

Міністерство освіти і науки України

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

завідувач кафедри математики та економіки,

кандидат пед. наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК

«__» _____ 2025 р.

Пропедевтика формування стереометричних уявлень учнів
в курсі математики 5-6 класів

Спеціальність 014 «Середня освіта (Математика)»

Магістерська робота

на здобуття кваліфікації – магістр середньої освіти. Вчитель математики,
вчитель інформатики.

Автор роботи: Шиманський Михайло Михайлович _____

підпис

Науковий керівник: кандидат педагогічних наук, доцент

Гордієнко Ірина Валеріївна _____

підпис

Дрогобич, 2025

Пропедевтика формування стереометричних уявлень учнів в курсі математики 5-6 класів

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

[illegible]

Голова ЕК

прізвище, ім'я

Секретарь ЕК _____

прізвище, ім'я

Анотація

Шиманський М.М. *Пропедевтика формування стереометричних уявлень учнів в курсі математики 5-6 класів* – Рукопис. – 53 с.

Розкрито теоретичні основи формування стереометричних уявлень учнів. Наведено короткий нарис з історії вивчення елементів стереометрії у вітчизняній школі. Описано мету і зміст вивчення елементів стереометрії в 5-6 класах Нової української школи. Розроблено методичні підходи до пропедевтики стереометрії в курсі математики 5–6 класів та методику формування уявлень і понять про стереометричні фігури та деякі їх властивості. Описано психолого-педагогічні особливості розвитку просторового мислення учнів 5–6 класів.

Ключові слова і фрази: стереометрія, пропедевтика, просторові уявлення учнів 5-6 класів.

Annotation

Shymansky M.M. *Propaedeutics of the formation of stereometric ideas of students in the mathematics course of grades 5-6.* – Manuscript. – 53 p.

The theoretical foundations of the formation of stereometric ideas of students are revealed. A brief essay on the history of studying the elements of stereometry in the domestic school is given. The purpose and content of studying the elements of stereometry in grades 5-6 of the New Ukrainian School are described. Methodological approaches to propaedeutics of stereometry in the mathematics course of grades 5-6 and the methodology for forming ideas and concepts about stereometric figures and some of their properties are developed. The psychological and pedagogical features of the development of spatial thinking of students in grades 5-6 are described.

Keywords and phrases: stereometry, propaedeutics, spatial ideas of students in grades 5-6.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
Розділ 1. Теоретичні основи формування стереометричних уявлень учнів.....	8
1.1. Короткий нарис з історії вивчення елементів стереометрії у вітчизняній школі.....	8
1.2. Мета і зміст вивчення елементів стереометрії в 5-6 класах Нової української школи.....	18
Розділ 2. Методичні підходи до пропедевтики стереометрії в курсі математики 5–6 класів.....	22
2.1. Психолого-педагогічні особливості розвитку просторового мислення учнів 5–6 класів.....	22
2.2. Методика формування уявлень і понять про стереометричні фігури та деякі їх властивості.....	25
Висновки.....	39
Список використаних джерел.....	41
Додатки.....	43

ВСТУП

Сучасна шкільна математична освіта спрямована на формування в учнів не лише системи знань, умінь і навичок, а й ключових компетентностей, необхідних для успішної життєдіяльності, творчого мислення та здатності застосовувати набуті знання у практичних ситуаціях. В умовах реалізації Концепції «Нова українська школа» особливого значення набуває розвиток просторового мислення, яке є одним із базових компонентів математичної компетентності. Ефективне формування просторових уявлень учнів потребує системної пропедевтичної роботи, що починається вже на етапі вивчення математики у 5–6 класах.

Проблема формування стереометричних уявлень є актуальною у зв'язку з тим, що саме ці уявлення становлять фундамент для подальшого засвоєння курсу геометрії, зокрема стереометрії в старших класах. Недостатня увага до пропедевтичного етапу призводить до труднощів у розумінні просторових відношень, невмінні учнів уявляти геометричні фігури в просторі, виконувати їхні перетворення, аналізувати властивості тіл та їх зображення. У зв'язку з цим виникає необхідність наукового обґрунтування змісту, форм і методів пропедевтики формування стереометричних уявлень у процесі навчання математики в середній школі.

Теоретичні основи вивчення геометрії та розвитку просторового мислення учнів розроблялися у працях Л. Виготського, Ж. Піаже, Д. Ельконіна, В. Давидова, П. Гальперіна, Н. Менчинської, які наголошували на важливості переходу від наочно-образного до абстрактно-логічного мислення. Питання формування геометричних понять і уявлень досліджували українські науковці М. Бурда, Г. Бевз, О. Істер, Н. Тарасенкова, Л. Стадник, які розробили підходи до змістового наповнення і методики навчання геометрії в основній школі. Разом з тим, проблема пропедевтики стереометричних уявлень у молодшому підлітковому віці залишається недостатньо дослідженою, що зумовлює наукову новизну обраної теми.

Актуальність дослідження зумовлена необхідністю забезпечення наступності між курсами математики 5–6 класів і систематичним курсом геометрії; потребою у формуванні в учнів готовності до сприйняття просторових понять; а також вимогами сучасних освітніх стандартів щодо розвитку візуально-просторової компетентності. Важливим також є врахування психолого-педагогічних особливостей учнів цього вікового періоду, у яких інтенсивно розвивається просторове сприйняття, уява, моторно-зорові координації, що створює сприятливі умови для формування стереометричних уявлень.

Об'єктом дослідження є процес навчання математики учнів 5–6 класів.

Предметом дослідження — пропедевтика формування стереометричних уявлень учнів у процесі вивчення математики.

Мета роботи полягає у теоретичному обґрунтуванні та розробленні методичних підходів до формування стереометричних уявлень учнів 5–6 класів у курсі математики.

Для досягнення поставленої мети передбачено розв'язання таких завдань:

1. Проаналізувати психолого-педагогічні передумови формування просторових уявлень учнів середнього шкільного віку.
2. Визначити сутність та структуру стереометричних уявлень у контексті навчання математики.
3. Дослідити зміст навчального матеріалу 5–6 класів щодо можливостей пропедевтики елементів стереометрії.
4. Розробити методику формування стереометричних уявлень учнів на пропедевтичному етапі.

Наукова новизна роботи полягає у розкритті методичних засад пропедевтики формування стереометричних уявлень у курсі математики 5–6 класів, уточненні поняття «стереометричні уявлення учнів основної школи» та визначенні етапів їх формування.

Практичне значення дослідження полягає у можливості використання розроблених рекомендацій, дидактичних матеріалів та методичних прийомів у

практиці роботи вчителів математики, у процесі підготовки майбутніх педагогів у закладах вищої освіти.

Розділ 1. Теоретичні основи формування стереометричних уявлень учнів

1.1. Короткий нарис з історії вивчення елементів стереометрії у вітчизняній школі

Історія становлення різних підходів до вивчення геометрії у площині та просторі має багатовікову традицію, що знайшла своє відображення в розвитку математичної науки та методики її викладання.

Перші наукові спроби осмислення явища «перспективи» здійснили митці епохи Відродження XV–XVI ст., серед яких варто відзначити Леонардо да Вінчі та А. Дюрера. У XVII ст. завдяки працям французького інженера Ж. Дезарга сформувалися основи проєктивної геометрії, що стала якісно новим етапом у розвитку математичних знань і найбільш повно відобразила взаємозв'язок планіметрії та стереометрії.

Подальший крок у розвитку геометричної науки відбувся у XVIII ст., коли було створено нарисну геометрію — дисципліну, що вивчає способи зображення просторових тіл на площині. Засновником цього напрямку став французький математик і інженер Г. Монж, який у своїй праці «Трактат з нарисної геометрії» (1799) підкреслив важливість взаємодії геометрії площини та простору.

