різні типи взаємозв'язків і водночас сприяли щораз тіснішому зв'язку арифметичних та геометричних задач. Отже, вивчення функцій не є кінцевою метою, а лише засобом для досягнення мети, метою є *функціональне мислення, тобто здатність продумувати цілий ряд подій, а точніше змін, що відбуваються відповідно до заданої тенденції*. У функціональному мисленні можна виділити два ступені: 1) елементарне мислення, засноване на

спостереженні; 2) мислення, засноване на точному знанні ходу найважливіших функцій.

Ці ступені тісно пов'язані з основними рівнями науки. Таким чином, поняття «функції» вводимо спочатку шляхом формування та розвитку поняття змінності. Засоби, що ведуть до цієї мети, широко відомі: зміни результатів зі зміною компонентів очислень, залежність значення дробу від розміру чисельника та знаменника, множення та ділення на дріб на основі законів варіації добутку та частки, а також прямо та обернено пропорційних величин; змінність геометричних фігур зі зміною їх складових частин, перетворення одних фігур на інші (трапеція на трикутник або паралелограм, паралелограм у прямокутник), змінене положення різних геометричних утворень (положення точки або прямої відносно кута, дотична, проведена з січною), виконання побудов у зменшеному та збільшеному масштабі. Розвиток функціонального мислення також можна пов'язати з формуванням певних понять: наприклад, коли спільне плече сусідніх кутів обертається, один кут збільшується, інший зменшується, а коли сусідні кути рівні, ми отримуємо прямі кути.

Точне визначення різних функцій та їхнього взаємного зв'язку вимагає знання вищої математики, яка виступає проти нього природним висновком та вдосконаленням науки про функції. У школі математика вищого рівня обмежується знаннями про похідні. І тут не йде мова про розширення наукового матеріалу, а лише його поглиблення, запровадження різних питань, як от зв'язок між коефіцієнтом спрямованої дотичної та швидкістю зміни руху.

Ще важливіше, ніж саме впровадження похідної є її значення при вивченні функцій: похідна знаку «+» чи «-» вказує на те, що крива в деякій точці зростає чи спадає, а величина похідної вказує на швидкість зміни функції. Учень повинен дійти до розуміння, що, застосувавши похідну, можна через зміни одної функції описати зміни іншої функції ($\sin x$ за допомогою $\cos x$, $\ln x$ через $1/x$), а завдяки

численним описам функцій за допомогою похідних - піднятися на вищий рівень функціонального мислення.

Функціональне мислення безпосередньо пов'язане із *дослідницьким методом*, що також забезпечує розвиток критичного мислення. Цей метод можна використовувати як на початку вивчення математики так і в середній та старшій школі, зокрема.

Дослідницький метод [3] – це освітній підхід, який спонукає учнів до самостійного пошуку та «відкриття» нових знань (тверджень, формул, властивостей, закономірностей). Це може відбуватися двома шляхами: або через повне самостійне виведення теорем, формул і закономірностей, що вивчаються, або шляхом постановки перед учнями окремих проблемних питань і завдань дослідницького характеру, які доповнюють процес узагальнення готових знань. Дослідницький метод має такі ключові характеристики та переваги:

- *Глибоке усвідомлення*: Він сприяє повному та ґрунтовному усвідомленню змісту навчального матеріалу.
- *Самостійність*: Метод розвиває в учнів критично важливі вміння працювати самостійно та відповідально.
- *Активність*: Забезпечує високий рівень залученості та активності кожного учня в освітньому процесі.
- *Пізнавальна мотивація*: Стимулює пізнавальну активність і забезпечує міцний зв'язок теоретичного навчання з реальною практичною діяльністю.
- *Командна робота*: Створює умови для ефективної співпраці, організації роботи в парах або малих групах.
- *Метакогнітивні навички*: Сприяє формуванню власних, індивідуальних прийомів та стратегій навчальної діяльності.

Дещо простішим є **евристичний метод** вивчення математики [3] – це метод навчання, який будується на діалозі між учителем та учнями. Суть підходу полягає в тому, що викладач ставить перед класом проблемні питання,

заслуховує різноманітні відповіді учнів, а потім уточнює або виправляє їх. Учитель відіграє роль модератора: він може як доповнювати відповіді власними поясненнями, так і відповідати на окремі запитання самостійно, скеровуючи процес мислення в потрібне русло.

Цей метод поєднує в собі ключові освітні підходи:

- *Діалог та наведення на істину:* використовуючи систему навідних питань, що допомагає учням самостійно дійти до правильного рішення («підведення до істини»).
- *Ефект «відкриття»:* Хоча процес протікає порівняно швидко, він зберігає елементи самостійного «відкриття» знань учнями.
- *Якість комунікації:* Метод надає зразки правильних, лаконічних та чітких відповідей на поставлені запитання.
- *Співпраця та повага:* Він забезпечує ефективну співпрацю як між самими учнями, так і між учителем та учнями, а також формує важливе відчуття поваги до чужої праці та інтелектуальних зусиль.

Обов'язковим елементом навчання є діагностика навчальних досягнень учнів, яка, як вже зазначалося, може бути і мотиваційним чинником. Так використання інтерактивного додатку Kachoot перетворює опитування на цікаве захоплююче змагання. За результатами діагностичної роботи виявляються прогалини у підготовці учня, його досягнення, що допомагає спрямувати зусилля його та викладача на поліпшення стану справ.

1.2. Аналіз програмних засобів, призначених для вирішення основних завдань у навчанні математики

Розглянемо деякі види програмного забезпечення, що допомагають вчителю в навчальному процесі.

Напевне спочатку варто згадати про такий додаток як **GeoGebra** <https://www.geogebra.org/?lang=uk> Це одна із найбільш гнучких і зручних у використанні в навчальному процесі систем комп'ютерної математики (СКМ),

систем динамічної математики (СДМ). GeoGebra є універсальною програмою для вивчення математики, яка об'єднує різні її розділи (геометрію, алгебру, статистику та математичний аналіз) в одному застосунку. Вона пропонує широку онлайн-платформу з понад мільйоном безкоштовних ресурсів для використання в групі. Ці ресурси легко інтегруються через платформу [GeoGebra Classroom](#), де вчителі можуть відстежувати прогрес учнів у режимі реального часу.

Основні **переваги та можливості** використання GeoGebra включають [4]:

- **Інтерактивність навчання:** Програма дозволяє створювати інтерактивні "живі креслення" та моделі, які підвищують зацікавленість учнів та сприяють кращому засвоєнню матеріалу; підтримує групову роботу
- **Візуалізація:** GeoGebra дає можливість швидко створювати високоякісні графічні зображення математичних об'єктів (графіки функцій, 3D об'єкти), що допомагає учням візуалізувати абстрактні поняття.
- **Готові ресурси:** Велика спільнота викладачів ділиться готовими вправами, симуляціями та навчальними проектами, що економить час на підготовці уроків.
- **Відстеження прогресу:** Інтеграція з [Google Classroom](#) дозволяє вчителям легко ділитися завданнями та контролювати хід їх виконання учнями.
- **Доступність у використанні:** є безкоштовним додатком у некомерційних цілях; має онлайн і офлайн версію; має власне хмарне сховище; підтримує функцію синхронізації (збереження зображень у файлах графічних форматів png; svg), отримані рисунки можна використовувати як для створення друкованих дидактичних матеріалів так і для мультимедійних презентацій. Має легкий і зрозумілий україномовний інтерфейс
- **Гнучкість у навчанні:** підходить для уроків, дистанційного навчання, практикумів, самостійних та групових робіт.
- **Прогресивність:** Постійно оновлюється і розвивається.

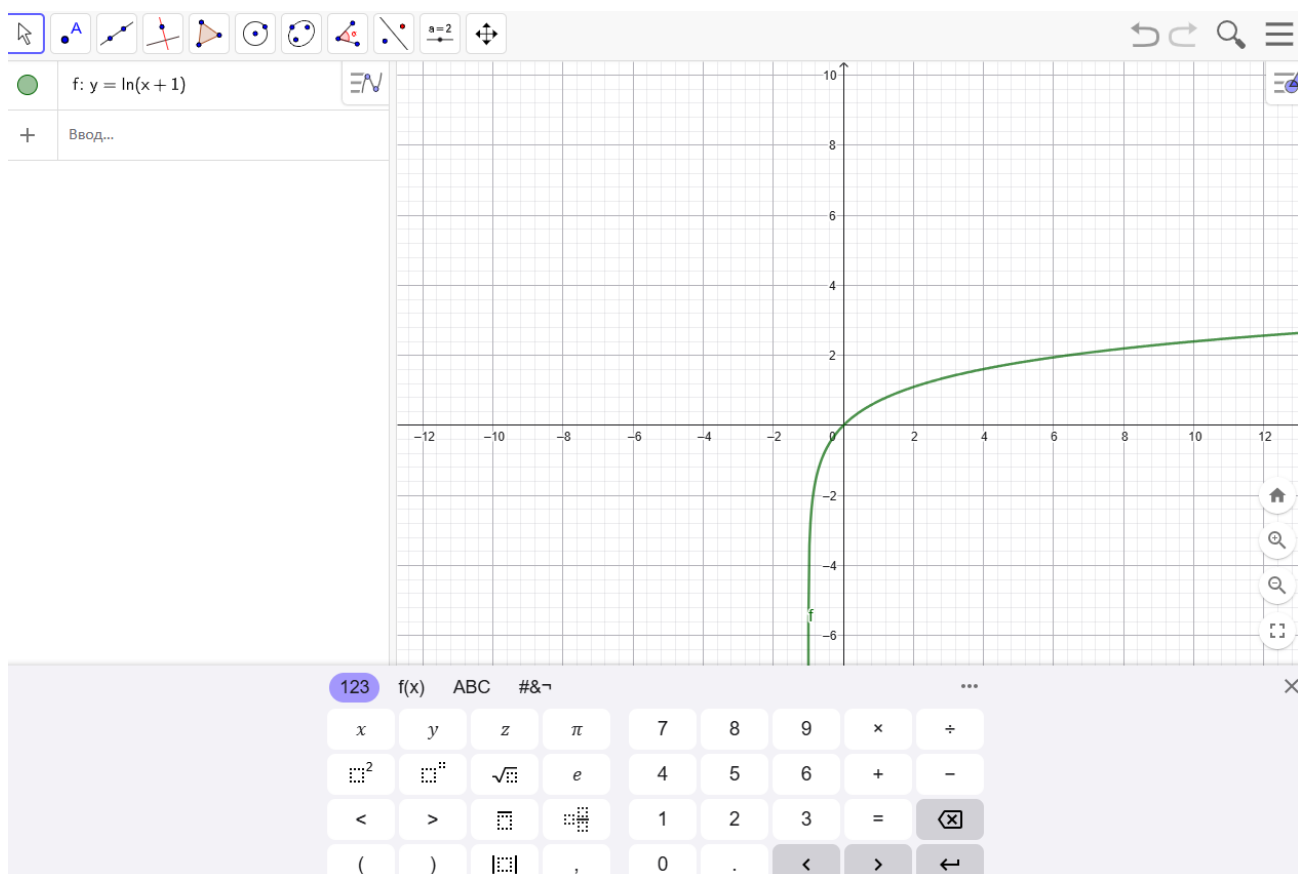


Рис. 1

GeoGebra можна використовувати в курсі «*Алгебра і початки аналізу*» для:

- **Алгебраїчних операцій:** виконувати обчислення, спрощення виразів, розкладання на множники та знаходження НСД і НСК.
- **Побудови графіків:** будувати графіки функцій у двовимірному та тривимірному просторі, а також знаходити точки перетину, будувати дотичні, візуалізувати похідні та інтеграли.
- **Розв'язування:** графічно розв'язувати рівняння, системи рівнянь та нерівностей.
- **Математичного аналізування:** досліджувати функції (екстремуми, нулі, точки перегику), знаходити похідні, первісні, виконувати інтегрування та будувати відповідні дотичні й нормалі, будувати таблиці значень.

