Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

завідувач кафедри математики та економіки,

кандидат пед. наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК

«__» _____ 2025 р.

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРАМИ

Спеціальність 014 «Середня освіта (за предметними спеціальностями)»
Предметна спеціальність: 014.04 «Середня освіта (Математика)»
Додаткова предметна спеціальність: 014.09 «Середня освіта (Інформатика)»

Магістерська робота
на здобуття кваліфікації – магістр середньої освіти. Вчитель математики, вчитель інформатики.

Автор роботи: Сюшко Христина Василівна _____

підпис

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук,

доцент Хаць Руслан Васильович _____

підпис

Дрогобич, 2025

Захист магістерської роботи

Методичні особливості навчання учнів розв’язування логарифмічних рівнянь і нерівностей з параметрами

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____ Голова ЕК _____ _____

Дата підпис прізвище, ім’я

Секретар ЕК _____ _____

підпис прізвище, ім’я

Анотація

Сюшко Х.В. *Методичні особливості навчання учнів розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей з параметрами*. – Рукопис. – 69 с.

Розглянуто методичні особливості навчання учнів розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей з параметрами. Систематизовано методи розв'язання логарифмічних рівнянь та нерівностей з параметрами різної складності. Розроблено систему вправ і завдань для самостійної роботи учнів.

Ключові слова і фрази: логарифм, логарифмічна функція, рівняння з параметрами, нерівності з параметрами, методи розв'язування.

Annotation

Syushko Kh.V. *Methodological peculiarities of teaching pupils to solve logarithmic equations and inequalities with parameters.* – Manuscript. – 69 p.

Methodological peculiarities of teaching pupils to solve logarithmic equations and inequalities with parameters are considered. The methods for solving of logarithmic equations and inequalities with parameters of different complexity are systematized. A system of exercises and tasks for individual work of pupils has been developed.

Key words and phrases: logarithm, logarithmic function, equations with parameters, inequalities with parameters, methods of solving.

Зміст

Анотація..……..……..……... 3

Вступ…….…..... 5

Розділ 1. Основні відомості про логарифмічні рівняння і нерівності……. 8

1.1. Логарифм і його властивості…….……..…..…… 8

1.2. Логарифмічна функція, її властивості та графік…….……... 8

1.3. Логарифмічні рівняння…….……. 9

1.4. Логарифмічні нерівності…….……... 11

Розділ 2. Методи розв’язування логарифмічних рівнянь і нерівностей з параметрами..…….……..…….……..…… 14

2.1. Аналітичний метод…….……..……..…… 15

2.2. Метод заміни…….……..……..…… 33

2.3. Графічний метод…….……..……..…… 43

Розділ 3. Задачі для самостійного розв’язування…….……..…… 57

3.1. Логарифмічні рівняння з параметрами…… 57

3.2. Логарифмічні нерівності з параметрами……..… 62

Висновки…… 66

Список використаних джерел…….. 68

Вступ

Актуальність теми. Математичні задачі з параметром належать до одних із найбільш складних у шкільному курсі математики. Здатність їх розв'язувати є важливим критерієм високої математичної компетентності та культури учнів, позаяк свідчить про добре засвоєння теоретичних основ і вміння застосовувати знання в нестандартних ситуаціях [2, 15, 22, 26-28]. Однак розв'язування задач з параметрами викликає значні труднощі, адже це питання не є частиною основного шкільного курсу, а вивчається здебільшого на факультативних заняттях або в гуртках.

Логарифмічні рівняння та нерівності з параметрами мають важливе значення для розвитку логічного мислення та математичної культури учнів, проте більшість школярів загальноосвітніх шкіл (окрім тих, хто поглиблено вивчає математику) стикаються з труднощами під час підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) чи національного мультипредметного тесту (НМТ) [2, 5, 8, 10, 20-22, 26-28]. Це пояснюється тим, що будь-яке рівняння з параметром містить в собі цілий вид звичайних рівнянь, кожне з яких може мати розв'язок. Проте, шкільна програма з математики не передбачає вивчення стійких навичок розв'язування таких задач, а тому доцільно звертатися до них на факультативних заняттях [2, 3, 13, 15, 23, 26-28].

Задачі з параметрами – це завдання, що містять фіксовані, але невідомі числа. Залежно від значень параметрів, може змінюватися як вигляд, так і характер задачі, а отже – і методи її розв'язування [1, 4, 7, 18, 19, 24].

Розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей з параметрами дозволяє глибоко перевірити рівень знань основних розділів шкільної математики, оцінити логічне мислення учнів і їхні початкові навички дослідницької діяльності. Це також є важливим інструментом для реалізації наступності навчання між школою та закладами вищої освіти. Проблеми, з якими стикаються старшокласники при розв'язуванні таких рівнянь, виникають через складність задач і недостатню увагу до них у шкільному курсі [6-10, 11, 14, 16-18].

Розв’язування таких задач вимагає високої ретельності й глибокого аналізу. У процесі цього учні ознайомлюються з різноманітними евристичними методами загального та спеціального характеру.

Отже, проблема формування і розвитку проблемно-пошукових умінь та навичок учнів у процесі розв’язування логарифмічних рівнянь та нерівностей з параметрами є надзвичайно важливою і актуальною, особливо в умовах нової парадигми освіти [1-10, 11, 14, 16-18]. Її важливість підтверджують завдання з цього напрямку, які часто зустрічаються на шкільних олімпіадах, конкурсах та інших заходах.

Метою магістерської роботи є аналіз і розробка методичних підходів до навчання учнів розв’язуванню логарифмічних рівнянь і нерівностей з параметрами. Магістерська робота покликана навчити учнів розв’язувати такі задачі з параметрами різних типів, звернути увагу на методичні особливості, що при цьому виникають для кожного типу задач та навчити новим прийомам розв’язання.

Об’єктом дослідження є логарифмічні рівняння і нерівності з параметрами.

Предметом дослідження є розв’язування логарифмічних рівнянь та нерівностей з параметрами різними методами за рівнями складності в старшій школі.

Задачі дослідження: провести загальний аналіз дослідження задач розв’язування логарифмічних рівнянь й нерівностей з параметрами; виділити методи розв’язування такого виду задач; розробити програму факультативних занять з даної проблематики та завдання для самостійної роботи.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що систематизовано, уточнено й поглиблено методичні засади навчання учнів розв’язування логарифмічних рівнянь і нерівностей з параметрами, зокрема визначено специфічні труднощі, які виникають у старшокласників під час роботи з логарифмічними виразами, та обґрунтовано ефективні шляхи їх подолання. Проведено детальну класифікацію методів розв’язування рівнянь та нерівностей з параметрами, що дозволяє чітко розрізняти ефективні стратегії

для різних типів задач. Удосконалено підхід до формування в учнів умінь досліджувати область визначення та аналізувати логарифмічні рівняння і нерівності в умовах наявності параметра через поєднання графічних, аналітичних та функціонально-орієнтованих методів. Окрім того, створено різнорівневу систему вправ для самостійної роботи учнів, яка дає можливість поступово вивчати матеріал та удосконалювати навички розв'язування задач, що сприяє більш глибокому засвоєнню теми.

Практичне значення одержаних результатів. Результати магістерської роботи мають теоретичний характер. Вони дозволяють згрупувати і систематизувати дидактичний матеріал відповідно до діючої програми, здійснити нові підходи до побудови процесу навчання, зокрема при вивченні логарифмічних рівнянь та нерівностей з параметрами, розробити ефективні навчальні матеріали, які сприяють кращому розумінню учнями складних математичних концепцій; можуть знайти використання на факультативних заняттях в старших класах середньої школи, ліцеях та гімназій із поглибленим вивченням математики. Окрім того, результати роботи можуть допомогти підвищити рівень підготовки учнів до ЗНО чи НМТ.

Апробація результатів магістерської роботи. Результати досліджень викладено у доповіді на XII-й міжнародній науково-практичній конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій [29].

Структура і обсяг роботи. Магістерська робота складається з анотації, вступу, трьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел, який налічує 29 найменувань. Повний обсяг магістерської роботи становить 69 сторінок.

Розділ 1. Основні відомості про логарифмічні рівняння і нерівності

1.1. Логарифм і його властивості

Логарифмом числа $b>0$ за основою a, $a>0$, $a\neq 1$, називають показник степеня, до якого потрібно піднести a, щоб отримати b. Записують це так $\log_a b$. *Основна логарифмічна тотожність*: $a^{\log_a b}=b$, $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$.

Властивості логарифма [10, с. 315-316]:

1. $\log_a a=1$, $a\neq 1$, $a>0$.
2. $\log_a 1=0$, $a\neq 1$, $a>0$.
3. $\log_a (bc)=\log_a b+\log_a c$, $a\neq 1$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.
4. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$, $a\neq 1$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.
5. $\log_a b^p=p\log_a b$, $a\neq 1$, $a>0$, $b>0$.
6. $\log_{a^q} b=\frac{1}{q}\log_a b$, $a\neq 1$, $b>0$, $a>0$, $q\neq 0$.
7. $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$, $a\neq 1$, $c\neq 1$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.
8. $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$, $a\neq 1$, $b\neq 1$, $a>0$, $b>0$.

Формула $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$ дозволяє переходити від однієї основи до іншої.

1.2. Логарифмічна функція, її властивості та графік

Логарифмічна функція – це функція виду $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$.

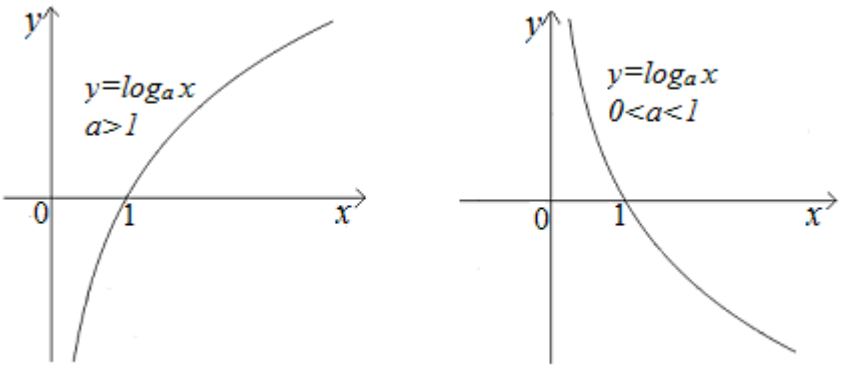


Рис 1.1

Властивості функції $y=\log_a x$ [10, с. 316-317]:

1. Область визначення: $D(y)=(0;+\infty)$. Вираз, який логарифмується, − додатний. Графік не перетинає вісь Oy.

2. Множина значень: $E(y)=\mathbb{R}$.

3. При $x=1$ логарифмічна функція $y=\log_a x$ набуває значення, яке дорівнює 0. Графік перетинає вісь Ox в точці $(1;0)$.

4. Якщо $a>1$, то функція $y=\log_a x$ − зростаюча; більшому значенню аргументу відповідає більший логарифм; якщо $0<x<1$, то $\log_a x<0$; якщо ж $x>1$, то $\log_a x>0$. Логарифми чисел, більших від 1, додатні. Логарифми чисел, менших від 1, від'ємні.

5. Якщо $0<a<1$, то функція $y=\log_a x$ − спадна; більшому значенню аргументу відповідає менший логарифм; якщо $0<x<1$, то $\log_a x>0$; якщо $x>1$, то $\log_a x<0$. Логарифми чисел, більших від 1, від'ємні. Логарифми чисел, менших від 1, додатні.

6. З рівності логарифмів за однією основою двох чисел випливає рівність самих чисел $\log_a x=\log_a y \Rightarrow x=y$, $a>0$, $a\neq 1$.

1.3. Логарифмічні рівняння

Рівняння

$$\log_a f(x)=\log_b \varphi(x), \tag{1.1}$$

де $a>0$ $(a\neq 1)$, $b>0$ $(b\neq 1)$, називається [10, с. 318] елементарним *логарифмічним рівнянням*. Область допустимих значень (ОДЗ) цього рівняння знаходиться за допомогою системи:

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ \varphi(x)>0. \end{cases}$$

При $a=b$ ми отримуємо рівняння $f(x)=\varphi(x)$, рівносильне рівнянню (1.1) (в області допустимих значень). Якщо $a\neq b$, то розв'язання рівняння (1.1) зводиться до еквівалентного рівняння

$$\log_a f(x)=\frac{1}{\log_a b}\log_a \varphi(x),$$

яке рівносильне рівнянню

$$\left(f(x)\right)^{\log_a b} = \varphi(x).$$

В цьому випадку використана формула $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, де $x>0$, $a>0$ $(a\neq 1)$, $b>0$ $(b\neq 1)$.

Розв'зування логарифмічних рівнянь базується на означенні логарифма, властивостях логарифмів та логарифмічної функції. При розв'язуванні логарифмічних рівнянь використовують [4, 6, 7, 10, 14-19] логарифмічні тотожності, логарифмування обох частин рівняння, потенціювання, зведення до однієї основи, метод заміни змінної, монотонність функцій під знаком логарифма.

Відшукання розв'язків логарифмічних рівнянь зводиться до розв'язання системи рівнянь і нерівностей. Розглянемо декілька випадків [1-28]:

1) $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b,\ a>0,\ a\neq 1.$

2) $\log_{f(x)} g(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)^b = g(x), \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

3) $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0; \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

4) $\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = h(x), \\ g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1; \end{cases}$ або $\begin{cases} g(x) = h(x), \\ h(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$

5) $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a\left(f(x)g(x)\right) = \log_a h(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$

6) $\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a \dfrac{f(x)}{g(x)} = \log_a h(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$

7) $n\log_a f(x)=\log_a h(x) \Leftrightarrow \begin{cases}\log_a f(x)^n=\log_a h(x),\\ f(x)>0,\\ h(x)>0.\end{cases}$

1.4. Логарифмічні нерівності

Кожну з нерівностей виду

$$\log_a f(x)>\log_a \varphi(x),\ \log_a f(x)<\log_a \varphi(x),$$

$$\log_a f(x)\ge\log_a \varphi(x),\ \log_a f(x)\le\log_a \varphi(x)\ (a>0,\ a\ne 1),$$

називатимемо елементарними *логарифмічними нерівностями*.

Нерівність

$$\log_a f(x)>\log_a \varphi(x) \tag{1.2}$$

рівносильна системі

$$f(x)>\varphi(x)>0, \tag{1.3}$$

якщо $a>1$, системі

$$0<f(x)<\varphi(x) \tag{1.4}$$

якщо $0<a<1$.

Справді, нехай $a>1$ і x_1 – один з розв'язків нерівності (1.2). Тоді $\log_a f(x_1)>\log_a \varphi(x_1)$. Тому $f(x_1)>0$ і $\varphi(x_1)>0$. Отже, $a^{\log_a f(x_1)}>a^{\log_a \varphi(x_1)}$, звідки $f(x_1)>\varphi(x_1)>0$. Таким чином, x_1 є частинним розв'язком системи (1.3).

Тепер встановимо істинність оберненого твердження.

Якщо $f(x_1)>\varphi(x_1)>0$, то числа $\log_a f(x_1)$ і $\log_a \varphi(x_1)$ мають зміст. Оскільки $f(x_1)=a^{\log_a f(x_1)}$ і $\varphi(x_1)=a^{\log_a \varphi(x_1)}$, то $a^{\log_a f(x_1)}>a^{\log_a \varphi(x_1)}$, а звідси випливає, що $\log_a f(x_1)>\log_a \varphi(x_1)$.

Аналогічне доведення у випадку $0<a<1$. Тим самим способом можна показати, що нерівність $\log_a f(x)<\log_a \varphi(x)$ рівносильна системі $0<f(x)<\varphi(x)$ при $a>1$ і системі $f(x)>\varphi(x)>0$, якщо $0<a<1$.

Для розв'язання логарифмічних нерівностей використовують наступні прийоми [17]: а) врахування ОДЗ, рівносильні перетворення і застосування

логарифмічних тотожностей; б) заміна вихідної нерівності рівносильною системою нерівностей; в) заміна змінної в початковій нерівності.

Крім того, під час розв'язування логарифмічних нерівностей застосовують способи і прийоми, аналогічні до розв'язування логарифмічних рівнянь.

При розв'язуванні логарифмічних нерівностей потрібно знати [17]: загальні властивості нерівностей, область визначення логарифмічної функції та її монотонність.

Розглянемо кілька можливих випадків логарифмічних нерівностей та способи їх розв'язання [1-28]:

1) $\log_a f(x) > b \Leftrightarrow f(x) > a^b,\ a > 1;$

2) $\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < a^b, \\ f(x) > 0, \end{cases} 0 < a < 1;$

3) $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < a^b, \\ f(x) > 0, \end{cases} a > 1;$

4) $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow f(x) > a^b,\ 0 < a < 1;$

5) $\log_{g(x)} f(x) > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > 1, \\ f(x) > g(x)^b, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < g(x) < 1, \\ f(x) < g(x)^b, \\ f(x) > 0; \end{cases} \end{array}\right.$

6) $\log_{g(x)} f(x) < b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > 1, \\ f(x) < g(x)^b, \\ f(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < g(x) < 1, \\ f(x) > g(x)^b; \end{cases} \end{array}\right.$

7) $\log_a f(x) > \log_a h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > h(x), \\ h(x) > 0, \end{cases} a > 1;$

8) $\log_a f(x) > \log_a h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < h(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} 0 < a < 1;$

9) $\log_a f(x) < \log_a h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < h(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} a > 1;$

10) $\log_a f(x) < \log_a h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > h(x), \\ h(x) > 0, \end{cases} 0 < a < 1;$

11) $\log_{g(x)} f(x) < \log_{g(x)} h(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > 1, \\ f(x) < h(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < g(x) < 1, \\ f(x) > h(x), \\ g(x) > 0; \end{cases} \end{array}\right.$

12) $\log_{g(x)} f(x) > \log_{g(x)} h(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > 1, \\ f(x) > h(x), \\ h(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < g(x) < 1, \\ f(x) < h(x), \\ f(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Розділ 2. Методи розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей з параметрами

Задачі з параметрами – це різновид математичного рівняння, нерівності або системи рівнянь та нерівностей, які окрім невідомої змінної x містять ще одну змінну, яку, як правило, позначають буквою a і називають параметром. Ця змінна має особливу роль: вона може набувати будь-яких значень, але вважається відомою. У зв'язку з цим, як правило, виникає ситуація, де у випадку, коли параметр набуває деяких особливих значень (залежно від конкретної задачі) не може бути використаний загальний підхід до розв'язання (наприклад, якщо виконується ділення на вираз, що дорівнює нулю). Для того, щоб отримати відповідь, в кожному з таких випадків замість довільного значення параметра підставляють це особливе значення і розв'язують задачу, що вже містить тільки невідому змінну. Для тих значень змінної, які не є особливими, розглядають загальне розв'язання, яке дає у якості відповіді значення невідомої змінної, що є функцією від параметра при розв'язанні рівняння, або інтервал, якому належить змінна, і границі якого є функціями від параметра у випадку розв'язання нерівності. В якості відповіді в задачах з параметрами для кожного значення параметра (якщо в умові не вказано інше) подається відповідна форма розв'язку.