XIX ст. цілком слушно розглядають як добу інтенсивного розвитку геометрії. У цей період сформувалися нові напрями досліджень, що мали безпосередній вплив на методику шкільної геометричної освіти. Однією з ключових проблем стало визначення місця стереометрії у системі шкільного курсу. Традиційний поділ геометрії на планіметрію та стереометрію, започаткований ще Евклідом, зазнав критичного переосмислення. Зокрема, у 1825 р. французький математик Ж. Жергонн висловив думку про штучність такого розмежування, вказуючи на його негативний вплив на формування логічного мислення учнів.

У середині XIX ст. питання взаємозв'язку планіметричного та стереометричного матеріалу набуло нового осмислення. Так, у праці німецького математика Бретшнайдера *«Посібник з елементарної геометрії для гімназій»*

(1844) наголошувалося на неефективності ізолюваного вивчення цих розділів. Учений підкреслював, що розмежування планіметрії та стереометрії гальмує розвиток просторової уяви й просторових уявлень учнів, що, у свою чергу, негативно впливає на їх загальний інтелектуальний розвиток. На його думку, значно кращих результатів можна досягти за умов паралельного опрацювання цих тем.

У науково-методичній літературі того часу формується новий підхід до викладання геометрії, відомий як метод геометричного фузіонізму (від лат. *fusio* – «злиття»). Відповідно до цього підходу, планіметричний і стереометричний матеріал необхідно розглядати одночасно, з певною перевагою стереометрії. Ідеї фузіонізму знайшли підтримку серед провідних математиків та педагогів. Зокрема, відомий німецький математик і педагог Ф. Клейн, виступаючи за реформування системи математичної освіти, наголошував на доцільності розвитку просторових уявлень учнів у цілісному вигляді. Він вважав правильним насамперед привчати школярів до роботи з тривимірними об'єктами, замість того щоб штучно обмежувати їх мислення площиною.

Метод геометричного фузіонізму отримав подальший розвиток у працях західноєвропейських математиків XVIII–XIX ст. Так, у 1874 р. у Франції було опубліковано працю Ш. Мере «Нові елементи геометрії», у якій здійснено спробу реалізувати ідеї фузіонізму у викладанні геометрії на основі принципу руху. В Італії з'явилися підручники Р. де Паоліса, Г. Лайнері, А. Бассані, Дж. Веронезе, де планіметричний та стереометричний матеріал розглядався у тісному взаємозв'язку. Аналіз окремих із цих видань подано у працях В. М. Фесенка, присвячених вивченню розвитку ідей фузіонізму [81]. Питання інтеграції площинної та просторової геометрії досліджували також німецькі математики й педагоги І. Генріці та П. Трейтлейн.

З поширенням ідей геометричного фузіонізму кількість його прихильників невпинно зростала. Відтак, цілком закономірним було те, що цьому підходу приділено значну увагу на з'їзді Міжнародної комісії з питань викладання математики, який відбувся у Брюсселі 9–10 серпня 1910 р. Розгорнутий аналіз

розвитку ідей фузіонізму в геометрії в зарубіжній літературі, а також систематизацію основних джерел з цієї проблематики та їх критичний огляд подано у дисертаційному дослідженні Я. М. Жовніра.

Ідеї фузіонізму планіметрії та стереометрії знайшли повне втілення у працях математика й педагога М. І. Лобачевського. У своєму підручнику для гімназій *«Геометрія»* (1823) він запропонував поділ геометрії на лонгіметрію, планіметрію та стереометрію в метричному розумінні цих понять. Водночас у питаннях, що не стосувалися безпосередніх вимірювань, учений не відокремлював твердження плоскої геометрії від відповідних просторових положень, наголошуючи на необхідності їх органічного поєднання. Лобачевський вважав за доцільне розпочинати вивчення геометрії саме з просторових тіл, поступово переходячи до площинних фігур.

Отже, вже на початку XIX ст. М. І. Лобачевський виступав активним прихильником ідей фузіонізму, які наприкінці століття набули широкої підтримки серед математиків і педагогів. У другій половині XIX ст., у зв'язку зі створенням нових типів навчальних закладів, виникла потреба в оновлених програмах і підручниках з геометрії.

Передові методико-математичні ідеї знаходили відображення й у працях українських педагогів-математиків. Так, у 1923 р. у Харкові була опублікована праця М. М. Душина *«Курс елементарної геометрії»*, у якій курс геометрії подано з максимальним дотриманням принципів методу фузіонізму.

Розгорнутий аналіз етапів становлення та розвитку математичної думки в Україні подано у монографії Б. М. Білого. Важливо зазначити, що у 1920 р. була затверджена *«Схема народної освіти УРСР»*, відповідно до якої в Україні почала формуватися система єдиної трудової семирічної школи. Це зумовило потребу в розробленні нових навчальних програм, підручників та методичних посібників, що відповідали б оновленим вимогам шкільної освіти.

Першу програму з математики для української трудової школи було розроблено керівником Київського методичного центру, відомим педагогом-математиком К. Ф. Лебединцевим. Він також уклав і перший навчальний план

для української трудової семирічної школи. Згідно з цим планом, математика як окремий предмет викладалася у 4–7-х класах, тоді як у 1–3-х класах її вивчення інтегрувалося з іншими освітніми галузями.

Програма з математики для початкових класів передбачала наочне ознайомлення учнів із найпоширенішими у навколишньому світі геометричними тілами та фігурами, зокрема кулею, кубом, кругом, квадратом, трикутником, прямокутником, прямою призмою, пірамідою, циліндром і конусом. Такий підхід забезпечував формування в дітей початкових просторових уявлень і закладав підґрунтя для подальшого систематичного вивчення геометрії.

Упродовж 4–7 років навчання учні опановували властивості геометричних фігур і тіл, засвоювали основи вимірювання довжин, а також обчислення площ і об'ємів.

Значні зміни порівняно з попередніми документами відобразила програма 1922–1923 н. р., у якій навчальний матеріал було систематизовано за окремими тематичними групами та доповнено методичними рекомендаціями щодо його викладання. У ній передбачалося опрацювання значного обсягу геометричного матеріалу із застосуванням індуктивно-лабораторного методу, що відповідало новим підходам у методиці навчання математики.

Починаючи з 1924 р., у школах України офіційно впроваджувався комплексний метод навчання. Відповідно до нової програми, особливу увагу приділяли пропедевтиці рівнянь та послідовній реалізації фузіоністського підходу у процесі ознайомлення учнів з елементами наочної геометрії.

Впровадження оновлених навчальних планів і програм з математики в українській школі спричинило нагальну потребу у створенні підручників, що відповідали б новим вимогам. Значну роль у цьому процесі відіграв відомий український педагог-математик О. М. Астряб [1]. У 1922 р. він видав посібник *«Наочна геометрія»*, а в 1923 р. — *«Задачник з наочної геометрії»*. Обидва видання неодноразово перевидавалися, були перекладені кількома мовами та здобули широке визнання.

Особливістю підручників О. М. Астряба було те, що ознайомлення учнів з геометрією розпочиналося з просторових фігур, які школярі мали змогу відтворювати з різних матеріалів (глини, воску, картону). Далі учні переходили до вивчення складових елементів цих фігур — поверхні, лінії та точки. Значний акцент робився на практичних завданнях: вимірюванні довжин, обчисленні площ та об'ємів. Автор дотримувався принципів фузіонізму, органічно поєднуючи планіметричний і стереометричний матеріал, і застосовував індуктивно-лабораторний метод навчання, що забезпечувало розвиток просторового мислення школярів [1].

Двадцять років ХХ ст. стали часом активного утвердження ідей фузіонізму в українській геометричній освіті. Навчальні програми, підручники та методичні матеріали укладалися з урахуванням принципів комплексності. У цей період О. М. Астряб створює низку нових посібників: *«Математичні вправи на комплексні теми»* (1926) для молодшого концентру трудової школи, а також *«Геометрія на дослідях»* і *«Геометрія для трудшкіл»* (1927) для старших класів семирічки.