Програма також надає спеціальні інструменти в панелі інструментів або команди в полі введення для виконання завдань з *Геометрії*:

- **Побудова фігур:** Можна, вибираючи на панелі відповідні інструменти (інтуїтивно зрозумілі піктограми) створювати точки, лінії, багатокутники, кола, конічні перетини, прямі, вектори та багато іншого
- **Вимірювання:** За допомогою інструментів «Кут», «Відстань або довжина» чи «Площа» можна миттєво обчислити потрібні параметри.
- **Перетворення:** Інструменти «Симетрія відносно точки/прямої», «Поворот навколо точки» дозволяють динамічно змінювати фігури та спостерігати за результатом.
- **Знаходження точок:** Інструмент «Перетин двох об'єктів» автоматично знаходить точки перетину, їх координати за потреби.

GeoGebra дозволяє учням не просто малювати фігури, а досліджувати їхні властивості, оскільки всі побудови є *динамічними* — якщо змінити початкові об'єкти, залежні від них автоматично перебудовуються.

Щоб працювати в режимі віртуального класу вчитель запускає сесію, до якої учні підключаються за посиланням без реєстрації. Учні виконують інтерактивні завдання — конструюють моделі, виконують побудови та вправи, які задав або вибрав учитель. При цьому учитель бачить: хто підключився до уроку; як кожен учень виконує завдання; прогрес кожного учня поетапно; які помилки роблять учні. Це може спостерігати як в живому перегляді так і в історії роботи учнів. Можливість паузи — учитель може зупинити роботу учнів, щоб пояснити матеріал або розібрати помилки. Коментування та зворотний зв'язок — учитель може залишати підказки або коментарі безпосередньо у завданнях. Підтримка всіх моделей з GeoGebra Materials — можна використовувати готові матеріали або створювати власні [4].

Використання систем комп'ютерної математики, таких як GeoGebra, змінює традиційні методики викладання, роблячи процес навчання більш динамічним та *дослідницьким*.

Одним із світових лідерів серед СКМ є потужний математичний пакет **Maple**, який розроблено підрозділом Maplesoft канадської компанії Waterloo Maple Inc. Роботу над створенням системи було розпочато ще в 1980 році. Систему було названо Maple. На початку 90-х років XX ст. у Maple [<https://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=StudyGuides/MultivariateCalculus/Chapter0/Preface&cid=1290>] з'явився графічний інтерфейс користувача, і з цього часу Maple стала широко використовуватись в освіті. Більш, як дві тисячі ефективно реалізованих команд дозволяють розв'язувати завдання з

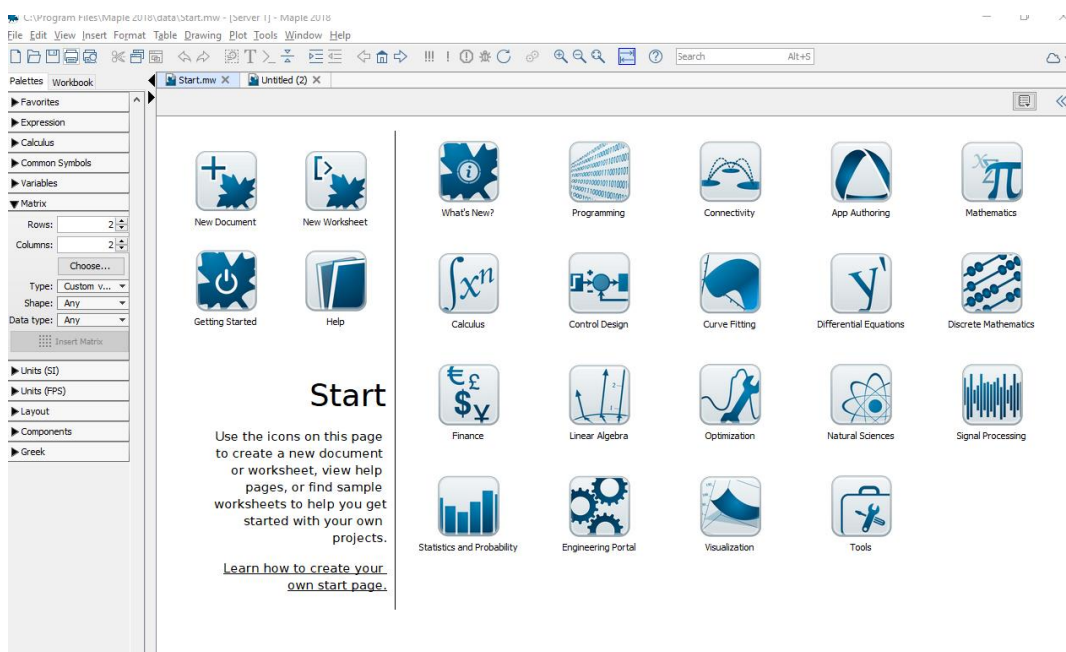


Рис. 2

алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, статистики, теорії графів та багато інших. Пакет **Maple** яка має: розширену графічну бібліотеку, яка дозволяє створювати високоякісні 2D та 3D візуалізації функцій, даних та геометричних об'єктів і повноцінну мову програмування, яка дозволяє автоматизувати обчислення, створювати складні алгоритми та розширювати функціонал системи [5].

Потужні математичні засоби та програмні конструкції пакету Maple можуть бути використані для вирішення величезної кількості завдань, які виникають при

моделюванні різноманітних систем і процесів, що протікають в технічних, соціальних, економічних системах. Ось які задачі вирішує Maple:

- проведення математичних досліджень, що вимагають обчислень та аналітичних викладок
- розробка та аналіз алгоритмів;
- математичне моделювання, комп'ютерний експеримент;
- аналіз та обробка даних;
- візуалізація, наукова та інженерна графіка;
- розробка графічних та розрахункових додатків.

Програмне забезпечення Maple складається з двох окремих частин:

1) *Інтерфейс користувача*; 2) *Обчислювальний механізм Maple*.

Інтерфейс користувача Maple можна використовувати для введення, маніпулювання та аналізу математичних виразів і команд. Інтерфейс користувача взаємодіє з обчислювальним механізмом Maple для вирішення математичних задач та відображення їхніх розв'язків.

Обчислювальний механізм Maple — це командний процесор, який складається з двох частин: *ядра* та *математичної бібліотеки*. Ядро є основою обчислювального механізму Maple. Воно містить основні засоби, необхідні для запуску та інтерпретації програм Maple, а також для керування структурами даних. У посібнику команди ядра називаються вбудованими командами. *Ядро* Maple також складається з розширень ядра, які є колекціями зовнішніх скомпільованих бібліотек, включених до Maple для забезпечення функціональності програмування низького рівня. Ці бібліотеки включають підпрограми базової лінійної алгебри (BLAS), GNU Multiple Precision (GMP), бібліотеку NAG® C та пакет лінійної алгебри C (CLAPACK). *Математична бібліотека* містить більшість команд Maple. Вона включає функціональність для численних математичних областей, включаючи обчислення, лінійну алгебру, теорію чисел та комбінаторику. Також вона містить команди для численних

інших завдань, включаючи імпорт даних у Maple, обробку XML, графіку та переклад коду Maple на інші мови програмування. Усі команди бібліотеки реалізовані мовою програмування високого рівня Maple, тому користувачі можуть переглядати та змінювати їх.

На даний час систему використовують більше 5 мільйонів студентів, вчених, дослідників і спеціалістів різних областей, що зумовлено такими *особливостями та перевагами Maple*:

- ✚ **Зручність використання:** Програма має сучасний, інтуїтивно зрозумілий багатовіконний інтерфейс, який підтримує інтерактивний діалоговий режим роботи.
- ✚ **Величезний функціонал:** Вона містить потужну бібліотеку математичних функцій та численні додаткові пакети, що дозволяє виконувати завдання різної складності.
- ✚ **Інноваційні технології:** Maple поєднує новітні технології *символьних обчислень* (робота з формулами) та високоточних *числових обчислень*.
- ✚ **Програмування та інтеграція:** Наявність власної мови програмування інтерпретуючого типу та засобів інтеграції з іншими програмами робить її гнучким інструментом.
- ✚ **Допоміжні засоби:** Деталізована довідкова система, редактор документів, розвинуті графічні можливості та спеціальні веб-компоненти (маплети) роблять Maple ідеальним як для навчання, так і для наукових досліджень.