Задачі з параметрами можна умовно поділити на два типи. Перші, в яких треба розв'язати задачу деякого типу з тих, що вивчаються в шкільній програмі. Для розв'язання таких задач використовуються [1, 4, 7, 18, 19, 24] ті самі підходи, що і до розв'язання задач, які не містять параметр, за умовою окремого розгляду особливих значень. До другого типу задач з параметрами відносяться ті, в яких на невідому змінну накладають певні умови та вимагають знайти ті значення параметра, за яких ці умови виконуються. В цих задачах у відповідь писати значення самої змінної не треба, треба тільки вказати відповідні значення параметра. Як правило, в задачах такого типу не треба знаходити розв'язок, а треба використати деякий метод, який не застосовувався до розв'язання задач без параметра. До задач такого типу використовується

графічний метод.

Розглянемо основні ситуації, які виникають при розв'язанні рівнянь з параметрами [1, 4, 7, 18, 19, 24]: 1) знаходження розв'язку рівняння за будь-якого значення параметра; 2) визначення тих значень параметра, за яких рівняння має принаймні один розв'язок; 3) встановлення значень параметра, за яких кількість розв'язків рівняння є скінченною; 4) встановлення таких значень параметра, за яких розв'язки рівняння задовольняють додаткові умови.

До основних методів розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей з параметрами належать [1, 4, 7, 18, 19, 24]: аналітичний (алгебраїчний), заміни та графічний.

Ці основні методи допомагають систематизувати підхід до розв'язування рівнянь з параметрами та визначити найефективніші стратегії в кожному конкретному випадку.

Отже, спочатку перед розв'язуванням задач з параметрами, потрібно досконало оволодіти загальними методами розв'язання логарифмічних рівнянь і нерівностей, які не містять параметри. На наступному етапі, можна переходити до аналізу різних методів розв'язання логарифмічних рівнянь і нерівностей з параметрами, які детально будуть розглянуті в магістерській роботі.

2.1. Аналітичний метод

Розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей передбачає глибокі знання з багатьох розділів алгебри. При цьому, потрібно вдало використовувати властивості логарифмів, виконувати дії логарифмування та потенціювання; знаходити ОДЗ змінної та параметрів рівняння; знайти аналітичний вираз змінної через параметри; для всіх значень параметра, що входять у область допустимих значень або певного співвідношення між параметрами знаходити множину всіх розв'язків даного рівняння; проаналізувати ті особливі значення параметра, за яких розв'язки рівняння існують, але не виражаються через отримані формули.

Важливо зазначити, що властивості логарифмічної функції залежать від значення основи: функція $y = \log_a x$ є монотонно зростаючою на ОДЗ, коли

$a>1$, і спадною, якщо $0<a<1$. Слід також не забувати про область визначення логарифмічної функції.

В основі аналітичного методу розв'язування задач з параметрами є використання властивостей елементарних функцій та виконання рівносильних перетворень над рівняннями й нерівностями. Подібний прийом дозволяє звести довільне рівняння чи нерівність до найпростішого, що значно полегшує відшукання його розв'язків [1, 4, 7, 18, 19, 24].

Розглянемо суть аналітичного методу на конкретних прикладах з детальним розв'язанням.

Приклад 2.1. *Розв'яжемо відносно* x *рівняння* $\log_{ax}(x-2a)=2$.

Розв'язання. Задане рівняння еквівалетне такій системі:

$$\begin{cases} x-2a=(ax)^2, \\ ax>0, \\ ax\neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2x^2-x+2a=0, \\ ax>0, \\ ax\neq 1. \end{cases}$$

Рівняння $a^2x^2-x+2a=0$ в залежності від параметра a буде мати такі розв'язки: а) $x\in\varnothing$, якщо $a>\frac{1}{2}$; б) $x=2$, якщо $a=\frac{1}{2}$; в) $x_1=\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a^2}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{1-8a^3}}{2a^2}$, якщо $a<1/2$, $a\neq 0$; г) $x=0$, якщо $a=0$. У випадках а), б) і г) вихідне рівняння розв'язків не має. Розглянемо випадок в). Якщо $a\in(0;1/2)$, то умову $ax>0$ задовольняють обидва корені x_1 та x_2. Якщо $a<0$, то цю умову задовольняє лише корінь x_1. Розв'яжемо рівняння $ax_1=1$ і $ax_2=1$ при $a<1/2$, $a\neq 0$. Отримаємо:

$$ax_1=1,\ a\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a^2}=1,\ 1-\sqrt{1-8a^3}=2a,\ 1-8a^3=(1-2a)^2,\ a(2a^2+a-1)=0,$$

звідки $a=0;\frac{1}{2};-1$. Умову $a<1/2$ і $a\neq 0$ задовольняє значення $a=-1$. Аналогічно переконуємося, що рівняння $ax_2=1$ виконується, якщо $a=1/2$.

Відповідь: $x=\frac{1\pm\sqrt{1-8a^3}}{2a^2}$, якщо $a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$; $x=\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a^2}$, якщо $a<0$, $a\neq -1$; $x\in\varnothing$, якщо $a=-1;0, a\geq 1/2$.

Приклад 2.2. *Розв'яжемо відносно* x *рівняння*

$$\log_2(x^2-2ax)=\log_2(2x-4a).$$

Розв'язання. Задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2-2ax=2x-4a, \\ 2x-4a>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2(a+1)x+4a=0, \\ x>2a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=2a, \end{array}\right. \\ x>2a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ x>2a. \end{cases}$$

Якщо $a<1$, то $x=2$ є коренем рівняння. У випадку $a\geq 1$, рівняння не має розв'язків.

Відповідь: $x=2$, якщо $a<1$; $x\in\varnothing$, якщо $a\geq 1$.

Приклад 2.3 [10, с. 323]. *Розв'яжемо рівняння* $\lg(x-a)-\lg 2=\frac{1}{2}\lg(x-b)$.

Розв'язання. ОДЗ: $\begin{cases} x>a, \\ x>b. \end{cases}$

З огляду на це, запишемо еквівалентне рівняння:

$$\lg\frac{x-a}{2}=\lg\sqrt{x-b} \;\Leftrightarrow\; x-a=2\sqrt{x-b}\,. \tag{2.1}$$

При $a=b$ воно прийме вигляд:

$$x-a=2\sqrt{x-a} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x-a}\left(\sqrt{x-a}-2\right)=0\,. \tag{2.2}$$

Позаяк $\sqrt{x-a}\neq 0$, то (2.2) рівносильне рівнянню $\sqrt{x-a}=2$, звідки $x=a+4$.

Розглянемо тепер випадок $a\neq b$. Піднесемо до квадрату обидві частини рівняння (2.1):

$$x^2-2(a+2)x+a^2+4b=0 \;\Rightarrow\; \frac{D}{4}=4(a-b+1)\,.$$

При $D=0$, тобто при $a=b-1$, отримаємо $x_1=x_2=a+2$. При $D>0$, тобто при $a>b-1$, квадратне рівняння має два різні корені: $x_1=a+2-2\sqrt{a-b+1}$ та $x_2=a+2+2\sqrt{a-b+1}$. Тепер необхідно знайти такі значення a і b, при яких x_1 і x_2 задовольняють умові $x>a$ (умова $x>b$ виконується, бо x_1 і x_2 – корені рівняння $(x-a)^2=4(x-b)$). Для цього введемо позначення:

$$f(x)=x^2-2(a+2)x+a^2+4b \;\Rightarrow\; f(a)=4(b-a)\,.$$

При $b-1<a<b$, маємо $a<b<x_1<x_2$. Тому, x_1 і x_2 – корені початкового рівняння. Якщо $a>b$, то $f(a)<0$. Отже, $b<x_1<a<x_2$, тобто умові $x>a$ задовольняє x_2.

Відповідь: якщо $a=b$, то $x=a+4$; якщо $b-1\le a<b$, то $x=a+2\pm 2\sqrt{a-b+1}$; якщо $a>b$, то $x=a+2+2\sqrt{a-b+1}$; якщо $a<b-1$ розв'язків немає.

Приклад 2.4 [10, с. 322]. *Розв'яжемо рівняння* $\log_a x^2+2\log_a(x+2)=1$.

Розв'язання. Рівняння має сенс, якщо $a>0$, $a\ne 1$. ОДЗ: $x\in(-2;0)\cup(0;+\infty)$. Врахувавши ОДЗ, дане рівняння еквівалентне рівнянню:

$$\left(2\log_a|x|+2\log_a(x+2)=1\right)\Leftrightarrow\left(\log_a|x|(x+2)=\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\left(|x|(x+2)=\sqrt{a}\right).$$

Останнє рівносильне сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2<x<0,\\ -x(x+2)=\sqrt{a},\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\ x(x+2)=\sqrt{a},\end{cases}\end{array}\right.$$

розв'язавши які знаходимо x:

$$1)\ \begin{cases}-2<x<0,\\ -x(x+2)=\sqrt{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<x<0,\\ x^2+2x+\sqrt{a}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<x<0,\\ \left[\begin{array}{l}x=-1-\sqrt{1-\sqrt{a}},\\ x=-1+\sqrt{1-\sqrt{a}},\end{array}\right.\\ 1-\sqrt{a}>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1-\sqrt{1-\sqrt{a}},\\ x=-1+\sqrt{1-\sqrt{a}},\end{array}\right.$$

якщо $0<a<1$;

$$2)\ \begin{cases}x>0,\\ x(x+2)=\sqrt{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ x^2+2x-\sqrt{a}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ \left[\begin{array}{l}x=-1+\sqrt{1+\sqrt{a}},\\ x=-1-\sqrt{1+\sqrt{a}},\end{array}\right.\\ \sqrt{a}>0\end{cases}\Leftrightarrow\left(x=-1+\sqrt{1+\sqrt{a}}\right),$$

якщо $a>0$.

Відповідь: якщо $0<a<1$, то $X=\left\{-1\pm\sqrt{1-\sqrt{a}};-1+\sqrt{1+\sqrt{a}}\right\}$; якщо $a>1$, то $X=\left\{-1+\sqrt{1+\sqrt{a}}\right\}$.

Приклад 2.5. *Для кожного дійсного параметра* $a>0$ *розв'яжемо рівняння* $\log_{a^2-x^2}\left((ax)^2-1\right)=1$.

Розв'язання. Оскільки логарифмічна функція визначена для додатної основи, що не дорівнює одиниці, і тільки для додатних значень функції, що стоять під знаком логарифма, то ОДЗ рівняння визначається системою:

$$\begin{cases} (ax)^2 - 1 > 0, \\ a^2 - x^2 > 0, \\ a^2 - x^2 \neq 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Враховуючи умову $a > 0$, систему нерівностей можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} |x| > \dfrac{1}{a}, \\ |x| < a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{1}{a}, \\ x < -\dfrac{1}{a}, \end{array}\right. \\ -a < x < a \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \dfrac{1}{a}, \\ -a < x < a, \end{cases} \\ \begin{cases} x < -\dfrac{1}{a}, \\ -a < x < a. \end{cases} \end{array}\right. \tag{2.4}$$

Якщо

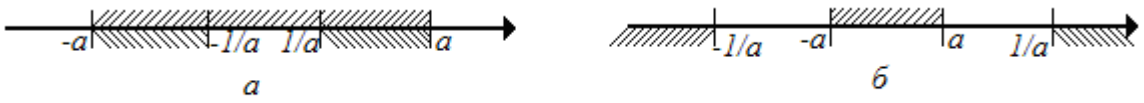
$$\left(a > \frac{1}{a}\right) \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{a} > 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{a^2 - 1}{a} > 0\right) \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(a^2 - 1\right) > 0, \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(a-1)(a+1) > 0, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -1 < a < 0, \\ a > 1, \end{array}\right. \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a > 1),$$

то сукупність (2.4), а отже і дві перші нерівності з (2.3) мають розв'язок:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} -a < x < -\dfrac{1}{a}, \\ \dfrac{1}{a} < x < a, \end{array}\right. \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a} < |x| < a, \\ a > 1, \end{cases}$$

який зображено на рис. 2.1, *а*.



а *б*

Рис. 2.1

Якщо $0 < a \leq 1$, то сукупність (2.4), а відповідно і дві перші нерівності з (2.3) розв'язків не мають, що зображено на рис. 2.1, *б*.

Отже, початкове рівняння еквівалентне системі:

$$\begin{cases}(ax)^2-1=a^2-x^2,\\ a^2-x^2\neq 1,\\ \dfrac{1}{a}<|x|<a,\\ a>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm 1,\\ a^2\neq 1+x^2,\\ a>1,\\ \dfrac{1}{a}<|x|<a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm 1,\\ a\neq\pm\sqrt{2},\\ a>1,\\ \dfrac{1}{a}<|x|<a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm 1,\\ a\neq\sqrt{2},\\ a>1,\end{cases}$$

що і є розв'язком рівняння.

Відповідь: якщо $\left[\begin{array}{l}0<a\le 1,\\ a=\sqrt{2}\end{array}\right.$, то $X=\varnothing$; якщо $\left[\begin{array}{l}1<a<\sqrt{2},\\ a>\sqrt{2}\end{array}\right.$, то $X=\{-1;1\}$.

Приклад 2.6 [20, с. 72]. *Розв'яжемо рівняння для всіх можливих значень параметра* a*:*

$$\left(1+(a+2)^2\right)\log_3\left(2x-x^2\right)+\left(1+(3a-1)^2\right)\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=\log_3\left(2x-x^2\right)+\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right).$$

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ вихідного рівняння, що не залежить від a:

$$\begin{cases}2x-x^2>0,\\ 1-\dfrac{x^2}{2}>0,\end{cases}\Rightarrow\ 0<x<\sqrt{2}.$$

Для довільного x з цього проміжку виконується нерівність

$$2x-x^2=1-(1-x)^2\le 1,\ 1-\frac{x^2}{2}\le 1,$$

і, отже,

$$\log_3\left(2x-x^2\right)\le 0,\ \log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\le 0.$$

Якщо $a\neq -2$ і $a\neq\dfrac{1}{3}$, то

$$\left(1+(a+2)^2\right)\log_3\left(2x-x^2\right)\le\log_3\left(2x-x^2\right),$$

$$\left(1+(3a-1)^2\right)\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\le\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right).$$

Зіставимо останні дві нерівності і порівняємо отримані результати з початковим рівнянням. В результаті, отримуємо, що воно може мати розв'язок тільки для таких значень x, які задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases}\log_3\left(2x-x^2\right)=0,\\ \log_{11}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-x^2=1,\\ 1-\dfrac{x^2}{2}=1.\end{cases}$$

Ця система рівнянь не має розв'язків. Отже, якщо $a \neq -2$ і $a \neq \frac{1}{3}$, то початкове рівняння коренів немає. Якщо $a = -2$, то початкове рівняння матиме вигляд

$$\log_3\left(2x - x^2\right) + 50\log_{11}\left(1 - x^2/2\right) = \log_3\left(2x - x^2\right) + \log_{11}\left(1 - x^2/2\right).$$

Це рівняння рівносильне рівнянню $\log_{11}\left(1 - x^2/2\right) = 0$, яке не має коренів в ОДЗ: $0 < x < \sqrt{2}$. Якщо ж $a = \frac{1}{3}$, то початкове рівняння матиме вигляд

$$\frac{58}{9}\log_3\left(2x - x^2\right) + \log_{11}\left(1 - x^2/2\right) = \log_3\left(2x - x^2\right) + \log_{11}\left(1 - x^2/2\right).$$

Врахувавши ОДЗ, таке рівняння рівносильне рівнянню

$$\log_3\left(2x - x^2\right) = 0 \;\Rightarrow\; 2x - x^2 = 1,$$

яке має єдиний корінь $x = 1$, що належить ОДЗ.

Відповідь: якщо $a = \frac{1}{3}$, то вихідне рівняння має єдиний корінь $x = 1$; якщо $a \neq \frac{1}{3}$ рівняння коренів не має.

Приклад 2.7. *Розв'яжемо рівняння*

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a.$$

Розв'язання: ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$ і $a > 0$, $a \neq 1$. Перетворивши підкореневі вирази, отримаємо:

$$\sqrt{\frac{1}{4}\left(1 + \log_a x\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \log_x a\right)} + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\log_a x - 1\right) + \frac{1}{4}\left(\log_x a - 1\right)} = a$$

або

$$\sqrt{\log_a x + 2 + \frac{1}{\log_a x}} + \sqrt{\log_a x - 2 + \frac{1}{\log_a x}} = 2a \;\Rightarrow \sqrt{\frac{\left(\log_a x + 1\right)^2}{\log_a x}} + \sqrt{\frac{\left(\log_a x - 1\right)^2}{\log_a x}} = 2a \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\log_a x + 1\right| + \left|\log_a x - 1\right| = 2a\sqrt{\log_a x} \;\left(\log_a x > 0\right).$$

Якщо $0 < \log_a x < 1$, то $2 = 2a\sqrt{\log_a x}$, або $\log_a x = 1/a^2$ і $x = a^{1/a^2}$. Отримане значення x задовольняє рівняння, якщо $0 < \frac{1}{a^2} < 1$, тобто для $a > 1$. Якщо $\log_a x = 1$, тобто $x = a$, то $2 - 2a$ або $(a = 1) \notin$ ОДЗ. Отже, $x \neq a$. Якщо ж $\log_a x > 1$, то

$2\log_a x = 2a\sqrt{\log_a x}$, або $\log_a x = a^2$ і $x = a^{a^2}$. Це значення x задовольняє рівняння, якщо $\log_a a^2 > 1$, звідки випливає, що $a^2 > 1$ або $a > 1$.