Підручник *«Геометрія для трудшкіл»* охоплював не лише питання планіметрії, а й вводив учнів у світ основних понять стереометрії, при цьому матеріал подавався через аналіз реальних прикладів із повсякденного життя. Поряд із навчальною літературою в Україні у цей період почали з'являтися й перші методичні посібники, присвячені проблемам викладання математики. Так, у праці *«Математика в трудовій школі»* (1923) В. С. Воропай розглянув питання змістового наповнення шкільного курсу математики, наголосивши, що його провідною ідеєю має стати ідея функціональної залежності. При цьому вчений підкреслював важливість застосування принципів фузіонізму та концентризму при побудові та поступовому розгортанні навчального матеріалу.

У 1929 році М. П. Голубенко опублікував статтю, у якій розглянув принципи побудови курсу геометрії для учнів 5–7-х класів. У межах «комплексної системи» він визначив «систематичний курс» геометрії як складову загального математичного навчання, підкресливши необхідність його

викладання на основі методу фузіонізму. На думку вченого, саме курс геометрії найбільш вдало дозволяє ознайомити школярів з математичною методологією, адже саме в геометрії структура і системність математики постає перед учнем найяскравіше.

Дослідження методичної літератури 1920-х років показує, що українські педагоги-математики активно підтримували новаторські підходи, прагнули до підвищення якості математичної освіти та відстоювали ідеї раціонального фузіонізму під час викладання математики.

Після скасування у 1931 році комплексного методу навчання в школі було припинено й використання принципів фузіонізму у викладанні математики. Проте інтерес до ідей геометричного фузіонізму не зник серед прогресивних педагогів-математиків. Так, уже в 1949 році С. А. Богомолів підготував посібник для вчителів середніх шкіл і студентів педагогічних закладів, у якому курс геометрії викладався на аксіоматичній основі з дотриманням фузіоністського підходу. Автор підкреслював, що таке подання матеріалу сприяє розвитку просторового мислення й уяви школярів.

У цей період М. Ф. Четверухін провів дослідження, присвячені розвитку просторових уявлень і уяви учнів, і дійшов висновку, що учні 6–7-х класів володіють достатнім запасом просторових уявлень, на основі яких можна організовувати викладання курсу геометрії з включенням необхідних стереометричних понять.

У 1950–1960-х роках були опубліковані роботи таких педагогів-математиків, як Б. В. Кутузов, Л. М. Лоповка, Л. М. Бескін, І. К. Андронов, Б. І. Аргунов, М. Б. Балка та інших, у яких підтримувався метод фузіонізму. Автори підкреслювали, що інтегроване вивчення планіметрії та стереометрії є більш природним і сприяє кращому засвоєнню геометричного матеріалу.

Програма з математики 1954–1955 н. р. передбачала опанування простіших просторових фігур із широким використанням наочності. З 1956 року, замість стабільного підручника з геометрії А. П. Кисельова, у школи вводяться

підручник М. Н. Нікітіна та збірник задач М. Н. Нікітіна і Г. Г. Маслової, що відповідало оновленим методичним підходам.

З 1958 року основною формою шкільного навчання стає восьмирічна школа, що зумовило певні зміни в курсі геометрії. В основу програми було покладено планіметрію, водночас до курсу включено елементи стереометрії, спрямовані на навчання учнів розв'язувати задачі з обчислення площ поверхонь і об'ємів простих геометричних тіл. Вивчення стереометричного матеріалу мало забезпечити підготовку учнів до практичної діяльності після завершення школи, формування усвідомлення взаємозв'язку планіметричних понять із реальними об'єктами та розуміння практичної значущості геометричних фактів.

Питання відновлення застосування принципів фузіонізму у шкільному курсі геометрії стало предметом активної наукової дискусії. Український педагог-математик І. Ф. Тесленко пропонував включати елементи стереометрії вже у курс наочної геометрії для 5–6-х класів, а в 8-му класі зосереджуватися на розв'язуванні задач, що стосуються обчислення площ поверхонь та об'ємів геометричних тіл [15].

Більшість методистів з навчання математики вважали, що елементи стереометрії доцільно вивчати разом із планіметричним матеріалом, але більш компактно, як окремий розділ. Тому у 1960 році елементи стереометрії були офіційно включені до шкільної програми з математики з метою забезпечення учнів повним обсягом геометричних знань.

Протягом певного часу основним підручником залишався варіант Н. М. Нікітіна, дещо адаптований під нову програму. У 1960 році в Україні О. С. Дубинчук та І. Ф. Тесленко створили підручник з геометрії, який, окрім матеріалу з планіметрії, містив розділ *«Поверхня і об'єм піраміди, конуса та кулі»*. Автори зазначали, що формули для обчислення площ поверхонь і об'ємів цих тіл подано без строгих доведень, а детальний виклад властивостей геометричних тіл та обґрунтування правил вимірювання величин передбачено у курсі геометрії для старших класів [7].

У цей період з'являється низка статей та методичних посібників, у яких надаються рекомендації щодо викладання стереометричного матеріалу у курсі планіметрії, а також пропонується орієнтовне планування навчального матеріалу. На сторінках журналу *«Математика в школі»* активно обговорювалися питання методики викладання стереометрії в основній школі. На основі цих досліджень комісією під керівництвом академіка А. М. Колмогорова у 1965 році був підготовлений проект програми з математики для середньої школи.

Як слушно відзначає Г. Г. Маслова, найбільших змін зазнав курс геометрії. Згідно з новою програмою передбачалося:

1. починати формування базових геометричних уявлень уже в молодших класах;
2. у середніх класах спростити логічну структуру курсу порівняно з традиційною евклідовою системою;
3. у старших класах будувати курс геометрії систематично на основі векторного підходу;
4. враховувати міжпредметні зв'язки з курсами креслення, фізики, географії та інших природничих дисциплін.

Вивчення геометрії пропонувалося організувати у три послідовні етапи:

1. у 1–4-х класах та першому півріччі 5-го класу розглядати елементи геометрії в рамках курсу математики;
2. з другого півріччя 5-го класу до 7-го класу впровадити систематичний курс планіметрії з включенням стереометричних елементів;
3. у 8–10-х класах завершити вивчення курсу геометрії, поглиблюючи та закріплюючи отримані знання.

Після обговорення у 1968 році в журналі *«Математика в школі»* була опублікована оновлена програма з математики для середньої школи, у якій курс планіметрії для 6–8-х класів включав вибрані питання стереометрії. Зокрема, метою вивчення теми *«Початкові відомості з стереометрії»* у 7-му класі було

систематизувати знання, отримані на уроках креслення, про площини, прямі в просторі та прості просторові фігури, причому основні стереометричні факти подавалися без строгих доведень. Під час розгляду теми *«Подібність»* учні ознайомлювалися з формулами обчислення об'єму та бічної поверхні призми і піраміди. У 8-му класі вивчалася тема *«Циліндр і конус, їх об'єми та бічні поверхні»*.

Запропонована програма внесла певні зміни у вивчення початкових відомостей зі стереометрії порівняно з програмою 1960 року, проте елементи стереометрії й надалі подавалися без належного поєднання з планіметричним матеріалом. Проблема створення підручника залишалася невирішеною. Авторський колектив на чолі з А. М. Колмогоровим розробив нові навчальні посібники для 6–8-х класів, за якими починаючи з 1972–1973 навчального року викладалася геометрія у школах. На основі цих підручників також створювалися методичні посібники для вчителів.