Зупинимося детальніше на Маплетах - засобах візуально-орієнтованого програмування інтерфейсу користувача, які здатні забезпечити покрокове розв'язання математичних задач із *демонстрацією проміжних результатів обчислень*. В Maple є понад 2,5 тисячі вбудованих функцій та процедур, тому велику кількість задач система може розв'язувати без програмування. Для розв'язання таких задач авторами було створено необхідні Maple-процедури та оформлено їх у вигляді бібліотеки процедур. Файл бібліотеки `atchlib.m` додається

до посібника на диску. Бібліотека призначена для досить широкої аудиторії: студентів, аспірантів, викладачів, вчених, які для розв’язування математичних задач використовують пакет Maple. Всі вихідні тексти процедур, що містяться в бібліотеці, доступні користувачу. До кожної з них наведено детальне пояснення принципу роботи. Це дозволяє використовувати процедури в якості ілюстративного матеріалу при освоєнні програмування в Maple. Довідкову

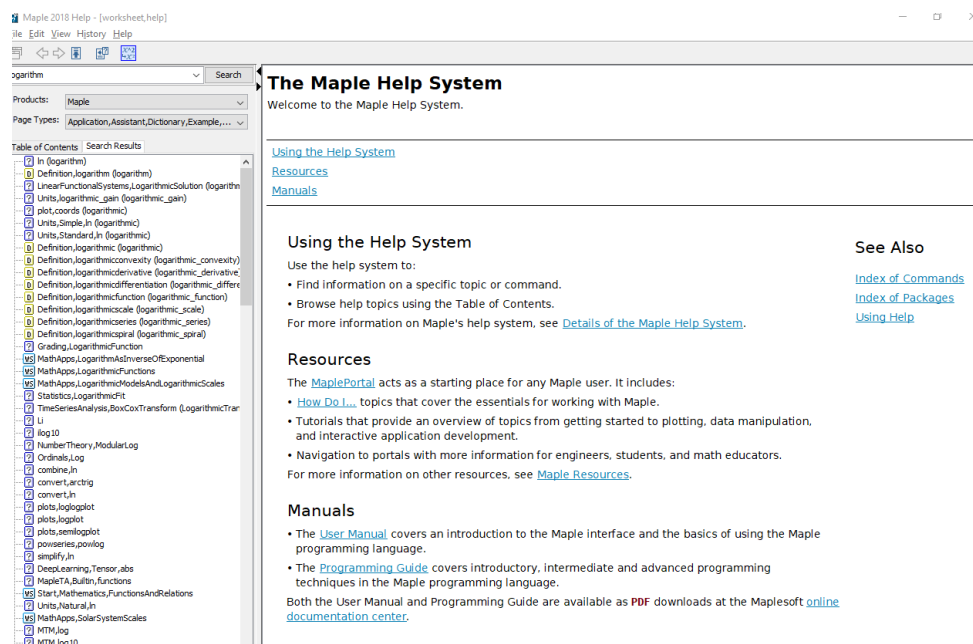


Рис. 3

інформацію про певну команду можна отримати різними способами: І спосіб: встановити курсор в будь-яке місце команди і натиснути клавішу F1 (рис.3) чи звернутися до оператора HelpGuide;

ІІ спосіб: в області введення (див.нижче) поставити символ ? і (без пропуску) написати назву команди, після чого натиснути клавішу Enter. Важлива особливість цієї системи – наявність ілюстративних прикладів до кожної із команд. Ці приклади можна скопіювати в свій документ, замінити дані і виконати.

Достатньо розробити алгоритм розв’язання своєї задачі, виділивши окремі етапи, для яких Maple має готові розв’язання. Але користувач має можливість створювати і власні процедури. Процедури можна оформити у вигляді окремого пакету, доповнити довідковою інформацією, логічно приєднати до основної

бібліотеки. Слід відмітити, що розробники Maple ведуть активний діалог із користувачами і розроблені користувачами процедури можуть бути включені до нового релізу. Таким чином, система Maple – не просто потужний високо інтелектуальний калькулятор, який може розв’язати багато задач аналітично, а система, яка розвивається відповідно до потреб користувачів, внесок у розвиток якої роблять як розробники, так і численні користувачі [5].

Це програмне забезпечення доцільно використовувати як для демонстрацій різноманітних властивостей функцій так і для дослідницького методу навчання. Таким чином, Maple, як і GeoGebra, є цінним інструментом для інформатизації шкільної математичної освіти, особливо для вивчення математики, де потрібні як символічні обчислення, так і візуалізація.

Для кращого сприйняття матеріалу, вироблення вмінь і навичок варто використовувати *тренажери та симулятори*, які більше відіграють роль у індивідуальному навчанні. За допомогою цих видів додатків можна досліджувати різні явища не просто теоретично, а «в дії» — бачити, як щось змінюється, якщо пересунути повзунок, чи змінити число. Використання застосунків такого типу мають і дослідницький характер.

Можна використовувати симулятори і тренажери з деяких тем, які розроблені у програмному забезпеченні Maple. Можна також їх там і формувати. Також деякі вправи та тренажери можна як знайти в бібліотеках програм, так і самостійно створити в застосунках Geogebra та Learnings Apps.

Симуляції варто використовувати під час пояснення нового матеріалу або коли повторюємо тему. Учня можна дати завдання самостійно змінювати параметри й описувати що вони спостерігають. Добре також проводити спільне обговорення, щоб закріпити знання. Можна комбінувати інтерактивні тренажери із звичайними вправами і задачами.

Варто згадати і додатки, що дозволяють вчителю організувати зворотній зв'язок швидко, якісно і завжди мати доступ до його результатів. Цю можливість

надають онлайн-сервіси для здійснення опитування, тестування, отримання зворотного зв'язку тощо.

Окрім потужних математичних програм, таких як GeoGebra чи Maple, важливим аспектом інформатизації освіти є використання онлайн-сервісів для *організації швидкого та якісного зворотного зв'язку* між вчителем та учнями. Ці додатки та сервіси (для опитувань, тестування, збору відповідей) дозволяють:

- *Корегувати навчальний план* з урахуванням потреб та побажань учнів.
- *Оперативно перевіряти* рівень розуміння нового матеріалу та знання фактичного матеріалу (як у класі, так і під час дистанційної роботи).
- *Планувати подальшу роботу* та здійснювати корекцію знань на основі отриманих результатів тестування.
- *Активно залучати* кожного учня до обговорень, дискусій та проєктної діяльності.

Використання цих інструментів можливе безпосередньо на уроці за умови забезпечення кожного учня персональним гаджетом (планшетом чи смартфоном), або ж може бути заплановано як домашнє завдання чи робота у комп'ютерному класі.

Сучасний вчитель має у своєму арсеналі багато різноманітних сервісів для реалізації цих можливостей. Серед них Google форми, Kahoot, Quizizz, Quizalize, Triventy, Plickers та багато інших [6].

Kahoot дозволяє провести швидке опитування учнів і мати статистику успішності всього класу. Учні активно залучаються до процесу тестування завдяки елементам гейміфікації (ігрової форми), адже вони можуть в режимі реального часу стежити за своїми результатами та позиціями в спеціальних турнірних таблицях. Це значно підвищує їхню мотивацію та інтерес до уроку.

Створивши тест на сайті <https://getkahoot.com/> (перед тим зареєструвавшись), вчитель створює посилання на нього, учні переходять за цим посиланням,

вводять код гри, який генерується автоматично, коли вчитель запускає гру, і вводять своє ім'я; гра відбувається онлайн. Питання тесту і варіанти відповіді з'являються на екрані вчителя, а відповідають учні зі своїх мобільних телефонів або комп'ютерів. Щоправда у вільному доступі є дуже обмежені можливості цього додатку. [6]

Quizizz працює за схожим із Kahoot! принципом, але пропонує дві важливі переваги, які розширюють можливості його використання вчителем: По-перше це *індивідуальний темп*: На відміну від Kahoot!, де всі учні відповідають одночасно, синхронізуючись із темпом вчителя, Quizizz дозволяє кожному учаснику проходити тест *у власному темпі*. Це знімає стрес і дає час поміркувати над відповіддю. По-друге опитування можна *планувати як домашнє завдання*: Справді, тести, створені в Quizizz, можна легко запланувати та призначити учням як домашню роботу із встановленим терміном виконання. Це перетворює його з інструмента для миттєвого опитування в класі на повноцінний інструмент для асинхронного навчання та контролю знань поза уроком. [6]

Для того, щоб створити тест у Quizizz: потрібно перейти за адресою <http://quizizz.com/>, натиснути на «Login» і створити акаунт, вибравши вкладку «Sign Up». Далі приступити до створення свого тесту, вибравши команду "Create your own quiz" та задавши назву для тесту. Можемо задавати запитання, як у вигляді малюнків так і прикладів, варіантів відповідей (максимум 4) і зберігаємо свій тест. Quizizz має ширші можливості символічної графіки, аніж Kahoot, тому у старшій школі та ВНЗ є більш застосовним. Для виконання тесту в класі потрібно відкрити тест і натиснути «Play Live»! При цьому режимі Live моніторинг здійснюється зразу. Учитель бачить процес просування кожного учня. Для використання тесту в якості домашньої роботи потрібно вибрати «Homework» і встановити термін, до якого домашня робота повинна бути виконана. При цьому режимі результати виконання тесту можна знайти за переходом «My Reports».

Обидва сервіси, Kahoot! та Quizizz, ефективно доповнюють один одного в арсеналі сучасного вчителя для організації якісного зворотного зв'язку.

Quizalize — це ще один сервіс (<https://www.quizalize.com/>), схожий на Kahoot! та Quizizz, який також дозволяє вчителям організовувати тестування з миттєвим зворотним зв'язком. Він поєднує гнучкість Quizizz (індивідуальний темп і домашні завдання) з елементами гейміфікації (змагання команд, відстеження "кілометражу"). Quizalize має такі особливості: Тести можна проводити як синхронно в класі, так і асинхронно в режимі офлайн; учні самостійно вирішують, коли почати роботу над тестом, навіть якщо він запущений одночасно для всього класу; функція "As Homework" дозволяє легко призначати тести для самостійного виконання вдома; режим "Play in Class" автоматично ділить клас на дві команди, перетворюючи тестування на змагання з візуалізацією прогресу у вигляді "пробігу" кілометрів. У цьому додатку існує можливість входу через акаунт Google Classroom, що спрощує управління класами та облік результатів [6].

Quizalize ефективно розширює арсенал вчителя для використання мобільних технологій на уроках, пропонуючи змагальний елемент та гнучкість у використанні.

Triventy — це ще один корисний інструмент для організації зворотного зв'язку, який, окрім стандартних функцій тестування та вікторин, робить акцент на *спільній роботі* та інтерактивності, який має такі ключові особливості та принцип роботи Triventy: а) *спільна розробка тестів* (залучення інших вчителів або ж учнів до створення запитань за певною темою, що посилює залученість до матеріалу); б) *інтерактивні підказки* під час "гри", наприклад "50/50" (прибрати дві невірні відповіді) або показати, як відповіла більшість класу, що додає елемент стратегії та обговорення. Щоб застосувати цей додаток, потрібно перейти на сайт <http://www.triventy.com/>, створити акаунт та розробляє вікторину, додаючи питання з варіантами відповідей та зображеннями за потреби. Учні

приєднуються до вікторини, перейшовши за посиланням triv.in та ввівши унікальний пароль або відсканувавши QR-код. «Запускає» вікториниу вчитель. Triventy, таким чином, пропонує гнучке рішення для організації змагальних та спільних навчальних активностей у класі [6].

На озброєнні у вчителя є численна кількість додатків, освітніх платформ, застосунків та інтернет ресурсів. Головне вдало ними користуватися, виходячи із мети і завдання, який ставиться перед вчителем на певному етапі навчання.