Відповідь: якщо $a > 1$, то $x_1 = a^{1/a^2}$, $x_2 = a^{a^2}$; якщо $0 < a < 1$, то рівняння розв'язків не має.

Приклад 2.8. *Визначити всі* a*, при яких рівняння* $\log_2 x + \log_a x + \log_4 x = 1$ *має розв'язки?*

Розв'язання.

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 a} + \frac{1}{2}\log_2 x = 1 \;\Rightarrow\; \log_2 a \log_2 x + \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x \log_2 a = \log_2 a \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\log_2 a + 1\right)\log_2 x = \log_2 a \;\Rightarrow\; \log_2 x^{\frac{3}{2}\log_2 a + 1} = \log_2 a \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x^{\frac{3}{2}\log_2 a + 1} = a \;\Rightarrow\; x = a^{\frac{2}{3\log_2 a + 2}}.$$

ОДЗ: $a > 0$, $a \neq 1$, $3\log_2 a + 2 \neq 0$, тобто $a \neq 2^{-2/3}$.

Відповідь: якщо $a > 0$, $a \neq 2^{-2/3}$, $a \neq 1$, то $x = a^{\frac{2}{3\log_2 a + 2}}$.

Приклад 2.9. *За яких* a *рівняння* $\log_2(\log_3(x^2 + 2x)) = \log_2(-1 + \log_3(a+4)x)$ *не має жодного кореня?*

Розв'язання. Задане рівняння еквівалентне такій системі:

$$\begin{cases} \log_3(x^2 + 2x) = -1 + \log_3(a+4)x), \\ \log_3(x^2 + 2x) > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2 + 2x) = \log_3 \dfrac{(a+4)x}{3}, \\ x^2 + 2x > 1. \end{cases}$$

Із рівняння системи, отримуємо: $x^2 + 2x = \dfrac{(a+4)x}{3}$, звідки $x = 0$ або $x = \dfrac{a-2}{3}$. Значення $x = 0$ не є розв'язком цього рівняння. Знайдемо такі a, за яких $x = \dfrac{a-2}{3}$ також не є розв'язком цього рівняння. Це можливо тоді, коли правильна така сукупність:

$$\left[\begin{array}{l} \log_3(x^2 + 2x) \le 0, \\ x^2 + 2x \le 0, \end{array}\right.$$

Ця сукупність рівносильна нерівності $x^2 + 2x - 1 \le 0$, яка має такий розв'язок: $-1 - \sqrt{2} \le x \le -1 + \sqrt{2}$. Отже, $-1 - \sqrt{2} \le \dfrac{a-2}{3} \le -1 + \sqrt{2}$, звідки $-1 - 3\sqrt{2} \le a \le -1 + 3\sqrt{2}$.

Відповідь: $a \in \left[-1-3\sqrt{2};-1+3\sqrt{2}\right]$.

Приклад 2.10. *Для яких значень параметра a корені рівняння* $\log_2 x \log_2 \frac{x}{(a+2)2^{a+1}} + (a+1)\log_2(a+2) = 0$ *розміщені між коренями рівняння* $x^2 - (2a+3)x + a^2 + 3a = 0$ *?*

Розв'язання. Виконаємо перетворення першого рівняння:

$$\log_2 x(\log_2 x - \log_2(a+2) - (a+1)) + (a+1)\log_2(a+2) = 0,$$

$$\log_2 x(\log_2 x - \log_2(a+2)) - (a+1)(\log_2 x - \log_2(a+2) = 0,$$

$$(\log_2 x - \log_2(a+2))(\log_2 x - (a+1)) = 0.$$

Останнє рівняння рівносильне сукупності:

$$\begin{cases} \log_2 x = \log_2(a+2), \\ \log_2 x = a+1, \end{cases}$$

звідки $x_1 = a+2$, $x_2 = 2^{a+1}$ – корені першого рівняння, причому $a > -2$. Розв'язки другого рівняння: $x_3 = a$, $x_4 = a+3$. Очевидно, що $x_3 < x_1 < x_4$. Отже, умова задачі виконується тоді, коли $x_3 < x_2 < x_4$, тобто $a < 2^{a+1} < a+3$, звідси $a < 1$ (щоб переконатися у цьому достатньо побудувати графіки функцій $y = a$; $y = 2^{a+1}$; $y = a+3$, при $a > -2$).

Відповідь: $a \in (-2;1)$.

Приклад 2.11. *Розв'яжемо відносно* x *нерівність* $\log_{2x+3}(a-2) < 1$.

Розв'язання. З властивостей логарифма отримуємо, що $a > 2$. Значення x має задовольняти умову $2x+3 > 0$ $(2x+3 \neq 1)$, тобто $x > -3/2$ $(x \neq -1)$. Перепишемо початкову нерівність у вигляді $\log_{2x+3}(a-2) < \log_{2x+3}(2x+3)$. Зауважимо, що при $2x+3 > 1$, тобто при $x > -1$ вона рівносильна нерівності $x > \frac{a-5}{2}$. Для вибору розв'язку порівняємо числа $\frac{a-5}{2}$ і -1, тому розглянемо різницю $\frac{a-5}{2} - (-1) = \frac{a-3}{2}$. Маємо $\frac{a-3}{2} > 0$ при $a > 3$ і $\frac{a-3}{2} \leq 0$ при $a \leq 3$. Отже, якщо $2 < a \leq 3$, то $\frac{a-5}{2} \leq -1$ і розв'язком системи $\begin{cases} x > \frac{a-5}{2} \\ x > -1 \end{cases}$ є всі $x > -1$. При $a > 3$

отримаємо $\frac{a-5}{2}>-1$, і розв'язком системи $\begin{cases} x>\frac{a-5}{2}, \\ x>-1 \end{cases}$ є всі $x>\frac{a-5}{2}$. Знайдемо тепер розв'язок початкової нерівності, який задовольняє умову $-3/2<x<-1$. За цією умовою, нерівність рівносильна нерівності $a-2>2x+3$, тобто $x<\frac{a-5}{2}$. Оскільки $\frac{a-5}{2}\le -1$ для $2<a\le 3$, то розв'язком системи $\begin{cases} x<\frac{a-5}{2}, \\ -\frac{3}{2}<x<-1 \end{cases}$ в цьому випадку є проміжок $\left(-1,5;0,5(a-5)\right)$ (легко переконатися, що $-\frac{3}{2}<\frac{a-5}{2}$, якщо $a>2$). Якщо $a>3$, то $\frac{a-5}{2}>-1$ і, отже, при цих значеннях a розв'язком системи $\begin{cases} x<\frac{a-5}{2}, \\ -\frac{3}{2}<x<-1 \end{cases}$ є $x\in(-3/2;-1)$.

Відповідь: якщо $2<a\le 3$, то $x\in\left(-1,5;0,5(a-5)\right)\cup(-1;+\infty)$; якщо $a>3$, то $x\in(-1,5;-1)\cup\left(0,5(a-5);+\infty\right)$.

Приклад 2.12 [14, с. 9]. *Розв'яжемо нерівність* $\log_a(x-a)>\log_{1/a}(x+a)$ *в залежності від параметра* a.

Розв'язання. Маємо $\log_a(x-a)>-\log_a(x+a)\ \Rightarrow\ \log_a\left(x^2-a^2\right)>0$. Тому

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x>a, \\ a>0, \\ a\ne 1, \\ x>-a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>a, \\ a>0, \\ a\ne 1. \end{cases}$$

Розглянемо два випадки:

$$1)\ \begin{cases} a>1, \\ x^2-a^2>1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>1, \\ x^2>1+a^2; \end{cases} \Rightarrow\ a>1,\ |x|>\sqrt{1+a^2}\ .$$

Оскільки $a>1$, $x>a$, то $x>0$, $|x|=x$. Тоді $x>\sqrt{1+a^2}$, $\sqrt{1+a^2}>a$ і $x>a$. Отже, якщо $a>1$, то $x>\sqrt{1+a^2}$.

$$2)\ \begin{cases} 0<a<1, \\ x^2-a^2<1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<a<1, \\ |x|<\sqrt{a^2+1}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<a<1, \\ x<\sqrt{a^2+1}. \end{cases}$$

Враховуючи, що $x>a$ (див. ОДЗ), одержимо $a<x<\sqrt{a^2+1}$. Отже, при $0<a<1$ маємо $a<x<\sqrt{a^2+1}$.

Відповідь: якщо $a\in(0;1)$, то $x\in\left(a;\sqrt{a^2+1}\right)$; якщо $a\in(1;+\infty)$, то $x\in\left(\sqrt{a^2+1};+\infty\right)$; якщо $a\in(-\infty;0]$ і $a=1$, то розв'язків немає.

Приклад 2.13. *Розв'яжемо нерівність* $\log_{0,7}\left(x^2+2x\right)<\log_{0,7}(a+1)$.

Розв'язання. $\log_{0,7}\left(x^2+2x\right)<\log_{0,7}(a+1)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x>a+1,\\x^2+2x>0,\\a+1>0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x-(a+1)>0,\\\left[\begin{array}{l}x>0,\\x<-2,\end{array}\right.\\a>-1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+2x-(a+1)>0,\\x>0,\\a>-1,\end{cases}\\\begin{cases}x^2+2x-(a+1)>0,\\x<-2,\\a>-1.\end{cases}\end{array}\right. \tag{2.5}$$

Квадратична функція $f(x)=x^2+2x-(a+1)$ має корені $x_1=-1+\sqrt{a+2}$ і $x_2=-1-\sqrt{a+2}$. Зауважимо, якщо $a>-1$, то $a+2>1$ і $x_1\in\mathrm{R}$, $x_2\in\mathrm{R}$. Оскільки $\sqrt{a+2}>1$, то $x_1>0$, $x_2<0$. Отже, розв'язком нерівності $f(x)>0$ буде сукупність:

$$\left[\begin{array}{l}x>-1+\sqrt{a+2},\\x<-1-\sqrt{a+2}.\end{array}\right.$$

Тоді сукупність систем (2.5) запишеться у вигляді:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>-1+\sqrt{a+2},\\x<-1-\sqrt{a+2},\end{array}\right.\\x>0,\\a>-1,\end{cases}\\\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>-1+\sqrt{a+2},\\x<-1-\sqrt{a+2},\end{array}\right.\\x<-2,\\a>-1.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>-1,\\x>-1+\sqrt{a+2},\end{cases}\\\begin{cases}a>-1,\\x<-1-\sqrt{a+2}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: якщо $a>-1$, то $X=\left(-\infty;-1-\sqrt{a+2}\right)\cup\left(-1+\sqrt{a+2};+\infty\right)$.

Приклад 2.14 [18, с. 250]. *Розв'яжемо відносно x нерівність* $\log_{a^2}\left(x^2+2x\right)<1$.

Розв'язання. За змістом задачі $a\neq 0$ і $a\neq\pm 1$, а значить x має задовольняти умові $x\left(x+2\right)>0$, тобто: а) $x>0$ і б) $x<-2$. Перетворивши нерівність до вигляду $\log_{a^2}\left(x^2+2x\right)<\log_{a^2}a^2$, зауважимо, що при $|a|>1$ вона рівносильна системі

$$\begin{cases} x^2+2x-a^2<0, \\ x\left(x+2\right)>0. \end{cases}$$

Розв'язком першої нерівності системи є $x\in\left(x_1;x_2\right)$, де $x_1=-1-\sqrt{1+a^2}$, $x_2=-1+\sqrt{1+a^2}$. Звідси, при $|a|>1$ початкова нерівність рівносильна сукупності наступних систем: а) $\begin{cases} -1-\sqrt{1+a^2}<x<\sqrt{1+a^2}-1, \\ x>0, \end{cases}$ розв'язком якої є $x\in\left(0;\sqrt{1+a^2}-1\right)$; б) $\begin{cases} -1-\sqrt{1+a^2}<x<-1+\sqrt{1+a^2}, \\ x<-2, \end{cases}$ справедлива при всіх значеннях $x\in\left(-1-\sqrt{1+a^2};-2\right)$. Нехай $|a|<1$ $(a\neq 0)$. В такому випадку початкова нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x^2+2x-a^2>0, \\ x\left(x+2\right)>0. \end{cases}$$

Розв'язком першої нерівності системи є $x\in\left(-\infty;x_1\right)\cup\left(x_2;\infty\right)$, де $x_1=-1-\sqrt{1+a^2}$, $x_2=-1+\sqrt{1+a^2}$. Отже, при $|a|<1$ $(a\neq 0)$ нерівність рівносильна сукупності двох систем: а) $\begin{cases} x<-1-\sqrt{1+a^2}, \\ x<-2, \end{cases}$ розв'язком якої є проміжок $\left(-\infty;-1-\sqrt{1+a^2}\right)$; б) $\begin{cases} x>-1+\sqrt{1+a^2}, \\ x>0, \end{cases}$ справедлива при всіх значеннях $x\in\left(-1+\sqrt{1+a^2};\infty\right)$.

Відповідь: якщо $|a|>1$, то $x\in\left(-1-\sqrt{1+a^2};-2\right)\cup\left(0;\sqrt{1+a^2}-1\right)$; якщо $|a|<1$ $(a\neq 0)$, то $x\in\left(-\infty;-1-\sqrt{1+a^2}\right)\cup\left(\sqrt{1+a^2}-1+;\infty\right)$.

Приклад 2.15. *Розв'яжемо нерівність* $\log_x(\log_x(x-a))>\log_x 2$.

Розв'язання. Залежно від значень основи x маємо два випадки:

$$1)\ \begin{cases} x>1, \\ \log_x(x-a)>2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1, \\ x-a>x^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1, \\ x^2-x+a<0. \end{cases}$$

Розв'язком нерівності $x^2-x+a<0$ є $x\in\left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2};\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$, якщо $a<\frac{1}{4}$; і $x\in\varnothing$, якщо $a\ge\frac{1}{4}$. Оскільки $x>1$, то система має розв'язки, якщо $\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}>1$, звідки $a<0$. Тоді $x\in\left(1;\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$, де $a<0$; $x\in\varnothing$, якщо $a\ge 0$;

$$2)\ \begin{cases} 0<x<1, \\ 0<\log_x(x-a)<2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<1, \\ 1>x-a>x^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<1, \\ x<a+1, \\ x^2-x+a<0. \end{cases}$$

Отримана система залежно від значення a має такі розв'язки: а) $x\in\varnothing$, якщо $a\ge\frac{1}{4}$, або $a\le -1$; б) $x\in\left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2};\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$, якщо $0\le a<\frac{1}{4}$; в) $x\in(0;1+a)$, якщо $-1<a<0$.

Відповідь: $x\in\varnothing$, якщо $a\ge\frac{1}{4}$; $x\in\left(1;\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$, якщо $a\le -1$; $x\in(0;1+a)\cup x\in\left(1;\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$, якщо $-1<a<0$; $x\in\left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2};\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$, якщо $0\le a<\frac{1}{4}$.

Приклад 2.16. *Розв'яжемо нерівність* $\log_a(2x^2+3x-1)>\log_a(x^3+6x-1)$ *за умови, що значення* $x=1$ *входить в її розв'язок.*

Розв'язання. Підставивши у нерівність значення $x=1$, отримаємо $\log_a 4>\log_a 6$, звідки $a\in(0;1)$. Для таких a наша нерівність еквівалентна системі:

$$\begin{cases} 2x^2+3x-1<x^3+6x-1, \\ 2x^2+3x-1>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x^2-2x+3)>0, \\ 2x^2+3x-1>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ 2x^2+3x-1>0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow x\in\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right).$$

Відповідь: $x\in\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$, якщо $a\in(0;1)$; не має розв'язків при інших значеннях a.

Приклад 2.17. *Знайдемо всі такі a, за яких нерівність* $\log_{ax^2+2x+a+2}\left(2x^2+(2a+3)x+8\right)>1$ *виконується для будь-якого x?*

Розв'язання. Проаналізуємо випадки, в яких основа задовольняє нерівності: 1) $ax^2+2x+a+2>1$; 2) $0<ax^2+2x+a+2<1$. Нехай $ax^2+2x+a+2>1$, або $ax^2+2x+a+1>0$. У цьому випадку вихідна нерівність рівносильна нерівності: $2x^2+(2a+3)x+8>ax^2+2x+a+2 \Rightarrow (2-a)x^2+(2a+1)x+6-a>0$. Вихідна нерівність виконується при будь-якому значенні x, якщо графіки функцій $f_1(x)=ax^2+2x+a+1$ і $f_2(x)=(2-a)x^2+(2a+1)x+6-a$ знаходяться над віссю Ox, тобто при одночасному виконанні систем нерівностей:

$$\begin{cases} a>0, \\ D_1/4=1-a(a+1)<0, \end{cases} \text{ і } \begin{cases} 2-a>0, \\ D_2=(2a+1)^2-4(a-2)(a-6)<0. \end{cases}$$

Звідси, отримаємо

$$\begin{cases} 0<a<2, \\ a^2+a-1>0, \\ 36a-47<0, \end{cases} \Rightarrow a\in\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{47}{36}\right).$$

Подвійна нерівність $0<ax^2+2x+a+2<1$ не може виконуватися при всіх значеннях x, бо квадратична функція є необмеженою. Тому цей випадок до уваги не беремо.

Відповідь: $a\in\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{47}{36}\right)$.