Згідно з програмою 1968 року, початкові відомості зі стереометрії передбачалося викладати в 7–8-х класах окремим розділом. Методисти підкреслювали, що знайомство з цим матеріалом повинно підготувати учнів до вивчення курсу креслення (7–9 класи) та окремих тем фізики, а також забезпечити кращу підготовку до систематичного курсу стереометрії в 9–10-х класах, надаючи курсу геометрії восьмирічної школи більшої завершеності.

Починаючи з 1973 року, розділ *«Початкові відомості зі стереометрії»* було перенесено з 7-го в 8-й клас, а викладання здійснювалося за підручником А. М. Колмогорова. При цьому його основне призначення полягало в систематизації знань, отриманих учнями під час вивчення креслення. Головною метою було формування та розвиток просторових уявлень учнів, що сприяло загальному розвитку та підготовці до подальшого вивчення систематичного курсу стереометрії. Теоретичний матеріал подавався без строгих доведень і супроводжувався численними ілюстраціями, моделями та малюнками.

Перші підсумки впровадження нових програм і підручників з математики виявили зниження рівня знань та навичок учнів з геометрії. Зокрема,

відзначалося, що абітурієнти стали гірше розв'язувати задачі з геометрії, особливо ті, що передбачали комбінування різних геометричних тіл, а також дещо погіршилися їхні просторові уявлення.

Викладання елементів стереометрії у восьмирічній школі зазнало критики з боку вчителів, методистів і працівників вищих навчальних закладів. Серед основних причин невдач зазначалися недосконалість програм, їх перевантаженість, епізодичний характер викладу стереометричного матеріалу та відсутність підручника, який би повністю реалізовував цю ідею відповідно до вимог програми.

На сторінках журналу *«Математика в школі»* розгорнулася активна дискусія. Одні автори виступали за повне виключення з курсу геометрії 8-го класу теми *«Початкові відомості зі стереометрії»*, оскільки ці питання передбачені для 9–10-х класів. Інші ж пропонували залишити деякі теми стереометрії — обчислення площ поверхонь і об'ємів тіл, необхідні для суміжних предметів та розвитку учнів — і розглядати їх не лише в 4–5-х класах, а й під час систематичного курсу планіметрії.

У результаті, починаючи з 1981–1982 навчального року, початкові відомості зі стереометрії були повністю вилучені з курсу геометрії восьмирічної школи. Викладання геометрії здійснювалося за підручником О. В. Погорєлова *«Геометрія 6–10»*, побудованим на дедуктивному підході. Автор повернувся до традиційної системи, де планіметрія та стереометрія вивчаються окремо.

У 1985 році була затверджена нова програма з математики для середньої школи. Одним із її недоліків стало зменшення уваги до геометричної пропедевтики у 4–5-х (надалі 5–6-х) класах. Досвід вітчизняної школи свідчив, що без такої підготовчої роботи значно ускладнюється подальше вивчення геометрії. Через це знижувався рівень геометричного розвитку учнів, зокрема їхніх умінь обґрунтовувати прості геометричні факти, зменшувався запас просторових уявлень та навичок орієнтування в базових геометричних ситуаціях.

Короткий огляд історії вивчення геометрії на площині та в просторі свідчить про існування двох основних підходів до цього питання.

- ✓ Перший, традиційний, передбачає чітке розділення шкільного курсу на систематичний курс планіметрії (7–9 класи) і систематичний курс стереометрії (10–11 класи). При цьому в 5–6-х класах курс математики включає пропедевтичне ознайомлення з основними геометричними поняттями. Такий підхід продовжує давню традицію, що бере свій початок від Евкліда.
- ✓ Другий, модерністський, базується на методі фузіонізму. Він передбачає введення елементів стереометрії безпосередньо в курс планіметрії, знайомлячи учнів із просторовими поняттями одночасно з формуванням властивостей плоских фігур.

Перед вивченням систематичного курсу геометрії доцільно проводити курс наочної геометрії, який слід будувати на засадах фузіонізму. Зокрема:

- а) розпочинати навчання з ознайомлення учнів із геометричними тілами та плоскими фігурами, які є їхніми елементами, враховуючи, що просторові форми є первинними щодо плоских;
- б) спочатку вивчати найпростіші плоскі фігури, поступово переходячи до більш складних просторових форм.

Проте другий, фузіоністський, підхід до викладання геометрії до кінця ХХ століття у вітчизняній школі не закріпився.

1.2. Мета і зміст вивчення елементів стереометрії в 5-6 класах Нової української школи

Вивчення елементів стереометрії в 5–6 класах Нової української школи (НУШ) спрямоване на розвиток просторового мислення, формування базових уявлень про тривимірні об'єкти та закладання основ для подальшого систематичного вивчення геометрії у старших класах. Основною метою є не лише ознайомлення учнів із властивостями геометричних тіл, а й розвиток

здатності сприймати просторові співвідношення, уявляти рухомі та нерухомі об'єкти, аналізувати їх структуру та взаємозв'язки. Такий підхід забезпечує цілісне розуміння простору, поєднуючи наочне сприйняття, експериментування та логічне мислення.

Зміст навчального матеріалу включає:

1. **Геометричні тіла** – куб, прямокутна призма, піраміда, циліндр, конус, куля;
2. **Елементи тіл** – вершини, ребра, грані, діагоналі, осі симетрії;
3. **Взаємозв'язок плоских і просторових фігур** – виявлення елементів плоских фігур у складі тіл, наприклад, квадрат у грані куба, трикутник у грані піраміди;
4. **Основні властивості геометричних тіл** – кількість граней, ребер, вершин, характер площинних перетинів;
5. **Вимірювання та обчислення** – визначення довжин ребер, обчислення площ поверхонь та об'ємів простих тіл;
6. **Моделювання** – створення макетів тіл із паперу, картону, глини, що дозволяє учням відчувати форму і пропорції об'єкта.

Методика викладання ґрунтується на засадах фузіонізму, що передбачає органічне поєднання планіметричного та стереометричного матеріалу. Курс починається з ознайомлення учнів із просторовими об'єктами та найпростішими плоскими фігурами, поступово ускладнюючи завдання та переходячи до більш складних тіл. Такий підхід враховує первинність просторових форм порівняно з плоскими, що сприяє більш глибокому розумінню просторових співвідношень.

Особлива увага приділяється інтерактивним та наочно-дослідницьким методам:

- **Парна та групова робота** – спільне моделювання геометричних тіл, порівняння їх властивостей;
- **Ігрові завдання** – складання тіл із пазлів, конструкторів, вирізання та склеювання моделей;
- **Дослідницькі справи** – визначення площ і об'ємів на основі практичних ситуацій, наприклад, обчислення об'єму коробки або банки;

- **Використання ІКТ та наочних матеріалів** – демонстрація 3D-моделей, анімацій, інтерактивних вправ на комп'ютері чи планшеті.

Аналіз сучасних модельних програм з математики для 5–6 класів показує, що в НУШ елементи стереометрії інтегровані в курс планіметрії з метою формування цілісного просторового мислення. Зокрема, у програмах передбачено:

- Ознайомлення з геометричними тілами на прикладі предметів довкілля (іграшки, меблі, упаковка);
- Поступове введення понять вершини, грані, ребра, діагоналі та осі симетрії;
- Виконання практичних завдань з обчислення площ поверхонь і об'ємів простих тіл, що поєднує навчання з практичним життям;
- Розвиток навичок моделювання та побудови просторових об'єктів у класі та вдома;
- Взаємозв'язок зі суміжними дисциплінами – кресленням, технологією, фізикою, що сприяє формуванню міжпредметних компетентностей.

Таким чином, модельні програми спрямовані на реалізацію принципів поступового переходу від плоских фігур до об'ємних тіл, формування просторових уявлень і розвиток практичних компетентностей учнів. Завдяки такому підходу вивчення елементів стереометрії у 5–6 класах НУШ забезпечує основу для систематичного курсу геометрії в старших класах і сприяє розвитку логічного та критичного мислення.