Розділ 2. ВИБІР ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕМИ «ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ»

2.1. Програмні засади вивчення теми «Логарифмічна функція» в школі.

Як написано в програмі [7], однією з головних змістових ліній курсу «Математика» в старшій школі є функціональна лінія. У старших класах відбувається повторення, систематизація матеріалу про функції, які вивчалися в основній школі, що формує міцну основу для подальшого вивчення курсу «Алгебра і початки аналізу» й готує учнів до сприйняття нових, складніших класів функцій, таких як тригонометричні, показникові, логарифмічні та різноманітні степеневі функції. Таким чином забезпечується логічний, послідовний перехід до математичного аналізу, що є ключовим для успішного засвоєння програми старшої школи. *«Лейтмотивом теми має бути моделювання реальних процесів за допомогою функцій. Оскільки робота з діаграмами, рисунками, графіками є одним із поширених видів практичної діяльності людини, то до головних завдань вивчення теми слід віднести розвиток графічної культури учнів. Ідеться передусім про «читання» графіків, тобто про встановлення властивостей функції за її графіком.»* [7]

У наступних темах розширюються класи функцій, які вивчалися в основній школі, їх властивості та застосування. У темі *«Показникова та логарифмічна функції»* розглядається не лише вміння досліджувати функції, але і застосування до моделювання закономірностей процесів зростання та спадання. Перебіг фізичних процесів у розумінні учнів мають асоціюватись із певною функцією, її графіком та властивостями.

У курсі математики старшої школи, окрім змістової лінії функцій, також набувають розвитку інші важливі розділи такі як «обчислення та перетворення логарифмічних виразів», «розв’язання логарифмічних рівнянь та нерівностей і їх систем»

Програма передбачає реалізацію *«діяльнісного підходу до навчання»* — це означає, що учні не просто запам'ятовують правила, а активно застосовують математичні знання на практиці. Це головна умова забезпечення ефективності сучасної математичної освіти.

У старшій школі навчальний процес адаптований до доросліших учнів, які вже мають досвід самостійної роботи та розвинені пізнавальні навички. Це дозволяє ефективно застосовувати не тільки звичні для основної школи форми та методи навчання, але і такі як лекції, семінарські та лабораторні роботи, а також інтегровані уроки, що поєднують профільні дисципліни, наприклад, математику з фізикою чи економікою.

Задля ефективності навчання на практичних заняттях рекомендовано постійно залучати учнів до самостійної роботи. Спершу вчитель разом із класом обговорює ідею та алгоритм розв'язування певного класу задач, після чого кожен учень індивідуально виконує запропоновану систему вправ, за потреби консультуючись із вчителем. Формуванню відповідних мотивів до самостійної роботи сприяє також використання різноманітних завдань, зокрема: виконання рисунків до завдань; домашніх робіт, які вимагають дослідження конкретних класів функцій чи геометричних конструкцій; запитань прикладного змісту.

Важливо, з метою формування *критичного, раціонального та самостійного мислення* так формулювати контрольні запитання і тестові завдання, щоб вони були спрямовані не просто на відтворення означень понять та тверджень, що їх характеризують а на «з'ясування елементів та структури означень математичних об'єктів; їх місця в системі інших понять; операцій, які можна виконувати з об'єктом, його особливостей та властивостей». Тобто активізувати продуктивне аналітичне мислення учнів та сприяти глибшому, «неформальному» засвоєнню теоретичного матеріалу і ефективно формувати ключові інтелектуальні навички: порівняння та класифікації математичних

понять; узагальнення закономірностей; практичного застосування математичних об'єктів та концепцій [8].

Отже, логарифмічна функція та її властивості завершують ряд функцій, що вивчаються в школі. Її вивчають в 11 класі в курсі предмету «Алгебра і початки аналізу». Вивчення її йде в парі із показниковою функцією. Для стандартних класів на цю тему відводиться 16 годин. При цьому формуємо такі вміння при вивченні питань (записані в таблиці) [7]:

Тема 1. ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ 16 годин		
Кількість годин	Навчальні досягнення учнів	Зміст навчально матеріалу
16 год	Учень/учениця: розпізнає і будує графіки показникової і логарифмічної функцій; ілюструє властивості показникової і логарифмічної функцій за допомогою графіків; застосовує показникову та логарифмічну функції до опису реальних процесів; розв'язує найпростіші показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.	Властивості та графіки показникової функції. Логарифми та їх властивості. Властивості та графік логарифмічної функції. Найпростіші показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.

На профільному рівні відводиться більша кількість годин (40), що зумовлює використання більшої кількості різноманітних зособів навчання. Ось як це подано у профільній програмі [8]:

Тема 1. ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ		
Кількість годин	Навчальні досягнення учнів	Зміст навчально матеріалу
40 год	Учень (учениця):	Степінь із дійсним показником.

формулює означення показникової і логарифмічної функцій та їх властивості; формулює означення логарифма та властивості логарифмів; будує графіки показникових і логарифмічних функцій; перетворює вирази, які містять логарифми; знаходить похідні показникових, логарифмічних, степеневих функцій і застосовує їх до дослідження цих класів функцій; розв’язує показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами застосовує показникову та логарифмічну функції до розв’язування прикладних задач.	Показникова функція. Логарифми та їх властивості. Логарифмічна функція. Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами. Похідні показникової та логарифмічної функцій.
--	---

Отже, щоб подати поняття «логарифмічної функції», спочатку формуємо поняття «логарифма» взагалі.

У підручнику Алгебра ([9] Мерзляк, Номіровський, Полонський, Якір, 2019) 11 клас поняття логарифма підводиться, виходячи із рівняння $2^x = 5$ та графічного розв’язання його. Поняття логарифмічної функції формується як *оберненої до показникової*. Виходячи з рис. 4, потрібно знайти абсцису точки на графіку функції 2^x , якщо ордината дорівнює 5. Таким чином, узагальнюючи приклад формулюємо означення логарифма

Означення. *Логарифмом* додатного числа b з основою a , де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a , щоб отримати число b .

Позначають $\log_a b$.

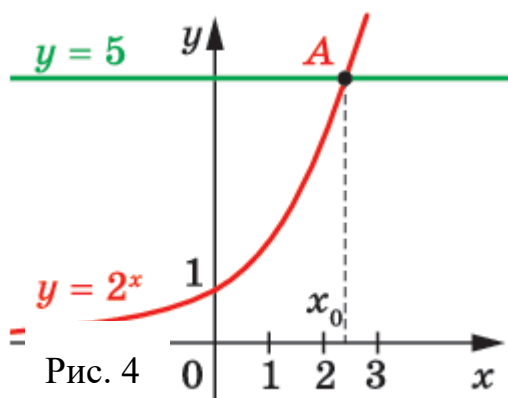


Рис. 4

Наприклад, $\log_3 9$ - це показник степеня, до якого потрібно піднести число 3, щоб отримати число 9. Маємо: $\log_3 9 = 2$, оскільки $3^2 = 9$.

З означення випливає **основна логарифмічна тотожність**

$$a^{\log_a b} = b \quad (1)$$

Також з означення логарифма випливає, що при $a > 0$ і $a \neq 1$

$$\log_a a = 1, \log_a 1 = 0.$$

Операція, обернена до потенціювання називається **логарифмуванням**.

Логарифм з основою 10 називають десятковим логарифмом. Замість $\log_{10} b$ записують: $\lg b$. Тоді, якщо $b > 0$

$$10^{\lg b} = b.$$

Приведемо і інші загально відомі відомості про логарифм, логарифмічну функцію та її властивості:

Властивості логарифма оформлені у вигляді теорем:

Теорема 1 (логарифм добутку). Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad (2)$$

Коротко формулюють: *логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів*.

Доведення проводять, використовуючи основну тригонометричну тотожність і властивості степеневі функції.

Теорема 2 (логарифм частки). Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (3)$$

Коротко формулюють: *логарифм частки дорівнює різниці логарифмів.*

Теорема 3 (логарифм степеня). Якщо $x > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то для будь-якого $\beta \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x. \quad (4)$$

Доведення на основі тригонометричної тотожності.

Теорема 4 (перехід від однієї основи логарифма до іншої). Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$, то виконується рівність

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (5)$$

Наслідок 1. Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, то виконується рівність

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Наслідок 2. Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, то для будь-якого $\beta \neq 0$ виконується рівність

$$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b$$

Доведення на основі теореми 3 і наслідку 1.

Цікаво! Якщо члени *геометричної прогресії* є додатними числами. Тоді їх *логарифми* з довільною основою утворюють *арифметичну прогресію*

Логарифмічна функція та її властивості.

Нехай $a > 0$, відмінне від 1. Функцію $\log_a x$ вводимо як відповідність: кожному додатному числу x відповідає число $y = \log_a x$. Тим самим буде задано функцію $f(x) = \log_a x$ з областю визначення $D(f) = (0; +\infty)$. Цю функцію називають **логарифмічною**.

Логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$ є оберненою до показникової функції $g(x) = a^x$. Це так бо для будь-якого $y_0 \in \mathbb{R}$ рівняння $\log_a x = y_0$ має корінь (він дорівнює a^{y_0}). Це означає, що областю значень логарифмічної функції є множина $\mathbb{R}$. Маємо: $D(f) = E(g) = (0; +\infty)$. $E(f) = D(g) = (0; +\infty)$.

Для будь-якого $x \in D(f) = (0; +\infty)$ виконується рівність $a^{\log_a x} = x$.

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$. Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Оскільки графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$, то, користуючись графіком показникової функції $y = a^x$, можна побудувати графік логарифмічної функції $y = \log_a x$

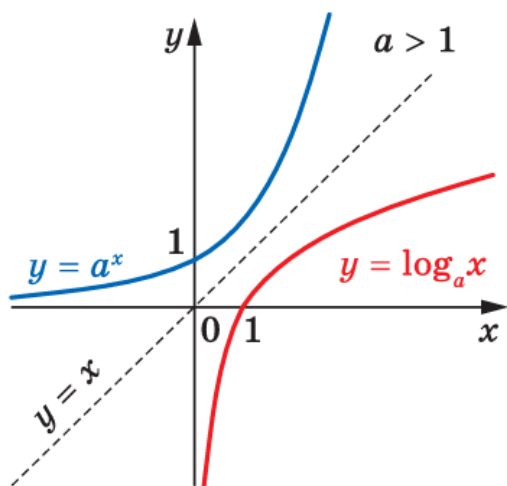


Рис 5.