Приклад 2.18. *Розв'яжемо нерівність* $\log_{x+a}2<\log_x 4$, *якщо* $0<a<1/4$.

Розв'язання. Зауважимо, що $x>0$ і $x\neq a$. Дана нерівність рівносильна нерівності $\frac{1}{\log_2(x+a)}<\frac{2}{\log_2 x}$, тобто нерівності $\frac{2}{\log_2 x}-\frac{1}{\log_2(x+a)}>0$, звідки

$$\frac{2\log_2(x+a)-\log_2 x}{\log_2 x\cdot\log_2(x+a)}>0. \tag{2.6}$$

Якщо $0<x<1$, то $\log_2 x<0$; якщо ж $x>1$, то $\log_2 x>0$. Тому нерівність (2.6) еквівалентна сукупності таких систем:

$$\begin{cases}0<x<1,\\ \dfrac{2\log_2(x+a)-\log_2 x}{\log_2(x+a)}<0,\end{cases} \tag{2.7}$$

$$\begin{cases}x>1,\\ \dfrac{2\log_2(x+a)-\log_2 x}{\log_2(x+a)}>0.\end{cases} \tag{2.8}$$

Розв'яжемо систему (2.7). Якщо $0<x+a<1$, то $\log_2(x+a)<0$. Для $x+a>1$ маємо $\log_2(x+a)>0$. Тому система (2.7) рівносильна сукупності двох систем ($a>0$, $x>0$):

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\ 0<x+a<1,\\ 2\log_2(x+a)-\log_2 x>0,\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1,\\ x+a>1,\\ 2\log_2(x+a)-\log_2 x<0,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\ x<1-a,\\ \log_2(x+a)^2>\log_2 x,\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1,\\ x>1-a,\\ \log_2(x+a)^2<\log_2 x,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1-a,\\ (x+a)^2>x,\end{cases}\\ \begin{cases}1-a<x<1,\\ (x+a)^2<x,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1-a,\\ x^2-(1-2a)x+a^2>0,\end{cases}\\ \begin{cases}1-a<x<1,\\ x^2-(1-2a)x+a^2<0.\end{cases}\end{array}\right. \tag{2.9}$$

При всіх $0<a<1/4$ дискримінант $D>0$ квадратного тричлена $x^2-(1-2a)x+a^2$ ($D=1-4a$). Тому $x^2-(1-2a)x+a^2=(x-x_1)(x-x_2)$, де $x_1=1/2-a-\sqrt{1/4-a}$ і $x_2=1/2-a+\sqrt{1/4-a}$, причому $x_1<x_2$. Числа x_1 і x_2 задовольняють систему, бо за теоремою Вієта:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = a^2 \\ x_1 + x_2 = 1 - 2a, \end{cases}$$

звідки випливає, що при заданих обмеженнях для a числа x_1 і x_2 додатні. Крім того, оскільки $x_1 + x_2 = 1 - 2a = 1 - a - a < 1 - a$, то кожне з них менше за $1 - a$. Тоді друга система сукупності (2.9) розв'язків немає. Розв'язком першої системи сукупності (2.9), а отже, і системи (2.7) при $0 < a < 1/4$ є всі x, для яких $0 < x < x_1$ і $x_2 < x < 1 - a$.

Розв'яжемо систему (2.8). Нерівність $\dfrac{2\log_2(x+a) - \log_2 x}{\log_2(x+a)} > 0$ рівносильна нерівності $2 - \dfrac{\log_2 x}{\log_2(x+a)} > 0$. Якщо $x > 1$ і $0 < a < 1/4$, то $x < x + a$ і, оскільки функція $y = \log_2 x$ зростає, то $\log_2 x < \log_2(x+a)$. Позаяк $\log_2 x > 0$ і $\log_2(x+a) > 0$, то $0 < \dfrac{\log_2 x}{\log_2(x+a)} < 1$. Отже, множиною всіх розв'язків системи (2.8) є проміжок $1 < x < +\infty$.

Відповідь: якщо $a \in (0;1/4)$, то $0 < x < 1/2 - a - \sqrt{1/4 - a}$, $1/2 - a + \sqrt{1/4 - a} < x < 1 - a$, $1 < x < +\infty$.

Приклад 2.19 [25, с. 123]. *При яких a сума квадратів коренів рівняння $2\log_a |x-1| - \log_a x = 1$ дорівнює 34?*

Розв'язання. ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$, $a > 0$, $a \neq 1$. Тоді

$$2\log_a |x-1| - \log_a x = 1 \Leftrightarrow \log_a (x-1)^2 = \log_a ax \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = ax \Leftrightarrow x^2 - x(a+2) + 1 = 0.$$

За формулами Вієта, маємо $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (a+2)^2 - 2 = a^2 + 4a + 2$. Рівняння $a^2 + 4a + 2 = 34$ має два корені $a_1 = -8$ і $a_2 = 4$. Перший корінь не задовольняє умовам задачі, оскільки $-8 \notin (0;1) \cup (1;+\infty)$. Другий корінь $a_2 = 4 \in (0;1) \cup (1;+\infty)$ і при $a = 4$ дискримінант $D = (a+2)^2 - 4 = 32 > 0$ рівняння $x^2 - x(a+2) + 1 = 0$. Отже, корені x_1 та x_2 існують.

Відповідь: $a = 4$.

Приклад 2.20. *При яких a відстань між коренями рівняння* $2\log_a x+3\log_{ax^2} a+5=0$ *менша* $\frac{6}{25}$*?*

Розв'язання. ОДЗ: $x>0$, $a>0$, $a\neq 1$, $ax^2\neq 1$. Перейдемо до основи a:

$$2\log_a x+\frac{3}{\log_a ax^2}+5=0 \Leftrightarrow 2\log_a x+\frac{3}{1+2\log_a x}+5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_a x+4\log_a^2 x+8+10\log_a x=0 \Leftrightarrow \log_a^2 x+3\log_a x+2=0,$$

звідки

$$\log_a x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{a} \text{ і } \log_a x=-2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{a^2}.$$

В задачі потрібно визначити, при яких a: $\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}\right|<\frac{6}{25}$. Розглянемо два випадки:

1) $0<a<1$: $\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}\right|<\frac{6}{25} \Leftrightarrow 25(a-1)<6a^2 \Leftrightarrow 6a^2+25a-25>0 \Leftrightarrow$

$a\in(-\infty;-5)\cup\left(\frac{5}{6};+\infty\right)$. Врахувавши, що $0<a<1$, матимемо $a\in\left(\frac{5}{6};1\right)$;

2) $a>1$: $\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}\right|<\frac{6}{25} \Leftrightarrow 25(a-1)<6a^2 \Leftrightarrow 6a^2-25a+25>0 \Leftrightarrow a\in\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$.

Оскільки $a>1$, то розв'язком нерівності є $a\in\left(1;\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$.

Відповідь: $a\in\left(\frac{5}{6};1\right)\cup\left(1;\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$.

Приклад 2.21 [10, с. 339]. *При яких значеннях параметра a кожний розв'язок нерівності* $\log_{0,5} x^2\geq\log_{0,5}(x+2)$ *є розв'язком нерівності* $49x^2-4a^4\leq 0$*?*

Розв'язання. Логарифмічна нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x^2\leq x+2, \\ x\neq 0, \\ x+2>0, \end{cases} \Rightarrow -1\leq x<0,\ 0<x\leq 2. \qquad (2.10)$$

Що ж стосується квадратної нерівності, то вона рівносильна нерівності $\left(x-\frac{2}{7}a^2\right)\left(x+\frac{2}{7}a^2\right)\leq 0$, розв'язком якої є $-\frac{2}{7}a^2\leq x\leq\frac{2}{7}a^2$. Тоді розв'язки квадратної нерівності з (2.10) будуть розв'язками логарифмічної нерівності, коли сумісна система

$$\begin{cases} -\frac{2}{7}a^2 \le -1, \\ 2 \le \frac{2}{7}a^2, \end{cases} \Rightarrow a \le -\sqrt{7} \text{ і } a \ge \sqrt{7}.$$

Відповідь: $a \in (-\infty;-\sqrt{7}) \cup [\sqrt{7};+\infty)$.

Приклад 2.22 [4, с. 67]. *Визначимо кількість коренів рівняння* $1+\log_x \frac{4-x}{10} = (\lg\lg a - 1)\log_x 10$.

Розв'язання. Якщо $a \le 1$, то вираз $\lg\lg a$ не має змісту і рівняння не має розв'язку. При $a > 1$ і $x \in (0;1) \cup (1;4)$, маємо:

$$1+\log_x(4-x) - \log_x 10 = (\lg\lg a)\log_x 10 \Leftrightarrow 1+\frac{\lg(4-x)}{\lg x} = \frac{\lg\lg a}{\lg x} \Leftrightarrow$$

$$x(4-x) = \lg a \Leftrightarrow x^2 - 4x + \lg a = 0,$$

звідки $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-\lg a}$. Зрозуміло, що корені існують при умові, що $D \ge 0 \Leftrightarrow 4 - \lg a \ge 0 \Leftrightarrow a \le 10^4$. При $a = 10^4$ дискримінант дорівнює нулю і рівняння має єдиний розв'язок $x_1 = x_2 = 2$. При $a = 10^3$ корінь $x_1 = 1$ не належить ОДЗ і вихідне рівняння має один корінь $x_2 = 3$. Якщо $a \in (1;10^3) \cup (10^3;10^4)$, то рівняння матиме два корені.

Відповідь: $a \in (1;10^3) \cup (10^3;10^4)$ – два корені; $a \in \{10^3;10^4\}$ – один корінь; $a \in (10^4;+\infty)$ – коренів не має.

Приклад 2.23 [10, с. 334]. *За яких значень параметра a система*

$$\begin{cases} \sin(3(a-y)) + 3\sin x = 0, \\ 2\log_4(a-y) + 2\log_4(2\sqrt{y}) = \log_2\sqrt{y} + 3\log_8(2x), \end{cases}$$

має парну кількість розв'язків?

Розв'язання. ОДЗ змінних x і y задається системою:

$$\begin{cases} a - y > 0, \\ x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

Тому від другого рівняння системи можна перейти до рівняння

$$2(a-y)\sqrt{y} = 2x\sqrt{y} \Rightarrow x = (a-y).$$

Підставивши $x=(a-y)$ у перше рівняння системи, отримаємо

$$\sin 3x+3\sin x=0 \;\Rightarrow\; (3-2\sin^2 x)\sin x=0 \;\Rightarrow\; x=\pi n,\ n\in\mathbb{N}.$$

Але $x=(a-y)$ і з огляду на ОДЗ, одержимо систему

$$\begin{cases} y=a-\pi n, \\ x=\pi n, \\ x>0, \\ y>0. \end{cases} \Rightarrow\ x=\pi n<a.$$

Отже, початкова система має парну кількість розв'язків, якщо $2\pi m<a<\pi(2m+1)$, $m\in\mathbb{N}$.

Відповідь: $2\pi m<a<\pi(2m+1)$, $m\in\mathbb{N}$.

2.2. Метод заміни

Приклад 2.24 [1, с. 143]. *Розв'яжемо рівняння* $3\lg^2(x-a)-10\lg(x-a)+3=0$.

Розв'язання. Нехай $\lg(x-a)=y$. Тоді отримаємо квадратне рівняння $3y^2-10y+3=0$. Корені цього рівняння – $y_1=3$ та $y_2=1/3$. Повернувшись до заміни, отримаємо сукупність двох рівнянь: а) $\lg(x-a)=3$, звідки $x=a+1000$; б) $\lg(x-a)=1/3$, $x=a+\sqrt[3]{10}$.

Відповідь: $x_1=a+1000$ і $x_2=a+\sqrt[3]{10}$.

Приклад 2.25. *Для яких значень* a *рівняння* $\log_{x-1}(x+a)=1/2$ *має єдиний розв'язок?*

Розв'язання. Нехай $x-1=t$. Тоді $x=t+1$ і $\log_t(t+1+a)=1/2$. Позначимо також $b=1+a$. Тоді вихідне рівняння набуде вигляду

$$\log_t(t+b)=1/2. \tag{2.11}$$

Використаємо операцію потенціювання з основою t:

$$t+b=\sqrt{t}. \tag{2.12}$$

Будь-який розв'язок рівняння (2.11) є, очевидно, і розв'язком (2.12). Навпаки, якщо t розв'язок рівняння (2.12) і

$$t>0,\ t\neq 1, \tag{2.13}$$

то прологарифмувавши (2.12) за основою t, отримаємо, що (2.11) правильна рівність. Розв'язавши (2.12) як квадратне рівняння відносно $\sqrt{t}$, отримаємо: а)

$\sqrt{t}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4b}\right)$, б) $\sqrt{t}=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4b}\right)$. Очевидно, що (2.12) має розв'язок, якщо $1-4b\ge 0$, тобто $b\le 1/4$. За цією умовою $1+\sqrt{1-4b}\ge 1$, тому формула (2.11) визначає розв'язок $t_1=\frac{1}{2}\left(1-2b+\sqrt{1-4b}\right)$ рівняння (2.12). Перша умова з (2.13) для цього рівняння, очевидно, виконується. Тому, з (2.11) бачимо, що рівність $\sqrt{t}=1$ (тобто, і $t=1$) справджується лише для $b=0$. Отже, якщо $b\le 1/4$ і $b\ne 0$, то а) визначає розв'язок t_1 рівняння (2.11). Розглянемо формулу б). Умова $\sqrt{t}>0$ (тобто, і $t>0$) з (2.13) виконується тоді і тільки тоді, коли $1-\sqrt{1-4b}>0$, звідки $b>0$. Тоді $1-\sqrt{1-4b}<1$, $\sqrt{t}<1/2$ і $t<1/4<1$, тобто виконується друга умова з (2.13). Отже, формула б) визначає розв'язок $t_2=\frac{1}{2}\left(1-2b-\sqrt{1-4b}\right)$ рівняння (2.11), якщо $0<b\le 1/4$. В результаті отримаємо, що при $b<0$ рівняння (2.11) має один розв'язок t_1, а при $0<b\le 1/4$ розв'язками (2.11) є t_1 і t_2. Зауважимо, що $t_1=t_2$ у випадку $b=1/4$. Отже, (2.11) разом з початковим рівнянням має єдиний розв'язок, якщо $b<0$ або $b=1/4$, або, що те саме, якщо $a<-1$ або $a=-3/4$.

Відповідь: $a\in(-\infty;-1)\cup\{-3/4\}$.

Приклад 2.26 [6, с. 18]. *Знайдемо найбільше значення a, при якому рівняння $2\log_2^2 x-\left|\log_2 x\right|+a=0$ має розв'язок.*

Розв'язання. Після заміни $\left|\log_2 x\right|=t$ задача звелась до знаходження найбільшого значення a, при якому квадратне рівняння $2t^2-t+a=0$ має додатні корені. З нерівності $D\ge 0 \Leftrightarrow 1-8a\ge 0$ випливає, що $a\le\frac{1}{8}$. При $a=\frac{1}{8}$ квадратне рівняння має корінь $t=\frac{1}{4}>0$, отже значення $a=\frac{1}{8}$ задовольняє умовам задачі.

Відповідь: $a=\frac{1}{8}$.

Приклад 2.27. *Розв'яжемо рівняння* $\sqrt{\log_x(ax)}\log_a x=-\sqrt{2}$.

Розв'язання. Тут ОДЗ рівняння задається системою:

$$\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ a>0, \\ a\neq 1, \\ \log_x(ax)\geq 0, \end{cases}$$

звідки $x>0$ і $x\neq 1$, або $a>0$ і $a\neq 1$. Зауважимо, якщо $0<x<1$, то $0<ax<1$, а якщо $x>1$, то $ax>1$. Оскільки права частина рівняння від'ємна, то розв'язками рівняння можуть бути тільки ті значення x і a, для яких $\log_a x<0$. Тому, якщо $a>1$, то $0<x<1$, а якщо $0<a<1$, то $x>1$. Перетворимо вихідне рівняння:

$$\sqrt{\frac{\log_a x+1}{\log_a x}}\log_a x=-\sqrt{2}.$$

Оскільки рівняння може мати розв'язок для $\log_a x<0$, то $-\sqrt{\log_a^2 x+\log_a x}=-\sqrt{2}$ або $\log_a^2 x+\log_a x-2=0$, звідки $\log_a x=-2$ і $\log_a x=1$. Але $\log_a x=1>0$ рівняння не задовольняє. Дослідимо рівняння $\log_a x=-2$ або $x=\frac{1}{a^2}$. Якщо $0<x<1$, то $0<ax<1$, або $0<a\frac{1}{a^2}<1$, звідки $a>1$. Якщо $x>1$, то $ax>1$ або $a\frac{1}{a^2}>1$, звідки $0<a<1$. Отже, $x=\frac{1}{a^2}$, якщо $0<a<1$ і $a>1$.

Відповідь: $x=\frac{1}{a^2}$, якщо $a\in(0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Приклад 2.28 [9, с. 148]. *Розв'яжемо рівняння* $\sqrt{\log_2 x-\sqrt{\log_2 x-a}}=a$.