Клас	Зміст навчального матеріалу	Очікувані компетентності учнів	Методи роботи та наочні матеріали	Приклади вправ та завдань
5 клас	Ознайомлення з просторовими об'єктами; основні плоскі фігури як елементи тіл (квадрат, трикутник, прямокутник); моделювання простих тіл (куб, призма, піраміда)	Формування первинних просторових уявлень; розвиток умінь визначати вершини, ребра, грані; початок логічного аналізу просторових форм	Моделювання тіл із паперу та картону; малювання площинних проєкцій; парні та групові вправи	- Побудувати модель куба або призми з паперу - Визначити кількість граней, ребер і вершин у моделі - Намалювати фронтальну та

Клас	Зміст навчального матеріалу	Очікувані компетентності учнів	Методи роботи та наочні матеріали	Приклади вправ та завдань
				планову проєкції куба
6 клас	Основні геометричні тіла (циліндр, конус, куля); елементи тіл (діагоналі, осі, симетрії); обчислення площ поверхонь та об'ємів простих тіл; взаємозв'язок плоских і просторових фігур	Розвиток просторового мислення; уміння аналізувати властивості тіл; практичне застосування знань для обчислень; підготовка до креслення та фізики	Виконання практичних завдань на вимірювання; створення макетів тіл; інтерактивні вправи на комп'ютері або планшеті; групові проєкти	- Обчислити об'єм циліндра або конуса за даними вимірами - Визначити площу поверхні кулі - Скласти модель піраміди та знайти її площу поверхні - Порівняти площу грані куба та площу бічної поверхні призми

Аналіз модельних програм з математики для 5–6 класів Нової української школи показує, що вивчення елементів стереометрії реалізується поступово і системно. У 5 класі основна увага приділяється формуванню первинних просторових уявлень, ознайомленню з плоскими фігурами та простими геометричними тілами через моделювання та практичні вправи. У 6 класі курс розширюється за рахунок вивчення більш складних тіл (циліндр, конус, куля), обчислення площ поверхонь та об'ємів, а також встановлення взаємозв'язку плоских та просторових фігур.

Важливою особливістю сучасного підходу є поєднання методів наочного моделювання, інтерактивних завдань та практичної діяльності, що сприяє кращому розвитку просторового мислення та логічного аналізу. Крім того, інтеграція міжпредметних зв'язків із кресленням, фізикою та технологіями забезпечує формування у учнів цілісного розуміння геометричних понять та їх практичного застосування. Такий підхід відповідає принципам Нової української школи і дозволяє забезпечити комплексне та поступове засвоєння стереометричного матеріалу на базовому рівні.

Розділ 2. Методичні підходи до пропедевтики стереометрії в курсі математики 5–6 класів

2.1. Психолого-педагогічні особливості розвитку просторового мислення учнів 5–6 класів

Просторове мислення є ключовим компонентом інтелектуального розвитку дитини та основою для засвоєння геометричного матеріалу. У 5–6 класах відбувається активне формування просторових уявлень, що пов'язано з віковими особливостями учнів і їх психофізіологічним розвитком. На цьому етапі діти здатні оперувати просторовими образами, встановлювати взаємозв'язки між об'єктами в тривимірному просторі та виконувати перетворення геометричних тіл у мисленні [8].

З психологічної точки зору, учні цього віку характеризуються переважанням наочно-образного мислення, яке є провідним у процесі пізнання. Вони добре сприймають наочні моделі, макети та ілюстрації, здатні відтворювати в пам'яті просторові взаємозв'язки та уявляти положення об'єктів у просторі. Разом з тим, у багатьох школярів ще недостатньо сформоване абстрактне мислення, що ускладнює засвоєння понять стереометрії без наочно-діяльнісної підтримки.

Ефективний розвиток просторового мислення забезпечується систематичним використанням наочно-діяльнісних методів: моделювання геометричних тіл із пластиліну, паперу чи картону, виконання макетів, складання та розбирання об'ємних моделей, конструювання просторових об'єктів. Дослідження М.Ф. Четверухіна та В.С. Воропая підтверджують, що подібна діяльність формує уявлення про об'єкти в просторі, сприяє розумінню їх властивостей і розвитку здатності до логічних узагальнень.

Суттєву роль у розвитку просторового мислення відіграє мотивована пізнавальна діяльність. Учні засвоюють знання ефективніше, якщо навчальний процес включає практичні завдання, проблемні ситуації або ігрові вправи, які стимулюють уяву та просторове уявлення. Для формування цілісного

просторового уявлення доцільно починати з простих плоских фігур, що є елементами геометричних тіл, а потім переходити до об'ємних конструкцій. Це відповідає принципам геометричного фузіонізму, що передбачає поєднання планіметрії та стереометрії з метою формування цілісної системи знань.

Міжпредметні зв'язки значно посилюють розвиток просторового мислення. Наприклад, курс креслення сприяє закріпленню навичок побудови проєкцій тіл та розгорток, фізика допомагає застосовувати знання про об'єми і площі тіл у реальних ситуаціях, технології – відпрацьовувати практичні навички конструювання об'ємних моделей, а природознавство – орієнтуватися у властивостях об'єктів навколишнього середовища.

Особливої уваги потребує розвиток просторових уявлень через інтерактивні та дослідницькі методи. Використання комп'ютерних симуляцій, 3D-моделювання, віртуальних конструкторів та інтерактивних вправ дозволяє учням формувати вміння обертати та трансформувати фігури в уяві, що значно підвищує рівень абстрактного та просторового мислення [6,14].

Таким чином, психолого-педагогічні особливості розвитку просторового мислення учнів 5–6 класів визначаються віковими характеристиками наочно-образного мислення, рівнем розвитку абстрактного мислення, мотиваційною готовністю до активної діяльності та ефективним використанням практико-орієнтованих завдань. Комплексний підхід до формування просторового мислення забезпечує успішне засвоєння елементів стереометрії, закладає основу для подальшого розвитку логічного і аналітичного мислення учнів, а також сприяє розвитку практичних навичок, необхідних у повсякденному житті та навчальній діяльності.

Таблиця «Психолого-педагогічні прийоми розвитку просторового мислення учнів 5–6 класів»

№	Прийом / метод	Мета	Приклади використання	Орієнтовні класи та етапи впровадження
1	Моделювання об'ємних тіл	Формування уявлень про геометричні тіла та їх властивості	Виготовлення моделей куба, піраміди, циліндра з паперу, картону, пластиліну	5–6 класи, початковий етап вивчення стереометрії

№	Прийом / метод	Мета	Приклади використання	Орієнтовні класи та етапи впровадження
2	Використання наочних ілюстрацій	Розвиток просторового мислення через візуалізацію	Креслення, малюнки розгорток тіл, схематичні зображення просторових фігур	5–6 класи, під час ознайомлення з новими поняттями
3	Інтерактивні вправи	Удосконалення вміння обертати і трансформувати фігури уявно	3D-моделі, комп'ютерні симуляції, віртуальні конструктори	5–6 класи, при формуванні просторових уявлень і на завершальному етапі вивчення теми
4	Конструкторська діяльність	Формування практичних навичок та просторових уявлень	Збирання та розбирання об'ємних моделей, конструювання тіл з кубиків або деталей LEGO	5–6 класи, практичні заняття та лабораторні роботи
5	Дослідницькі та проблемні завдання	Розвиток аналітичного мислення та логічних узагальнень	Визначення об'єму та площі тіл, знаходження взаємозв'язків між плоскими і об'ємними фігурами	5–6 класи, на етапі закріплення знань та застосування на практиці
6	Міжпредметні зв'язки	Закріплення та поглиблення просторових уявлень	Використання знань із креслення, фізики та технологій для практичного застосування стереометрії	5–6 класи, протягом усього курсу вивчення геометрії

Розвиток просторового мислення у 5–6 класах слід здійснювати комплексно, поєднуючи різні методи та прийоми навчання. Так, моделювання об'ємних тіл можна поєднувати з використанням наочних ілюстрацій та конструкторських вправ: спочатку учні знайомляться з моделями тіл, потім відтворюють їх на кресленнях і схемах, а на завершальному етапі збирають об'єкти самостійно або в групах.