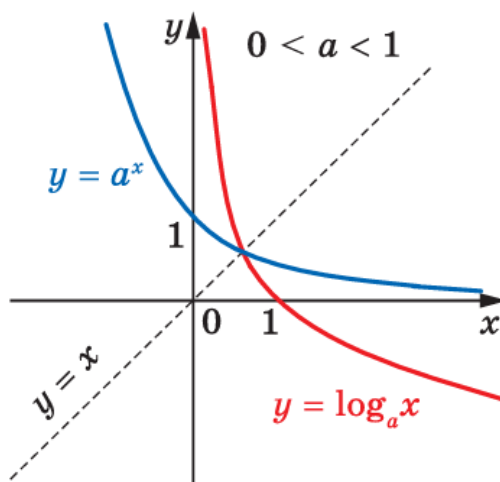


Рис. 6

Дослідження функції: аналіз за графіками (рис. 5, 6)

Графік функції $y = a^x$ має з віссю ординат одну спільну точку. Це означає, що графік оберненої функції $y = \log_a x$ має одну спільну точку з віссю абсцис. Тому функція $y = \log_a x$ має єдиний нуль $x = 1$. Коли функція є зростаючою (спадною), то обернена до неї функція також зростаюча (спадна). Показникова функція

$y = a^x$ є зростаючою при $a > 1$ та спадною при $0 < a < 1$. Тому функція $y = \log_a x$ є зростаючою при $a > 1$ та спадною при $0 < a < 1$.

Функція $y = \log_a x$ має два проміжки знакосталості. Якщо $a > 1$, то $y < 0$ при $x \in (0; 1)$, $y > 0$ при $x \in (1; +\infty)$; (рис. 6)

якщо $0 < a < 1$, то $y < 0$ при $x \in (1; +\infty)$, $y > 0$ при $x \in (0; 1)$ (рис. 3).

Оскільки логарифмічна функція є зростаючою (при $a > 1$) або спадною (при $0 < a < 1$), то вона не має точок екстремуму.

Коли визначена на деякому проміжку функція є оборотною та *неперервною*, то обернена до неї функція також є *неперервною*. Показникова функція $y = a^x$ є неперервною, тому обернена $y = \log_a x$ є теж неперервною.

Графік функції $y = \log_a x$ має вертикальну асимптоту $x = 0$, коли x прямує до нуля справа.

Зв'язок із навколишнім середовищем.

Показникова та логарифмічна функція є *математичною моделлю* багатьох природніх процесів або процесів пов'язаних із діяльністю людини. Для прикладу

Біологічна задача. Маса колонії бактерій у певних умовах за рівні проміжки часу збільшується в одну й ту саму кількість разів. Якщо позначити через $f(x)$ масу колонії бактерій у момент часу $t = x$, то за проміжок від $t = x$ до $t = x + y$ маса колонії бактерій збільшиться в таку саму кількість разів, як за проміжок часу від $t = 0$ до $t = y$, тобто $\frac{f(x+y)}{f(x)} = \frac{f(y)}{f(0)}$. Якщо в момент часу $t = 0$ маса колонії бактерій дорівнювала 1, то останню рівність можна переписати так: $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$. Очевидно, що функція, що описує залежність маси колонії бактерій від часу t , є неперервною. Тому маса колонії бактерій у момент часу t дорівнює $f(t) = a^t$. Навпаки, якщо колонія бактерій за рівні проміжки часу збільшує свою масу m в одну й ту саму кількість разів, то за допомогою функції $t = \log_a m$ можна знайти час, коли маса колонії досягне певної величини. [9]

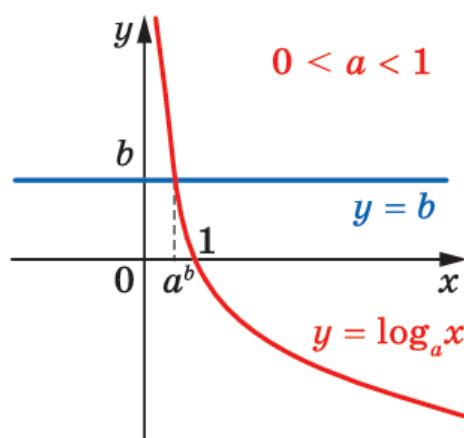
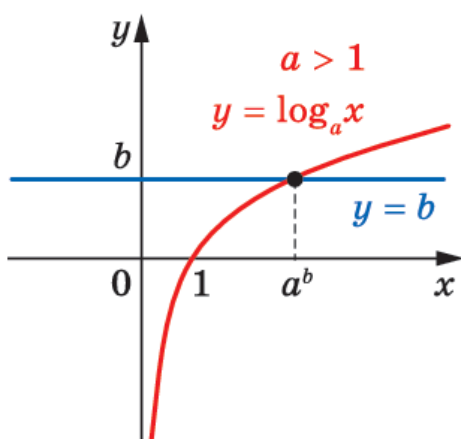
Фізична задача. Із курсу фізики відомо, що під час радіоактивного розпаду маса радіоактивної речовини за рівні проміжки часу зменшується в одну й ту саму кількість разів. Таким чином логарифмічна функція дає змогу визначити період піврозпаду радіоактивної речовини. [9]

Економічна задача. Якщо покласти гроші на рахунок у банк під певний відсоток, то кожного року кількість грошей на рахунку буде збільшуватися в одну й ту саму кількість разів. Логарифмічна функція дозволяє визначити час, за який кількість грошей на банківському рахунку збільшиться вдвічі, якщо банк щодня збільшує суму вкладу на p відсотків. Цей час дорівнює $\log_{\left(1+\frac{p}{100}\right)} 2$. [9]

Логарифмічні рівняння та нерівності.

Рівняння виду $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають найпростішим логарифмічним рівнянням. Оскільки графіки функцій $y = \log_a x$ і $y = b$ перетинаються в одній точці (рис. 6.1), то найпростіше логарифмічне рівняння має єдиний корінь при будь-якому b . Цей корінь можна знайти, використовуючи означення логарифма. Маємо: $x = a^b$.

Аналогічно розв'язуємо рівняння вигляду $\log_a f(x) = b$, зводячи його до рівняння $f(x) = a^b$.



Отже можна виділити такі **методи** розв'язування рівнянь логарифмічних

1) *За означенням*

2) *Метод рівносильних переходів.*

Що базується на такій теоремі [9]

Теорема 5. Нехай $a > 0, a \neq 1$. Якщо $\log_a x_1 = \log_a x_2$, то $x_1 = x_2$, і навпаки, якщо $x_1 > 0, x_2 > 0$ і $x_1 = x_2$, то $\log_a x_1 = \log_a x_2$.

Наслідок. Нехай $a > 0, a \neq 1$. Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне будь-якій із систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

3) *Перехід до логарифмів з іншою основою*

4) *Зведення до алгебраїчного рівняння з допомогою заміни введенням нової змінної*

5) *Логарифмуванням чи потенціюванням рівняння*

6) *Графічний спосіб.*

! І пам'ятаємо скрізь про область визначення функції.

Логарифмічні нерівності

Розв'язуються тими ж методами як і рівняння. Тут використовується монотонність функції $\log_a x$: зростання при $a > 1$ і спадання, якщо $0 < a < 1$.

Розв'язування багатьох логарифмічних нерівностей ґрунтується на такій теоремі.

Теорема 6. При $a > 1$ нерівність $\log_a x_1 > \log_a x_2$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 > x_2 > 0$; при $0 < a < 1$ нерівність $\log_a x_1 > \log_a x_2$ виконується тоді й тільки тоді, коли $0 < x_1 < x_2$.

Наслідок. Якщо $a > 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Похідні показникової та логарифмічної функцій

$$(e^x)' = e^x; (a^x)' = a^x \ln a \quad (\ln x)' = 1/x \quad (\log_a x)' = 1/(x \ln a).$$

Історична довідка

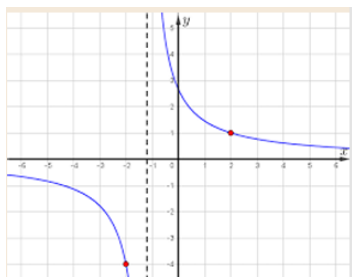
Тут варто зазначити, що логарифми появились через намагання спростити операції заміною операції множення операцією додавання $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Хоч цю ідею можна знайти ще у Початках Евкліда, але степені з раціональними показниками не були відомі тоді. Поняття логарифма ввели незалежно Бюргі (1552 – 1632) і Непер (1550 – 1617). Вони незалежно один від одного склали логарифмічні таблиці для спрощення астрономічних обчислень. Бюргі ввів логарифм за основою 10 (10-ковий логарифм), Непер – звичайний. Непер обчислив степені $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^n$ від $n=1$ до 6934250 $\left(\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{6934250} = 0.5\right)$, а його збірку таблиць можна вважати системою логарифмів з основою $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$, яка дуже мало відрізняється від $1/e$.

Неперовий логарифм у наших позначеннях визначається так

$$\text{Nep log } x = 10^7 \log_e x \frac{10^7}{x},$$

де $e \approx 2,71$.

Логарифмування у сьогодиншньому вигляді ввів Ейлер (1707 - 1783) як і натуральний логарифм.



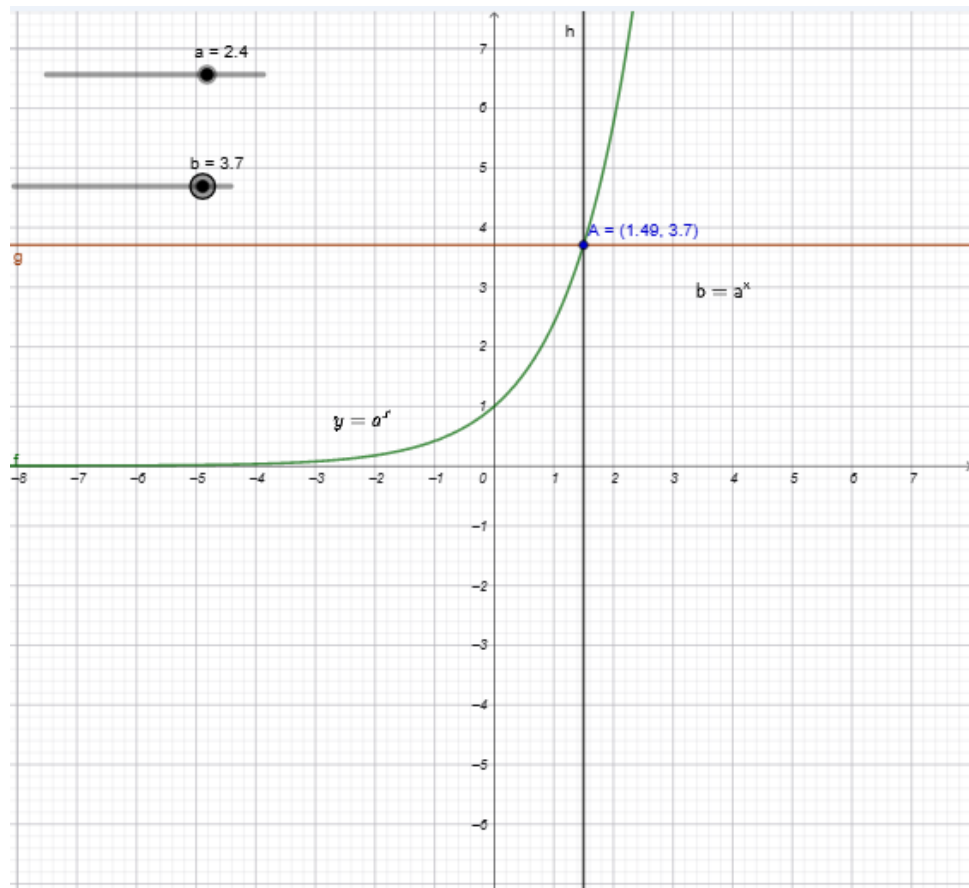
Виявилось, що місце логарифмів у математиці не обмежується розрахунковими зручностями. Так у 1629 році було доведено, що площа під гіперболою змінюється за логарифмічним законом. (Це справді так, якщо пригадати, що первісна від $1/x$ дорівнює $\ln x$, а геометричний зміст інтегралу – це площа фігури під графіком функції.)