Розв'язання. Виконаємо заміну $\log_2 x=t$. Відносно t маємо ірраціональне рівняння:

$$\sqrt{t-\sqrt{t-a}}=a \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 0, \\ t-\sqrt{t-a}=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 0, \\ \sqrt{t-a}=t-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a\geq 0, \\ t\geq a^2, \\ t-a=t^2-2a^2t+a^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 0, \\ t\geq a^2, \\ t-\left(2a^2+1\right)t+a^4+a=0. \end{cases}$$

Розглянемо рівняння $t^2-\left(2a^2+1\right)t+a^4+a=0$, де

$$D=\left(2a^2+1\right)^2-4a^4-4a=4a^4+4a^2+1-4a^4-4a=4a^2-4a+1=\left(2a-1\right)^2,$$

$$t_1=\frac{2a^2+1-\left(2a-1\right)}{2}=a^2-a+1;\ t_2=\frac{2a^2+1+2a-1}{2}=a^2+a \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} a\geq 0, \\ t\geq a^2, \\ \left[\begin{array}{l} t_1=a^2-a+1, \\ t_2=a^2+a. \end{array}\right. \end{cases}$$

Визначимо a, при яких знайдені корені задовольняють систему. Маємо

$$t_1:\begin{cases} a^2-a+1\geq a^2, \\ a\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\leq 1, \\ a\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ a\in\left[0;1\right];$$

$$t_2:\begin{cases} a^2+a\geq a^2, \\ a\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ a\geq 0 \ \Leftrightarrow \ a\in\left[0;+\infty\right).$$

Отже, при $a\in\left[0;1\right]$ $t=\left\{t_1;t_2\right\}$ і при $a\in\left(1;+\infty\right)$ $t=\left\{t_2\right\}$. Повернувшись до змінної x, для $a\in\left[0;1\right]$ маємо:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x=a^2-a+1, \\ \log_2 x=a^2+a, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2^{a^2-a+1}, \\ x=2^{a^2+a}. \end{array}\right.$$

а для $a\in\left(1;+\infty\right)$: $\log_2 x=a^2+a \ \Leftrightarrow \ x=2^{a^2+a}$.

Відповідь: якщо $a\in\left[0;1\right]$, то $x\in\left\{2^{a^2-a+1};2^{a^2+a}\right\}$; якщо $a\in\left(1;+\infty\right)$, то $x\in\left\{2^{a^2+a}\right\}$.

Приклад 2.29. *Для різних значень параметра a знайдемо розв'язки рівняння*

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(9^x+a\right)+\log_3\left(2\cdot 3^x\right)=0.$$

Розв'язання. ОДЗ змінної x визначається нерівністю $9^x+a>0$. В цій області вихідне рівняння рівносильне рівнянню:

$$-\log_3\left(9^x+a\right)+\log_3\left(2\cdot 3^x\right)=0 \ \Rightarrow \ 2\cdot 3^x=9^x+a.$$

Нехай $y=3^x$. Тоді останнє рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} y^2-2y+a=0, \\ y>0. \end{cases}$$

Розглянувши квадратний тричлен $f(y)=y^2-2y+a$, зауважимо, що абсциса вершини параболи дорівнює 1, а D – дискримінант тричлена. В такому випадку, система матиме два розв'язки, якщо сумісна система

$$\begin{cases} D>0, \\ f(0)>0, \end{cases}$$

і єдиний розв'язок, якщо має розв'язок сукупність

$$\begin{cases} D=0, \\ f(0)\le 0. \end{cases}$$

Враховуючи, що $D=4(1-a)$, $f(0)=a$, знаходимо, що в першому випадку $0<a<1$, а в другому $a\le 0$ або $a=1$. Що ж стосується розв'язків, то вони задаються формулами $y_{1,2}=1\pm\sqrt{1-a}$ і $y=1+\sqrt{1-a}$. Повернувшись до змінної x, отримаємо $x_{1,2}=\log_3\left(1\pm\sqrt{1-a}\right)$ і $x_3=\log_3\left(1+\sqrt{1-a}\right)$.

Відповідь: якщо $a\le 0$, то $x_3=\log_3\left(1+\sqrt{1-a}\right)$; якщо $0<a\le 1$, то $x_{1,2}=\log_3\left(1\pm\sqrt{1-a}\right)$; якщо $a>1$, то розв'язків не має.

Приклад 2.30 [16, с. 35]. *Розв'яжемо рівняння* $\log_a(ax)\log_x(ax)=\log_{a^2}\frac{1}{a}$ *залежно від параметра* a.

Розв'язання. Запишемо рівняння в іншому вигляді:

$$\left(\log_a a+\log_a x\right)\left(\log_x a+\log_x x\right)=-\frac{1}{2}.$$

Нехай $\log_a x=t$. Тоді

$$(1+t)\left(1+\frac{1}{t}\right)=-\frac{1}{2};\ 2t^2+5t+2=0;\ t_1=-\frac{1}{2};\ t_2=-2.$$

Маємо $\log_a x=-\frac{1}{2}$, або $\log_a x=-2$, звідки $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$ і $x=\frac{1}{a^2}$. Враховуємо ОДЗ для значення параметра a (рис. 2.2).

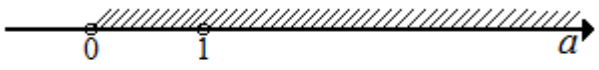


Рис. 2.2

Відповідь: якщо $a \in (-\infty;0] \cup \{1\}$, то розв'язки відсутні; якщо $a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$, то $x \in \left\{\frac{1}{\sqrt{a}}; \frac{1}{a^2}\right\}$.

Приклад 2.31. *Розв'яжемо рівняння* $3\log_{a^2 x} x + 0,5\log_{x/\sqrt{a}} x = 2$ *залежно від параметра* a.

Розв'язання.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} a > 0, \\ x > 0, \\ x^2 \neq a, \\ x \neq \dfrac{1}{a^2}. \end{cases}$$

Приведемо всі логарифми до однієї основи x:

$$\frac{3\log_x x}{\log_x a^2 x} + \frac{0,5}{\log_x \frac{x}{\sqrt{a}}} = 2, \quad \frac{3}{1+2\log_x a} + \frac{0,5}{1-0,5\log_x a} = 2.$$

Нехай $\log_x a = t$. Тоді рівняння набуває вигляду:

$$\frac{3}{1+2t} + \frac{1}{2-t} = 2 \;\Rightarrow\; 4t^2 - 7t + 3 = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = 1 \;\Rightarrow\; t_2 = \frac{3}{4}.$$

Маємо такі випадки:

$$1)\ \log_x a = 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = x, \\ a \neq 0, \\ a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

$$2)\ \log_x a = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \log_a x = \frac{4}{3} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = a^{4/3}, \\ a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

Відповідь: якщо $a \in (-\infty;0] \cup \{1\}$, то рівняння не має жодного розв'язку; якщо $a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$, то $x \in \left\{a; a\sqrt[3]{a}\right\}$.

Приклад 2.32 [9, с. 333]. *Для кожного додатного числа* a $(a \neq 1)$ *розв'яжемо рівняння*

$$\log_a^2 \sin x + \log_a \sin x - a = 0. \qquad (2.14)$$

Розв'язання. Нехай $t=\log_a \sin x$ і враховуючи, що всюди в області визначення рівняння (2.14) виконуються нерівності $\log_a \sin x \geq 0$ при $0<a<1$, $\log_a \sin x \leq 0$ при $a>1$, отримаємо дві системи рівнянь:

$$t^2-t-a=0,\ t>0,\ 0<a<1, \tag{2.15}$$

$$t^2-t-a=0,\ t<0,\ a>1, \tag{2.16}$$

(якщо $t=0$, то $a=0$, що неможливо). Якщо $0<a<1$, то квадратне рівняння $t^2-t-a=0$ має два різних дійсних корені:

$$t_1=-\frac{\sqrt{1+4a}+1}{2},\ t_2=\frac{\sqrt{1+4a}-1}{2},$$

причому $t_1<0$, $t_2>0$. Отже, якщо $0<a<1$ рівняння (2.15) має розв'язок $t=t_2$, звідки

$$\log_a \sin x=\frac{\sqrt{1+4a}-1}{2}. \tag{2.17}$$

Якщо $a>1$, то рівняння (2.16) має розв'язок $t=t_1$ і, отже,

$$\log_a \sin x=-\frac{\sqrt{1+4a}+1}{2}. \tag{2.18}$$

Отже, рівняння (2.14) рівносильне сукупності рівнянь (2.17) і (2.18), розв'язавши які, отримаємо відповідь.

Відповідь: якщо $0<a<1$, то $x=(-1)^k \arcsin a^{\frac{\sqrt{1+4a}-1}{2}}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; якщо $a>1$, то $x=(-1)^k \arcsin a^{-\frac{\sqrt{1+4a}+1}{2}}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Приклад 2.33. *При яких значеннях параметра* a *усі корені рівняння*

$$(a-1)\log_3^2(x-2)+2(a+1)\log_3(x-2)+a-3=0$$

менше 3 *?*

Розв'язання. ОДЗ: $x>2$. Оскільки, за умовою, корені рівняння мають бути менші 3, тобто $x<3$, то $x-2<1$, а значить $\log_3(x-2)<0$. Якщо позначити $y=\log_3(x-2)$, то початкове рівняння еквівалентне системі:

$$\begin{cases}(a-1)y^2+2(a+1)y+a-3=0,\\ y<0.\end{cases}$$

Якщо $a=1$, то рівняння системи прийме вигляд $4y-2=0$, тобто $y=1/2$. Але таке значення змінної y суперечить другій умові системи, а отже, $y=1/2$ не є коренем системи, яка розглядається. Нехай $a\neq 1$. В цьому випадку корені квадратного тричлена $f(y)=(a-1)y^2+2(a+1)y+a-3$ будуть менші нуля, якщо сумісна система

$$\begin{cases} D=8(3a-1)\geq 0, \\ -\dfrac{a+1}{a-1}<0, \\ (a-1)f(0)=(a-1)(a-3)>0, \end{cases}$$

де D – дискримінант тричлена $f(y)$, $-\dfrac{a+1}{a-1}$ – абсциса вершини параболи. Розв'язуючи дану систему, отримуємо $a>3$.

Відповідь: $a>3$.

Приклад 2.34. *Розв'яжемо нерівність* $\log_a x+1>2\log_x a$.

Розв'язання. ОДЗ рівняння: $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, $x\neq 1$. Тоді

$$\log_a x+1>2\log_x a \;\Leftrightarrow\; \log_a x+1>\frac{2}{\log_a x}.$$

Зробивши заміну $\log_a x=t$, отримаємо

$$t+1>\frac{2}{t} \;\Leftrightarrow\; t+1-\frac{2}{t}>0 \;\Leftrightarrow\; \frac{t^2+t-2}{t}>0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\left(t^2+t-2\right)>0, \\ t\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(t+2)(t-1)>0, \\ t\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>1, \\ -2<t<0. \end{cases}$$

Отже, враховуючи заміну, маємо два випадки в залежності від параметра a:

1) $\begin{cases} \log_a x>1, \\ -2<\log_a x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1, \\ \left[\begin{array}{l} x>a, \\ \dfrac{1}{a^2}<x<1; \end{array}\right. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_a x>1, \\ -2<\log_a x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<1, \\ \left[\begin{array}{l} 0<x<a, \\ 1<x<\dfrac{1}{a^2}. \end{array}\right. \end{cases}$

Відповідь: Якщо $a>1$, то $x\in\left(1/a^2;1\right)\cup\left(a;+\infty\right)$; якщо $0<a<1$, то $x\in\left(0;a\right)\cup\left(1;1/a^2\right)$.

Приклад 2.35. *Розв'яжемо нерівність* $\log_a x>\left|6\log_x a-1\right|$, *якщо* $0<a<1$.

Розв'язання. Нехай $\log_a x=t$. Тоді $t>\left|\dfrac{6-t}{t}\right|$. Оскільки $\left|\dfrac{6-t}{t}\right|\geq 0$, то з останньої нерівності випливає, що $t>0$ і вона є еквівалентною системі:

$$\begin{cases} t>\left|\dfrac{6-t}{t}\right|, \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t>\dfrac{6-t}{t}, \\ t>0, \\ 6-t\geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} t>\dfrac{6-t}{t}, \\ t>0, \\ 6-t<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t\left(t^2+t-6\right)>0, \\ t>0, \\ 6-t\leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} t\left(t^2+t-6\right)>0, \\ t>0, \\ 6-t<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t>0, \\ t\leq 6, \\ \left[\begin{array}{l} t>2, \\ -3<t<0, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} t>0, \\ t>6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 2<t\leq 6, \\ t>6 \end{cases} \Leftrightarrow t>2.$$

Отже, $\log_a x>2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<1, \\ 0<x<a^2. \end{cases}$

Відповідь: якщо $0<a<1$, то $x\in(0;a^2)$.

Приклад 2.36 [14, с. 10]. *Розв'яжемо нерівність* $\log_{x/a} a>\log_{a^2x} a^2$ *залежно від значень параметра* a.

Розв'язання. Запишемо ОДЗ:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} > 0, \\ \dfrac{x}{a} \neq 1, \\ a > 0, \\ a^2 x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ x > 0, \\ x \neq a, \\ x \neq \dfrac{1}{a^2}. \end{cases}$$

Зведемо логарифми до основи a: $\dfrac{\log_a a}{\log_a x - 1} > \dfrac{\log_a a^2}{\log_a a^2 + \log_a x}$. Нехай $\log_a x = t$ ($a \neq 1$, бо в протилежному випадку нерівність $\log_{x/a} a > \log_{a^2 x} a^2$ має суперечливий вигляд $0 > 0$). Тому

$$\frac{1}{t-1} > \frac{2}{2+t}, \ \frac{t-4}{(2+t)(t-1)} < 0.$$

Отже отримаємо:

$$\begin{cases} t < -2, \\ 1 < t < 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_a x < -2, \\ 1 < \log_a x < 4. \end{cases}$$

Розглянемо два випадки: 1) $\begin{cases} a > 1, \\ \left[\begin{array}{l} x < a^{-2}, \\ a < x < a^4. \end{array} \right. \end{cases}$ Враховуючи умову з ОДЗ, що $x > 0$, одержимо: $a > 1$, $x \in (0; 1/a^2) \cup (a; a^4)$.

2) $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x > a^{-2}, \\ a^4 < x < a. \end{array} \right. \end{cases}$ Усі розв'язки входять до ОДЗ.

Відповідь: якщо $a \in (0;1)$, то $x \in (a^4; a) \cup (1/a^2; +\infty)$; якщо $a \in (1; +\infty)$, то $x \in (0; 1/a^2) \cup (a; a^4)$; якщо $a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$, то рівняння розв'язків немає.

Приклад 2.37. *Розв'яжемо нерівність* $\log_{kx} x + \log_x kx^2 > 0$, *де* $0 < k < 1$.

Розв'язання. Перейдемо до основи k:

$$\frac{\log_k x}{1 + \log_k x} + \frac{2\log_k x + 1}{\log_k x} > 0.$$

Очевидно, що $x > 0$, $x \neq 1$. Зробивши заміну $\log_k x = t$, отримаємо

$$\frac{t}{1+t} + \frac{2t+1}{t} > 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{3t^2 + 3t + 1}{t(t+1)} > 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\left(3t^2+3t+1\right)(t+1)>0, \\ t\neq 0; t\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(t+1)>0, \\ t\neq 0; t\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t>0, \\ t<-1. \end{array}\right.$$

Оскільки $0<k<1$, то

$$\left[\begin{array}{l} \log_k x>0, \\ \log_k x<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<1, \\ x<1/k. \end{array}\right.$$

Відповідь: якщо $0<k<1$, то $x\in(0;1)\cup(1/k;+\infty)$.

Приклад 2.38 [10, с. 343]. *Для яких значень параметра a нерівність $\log_5\left[a\cos 2x+(1+5a^2-\sin^2 x)\cos x+4+a\right]\le 1$ правильна для всіх x?*

Розв'язання. Задана нерівність еквівалентна подвійній нерівності

$$0<a(2\cos^2 x-1)+(5a^2+\cos^2 x)\cos x+4+a\le 5.$$

Нехай $y=\cos x$. Тоді $-4<y^3+2ay^2+5a^2y\le 1$. Тепер задача зводиться до знаходження тих a, для яких остання подвійна нерівність виконується для кожного $y\in[-1;1]$. Розглянемо функцію $f(y)=y^3+2ay^2+5a^2y$. Оскільки $f'(y)=3y^2+4ay+5a^2>0$ для всіх a, то функція $f(y)$ є зростаючою. Отже,

$$\begin{cases} f(-1)>-4, \\ f(1)\le 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5a^2+2a-1>-4, \\ 5a^2+2a+1\le 1, \end{cases} \Leftrightarrow -2/5\le a\le 0.$$

Відповідь: $a\in[-2/5;0]$.

2.3. Графічний метод

При першому знайомстві з параметром важливо усвідомити необхідність уважного та точного опрацювання фіксованого, але невідомого значення. Дослідження задач із параметрами вимагає ґрунтовних знань про властивості елементарних функцій та застосування еквівалентних перетворень рівнянь і нерівностей. У ряді випадків ефективним є поєднання графічних методів аналізу з формальними аналітичними прийомами розв'язання [4, 6, 7, 11, 14, 16-18].

Загальна схема розв'язування рівнянь з параметрами графічним способом виглядає наступним чином: 1) знаходимо область допустимих значень (ОДЗ) рівняння. Це дозволяє визначити, при яких значеннях параметра рівняння є коректним і має розв'язки; 2) виражаємо параметр a як функцію від змінної.

На цьому етапі ми перетворюємо рівняння так, щоб параметр залежав від змінної (наприклад, від x); 3) будуємо графік функції $a = f(x)$ у площині для всіх значень параметра, що належать ОДЗ рівняння. Це дозволяє наочно побачити, як змінюється функція в залежності від параметра; 4) знаходимо точки перетину прямої з графіком функції. Якщо пряма $y = c$ з $c \in \mathbb{R}$ перетне графік функції $a = f(x)$, то ми визначаємо абсциси точок перетину, розв'язуючи рівняння для x; 5) записуємо відповідь. Після знаходження точок перетину, обчислюємо координати точок, які є розв'язками рівняння.

Використання програмно-педагогічних засобів, таких як Geogebra, Gran та Derive, значно сприяє більш доступному сприйняттю теми розв'язування логарифмічних рівнянь й нерівностей, що містять параметри. Ці програми дозволяють візуалізувати математичні процеси, що полегшує розуміння складних концепцій, зокрема взаємозв'язок між параметрами та розв'язками рівнянь.
Geogebra, наприклад, дає можливість будувати графіки функцій та рівнянь, що дозволяє учням бачити, як змінюються розв'язки при зміні параметрів. Gran і Derive можуть використовуватися для алгебраїчних перетворень та аналітичних розв'язків, що також допомагає учням перевіряти свої відповіді і зрозуміти, як правильно застосовувати математичні методи [1, 4, 6, 7, 10-12, 14, 16-18].