Інтерактивні вправи, зокрема робота з 3D-моделями та комп'ютерними симуляціями, ефективно поєднуються з дослідницькими завданнями. Наприклад, після вивчення властивостей піраміди або циліндра учні можуть виконувати обчислення площ та об'ємів, перевіряючи результати за допомогою віртуальних моделей.

Міжпредметні зв'язки дозволяють інтегрувати знання з математики, креслення, фізики та технологій. Наприклад, при вивченні об'єму циліндра чи конуса можна одночасно розглядати практичні завдання з природи (визначення об'єму рідини) або технологій (виготовлення моделей із конструктора). Такий інтегрований підхід забезпечує цілісне формування просторових уявлень та розвиває навички практичного застосування знань, що відповідає вимогам Нової української школи.

Застосування цих методів у комплексі сприяє поступовому переходу від наочного сприйняття об'ємних тіл до формування вміння оперувати абстрактними стереометричними поняттями, що є важливим компонентом математичної компетентності учнів 5–6 класів.

2.2. Методика формування уявлень і понять про стереометричні фігури та деякі їх властивості

Математичні поняття відображають у свідомості дитини форми та взаємозв'язки об'єктів навколишнього світу, водночас будучи узагальненими і абстрагованими від їхніх конкретних властивостей. Процес формування понять є складним психолого-педагогічним явищем, що починається з первинного сприйняття — відчуттів, і поступово проходить стадії сприймання, уявлення та усвідомлення поняття.

Дитина росте та розвивається у тривимірному просторі, тому її знайомство з просторовими об'єктами починається ще у ранньому віці через органи чуття. Чим багатше та різноманітніше оточення, тим більше знань про просторові форми вона набуває до початку шкільного навчання. Це забезпечує природну базу для розвитку просторового мислення та формування первинних уявлень про об'єкти, їхні розміри, форми та взаємне розташування.

У школі процес формування геометричної компетентності стає цілеспрямованим і систематичним. Учителі спрямовують розвиток просторових уявлень учнів через різні навчальні предмети: математику, образотворче мистецтво, трудове навчання, фізичну культуру. Наприклад, під час вивчення

математики 5–6 класів учні виконують завдання на розпізнавання, порівняння та побудову геометричних тіл, що сприяє розвитку абстрактного мислення та логічних операцій у просторі. Малювання та конструкторські вправи дозволяють закріпити отримані знання у наочній формі, а практичні досліди — оцінити властивості тіл та їх взаємне розташування у просторі.

Таким чином, комплексне поєднання наочної роботи, моделювання та інтеграції знань із суміжних дисциплін забезпечує формування у школярів 5–6 класів стійких просторових уявлень, готовності до оперування стереометричними поняттями та розвитку просторового мислення на наступних етапах навчання.

Схема етапів формування просторового мислення учнів 5–6 класів

Етап	Основна мета	Форми і методи роботи	Орієнтовні класи	Приклади завдань
1. Ознайомчий	Розпізнавання просторових форм та об'єктів у навколишньому середовищі	Наочні спостереження, робота з моделями, малювання плоских зображень тіл	5 клас, 1-ше півріччя	- Визначити, які фігури присутні у класі (куб, куля, циліндр) - Намалювати проєкцію куба та піраміди на аркуші паперу - Порівняти об'єкти за формою та розміром
2. Формувальний	Розвиток уявлень про властивості геометричних тіл (куб, призма, піраміда, циліндр, конус, куля)	Конструкторські вправи, моделювання, обчислення площ і об'ємів, інтерактивні вправи	5–6 класи, 2-ге півріччя 5 класу – 6 клас	- Побудувати модель піраміди з паперу або конструктора- Обчислити площу поверхні циліндра та об'єм куба - Виконати вправу на визначення кількості вершин, ребер і граней різних тіл
3. Узагальнюючий	Систематизація знань про просторові об'єкти та їх властивості, формування логічних дій у просторі	Розв'язування задач, створення схем та креслень тіл, робота у групах, інтегровані уроки з фізики, технологій, креслення	6 клас, 2-ге півріччя	- Створити креслення конструкції з декількох тіл та обчислити сумарний об'єм

Етап	Основна мета	Форми і методи роботи	Орієнтовні класи	Приклади завдань
				- Розв'язати задачу на знаходження площі бічної поверхні конуса і піраміди- Побудувати модель, яка демонструє перетворення тіл (призма → піраміда)

У висновках до цієї схеми можна додати такі методичні рекомендації щодо інтеграції методів:

1. На початковому етапі наочні спостереження та моделі можна поєднувати з малюванням та конструюванням, що формує первинні уявлення про просторові форми.
2. На формувальному етапі доцільно поєднувати практичне моделювання з обчисленнями площ та об'ємів, використовуючи інтерактивні вправи (комп'ютерні симуляції або онлайн-геометрію), що стимулює розвиток просторового мислення та логічних операцій.
3. На узагальнюючому етапі ефективними є інтегровані уроки: наприклад, задачі з математики можна поєднувати з конструюванням у трудовому навчанні або дослідями, що дозволяє учням бачити зв'язок між планіметрією та стереометрією і готує до більш складних геометричних понять у старших класах.

У курсі математики для учнів 5–6 класів одним із провідних завдань є впорядкування вже наявних у школярів просторових уявлень та формування нових, що ґрунтуються на набутому досвіді. Питання розвитку просторового мислення та уявлень широко розглядалися у працях Ж. Піаже, який підкреслював поступовий характер становлення у дітей здатності до оперування просторовими образами [13], та Л. С. Виготського, який акцентував на ролі навчання як провідного чинника розвитку вищих психічних функцій [3].

Вивчення просторових тіл у шкільному курсі математики має здійснюватися поетапно: від ознайомлення з найпростішими геометричними формами до розгляду величин, що їх характеризують. У цьому процесі доцільно застосовувати предмети навколишньої дійсності, які виконують функцію наочного матеріалу та забезпечують зв'язок теоретичних знань із практичним досвідом учнів [4].

Форма геометричної фігури повинна розглядатися у взаємозв'язку з відповідними величинами (довжиною, площею, об'ємом). Як зазначають дослідники [8, 9], неможливо сформулювати повне уявлення про геометричний об'єкт без аналізу його кількісних характеристик. Зокрема, розгляд прямокутного паралелепіпеда передбачає визначення його об'єму, а вивчення циліндра – площі його поверхні.

Уявлення у психолого-педагогічному аспекті трактується як відтворення образу предмета у свідомості суб'єкта за відсутності самого об'єкта. Формування уявлень, за Виготським Л.С. [3], ґрунтується на елементарних пізнавальних процесах – відчуттях і сприйнятті, які становлять основу переходу від наочно-дійового до абстрактно-логічного мислення. У цьому контексті особливе значення має створення дидактичних умов, що забезпечують активне залучення учнів до пізнавальної діяльності, спрямованої на розвиток просторових уявлень.

Таким чином, формування просторових уявлень у процесі навчання математики у середній школі слід розглядати не лише як етап геометричної підготовки, але й як важливий чинник розвитку мислення, що визначає успішність подальшого засвоєння абстрактних математичних понять.

Формування просторових уявлень у 5 класі доцільно розпочинати з розгляду прямих призм, зокрема прямокутного паралелепіпеда. Це пояснюється тим, що у повсякденному житті учні найчастіше стикаються саме з об'єктами такої форми (сірникова коробка, пенал, цеглина тощо). Як зазначає Ж. Піаже, засвоєння геометричних понять у молодшому та середньому шкільному віці має спиратися на безпосередній чуттєвий досвід дитини [13].