Поява логарифмів дала поштовх до відкриття логарифмічних та інших рядів (Ньютон, Меркатор), що сприяло розвитку загальної теорії рядів.

2.2. Приклади застосування програмних засобів для вирішення основних методичних аспектів з теми «Логарифмічна функція»

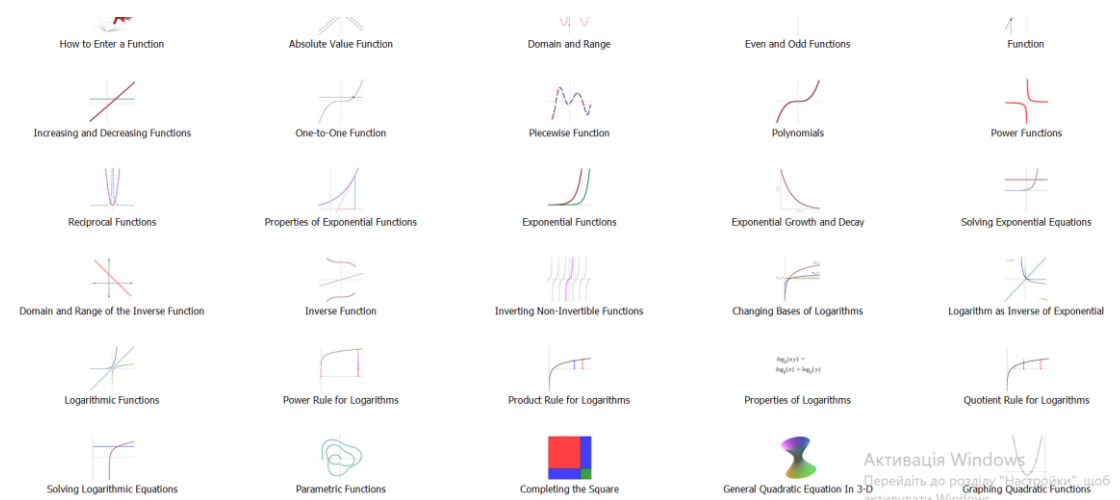
Розглянемо програмне забезпечення для вивчення теми Логарифмічна функція.

Для *демонстрації поняття логарифма* варто використати графічний калькулятор в додатку Geogebra, для відтворення Рис.4, де в динаміці, змінюючи b , бачимо як змінюється $\log_a b$.



Також для *демонстрації поняття логарифма* можна використати СКМ **Maple**.

Для цього на головній сторінці вибираємо піктограму Mathematics, потім Functions&Relations,



де бачимо різні маплети, готові пакети функцій. Ось підрозділ «Зміна основи логарифма»

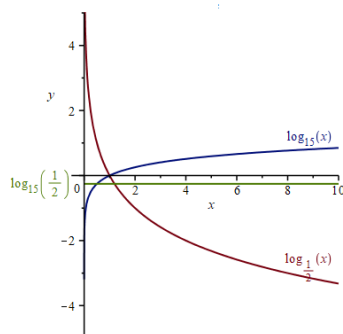
Changing Bases of Logarithms

Main Concept

Let $a, b, c > 0$ with $b, c \neq 1$. Then we have the following **change of base rule**:

$$\log_b(a) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$$

Enter two bases, b and c . Click **Show Plot** to see the graphs of $\log_b(x)$ and $\log_c(x)$ along with the ratio $\frac{\log_c(x)}{\log_b(x)} = \log_c(b)$.



$b = \frac{1}{2}$

$c = 15$

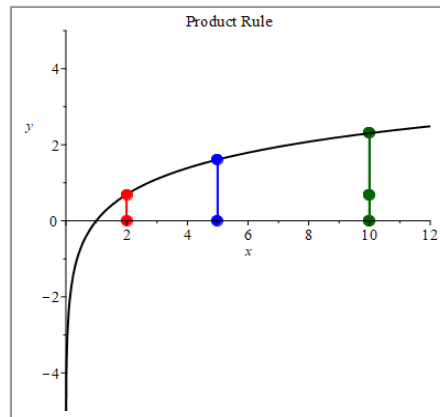
Show Plot

Для ілюстрації теорем 1 і 2, 3 і 4 (властивості логарифма добутку, частки і властивості степеня) можна використати динамічні ілюстрації **Maple**. Наприклад, маплет в динаміці показує правило добутку.

Product rule for Logarithms

Product Rule
$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$

Click the graph to choose two numbers, x_1 and x_2 . Then click **Show Product Rule** and watch how the logarithms of x_1 and x_2 add to logarithm of their product, $x_1 \cdot x_2$. Select **Integers only** to multiply only integers.



☒ Integers only

Show Product Rule

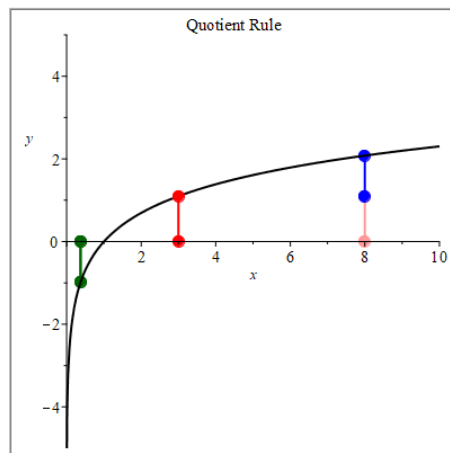
Clear

Наступні – правило частки та піднесення до степеня (натурального).

Quotient Rule for Logarithms

Quotient Rule
$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$

Click the graph to choose two numbers, x_1 and x_2 . Then click **Show Quotient Rule** and watch how the difference of the logarithms of x_1 and x_2 is logarithm of their quotient, $\frac{x_1}{x_2}$. Select **Integers only** to divide only integers.



☒ Integers only

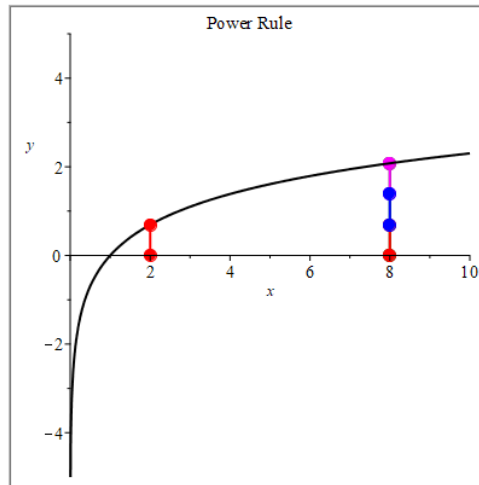
Show Quotient Rule

Clear

Power Rule for Logarithms

Power Rule
$\log_b(x^n) = n \log_b(x)$

Click to choose a number, x . Select an exponent power, n , from the drop down box. Then click **Show Power Rule** and watch how n logarithms of x equals the logarithm of the power, x^n . Select **Integers only** to exponentiate only integers.



☒ Integers only

$n = 3$ ▼

Show Power Rule

Clear

Викорисювуючи такі динамічні зображення можна запропонувати учням *самостійно сформулювати властивості логарифму.*

Серед маплетів і цій програмі також є калькулятор, у якому бракує кількох

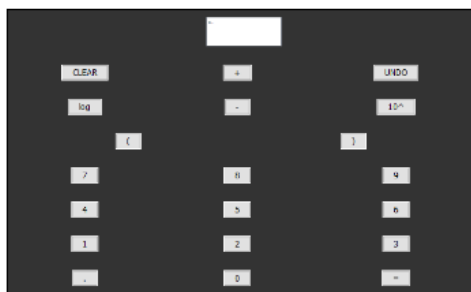
▼ Using the properties of logarithms

The calculator shown here is missing a few keys (no multiplication or division keys). Nonetheless, it is still possible to perform any arithmetic calculation involving only $+$, $-$, $\times$, or $\div$ operations. This is because the calculator has to the power ofⁿ and "logarithm base 10" keys.

Try it out. Can you compute these values?

- $4/3$
- 93123×23485
- $\frac{(5217.308 + 234.33 \times 941.226)}{177.332}$

The "log" button represents the base 10 logarithmic function. The calculator displays answers to 2 decimal places.



Активация Windows
Перейдите до розділу "Настройки", щоб
активувати Windows

клавiш (немає клавiш множення чи ділення). Тим не менш, все ще можна виконувати будь-які арифметичні обчислення, що включають лише операції $+$, $-$,

× або ÷. Це пояснюється тим, що калькулятор має клавіші «10 у степені» та «логарифм за основою 10».

Запропоновано зробити деякі вправи, використовуючи властивості логарифмів.

Це завдання власне (за ідеєю) і *формує вміння та навички використання властивостей логарифму*.