Таким чином, інтеграція цих інструментів у навчальний процес стимулює зацікавленість учнів, полегшує засвоєння матеріалу і сприяє розвитку практичних навичок у роботі з математичними задачами.

Приклад 2.39. *Визначити значення параметра a, за яких рівняння $\log_2\left(4^x - a\right) = x$ має два розв'язки?*

Розв'язання. За означенням логарифма: $4^x - a = 2^x$. Нехай $2^x = t$, $t > 0$. Тоді $t^2 - t - a = 0$; $D = 1 + 4a > 0$ при $a > -\frac{1}{4}$ і $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$. Тепер задача переформулюється так: за яких значень a обидва корені t_1 і t_2 додатні? Розглянемо функцію $f(t) = t^2 - t - a$. Її графік наведено на рис. 2.3.

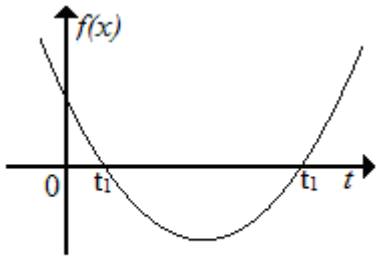


Рис. 2.3

Отже,

$$\begin{cases} D>0, \\ x_B>0, \\ f(0)>0, \end{cases} \begin{cases} a>-\dfrac{1}{4}, \\ a\in\mathbb{R}, \\ a<0. \end{cases} \quad a\in\left(-\frac{1}{4};0\right).$$

Відповідь: $a\in(-1/4;0)$.

Приклад 2.40 [7, с. 210]. *Знайдемо всі значення* a*, для яких рівняння*

$$\frac{1}{2}\log_3 4x^2+\log_3(4-x)-\log_3 2^a=0$$

має єдиний розв'язок.

▪ *Розв'язання.* ОДЗ рівняння:

$$\begin{cases} x\neq 0, \\ 4-x>0. \end{cases}$$

В ОДЗ дане рівняння рівносильне до рівняння:

$$\log_3|2x|+\log_3(4-x)=\log_3 2^a \;\Rightarrow\; |2x|(4-x)=2^a.$$

Будуємо графіки функцій $y_1=|2x|(4-x)$ і $y_2=2^a$ (рис. 2.4). Розглянемо такі випадки: а) функцію $y_1=|2x|(4-x)$ можна записати у вигляді

$$y_1(x)=\begin{cases} 2x^2-8x, & x<0; \\ -2x^2+8x, & x\in(0;4). \end{cases}$$

б) Оскільки $2^a>0$ для довільного $a\in\mathbb{R}$, то графік функції $y_2=2^a$ визначає пряму, паралельну осі Ox і розміщену вище цієї осі.

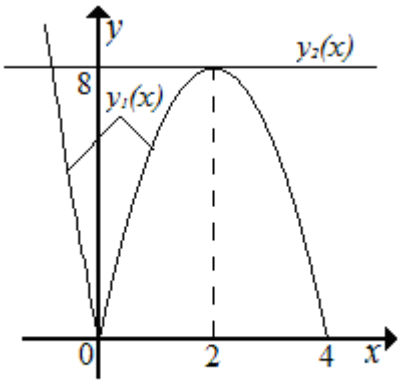


Рис. 2.4

Початкове рівняння має єдиний розв'язок для тих значень параметра a, коли графіки функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ перетинаються лише в одній точці. А це можливо, якщо $y_2(x)>8$, тобто $2^a>8$. Отже, $a\in(3;+\infty)$.

Відповідь: $a\in(3;+\infty)$.

Приклад 2.41 [28, с. 272]. *Для різних значень параметра a знайдемо розв'язки рівняння*

$$\log_3\left(31-\left|x^2-6x+5\right|\right)=a. \qquad (2.19)$$

Розв'язання. ОДЗ змінної x визначається нерівностями: $-31<x^2-6x+5<31$ $\Rightarrow$ $3-\sqrt{35}<x<3+\sqrt{35}$. Вихідне рівняння в ОДЗ рівносильне рівнянню

$$\left|x^2-6x+5\right|=31-3^a.$$

Розглянемо графік функції $y(x)=\left|x^2-6x+5\right|$ (див. рис. 2.5).

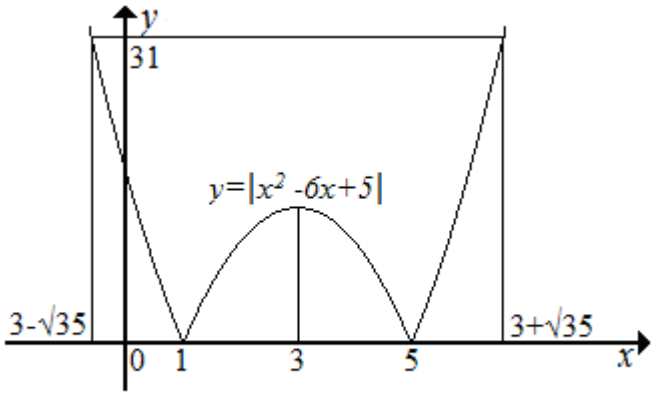


Рис. 2.5

Маємо $y\left(3-\sqrt{35}\right)=y\left(3+\sqrt{35}\right)=31$. Тоді з рис. 2.5 видно, що при $4<31-3^a<31$, тобто для $a<3$, рівняння (2.19) має два кореня – абсциси точок перетину графіка функції $y(x)$ з прямою $y=31-3^a$.

Розв'язавши рівняння $x^2-6x+5=31-3^a$, знаходимо корені

$$x_1=3-\sqrt{35-3^a},\ x_2=3+\sqrt{35-3^a}. \qquad (2.20)$$

Якщо $31-3^a=4$, тобто якщо $a=3$, то рівняння (2.19) має три корені

$$x_1=3-2\sqrt{2},\ x_2=3,\ x_3=3+2\sqrt{2}.$$

У випадку $0<31-3^a<4$, тобто для $3<a<\log_3 31$, рівняння (2.19) має чотири корені: знайдені раніше корені (2.20) і корені рівняння $-x^2+6x-5=31-3^a$, тобто $x_{3,4}=3\pm\sqrt{3^a-27}$. Якщо $31-3^a=0$, тобто якщо $a=\log_3 31$, то вихідне рівняння має два корені $x_1=1$, $x_2=5$. Якщо $a>\log_3 31$, то рівняння (2.19) розв'язку не має.

Відповідь: якщо $a<3$, то $x_{1,2}=3\pm\sqrt{35-3^a}$; якщо $a=3$, то $x_1=3-2\sqrt{2}$, $x_2=3$ і $x_3=3+2\sqrt{2}$; якщо $3<a<\log_3 31$, то $x_{1,2}=3\pm\sqrt{35-3^a}$, $x_{3,4}=3\pm\sqrt{3^a-27}$; якщо $a=\log_3 31$, то $x_1=1$ і $x_2=5$; якщо $a>\log_3 31$, то рівняння розв'язків не має.

Приклад 2.42 [3, с. 275]. *В залежності від значень параметра* a *розв'яжемо рівняння* $\dfrac{\lg(ax)}{\lg(x+1)}=2$.

Розв'язання. В області допустимих значень

$$\begin{cases} ax>0, \\ x+1>0, \\ x+1\neq 1, \end{cases}$$

вихідне рівняння рівносильне рівнянню

$$\lg(ax)=2\lg(x+1),$$

або рівнянню

$$ax=(x+1)^2. \qquad (2.21)$$

Розглянемо графіки функцій $y_1(x)=ax$ і $y_2(x)=(x+1)^2$ (див. рис. 2.6). При додатних a (а значить і $x>0$) рівняння (2.21), яке можна переписати у вигляді $x^2+(2-a)x+1=0$, матиме два корені $x_{1,2}=\dfrac{a-2\pm\sqrt{a^2-4a}}{2}$, якщо $a>4$.

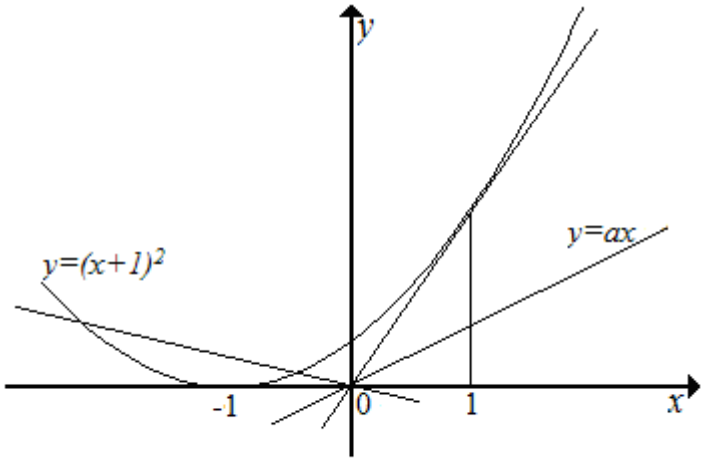


Рис. 2.6

Якщо $a=4$, то $x=1$. Якщо ж $0<x<4$, то рівняння (2.21) розв'язку не має. Припустимо, що $a<0$. Враховуючи, що в даному випадку $-1<x<0$, отримуємо, що розв'язком рівняння (2.21) є $x=\dfrac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2}$.

Відповідь: якщо $a<0$, то $x=\dfrac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2}$; якщо $0\le x<4$, то розв'язків не має; якщо $a=4$, то $x=1$; якщо $a>4$, то $x_{1,2}=\dfrac{a-2\pm\sqrt{a^2-4a}}{2}$.

Приклад 2.43. *Розв'яжемо нерівність* $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-2x+a\right)>-3$ *залежно від значень параметра* a.

Розв'язання. Перепишемо вихідну нерівність у вигляді

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-2x+a\right)>\log_{\frac{1}{2}}8.$$

Звідси випливає, що

$$0<x^2-2x+a<8 \;\Rightarrow\; 1-a<\left(x-1\right)^2<9-a. \qquad (2.22)$$

Побудуємо на координатній площині xOy графік функції $y_1=\left(x-1\right)^2$ і прямі $y_2=9-a$, $y_3=1-a$ (див. рис. 2.7). З нерівності (2.22) і рис. 2.7 випливає, що якщо $9-a\le 0$, тобто $a\ge 9$, то розв'язку вихідна нерівність не має. Якщо

$$\begin{cases}9-a>0,\\1-a<0,\end{cases}\Rightarrow\; 1<a<9,$$

то нерівність буде мати розв'язки всі x такі, що $x_1 < x < x_2$, де x_1 і x_2 – абсциси точок перетину параболи $y_1 = (x-1)^2$ з прямою $y_2 = 9-a$, які обчислюються за формулою $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{9-a}$.

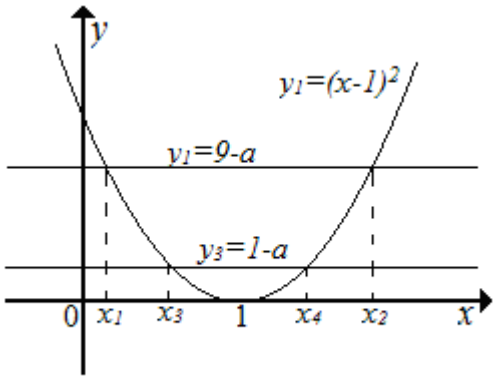


Рис. 2.7

Припустимо, що

$$\begin{cases} 9-a>0, \\ 1-a \geq 0, \end{cases} \Rightarrow a \leq 1.$$

В цьому випадку розв'язками вихідної нерівності будуть всі x, для яких $x_1 < x < x_3$, $x_4 < x < x_2$, де x_3 і x_4 – абсциси точок перетину параболи $y_1 = (x-1)^2$ з прямою $y_3 = 1-a$, які обчислюються за формулою $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1-a}$.

Відповідь: якщо $a \leq 1$, то $1-\sqrt{9-a} < x < 1-\sqrt{1-a}$, $1+\sqrt{1-a} < x < 1+\sqrt{9-a}$; якщо $1 < a < 9$, то $1-\sqrt{9-a} < x < 1+\sqrt{9-a}$; якщо $a \geq 9$, то розв'язків не має.

Приклад 2.44 [18, с. 260]. *Для всіх допустимих значень a розв'яжемо рівняння*

$$\log_a\left(x^2-3a\right) = \log_a\left(a^2-3x\right).$$

▪ *Розв'язання.* Вихідне рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} 0 < a \neq 1, \\ x^2-3a = a^2-3x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, \\ x < \dfrac{a^2}{3}, \\ (x-a)(x+a+3) = 0. \end{cases}$$

На координатній площині xOa множина точок $(x;a)$, значення координати і параметра кожної з яких задовольняє умовам системи, складається з точок півплощини $a>0$ без точок координатної осі $a=0$ і прямої $a=1$, які лежать

нижче параболи $x=\frac{a^2}{3}$ (на координатній площині ця множина точок заштрихована, див. рис. 2.9).

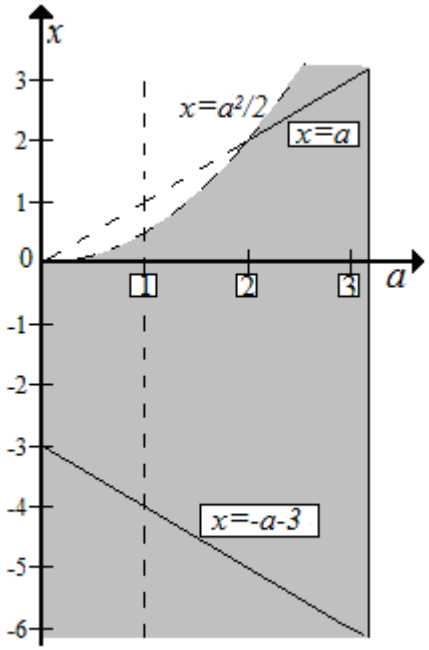


Рис. 2.9

Отже, розв'язок системи складається з точок прямих $x-a=0$ і $x+a+3=0$, які належать отриманій множині.

Відповідь: якщо $0<a<1$ і $1<a\le 3$, то $x=-a-3$; якщо $a>3$, то $x=-a-3$ і $x=a$.

Приклад 2.45. *Розв'яжемо рівняння* $\log_{a^2-x^2}\left((ax)^2-1\right)=1$ *для кожного* $a\in(0;+\infty)$.

Розв'язання. Вихідне рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} a>0, \\ \log_{a^2-x^2}\left((ax)^2-1\right)=\log_{a^2-x^2}\left(a^2-x^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ 0<a^2-x^2\ne 1, \\ (ax)^2-1=a^2-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<a\ne\sqrt{2}, \\ x^2=1. \end{cases}$$

На координатній площині xOa множина точок, які задовольняють систему нерівностей, розташовані в півплощині $a>0$ між бісектрисами $x=a$ і $x=-a$ першої і четвертої координатних чвертей, відповідно (рис. 2.10). Розв'язок рівняння зображується прямими $x=-1$ і $x=1$, паралельними параметричній осі.

Всі точки цих прямих, які належать вказаній множині і задовольняють умову $a^2 - x^2 \neq 1$, тобто $a \neq \sqrt{2}$, визначають розв'язки вихідної задачі.

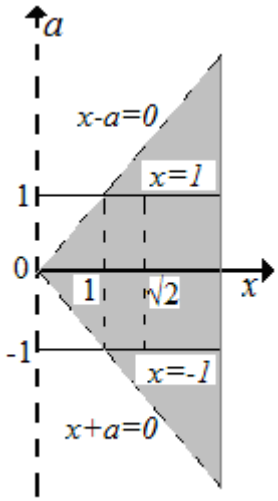


Рис. 2.10

Відповідь: якщо $0 < a \leq 1$, то $x \in \varnothing$; якщо $1 < a < \sqrt{2}$, то $x = -1$ і $x = 1$; якщо $a = \sqrt{2}$, то $x \in \varnothing$; якщо $a > \sqrt{2}$, то $x = -1$ і $x = 1$.

Приклад 2.46 [4, с. 63]. *Вкажемо всі значення* a*, для яких рівняння*

$$\log_a x + \frac{2}{\log_a x}\left|a + \log_a x\right| - \frac{a}{\log_a x} = 0$$

має розв'язки і знайдемо їх.

Розв'язання. Замінивши дане рівняння рівносильною системою, використаємо метод заміни і графічний метод. Маємо:

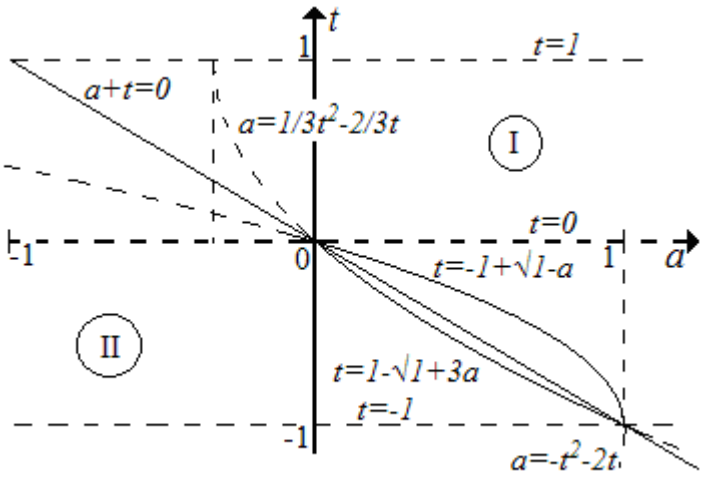


Рис. 2.11

$$\begin{cases}\log_a^2 x+2\left|a+\log_a x\right|-a=0,\\ 0<x\neq 1,\\ 0<a\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_a x=t\neq 0,\\ t^2+2\left|a+t\right|-a=0,\\ 0<a\neq 1,\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_a x=t\neq 0,\\ a+t\geq 0,\\ a=\dfrac{1}{3}t^2-\dfrac{2}{3}t,\\ 0<a\neq 1;\end{cases}\qquad (2.23)\\ \begin{cases}\log_a x=t\neq 0,\\ a+t<0,\\ a=-t^2-2t,\\ 0<a\neq 1;\end{cases}\qquad (2.24)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\text{I. }\begin{cases}0<a<1,\\ \log_a x=-1+\sqrt{1-a};\end{cases}\\ \text{II.}\begin{cases}0<a<1,\\ \log_a x=1-\sqrt{1+3a};\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\text{I. }\begin{cases}0<a<1,\\ x=a^{-1+\sqrt{1-a}};\end{cases}\\ \text{II.}\begin{cases}0<a<1,\\ x=a^{1-\sqrt{1+3a}}.\end{cases}\end{array}\right.$$

На координатній площині tOa множина розв'язків системи і отриманої сукупності являє собою частину верхньої гілки параболи (2.23), яка розташована в півплощині $t>-a$ при $0<a<1$, а множина розв'язків системи II – частина нижньої гілки параболи (2.24), яка розташована в півплощині $t<-a$ при $0<a<1$. На рис. 2.11 ці розв'язки зображені суцільними лініями.