Оскільки уявлення формується на основі безпосереднього сприйняття предмета, важливим методичним засобом є демонстрація моделей. Проте, як зауважував Л. С. Виготський, сам по собі сенсорний досвід ще не забезпечує створення стійких уявлень, адже необхідним є цілеспрямоване педагогічне керівництво процесом пізнання [3]. Тому завдання вчителя полягає у систематичному спрямуванні уваги учнів на істотні ознаки геометричного тіла – кількість і форму граней, ребер, вершин, а також на відмінність між суттєвими та несуттєвими властивостями (розміри, колір, матеріал виготовлення).

У процесі ознайомлення з прямокутним паралелепіпедом учні встановлюють, що він має шість граней, кожна з яких є прямокутником, дванадцять ребер, серед яких по три виходять з кожної вершини, та вісім вершин загалом. Узагальнюючи результати спостережень, формулюється поняття прямокутного паралелепіпеда як геометричної фігури з відповідними властивостями. Як наголошує П. Я. Гальперін, перехід від конкретних предметів до абстрактних математичних понять потребує спеціально організованої навчальної діяльності, спрямованої на виділення істотних ознак [4, 5].

Особливе значення має встановлення зв'язку між навчальним матеріалом і реальністю. Залучення учнів до пошуку аналогів у навколишньому середовищі (наприклад, форми класної кімнати чи будівель) сприяє розвитку здатності «бачити геометрію у довкіллі». Це, у свою чергу, формує передумови для створення абстрактного поняття геометричної фігури на основі конкретних образів [9].

Важливим етапом у формуванні просторових уявлень є ознайомлення учнів із кубом як окремим випадком прямокутного паралелепіпеда. Методично доцільно здійснювати це шляхом порівняння. Зіставляючи предмети, що мають форму прямокутного паралелепіпеда, та куба, школярі легко встановлюють їхню структурну подібність: обидва тіла мають грані, ребра та вершини. На цій підставі робиться висновок, що куб належить до класу прямокутних паралелепіпедів. Водночас у процесі порівняння виявляється й принципова відмінність: усі грані куба є квадратами. Як показують експериментальні

дослідження [5, 6], саме такий підхід сприяє глибшому усвідомленню учнями сутності геометричних понять.

Аналогічний метод доцільно застосовувати і під час ознайомлення з іншим видом прямих призм – трикутною призмою. Учні шляхом порівняння визначають спільні та відмінні властивості зазначених тіл. Значну роль при цьому відіграють моделі геометричних фігур, які дозволяють абстрагуватися від несуттєвих характеристик (колір, матеріал, практичне призначення предмета) та зосередитися на істотних елементах – гранях, ребрах, вершинах.

Методично доцільним є завдання, у якому учням пропонується відібрати з набору моделей ті призми, у яких гранями є трикутники. Це сприяє формуванню вміння знаходити потрібну фігуру серед інших незалежно від її орієнтації у просторі. У результаті школярі встановлюють, що вибрані моделі мають три бічні грані у формі прямокутників та дві рівні трикутні основи. Таким чином вводяться поняття *основи* та *бічної грані*.

Подальша робота полягає у визначенні основ різних призм, зокрема куба та прямокутного паралелепіпеда, які також належать до класу прямих призм. Поступове розширення кола прикладів дозволяє сформуванню у свідомості учнів початкові узагальнені уявлення про прямі призми залежно від форми їх основ.

Наступним етапом у розвитку просторових уявлень є навчання учнів умінню уявляти геометричні тіла за їх зображеннями на площині. Виконання вправ, пов'язаних із пошуком моделей за рисунками, визначенням кількості та форми граней, а також кількості ребер і вершин багатогранників на їх зображеннях, сприяє не лише розвитку просторових уявлень, а й формує здатність до оперування геометричними образами. У такому випадку рисунок виступає проміжною ланкою між реальною моделлю та абстрактним уявленням про просторову фігуру.

На прикладі розбірної моделі прямокутного паралелепіпеда доцільно ознайомлювати учнів із розгортками геометричних тіл. Учні повинні усвідомити, що поверхня будь-якого багатогранника складається з плоских фігур. Так, поверхня прямокутного паралелепіпеда утворюється з шести прямокутників.

Знання про розгортки мають прикладне значення, зокрема у процесі вивчення площ поверхонь геометричних тіл [6].

Зворотний процес – виготовлення просторової моделі за її розгорткою – є важливим дидактичним прийомом, що забезпечує так званий «вихід у простір». Створення моделей активізує пізнавальну діяльність учнів, підвищує рівень усвідомленості й міцності засвоєння знань [14].

Методично доцільно диференціювати завдання: на обов'язковому рівні учні можуть виготовляти модель за готовою розгорткою, тоді як на підвищеному – будувати розгортку самостійно, вирізати її та склеювати готову фігуру. Для цього можуть використовуватися як спеціальні фабричні набори розгорток, так і матеріали, створені вчителем [10].

Практична діяльність учнів у процесі виготовлення моделей включає вимірювання довжин елементів розгортки, ребер побудованої фігури, їх порівняння та формулювання висновків. Для закріплення набутих навичок доцільно пропонувати домашні завдання – виготовлення моделі за зразком чи власною розгорткою. Подібна діяльність викликає пізнавальний інтерес, сприяє усвідомленому засвоєнню властивостей геометричних тіл, їх форми, кількості та взаємного розташування граней, ребер і вершин [11].

У результаті практичної діяльності учнів встановлюється основна відмінність геометричних тіл від плоских фігур, з яких вони складаються: геометричні тіла займають частину простору і характеризуються об'ємом, при цьому кожне тіло обмежене поверхнею. Такі спостереження створюють основу для подальшого вивчення геометричних величин, пов'язаних із тілами: площі поверхні та об'єму.

Щоб уникнути формального засвоєння понять площі та об'єму, доцільно ознайомити учнів із квадратними і кубічними одиницями вимірювання. Наприклад, учням пропонується накреслити в зошиті квадратний дециметр, поділений на квадратні сантиметри, а потім – прямокутник за заданими розмірами, розбивши його на квадратні сантиметри. Під час обговорення з учителем п'ятикласники встановлюють, що кількість квадратних сантиметрів у

одному рядку відповідає довжині основи прямокутника в сантиметрах, а кількість рядків – його висоті. Відповідно, загальна кількість квадратних сантиметрів, на які розбито прямокутник, визначається як добуток його лінійних розмірів.

Такі вправи дозволяють учням не лише закріпити знання про площу та об'єм, а й сформувати уміння логічно пов'язувати абстрактні геометричні величини з конкретними предметними образами, що сприяє розвитку просторового мислення і усвідомленому засвоєнню математичних понять.

Питання об'єму прямокутного паралелепіпеда доцільно розглядати на конкретних моделях. Наприклад, на моделі куба зі стороною 1 дм демонструється, що його можна розбити на кубики з ребром 1 см, складені шарами. Нижній шар містить 10 рядків по 10 кубиків у кожному, що дає 100 кубиків у шарі. Якщо скласти 10 таких шарів, отримуємо 1000 кубиків, тобто $1 \text{ дм}^3 = 1000 \text{ см}^3$.

Для наочності та активізації пізнавальної діяльності учнів можна використовувати спеціальний дидактичний пристрій – «арифметичний ящик», який демонструє поділ куба на одиничні кубики. У разі відсутності готового «ящика» його легко виготовити на уроках праці або з паперових моделей. Така наочна демонстрація допомагає школярам не лише засвоїти числове значення об'єму, а й сформувати уявлення про його зв'язок із лінійними розмірами тіла, що сприяє розвитку просторового мислення та усвідомленому засвоєнню поняття об'єму/

Для закріплення уявлень про об'єм доцільно запропонувати учням визначити кількість кубиків, які містить прямокутний паралелепіпед, поверхня якого розбита на квадрати зі стороною, що дорівнює одиниці вимірювання (наприклад, 1 см). Для наочності доцільно використовувати модель паралелепіпеда з верхньою гранню, розділеною на одиничні квадрати.