Так для вироблення навичок, а також для *оцінювання вмінь застосування властивостей* використовуємо Wayground Quizizz, наприклад з такими завданнями [9]

Зберегти

Редагувати

Призначити

Грати

11 питань

Показати варіанти відповідей

1. ЗАПОВНІТЬ ПРОПУСКИ • 30 сек • 1 пт

$\log_9 \frac{1}{81} =$

2. ЗАПОВНІТЬ ПРОПУСКИ • 1 хв • 1 пт

$\log_2 128 =$

3. ЗАПОВНІТЬ ПРОПУСКИ • 30 сек • 1 пт

$\lg 10000 =$

4. ЗАПОВНІТЬ ПРОПУСКИ • 45 сек • 1 пт

$\log_{0,2} 5 =$

5. ЗАПОВНІТЬ ПРОПУСКИ • 1,5 хв • 1 пт

$\log_{12} 16 + \log_{12} 16 =$

11 питань

Показати варіанти відповідей

6. ЗАПОВНІТЬ ПРОПУСКИ • 1 хв • 1 пт

$\log_{11} 363 - \log_{11} 3 =$

7. ЗАПОВНІТЬ ПРОПУСКИ • 20 сек • 1 пт

$7^{\log_7 24} =$

8. ЗАПОВНІТЬ ПРОПУСКИ • 2 хв • 3 балів

$\frac{\log_5 64}{\log_5 4} =$

9. ЗАПОВНІТЬ ПРОПУСКИ • 3 хв • 4 балів

$\log_{16} \log_9 81 =$

10. МНОЖИННИЙ ВИБІР • 1,5 хв • 2 балів

У яких межах знаходиться число $\log_2 9$?

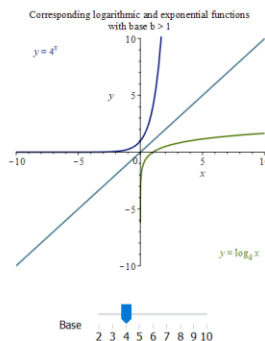
11. ЗАПОВНІТЬ ПРОПУСКИ • 5 хв • 4 балів

Якщо $\log_b a = 3$, то $\log_b (a^2 b) =$

Для введення поняття *Логарифмічна функція* можна використати різні пакети функцій, вбудовані в програму, наприклад, щоб вводити функцію можемо вибрати ось цей пакет.

▼ Explore how $\log_b(x)$ relates to b^x

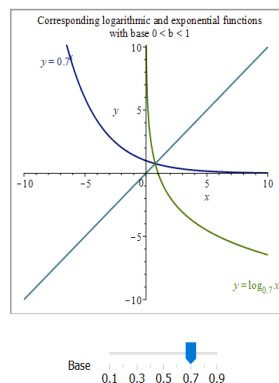
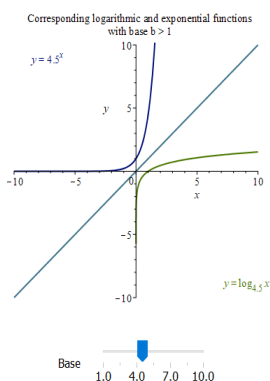
Use the slider below the graph to change the values of b . Explore the graphs of the logarithmic function $y = \log_b(x)$ and its corresponding exponential function $y = b^x$ as you vary the integer b from 2 to 10.



Тут бачимо як графічно змінюються $\log_a x$ і a^x в залежності від a (переміщуємо повзунок). Є ще подібний пакет

▼ Exploring the function $\log_b(a)$ with base greater than 1 and between 0 and 1

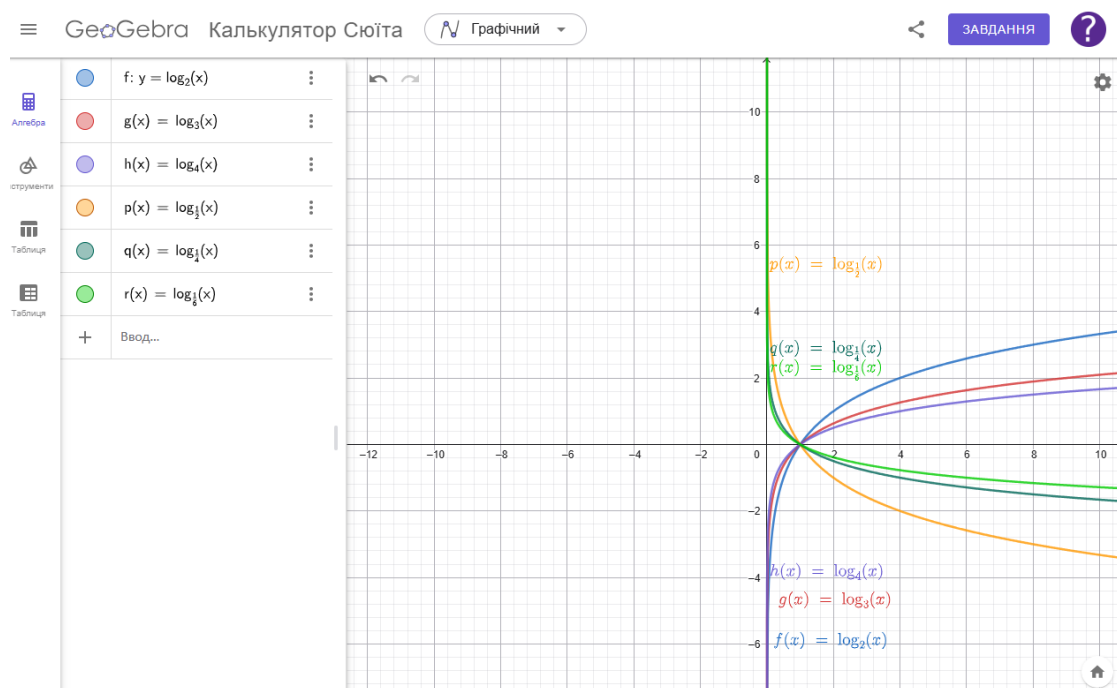
Use the sliders below the graphs to change the values of b , the base of the logarithmic function $y = \log_b(x)$ and its corresponding exponential function $y = b^x$. For the graph on the left, the base is a number greater than 1. For the graph on the right, the base is a number between 0 and 1. Note that there is no logarithmic function with base $b = 1$. Do you see why not?



де показано графіки взаємно обернених функцій.

Замість того, щоб просто читати властивості логарифмічної чи показникової функції, учні можуть самостійно будувати їх графіки в Maple, змінювати параметри і спостерігати, як це впливає на область визначення, множину значень, монотонність, асимптоти тощо. Вони *відкривають* властивості, а не завчають їх.

Додаток Geogebra використовуємо для демонстрації функції $\log_a x$. Тут можна продемонструвати як змінюється графік функції залежно від зміни параметра a основи, побудувавши кілька графіків.



Формулюємо навідні запитання до учнів: «Що спільне у цих графіків?» «Що відмінне?» «Як змінюється швидкість зростання функції із збільшенням (зменшенням) параметру a ?» «У яких випадках?» Зобразити у порівняльній таблиці для обидвох функцій.

Використання ПЗ Maple для розв'язання рівнянь і нерівностей.

Для цього в бібліотеці Maple знаходимо відповідний маплет:

«Якщо рівняння з логарифмами можна розв'язати за допомогою алгебраїчних методів, то ці методи, як правило, включатимуть правила добутку, частки та степеня логарифмів — застосовані в будь-якому напрямку — а також дослідження задачі на наявність спільних основ. Якщо рівняння можна перетворити на форму $\log_b x = y$ (тобто, використовуючи лише один логарифм), то $x = b^y$ »

Example: Solve $\log_4(x) \cdot \log_2(x^2) = 16$

Solution: First, note that by the power rule $\log_2(x^2) = 2 \log_2(x)$, so the original equation reduces to $\log_4(x) \cdot \log_2(x) = 8$. Next, using the change of base rule, we have $\log_4(x) = \frac{\log_2(x)}{\log_2(4)} = \frac{\log_2(x)}{2}$. Substituting this into $\log_4(x) \cdot \log_2(x) = 8$ and cross-multiplying by 2, we get $\log_2(x) \cdot \log_2(x) = (\log_2(x))^2 = 16$. Taking the square roots of both sides gives $\log_2(x) = \pm 4$. So, there are two solutions: $x = 2^4 = 16$ and $x = 2^{-4} = \frac{1}{16}$.

«Увага: Під час розв'язання рівнянь, що містять логарифми, дуже важливо пам'ятати, що область визначення логарифмічної функції – це додатні числа. Як ми побачимо в наведених нижче прикладах, алгебраїчні маніпуляції з виразами, що містять логарифми, можуть легко призвести до «розв'язків», які не є істинними через це обмеження області визначення. Як простий приклад, зауважимо, що область визначення функції $y = \log_3(x)^2 \in x \neq 0$, в той час як область визначення функції $y = 2 \log_3(x) \in x > 0$.

Правило добутку (2) логарифмів вимагає, щоб усі логарифми, що з'являються у формулі, були правильно визначені».

▼ Example

Suppose we want to find the solutions to this equation:

$$\log_{16}(x + 13) + \log_{16}(x - 2) = 1$$

Use the (reverse of the) product rule for logarithms:

$$\log_{16}((x + 13) \cdot (x - 2)) = 1$$

Expand the inner quadratic:

$$\log_{16}(x^2 + 11x - 26) = 1$$

Each side of the above equation is graphed to the right. The solution to the problem is their intersection. Note that since we can only take the logarithm of positive numbers, the domain of the left-hand side function is the set of all numbers satisfying both $x + 13 > 0$ and $x - 2 > 0$, or equivalently $x > -13$ and $x > 2$. This means the domain of the function $y = \log_{16}(x + 13) + \log_{16}(x - 2)$ is the set of all numbers satisfying $x > 2$.

Inverting the logarithm by raising 16 to both sides gives:

$$x^2 + 11x - 26 = 16^1$$

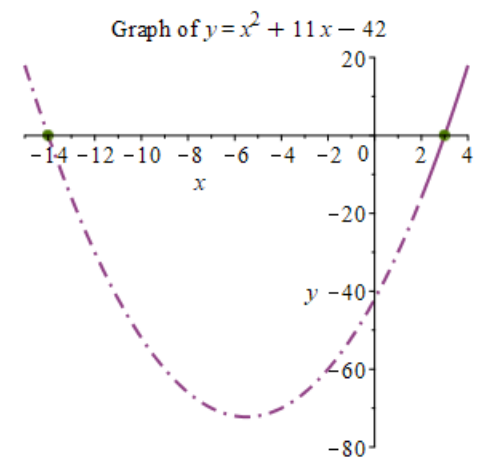
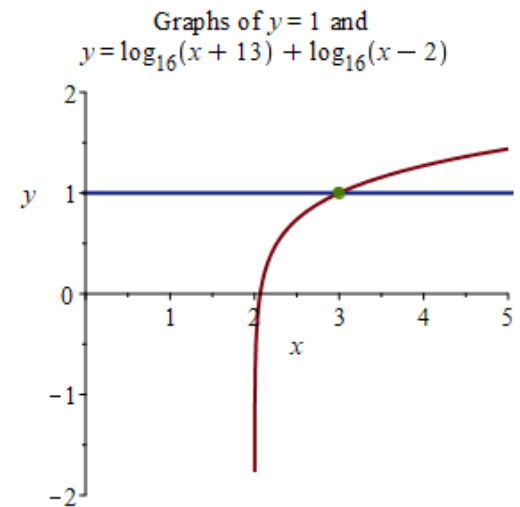
Rewrite this as:

$$x^2 + 11x - 42 = 0$$

This factors as:

$$(x + 14) \cdot (x - 3) = 0, \text{ so } x = -14 \text{ or } x = 3$$

Graphed on the right is the function $x^2 + 11x - 42$, with the two roots shown. However, due to the restrictions placed on the original equation, that is, $x > 2$, only solutions found in the solid region are valid for the original problem. So the solution to the original problem is $x = 3$.