Відповідь: якщо $0<a<1$, то $x=a^{-1+\sqrt{1-a}}$ і $x=a^{1-\sqrt{1+3a}}$.

Приклад 2.47. *Знайдемо* $a\in\mathbb{R}$, *при яких розв'язок нерівності* $\log_{0,5} x^2\geq\log_{0,5}(x+2)$ *є розв'язком нерівності* $49x^2-4a^4\leq 0$.

Розв'язання. Знайдемо множину розв'язків логарифмічної нерівності

$$\log_{0,5} x^2\geq\log_{0,5}(x+2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\leq x<0,\\ 0<x\leq 2.\end{array}\right.\qquad (2.25)$$

На координатній площині xOa ця множина являє собою смугу без прямої $x=0$, обмежену прямими $x=-1$ і $x=2$. Знайдемо множину розв'язків нерівності

$$49x^2-4a^4\leq 0\Leftrightarrow|x|\leq\frac{2}{7}a^2,\qquad (2.26)$$

і зобразимо цю множину на координатній площині.

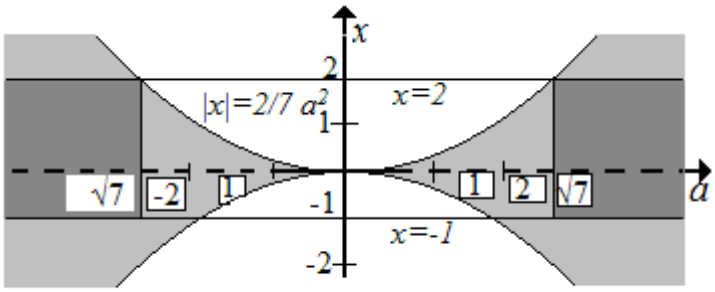


Рис. 2.12

Кожний розв'язок (2.25) міститься серед множини розв'язків (2.26) при $a \le -\sqrt{7}$ і $a \ge \sqrt{7}$.

Відповідь: $a \in (-\infty; -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}; +\infty)$.

Приклад 2.48 [11, с. 40]. *Для довільного значення параметра* a *розв'яжемо нерівність* $\log_x^2 (x+a) < 1$.

Розв'язання. Розглянемо площину xOa і побудуємо на ній множину точок, які задовольняють нерівність. Зобразимо на цій площині множину точок, для яких визначена функція $\log_x^2 (x+a)$. Це буде півплощина $x+a>0$, тобто $a > -x$ (правіше і вище прямої $x+a=0$), з якої вилучені частини прямих $x=0$, $x=1$, $x=-1$. Поза областю, обмеженою прямими $x=1$, $x=-1$, маємо $x^2>1$ і в логарифмічній нерівності можна застосувати операцію потенціювання, тобто $x+a<x^2$ (всередині області $x^2<1$, тоді вона прийме вигляд $x+a>x^2$) і $a<x^2-x$. Побудуємо графік функції $a=x^2-x$. Точки перетину з віссю Ox: $(0;0)$, $(1;0)$ і вершина $O_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$. Парабола $a=x^2-x$ дотикається до прямої $a=-x$. Коренями рівняння $x^2-x-a=0$ будуть

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2},\ x_2 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Вісь a точками -1; $-\frac{1}{4}$; 0; 1; 2 розбита на 6 ділянок, на кожній з яких зобразимо розв'язок нашої нерівності. Для цього беремо значення a з відповідної ділянки, проводимо горизонтальну пряму, знаходимо значення x, яке відповідає кінцям відрізків цієї прямої, які потрапляють в заштриховану ділянку.

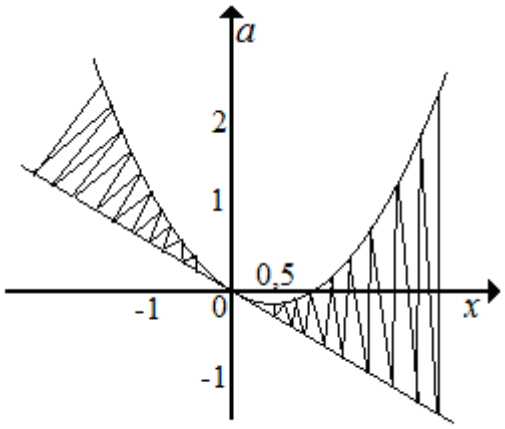


Рис. 2.13

Зокрема, якщо $-1<a<-1/4$, то отримуємо відрізки, кінці першого $x=-a$ і $x=-1$, а кінці другого $x=-1$ і $x=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Відповідь: якщо $a=0$, то $x>1$; якщо $a>0$, то $-a<x<\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$ і $1<x<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$; якщо $-\dfrac{1}{4}\le a<0$, то $-a<x<\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$ і $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}<x<1$; якщо $-1\le a<\dfrac{1}{4}$, то $-a<x<1$ і $1<x<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$; якщо $a<-1$, то $-a<x<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Приклад 2.49. *В залежності від значень параметра a розв'яжемо нерівність* $\log_{\sqrt{2a}}\left(a+2x-x^2\right)<2$.

Розв'язання. Маємо

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}x^2-2x-a<0,\\ a>0,\\ a\neq 1/2.\end{cases} \tag{2.27}$$

Перепишемо початкову нерівність у вигляді

$$\log_{\sqrt{2a}}\left(a+2x-x^2\right)<\log_{\sqrt{2a}}2a, \tag{2.28}$$

і припустимо, що $0<a<1/2$. Тоді нерівність (2.28) рівносильна нерівності $x^2-2x+a<0$ і завдяки першій нерівності з (2.27), отримаємо систему

$$\begin{cases}x^2-2x-a<0,\\ x^2-2x+a<0,\end{cases}$$

яка, врахувавши другу нерівність системи (2.27) рівносильна одній нерівності $x^2-2x+a<0$, розв'язками якої є всі $x\in(x_1;x_2)$, де $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-a}$ – корені

рівняння $a=-x^2+2x$. Нехай $a>1/2$. Тоді нерівність (2.28) рівносильна нерівності $x^2-2x+a>0$. Врахувавши першу з нерівностей (2.27), маємо систему

$$\begin{cases} x^2-2x+a>0, \\ x^2-2x-a<0. \end{cases}$$

Побудуємо в площині xOa графіки функцій $a=x^2-2x$, $a=-x^2+2x$ і пряму $a=c$ $(c>1/2)$ (див. рис. 2.14). Парам $(x;a)$, які задовольняють останню систему, на рис. 2.14 відповідають точки заштрихованої області.

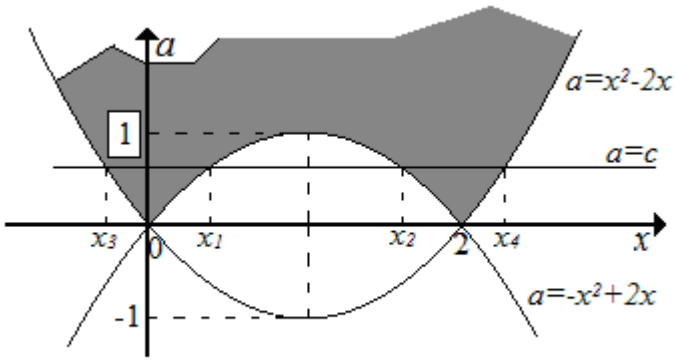


Рис. 2.14

Позначаючи через x_3, x_4 корені рівняння $a=x^2-2x$, які обчислюються за формулами $x_{3,4}=1\pm\sqrt{1+a}$, на основі отриманих раніше результатів і безпосередньо з рисунка приходимо до висновку, що розв'язками початкової нерівності будуть абсциси x тих точок, які належать перетину прямої $a=c$ $(c>1/2)$ і заштрихованої області.

Відповідь: якщо $a\le 0$ і $a=1/2$, то розв'язків не має; якщо $0<a<1/2$, то $x_1<x<x_2$; якщо $\frac{1}{2}<a\le 1$, то $x_3<x<x_1$ і $x_2<x<x_4$; якщо $a>1$, то $x_3<x<x_4$, де $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-a}$ і $x_{3,4}=1\pm\sqrt{1+a}$.

Приклад 2.50 [9, с. 149]. *Розв'яжемо нерівність* $\log_x(x-a)>2$.

Розв'язання. Дана нерівність є еквівалентною сукупності систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\0<x-a<x^2,\end{cases}\\\begin{cases}x>1,\\x-a>x^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\x>a,\\x^2-x+a>0,\end{cases}\\\begin{cases}x>1,\\x^2-x+a<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Знайдемо корені рівняння $x^2-x+a=0$:

$$x_1=\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2},\ x_2=\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}.$$

Для розв'язування скористаємося графічним методом, переписавши сукупність:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1,\\a<x,\\a>-x^2+x,\end{cases}\\\begin{cases}x>1,\\a<-x^2+x.\end{cases}\end{array}\right.$$

Побудуємо відповідні графіки функцій:

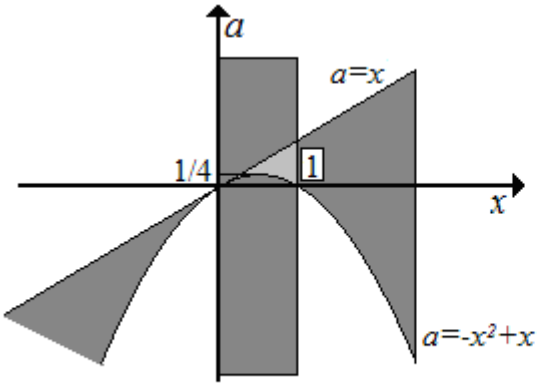


Рис. 2.15

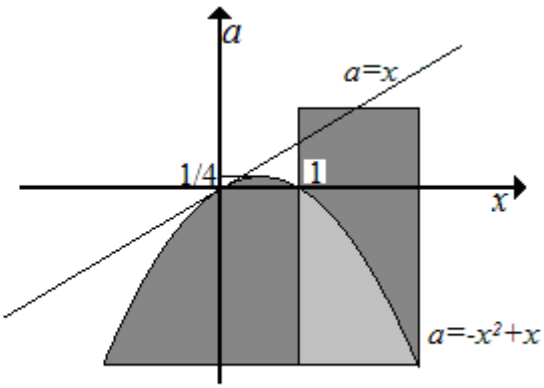


Рис. 2.16

Запишемо одержані розв'язки. Для першої системи, маємо (рис. 2.15): якщо $a\in(0;1/4]$, то $x\in(0;x_1)\cup(x_2;1)$; якщо $a\in(1/4;1)$, то $x\in(a;1)$. Для другої системи (рис. 2.16): якщо $a\in(-\infty;0)$, то $x\in(1;x_2)$.

Відповідь: якщо $a\in\left(0;\frac{1}{4}\right]$, то $x\in\left(0;\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2};1\right)$; якщо $a\in\left(\frac{1}{4};1\right)$, то $x\in(a;1)$; якщо $a\in(-\infty;0)$, то $x\in\left(1;\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$.

Розділ 3. Задачі для самостійного розв'язування

Цей розділ розрахований на тих учнів, які вже засвоїли попередні два розділи і хочуть закріпити свої знання та уміння самостійно розв'язувати логарифмічні рівняння й нерівності з параметрами. Багато задач, взяті з літературних джерел [1-28], входили в екзаменаційні білети для вступників у різні заклади вищої освіти. Опрацювавши задачі, наведені в цьому розділі, та розв'язавши їх самостійно, учень здобуде впевненість і навички грамотного розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей із параметрами, закріпить знання основних типів таких рівнянь і нерівностей, а також навчиться розпізнавати й застосовувати нестандартні підходи до їх розв'язання.

3.1. Логарифмічні рівняння з параметрами

1. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння:

1. $\log_3 a - \log_x a = \log_{\frac{x}{3}} a$.

2. $\log_2 x + \log_a x = 1$.

3. $\log_{a^2-x^2}\left(a^2x^2-1\right)=1$.

4. $\log_{x-a}\left(x^2-a^2\right)=2$.

5. $\left(\log_2\left(x+a+1\right)\right)^{\log_4\left(x^2+2ax-a^2\right)}=1$.

6. $\log_a(ax)\log_x(ax)=\log_{a^2}\dfrac{1}{a}$.

7. $\log_a x+\log_{a^2} x+\log_{a^3} x=11$.

8. $\sqrt{\log_x(ax)}=-\sqrt{2}\log_x a$.

9. $\log_{\sqrt{1-x^2}}\left(2x^2+a\right)=4$.

10. $\log_5\left(2-|x-a|\right)+\log_{0,2}(5-x)=0$.

11. $\dfrac{\log_{a^2x} a}{\log_{2x} a}+\left(\log_{ax} a\right)\log_{\frac{1}{a}} 2x=0$.

12. $\log_2 x+\log_a x+\log_4 x=1$.

13. $2\log_3 x+\log_{\frac{x}{3}} 3=a$.

14. $\log_{a(a+2)}(x+3)=1$.

15. $\sqrt{1+\log_x\sqrt{a^3}}\,\log_a x+1=0$.

16. $\log_a\sqrt{1+x}+3\log_{a^2}(1-x)=\log_{a^4}\left(1-x^2\right)^2+2$.

17. $\log_{2x}(ax+1)=\dfrac{1}{2}$.

18. $\log_a x^2+2\log_a(x+2)=1$.

19. $\log_{0,5}\left(x^2-2x+a\right)=-3$.

20. $\log_{\sqrt{x}}a\cdot\log_{a^2}\left(\dfrac{a^2-4}{2a-x}\right)=1$.

21. $1+\log_a(1-x)\cdot\log_x a=\dfrac{2}{\log_a x}$.

22. $\log_a(ax)\cdot\log_x(ax)=\log_{a^2}\dfrac{1}{a}$.

23. $3\lg^2(x-a)-10\lg(x-a)+3=0$.

24. $\lg(x-a)-\lg 2=\dfrac{1}{2}\lg(x-a)$.

25. $\lg x+\lg(x-2a)-\lg(3x-4a)=\lg a$.

26. $2\log_x a+\log_{ax}a+3\log_{a^2x}a=0$.

27. $\log_a(x-3)+\log_{x-3}a=\dfrac{2\left(a^2+1\right)}{(a-1)(a+1)}$.

28. $2\log_x a+\log_{ax}a+3\log_{a^2x}a=0$.

29. $8\log^2_{a^2}(x-a)-6\log_{a^2}(x-a)+1=0$.

30. $3\log_{a^2x}x+0,5\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}}x=2$.

31. $\sqrt{\log_x(ax)}\,\log_a x=-\sqrt{2}$.

32. $\log_{xa^2}(x-a)^2+\log_{xa}(x-a)=2$.

33. $\log_{2x}(ax+1)=\dfrac{1}{2}$.

34. $\log_a x^2+2\log_a(x+2)=1$.

35. $\sqrt{1+\log_x \sqrt{a^3}}\,\log_a x+1=0$.

2. Для всіх значень параметра a знайдіть кількість коренів рівняння:

1. $\log_9 x+\log_9 \dfrac{2-x}{2}=\log_9 \log_9 a$.

2. $\log_3\left(2+\dfrac{|x|}{x}\right)=(x+2)^2+a$.

3. $2x\lg x=3-a\lg x$.

4. $\sqrt[4]{x+a}+\log_5(x-5a)=0$.

5. $\log_2(x-a)=\log_{0,5}|x|$.

6. $e^{\frac{1}{x}}=\ln(x-a)$.

3. Знайдіть всі $x\in\mathbb{R}$, які задовольняють рівняння для будь-якого a:

1. $2\log_{3a^2+2}\left(7-\sqrt{34+x}\right)=\log_{2a^2+3}(3-x)$.

2. $2\log_{2+a^2}\left(4-\sqrt{7+2x}\right)=\log_{2+a^2x^2+3}(4-3x)$.

3. $\log_{x+a^2+1}\left(a^2x+2\right)=2\log_{7+2x}\left(5-\sqrt{6-2x}\right)$.

4. Для яких a рівняння має розв'язок?

1. $\left(1+(3a+4)^2\right)\log_2\left(-2x-x^2\right)+\left(1+(a-2)^2\right)\log_7\left(1-\dfrac{x^2}{3}\right)=\log_7\left(1-\dfrac{x^2}{3}\right)+\log_2\left(-2x-x^2\right)$.

2. $\log_2\left(\sqrt{a+4}-x\right)+\log_{\frac{1}{3}}(x-a-1)=\log_9 4$.

3. $\log_5\left(\sqrt{a+3}-x\right)+\log_{\frac{1}{5}}(x-a-2)=\log_{\sqrt{5}} 2$.

4. $\log_7\left(\sqrt{a+6}-x\right)+\log_{\frac{1}{7}}(x-a-2)=\log_{49} 4$.

5. $\lg 2x+\lg(2-x)=\lg\lg a$.

6. $\log_a\sqrt{4+x}+3\log_{a^2}(4-x)-\log_{a^4}\left(16-x^2\right)^2=2$.

7. $\log_2 x+\log_a x+\log_4 x=1$.

8. $\log_{a+1}\left(\dfrac{25}{8}+\cos x-2\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=3$.