Як бачимо, окрім розв'язання, є графічні зображення та ілюстрації розв'язань. При роботі з логарифмічними, показниковими, тригонометричними чи дробово-раціональними виразами учні можуть використовувати потужні символічні можливості Maple для спрощення. Вони можуть перевіряти свої ручні обчислення або експериментувати з різними шляхами розв'язання, миттєво отримуючи підтв

▼ Step by step Logarithmic Equation solver

Solve a logarithmic equation interactively using this step-by-step example.

Solving Logarithmic Equations

New Equation	$\log_{160}(x+9) + \log_{160}(x-18) = 1$
Simplify	$\log_{160}((x+9)(x-18))$
Exponentiate	$x^2 - 9x - 162 = 160$
Solve	$x = \{-14, 23\}$
Restrict to domain	$x = 23$

ердження чи спростування своїх гіпотез.

У Maple є маплет, яктй дозволяє розв'язувати рівняння крок за кроком. Для прикладу, щоб розв'язати рівняння $\log_{160}(x+9) + \log_{160}(x-18)=1$, задаємо у першому віконечку рівняння, потім у наступному віконечку, натиснувши клавішу «Simplify» отримуємо спрощений вираз, далі потенціюванням «Exponentiate» отримуємо алгебраїчне рівняння, яке розв'язуємо «Solve» і вибираємо те значення, яке задовольняє області визначення «Restrict to domain».

Учні можуть використовувати Maple для розв'язування складних систем рівнянь чи нерівностей, які важко або неможливо розв'язати вручну. Це дозволяє зосередитися на *аналізі результату та сферах застосування* цих рівнянь (наприклад, у фізичних чи економічних задачах), а не на рутинних обчисленнях.

Використовуючи мову програмування Maple, учні можуть створювати власні невеликі програми (маплети) для візуалізації математичних концепцій або автоматизації певних обчислень. Це розвиває алгоритмічне мислення та навички програмування.

Використання логарифмів на практиці і логарифмічна шкала

Процес задовольнятиме логарифмічну модель, якщо його розвиток обернено пропорційний його поточному стану. Неформально, логарифмічні процеси демонструють швидке зростання, коли вони малі, і повільне зростання, коли вони великі.

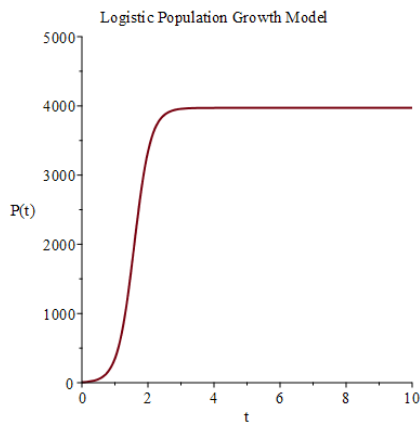
Мальтузіанська модель населення, по суті, є моделлю експоненціального зростання, що переривається періодичними катастрофічними колапсами. Це розумна модель у короткостроковій перспективі, але зазвичай не дуже добре моделює довгострокове зростання населення.

Деяко реалістичнішою моделлю є логістична модель зростання. У цій моделі зростання спочатку є експоненціальним, але оскільки ресурси стають дефіцитними, темпи зростання неухильно зменшуються, коли загальна чисельність населення наближається до максимального сталого значення, яке називається несучою здатністю середовища, в якому живе популяція; поведінка стає більш логарифмічною, коли популяція наближається до несучої здатності.

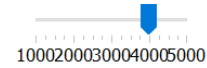
Рівняння для логістичної моделі має вигляд: $P(t) = \frac{P_0 K}{P_0 + (K - P_0)e^{-rt}}$, K, P_0, r – несуча здатність, початкова популяція та темпи зростання відповідно, а t – час.

Використовуючи повзунки нижче, змінюємо значення величин і спостерігаємо, як модель зростання популяції змінюється протягом десяти періодів часу.

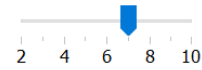
Графік праворуч показує оціночну загальну чисельність населення за останні 2000 років та прогноз до 2060 року. Вертикальна шкала логарифмічна, а крива все ще загалом вигинається вгору. Це свідчить про те, що насправді зростання населення є надекспоненціальним, швидшим, ніж експоненціальним.



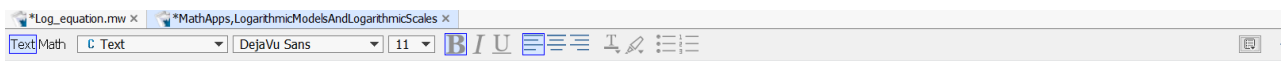
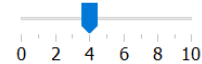
Carrying Capacity, K :



Initial Population, P_0 :



Rate of growth, r :



Logarithmic Models and Logarithmic Scales

Logarithmic Models

A process is likely to satisfy a **logarithmic model** if how it evolves is inversely proportional to its current state. Informally, logarithmic processes exhibit rapid growth when they are small and slow growth when they are large.

► More

▼ The Malthusian population model

The Malthusian population model is essentially one of exponential growth punctuated by periodic catastrophic collapse. It is a reasonable model over the short term, but does not usually do a good job of modeling long term population growth.

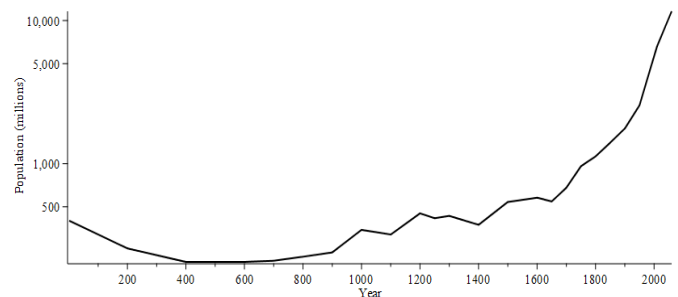
A somewhat more realistic model is the *logistic growth model*. In this model, growth is initially exponential, but as resources become scarce, the growth rate steadily decreases as the total population approaches the maximum sustainable value, called the *carrying capacity* of the environment in which the population lives; the behavior is more logarithmic as the population approaches the carrying capacity. The equation

for the logistic model is $P(t) = \frac{P_0 K}{P_0 + (K - P_0)e^{-r \cdot t}}$, where K , P_0 , r are carrying capacity, initial population, and growth rate, respectively, and t represents time.

Use the sliders below to choose the carrying capacity, K , the initial population, P_0 , and the rate of growth, r , and observe how the population growth model varies over ten time periods.

The graph at the right shows estimated total human population for the past 2000 years, and projected forward to 2060. The vertical scale is logarithmic, and the curve still generally curves upward. This suggests that in fact human population growth is *super-exponential*, faster than exponential.

However, current United Nations estimates indicate that the growth rate peaked in the 1980s and project that the population growth rate will continue to decline in the near future. ^[2]



Human population from 1 A.D. through 2060 A.D. (estimates and projections) ^[1]

Висновок. Отже при вивченні теми «Логарифмічна функція та її властивості» використовуючи програмне забезпечення Maple чи GeoGebra можна застосувати *евристичний* чи, навіть, *дослідницький метод* формування знань.

Де в природі бачимо логарифмічну залежність

Логарифми в природі



Раковини молюсків і равликів завиті у вигляді логарифмічної спіралі



Ріст раковин здійснюється лише по логарифмічній спіралі або її аналогам.



Роги архарів, дзьоби папуг також зігнуті по логарифмічній спіралі.



В соняшнику насіння розміщено по логарифмічній спіралі



У деяких павуків павутина сплетена по логарифмічній спіралі



- Яскравість зірок оцінюють за логарифмічною шкалою з основою 2,5.



- А величини зірок є логарифмами їх яскравості.

Логарифми в музиці



Музиканти самі того не підозрюють, як часто вони зустрічаються з логарифмами. Виявляється, що ступені хроматичної гами (12-звукової) є логарифмами з основою 2.

ВИСНОВКИ

- ✓ У випусковій роботі охарактеризовано певні зразки програмних засобів з урахуванням методичних аспектів та дидактичних цілей, які вони досягають, зокрема при вивченні теми «Логарифмічна функція та її властивості».
- ✓ Підібрано пакети ілюстрацій (статичних та динамічних) та тренувальних вправ в застосунках Geogebra, Maple, Wayground Quiz для формування поняття логарифма та логарифмічної функції, вироблення вмінь та навичок виконання дій з логарифмами.
- ✓ Наведено історичну довідку, а також напрямки використання на практиці моделей логарифмічної та показникової залежностей і приклади їх у природі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Кларін МБ. Інновації у світовій педагогіці. - М., 1998. -180с.
2. Р.С. Гуревич, М.Ю. Кадемія, Л.С. Шевченко, Інформаційні технології навчання: інноваційний підхід : навчальний посібник. – Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2012. – 348 с.
3. Черкасова Т.О. Методи навчання математики в структурі уроків критичного мислення як шлях до формування компетентності учнів, 2015, інтернет ресурс https://t-cherkasova.blogspot.com/2015/02/blog-post_28.html
4. Юнчик В. Л. Модель змішаного навчання математики з використанням системи GeoGebra // Додаток 1 до : Темат. вип. “Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору”. К.: Гнозис, (2015) Вип. 36, **64**, 559–568.
5. Требенко Д.Я., Требенко О.О. Використання системи комп’ютерної алгебри Maple при вивченні курсу „Алгебра і теорія чисел”.– К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2014.– 532 с.
6. Васильєва Д. В., Курвитс М.В. Сучасні програмні засоби навчання, Комп’ютер у школі та сім’ї, 2017, №6, 6 – 10.
7. Навчальна програма з математики (Алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту <https://osvita.ua/school/program/program-10-11/58878/>
8. Навчальна програма з математики (Алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень <https://osvita.ua/school/program/program-10-11/58878/>
9. А. Г. Мерзляк. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на по глиб. рівні з 8 кл. : проф. рівень : підруч. для 11 кл. — Х. : Гімназія, 2019. — 304 с.
10. Т. Г. Крамаренко, В. В. Корольський, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк, Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики: навч. посіб. Кривий Ріг, 2019. – 444 с.