9. $\log_{1-a}\left(2-\cos x+\sin\frac{x}{2}\right)=2$.

10. $\log_{a-3}\left(5-3\cos x-6\sin\frac{x}{2}\right)=2$.

5. Для яких a рівняння не має розв'язків?

1. $\log_{\frac{x}{2}}(a-x)=1$.

2. $\lg^2 x-(4a-3)|\lg x|+3a^2=6a-3$.

6. Для яких a рівняння має лише один розв'язок?

1. $2\lg(x+5)=\lg(ax)$.

2. $\log_4(ax-7)=2\log_{16}(12x-x^2-32)$.

3. $\lg(x^2-6x+8)^{\ln 10}=\ln(ax-17)$.

4. $\log_{\sqrt{2ax+4}}(2x^2-x+3)=2\log_{2ax+4}(x^2+2x+1)$.

5. $\log_2(5a-x)=\log_{0,5}(x-2)$.

6. $\log_2(5a-x)=\log_{0,5}(x-2)$.

7. $\log_{x-1}(x+a)=\frac{1}{2}$.

8. $\log_{x-a}\left(\frac{3}{4}x^2-x+a^2-a\right)=2$.

9. $\lg(ax^2+1)=\lg(x-a)$.

10. $\frac{\lg(ax^2+1)}{\lg(x+2)}=2$.

11. $\log_{2x}(ax+1)=1/2$.

7. Знайдіть найбільше значення a, при якому рівняння має лише один розв'язок:

1. $2\log_2(2x+3)=\log_2(ax)$.

2. $\log_2(4x^2+4ax)=\log_2(16x-6a-3)$.

8. Для яких a рівняння має тільки два розв'язки?

1. $\log_2(4^x-a)=x$.

2. $x+\log_{0,5}\left(4^x+a^3\right)=0$.

9. Для яких значень параметра a рівняння $\log_5 x\left(\log_5\left(2\lg a-x\right)\log_x 5+1\right)=2$ має розв'язок?

10. Для яких значень параметра a рівняння $2\lg\left(x+3\right)=\lg\left(ax\right)$ має лише один корінь? Визначити цей корінь.

11. Визначіть усі значення параметра a, за яких рівняння $\log_2\left(x^2-ax\right)=\log_2\left(2x-3a+3\right)$ має розв'язки.

12. При яких a рівняння $a\lg\ tg\,x+\lg c\ \mathrm{tg}\,x+\lg^2\sin x-\lg^2\cos x=0$ на проміжку $\left[0;2\pi\right]$ має тільки один корінь? Знайти його.

13. При яких a рівняння $a\log_2^2\left(x+1\right)+2\left(a+1\right)\log_2\left(x+1\right)+a+4=0$ має два від'ємні корені?

14. Яке найменше ціле значення параметра a дозволяє рівнянню $\lg\left(2x\right)+\lg\left(2-x\right)=\lg\lg a$ мати розв'язок?

15. Знайдіть найбільший корінь рівняння $\log_x^2 a-3a\log_x a+2a^2+a-1=0$ для всіх значень параметра a.

16. При якому значенні параметра a сума коренів рівняння $\log_3^2 x-\left(a+2\right)\left|\log_3 x\right|+2a=0$ найменша?

17. За яких значень параметра a добуток коренів рівняння $\lg^4 x-a\lg^2 x+2a+1=0$ дорівнює 1?

18. Для яких a сума квадратів коренів рівняння $\log_a\left|x-2a\right|+\log_a x=2$ дорівнює 4?

19. При яких значеннях параметра a добуток коренів рівняння $\log_2^2 x-\left(a^2-2a\right)\log_2 x+a+2=0$ дорівнює 8?

20. Для яких a частка коренів рівняння $\log_2\left(3x-a-4\right)=\log_2\left(x^2-3ax+3\right)$ дорівнює 2?

21. За яких a еквівалентні рівняння $\log_2(x+1)+\log_2(x-a)=\log_2(2x^2+1)$ і $\lg(x^2+(a-1)x-a)=\lg(2x^2+1)$?

22. За яких a рівняння $\lg^2 x-(a-1)|\lg x|+a-2=0$ має 4 корені, які утворюють геометричну прогресію?

23. За яких a для всіх $b<0$ рівняння $a\log_{\left(1-\frac{2}{x}\right)}4=\log_4\left(1-\frac{2}{x}\right)+b$ має корінь, що задовольняє умову $x>4$?

24. Для яких значень параметра a рівняння $\left((3x-a)\sqrt{10a-a^2-21}+(x^2-2x)\lg(2a-1)\right)\lg\frac{28a-4a^2}{45}=0$ має принаймні два корені, один з яких від'ємний, а другий не менший двох?

25. Для яких значень параметра a рівняння $\log_3 x+(a^2-4)\log_{3x}(1/3)-3=0$ має два корені, відстань між якими більша 8?

26. Для яких значень параметра a відстань між коренями рівняння $\log_a x+8\log_{ax^3}x=3$ менша за $3/2$?

27. Для яких значень параметра a вираз $\log_a\left(\frac{3+2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)+\log_a\left(\frac{4+3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ не дорівнює одиниці для довільних значень x?

28. Для яких значень параметра a вираз $\log_a\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)+\log_a\left(\sqrt{1-x^2}+7\right)$ є меншим за одиницю для довільних значень x?

3.2. Логарифмічні нерівності з параметрами

1. Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівності:

1. $\log_a(\log_x a)<1$.
2. $\log_a x+\log_a(x-2)>1$.
3. $\log_a(ax)>\log_x(ax)$.
4. $\log_a(x-3)+\log_a(x+1)>1$.
5. $a\log_2 x+\log_{2x}2+a>0$.
6. $\log_{x/a}(ax)<\log_{a^7x}a^2$.

7. $\log_a x < \log_x a$.

8. $\lg^2 x + \lg x - a^2 - a \le 0$.

9. $\lg^3 x + 3\lg x \lg a \lg(xa) + \lg^3 a > 0$.

10. $(\log_a x - 3a)(\log_a x - a - 4) \ge 0$.

11. $\dfrac{\log_a x - 1}{\log_{a-1} x - 1} > 0$.

12. $\dfrac{\log_a (35 - x^3)}{\log_a (5 - x)} > 3$.

13. $\dfrac{\log_a x - 1}{\log_{2a-2} x - 1} < 0$.

14. $\log_a^2 x^2 > 1$.

15. $\dfrac{1}{\log_a x} > 1$.

16. $\log_x (a^2 + 1) < 0$.

17. $\log_{a^2} (x^2 + 2x) < 1$.

18. $\log_a (1 - x^2) \ge 1$.

19. $\dfrac{1 + \log_a^2 x}{1 + \log_a x} > 1$.

20. $\dfrac{3\log_a x + 6}{\log_a^2 x + 2} > 1$.

21. $(\log_2 x - 1)(\log_2 x + a) > 0$.

22. $\log_a^2 x - \log_a x \le 0$.

23. $\log_a x + 1 > 2\log_x a$.

24. $\log_{\frac{x}{a}} a > \log_{a^2 x} a^2$.

25. $\log_a x > 6\log_x a - 1$.

26. $\log_{\frac{a^2+3}{a^2+2}} (2x + 3) \le \log_{\frac{a^2+3}{a^2+2}} (x + 2)$.

27. $1 - \dfrac{1}{2}\lg(2x - a) > \dfrac{1}{2}\lg(3a - x)$.

28. $\sqrt{\log_a \frac{3-2x}{1-x}} < 1.$

29. $\log_a x > \sqrt{\frac{6}{(\log_a x - 1)\log_x a}}$.

30. $\log_a (x-1) + \log_a x > 2.$

31. $\log_x 10 - \frac{1}{2}\log_a 10 > 0.$

32. $\log_a \sqrt{3,5x-1,5} \cdot \log_x a < 1.$

33. $2\log_4 (x-a+1) + \log_{\frac{1}{2}} (x-2a-3) \geq 2.$

34. $\lg x + \lg(x-2a) - \lg(3x-4a) > \lg a.$

35. $\log_{0,7}(x^2+2x) < \log_{0,7}(a+1).$

36. $1 - 0,5\lg(2x-a) > 0,5\lg(3a-x).$

37. $\log_a x + 1 > 2\log_x a.$

38. $\log_{x/a} a > \log_{a^2 x} a^2.$

39. $\log_a x + \log_2 x > 1.$

40. $\log_a^2 x - \log_a x < 0$, якщо $0 < a < 1.$

41. $\frac{1+\log_a^2 x}{1+\log_a x} > 1$, якщо $0 < a < 1.$

43. $\log_a (x-2) + \log_a x < 1.$

44. $\log_{x+2}(x^2 - 2x + a) \geq 2.$

2. При яких значеннях параметра a виконуються нерівності для будь-яких $x \in \mathbb{R}$?

1. $\log_{a/(a+1)}(x^2+2) > 1.$

2. $\log_{a(a+1)}(|x|+2) > 1.$

3. $\log_a(x^2 - 2x + a) > 1.$

4. $1 - \log_{1/7}(x^2+1) \geq \log_7(ax^2 + 4x + a).$

5. $x^2\left(2 - \log_2 \frac{a}{a+1}\right) + 2x\left(1 + \log_2 \frac{a}{a+1}\right) - 2\left(1 + \log_2 \frac{a}{a+1}\right) > 0.$

6. $\log_{a(a+2)}\left(|x|+3\right)>1$.

7. $x\left(9x+\sqrt{24-\log_a 2}\right)\geq \log_{0,5} 2a$.

3. Для яких значень a нерівність $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+2x+a\right)<-1$ виконується для довільного $x>0$?

4. Для яких значень a серед розв'язків нерівностей міститься єдине ціле число?

1. $\log_{1/3}(8-x)-\log_3\dfrac{|x-7|}{(x-3)}+\log_{1/3}\dfrac{|x-7|(9-x)}{(x-4)}<a$.

2. $-\log_{1/3}(x-4)+\log_3\dfrac{|x-5|}{(9-x)}+\log_3\dfrac{|x-7|(9-x)}{(x-4)}>a$.

5. При яких значеннях параметра a розв'язок нерівності $\left(x-2^a\right)\left(\log_2^2 x-4a\log_2 x+4a^2-1\right)\geq 0$ містить ізольовану точку?

6. Знайдіть розв'язок нерівності $a^{\log_a^2 x}<a^{4-3\log_a x}$, що належать інтервалу $(0;1)$.

7. При a нерівність $\log_{ax+0,25}\left((5a-1)x+0,2\right)>1$ має розв'язок на $[1;2]$?

8. При яких a кожний розв'язок нерівності $\log_2^2 x-2\log_2 x-3<0$ є також розв'язком нерівності $\log_2^2 x+(5-3a)\log_2 x-a-2<0$.

9. Для яких значень параметра a для будь-якого $x<0$ виконується нерівність $\log_2\left(x^2+ax+1\right)>-1$?

10. Для яких допустимих значеннях параметра a нерівність $x^2-x\sqrt{4+\log_a 7}<\log_7(a/49)$ не виконується для будь-яких $x\in\mathbb{R}$?

11. Для яких a нерівність $\sqrt{x-4a}\log_4\left(2x-x^2+25\right)>0$ має два цілих кореня?

12. Для яких значень параметра a нерівність $\log_{|x+a|}\left(x^2-3ax\right)\leq 2$ виконується для всіх $x\in[3;4]$?

13. Для яких значень параметра a нерівність $\log_{|x-a|}\left(x^2+2ax\right)\geq 2$ виконується для всіх $x\in[2;4]$?

14. Для яких значень параметра a нерівність $\log_2(x-100)-\log_{0,5}\dfrac{|x-101|}{105-x}+\log_2\dfrac{|x-103|(105-x)}{x-100}>a$ має єдиний цілий корінь?

Висновки

У магістерській роботі розглянуто методичні підходи до навчання учнів розв’язуванню логарифмічних рівнянь і нерівностей з параметрами. У першому розділі роботи викладено ключові теоретичні відомості з теми, зокрема надано довідковий матеріал про логарифми, логарифмічну функцію та їх основні властивості. Також розглянуто загальні способи і прийоми розв’язування логарифмічних рівнянь і нерівностей. У другому розділі детально проаналізовано приклади розв’язування логарифмічних рівнянь та нерівностей з параметрами за допомогою різних методів, що різняться за рівнем складності. Окремо розглянуті аналітичний метод, метод заміни та графічний метод, що дозволяє застосовувати різні підходи для ефективного вирішення задач. Третій розділ роботи включає систему вправ, призначених для самостійної роботи учнів. Ці вправи мають на меті закріпити теоретичні знання та розвинути практичні навички в розв’язуванні логарифмічних рівнянь і нерівностей з параметрами. Вони дозволяють учням самостійно застосовувати різні методи та стратегії розв’язування задач, а також допомагають вдосконалити навички аналізу та узагальнення отриманих результатів.

Отже, у роботі розглянуто методичні особливості навчання учнів розв’язування різних видів задач на логарифмічні рівняння та нерівності з параметрами, що застосовуються у профільних класах старшої школи. Проаналізовано індивідуальні особливості сприйняття й розуміння учнями понять, пов’язаних із цими рівняннями та нерівностями, на різних етапах їх розв’язування. Акцентовано увагу на типових помилках школярів під час роботи з такими задачами та запропоновано шляхи їх усунення.

Досліджено вплив різних методичних прийомів на ефективність процесу розв’язування задач цього типу, а також виділено ключові фактори, що визначають успішність навчання. Серед них: послідовність подання та розв’язування задач; рівень розуміння учнями умов задачі; методи аналізу, пояснення та оформлення розв’язку; ступінь самостійності учнів у процесі роботи; організація роботи над помилками.

Отримані результати дозволяють покращити методику викладання цієї теми та підвищити рівень засвоєння матеріалу школярами.

Матеріали магістерської роботи можуть знайти застосування при підготовці учнів до випускних екзаменів у середній школі, до складання абітурієнтами НМТ й вступних іспитів у заклади вищої освіти.

Ця магістерська робота буде корисною для вчителів математики, а також для всіх, хто бажає самостійно покращити свою математичну культуру.

Список використаних джерел

1. Апостолова Г.В., Ясінський В.В. Перші зустрічі з параметром. К.: Факт, 2006. 324 с.

2. Бевз Г.П. Методика викладання математики: навч. посіб. К.: Вища школа, 1989. 367 с.

3. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Збірник задач з математики: навч. посіб. К.: Либідь, 1993. 344 с.

4. Заслонкіна Л.С. Задачі з параметрами. Х.: Вид. група «Основа», 2012. 108 с.

5. Захарійченко Ю.О. Математика: зб. тест. завдань для підготов. до зовн. незал. оцін. К.: Ґенеза, 2008. 104 с.

6. Іванко Т.І. Систематизація методів розв'язування показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей. *Математика в школах України.* 2007. № 7. С. 16-21.

7. Істер О.С. Методи розв'язування задач з математики. Теорія. Приклади. Вправи. Книга 1. – Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2014. 480 с.

8. Каплан Я.Л. Математика. Посібник для підготовки до конкурсних екзаменів до вузів. К.: Вища школа, 1971. 504 с.

9. Ковальчук В.Ф., Корнієць С.Д., Лавренюк В.І., Мартиненко В.С., Шарова Л.І. Математика: навч. посіб. К.: «Козаки», 1996. 185 с.

10. Крамор В.С. Задачі з параметрами і методи їх розв'язання. Тернопіль: Навчальна Книга-Богдан, 2012. 416 с.

11. Кушнір В.А. Технологія розв'язування та конструювання логарифмічних рівнянь та нерівностей з позиції їх перетворень. *Математика в рідній школі.* 2016. № 5. С. 39-46.

12. Лейфура В.М., Воробйова А.І. Задачі з параметрами. К.: ІЗМН, 1996. 112 с.

13. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, проф. рівень. Х.: Гімназія, 2011. 431 с.

14. Моісеєнко В.І. Показникові і логарифмічні рівняння й нерівності з параметром. *Математика в школах України.* 2008. № 36. С. 2-12.

15. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів, профільний рівень. Х.: Гімназія, 2010. 416 с.

16. Опята Л.І. Показникові та логарифмічні рівняння, що містять параметри. *Математика в школах України*. 2004. № 17-18. С. 34-37.

17. Повзло Н.М. Розв'язування логарифмічних нерівностей. *Математика в школах України.* 2006. № 11. С. 7-17.

18. Прус А.В., Швець В.О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики: навч.-метод. посіб. Житомир: Вид-во «Рута», 2016. 468 с.

19. Репета В.К., Клешня Н.О., Короболова М.В., Репета Л.А. Задачі з параметрами: навч. посіб. К.: Вища шк., 2006. 302 с.

20. Роганін О.М. Збірник тренувальних вправ з математики. Харків: Весна, 2008. 96 с.

21. Сарана О.А., Ясінський В.В. Конкурсні задачі підвищеної складності з математики: навч. посіб. К.: НТУУ "КПІ", 2005. 260 с.

22. Сарана О.А. Математичні олімпіади просте і складне поруч: навч. посіб. Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2011. 360 с.

23. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. К.: Зодіак-Еко, 2000. 512 с.

24. Тихієнко В. Задачі з параметром: міркуймо разом. *Математика в школі.* 2003. №10. С. 41-44.

25. Шарова Л.І. Рівняння і нерівності. К.: Вища школа, 1981. 280 с.

26. Швець В.О., Прус А.В. Збірник задач з методики навчання математики. Житомир: Рута, 2011. 388 с.

27. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Хмара Т.М. Алгебра і початки аналізу. Підруч. для 10 кл. з поглибл. вивч. математики в середніх закладах освіти. К.: Освіта, 2004. 318 с.

28. Ясінський В.В. Математика: навч. посіб. К.: ІДП НТУУ «КПІ», 2014. 472 с.

29. Хаць Р.В., Сюшко Х.В. Методичні особливості навчання учнів розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей з параметрами. *Актуальні проблеми сучасної науки:* матеріали XII міжнародної науково-практичної конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій. Дрогобич, 2025. С. 256.