У результаті спостереження та практичної діяльності учні приходять до висновку, що кількість кубічних одиниць, які вміщує паралелепіпед, визначається вимірюванням його довжини, ширини та висоти та наступним

перемноженням отриманих чисел. При цьому підкреслюється, що основою паралелепіпеда є прямокутник, площа якого обчислюється як добуток довжини та ширини. Відповідно, об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту.

Такий підхід дозволяє не лише сформулювати розуміння формули об'єму прямокутного паралелепіпеда, а й розвивати у п'ятикласників здатність оперувати просторовими образами та логічно пов'язувати абстрактні математичні поняття з конкретними моделями.

Після того, як учні ознайомляться з формулами для обчислення *площі* прямокутника, паралелограма, повідомляємо формулу для обчислення *об'єму* V прямої призми, основою якої є згадані фігури:

$$V = Sh,$$

де S – площа основи прямої призми, h – довжина її бічного ребра.

Методично важливо підкреслити, що ця формула є інструментом для обчислення, а не обов'язковим правилом для механічного запам'ятовування. Практика показує, що більшість учнів правильно застосовують її при розв'язуванні простих задач. Водночас можливі помилки, зокрема при обчисленні об'єму призми з основою у формі паралелограма, коли висоту основи плутають із висотою призми або навпаки.

Таким чином, ознайомлення з формулою об'єму прямої призми сприяє формуванню в учнів уміння логічно пов'язувати площу плоскої фігури та висоту тіла з його об'ємом, що є важливим етапом розвитку просторового мислення та математичної компетентності.

Обчислення площі поверхні прямокутного паралелепіпеда зазвичай не викликає у учнів значних труднощів, оскільки зводиться до визначення площ окремих прямокутників, що утворюють його поверхню.

Для обчислення площі поверхні прямої призми, основою якої є трикутник або паралелограм, доцільно спочатку ознайомити учнів із її розгорткою. Для кращого розуміння форми розгорток рекомендується використовувати готові

картонні моделі, які легко згортаються у призму і навпаки. Перед демонстрацією готової розгортки доцільно запропонувати учням самостійно уявити, якою має бути її форма. Такі завдання стимулюють активну дискусію, і зазвичай більшість учнів дають правильну відповідь.

Особливу увагу слід звернути на те, що бічна поверхня прямої призми розгортається на площині у прямокутник, де довжина відповідає сумі сторін основи призми, а ширина — її бічному ребру. Тому обчислення площі бічної поверхні зводиться до добутку периметра основи на висоту призми. Аналізуючи складові елементи повної поверхні прямої призми, учні доходять висновку, що повну площу поверхні можна визначити, додавши площі двох основ до площі бічної поверхні.

На цьому етапі навчання розглядаються лише деякі види призм, а знайомство з іншими формами планується у наступних класах. Крім призм, значну увагу слід приділити ще одному поширеному виду багатогранників у навколишньому середовищі — піраміді, що стане предметом подальшого вивчення.

Вивчення пірамід доцільно розпочинати зі співставлення моделей призм і пірамід. Учні зазвичай легко розпізнають серед різних геометричних тіл ті, що не є призмами. Наступним кроком є з'ясування спільних та відмінних ознак цих тіл за допомогою запитань та дискусій.

Спільною властивістю призм і пірамід є те, що всі їхні грані є многокутниками. Водночас призми мають по дві рівні основи, а решта граней — прямокутники. Інша група тіл — пірамід — відрізняється наявністю лише однієї основи (трикутник, квадрат, прямокутник тощо), решта граней — трикутники, що мають спільну вершину. Цю групу тіл називають пірамідами, а її основу може складати будь-який многокутник. Назва пірамід залежить від форми основи: трикутна піраміда, чотирикутна піраміда тощо. Бічні грані пірамід — трикутники зі спільною вершиною, яка є точкою перетину всіх бічних ребер).

Для закріплення уявлень учням пропонується наводити приклади об'єктів з оточуючого середовища, які мають форму піраміди. Зазвичай учні легко встановлюють залежність між кількістю бічних граней піраміди та кількістю сторін многокутника, що є її основою.

Важливим етапом є ознайомлення учнів із зображенням піраміди. Порівнюючи моделі пірамід та їхні зображення, діти визначають основу, бічні грані, ребра та вершину піраміди. Слід зазначити, що не всі учні здатні відразу розпізнати піраміду за двовимірним зображенням, тому роботу в цьому напрямку рекомендується продовжувати на наступних уроках.

При вивченні піраміди особливу увагу слід приділяти з'ясуванню поняття висоти. Найдоцільніше використовувати каркасну модель піраміди. Розміщуючи її так, щоб основа була горизонтальною (наприклад, на столі), за допомогою шнура з тягарцем, закріпленого у вершині піраміди, демонструють висоту тіла. Корисно розглянути приклади пірамід із різним розташуванням висот відносно основи, щоб учні усвідомили залежність висоти від форми основи.

Ознайомлення з розгорткою піраміди здійснюється аналогічно до розгортки прямої призми. Бічну поверхню піраміди обчислюють як суму площ усіх її бічних граней, що дозволяє учням логічно пов'язати площу плоских трикутників із просторовою формою піраміди та сформулювати практичні навички вимірювання та обчислення.

Як і інші многогранники, піраміда – геометричне тіло. Вона займає частину простору, тому має об'єм. Учні повідомляємо формулу для його обчислення:

$$V = \frac{1}{3} Sh$$

де V – об'єм піраміди, S – площа многокутника, що є основою піраміди, h – висота піраміди.

Вивчення тіл обертання у 5–6-х класах можливе на чуттєво-образному рівні, використовуючи наявні знання учнів про прямі призми, їхні розгортки та формули обчислення площі поверхні й об'єму (Гальперін, 1966; Колягін, 2000).

Після введення понять кола та круга доцільно показати учням кілька предметів, що мають форму циліндра (склянка, частина труби, циліндричний стержень). Наочне спостереження дозволяє учням переконатися, що всі ці предмети мають дві рівні круглі основи, а бічна поверхня не є плоскою та не має граней і вершин. Таке тіло називають *циліндром*. Для кращого усвідомлення властивостей циліндра демонструють кілька моделей прямого кругового циліндра у різних положеннях.

Порівняння циліндра та прямої призми дозволяє учням встановити як спільні риси, так і відмінності. Обидва тіла мають дві рівні основи, однак основами призми є многокутники, а циліндра — круги. Бічна поверхня призми складається з плоских фігур (прямокутників), тоді як бічна поверхня циліндра є кривою. За допомогою лінійки учитель демонструє наявність твірної циліндра — єдиного напрямку на бічній поверхні, що збігається з ребром лінійки.

Циліндр можна одержати обертанням прямокутника навколо однієї з його сторін. Для демонстрації практичної моделі учням пропонується виготовити прямокутник із прикріпленою стороною до спиці. Під час обертання прямокутника навколо вертикальної спиці протилежна сторона утворює циліндричну поверхню — твірну циліндра. Сторона, навколо якої обертають прямокутник, є віссю обертання, яка одночасно виступає висотою циліндра, а інші сторони прямокутника відповідають радіусам основ циліндра.

Ознайомлення учнів із конусом здійснюється аналогічно до циліндра, використовуючи наочні моделі та чуттєво-образне сприймання.

Куля — геометричне тіло, форма якого добре відома учням із повсякденного життя. Тому завдання вчителя полягає у систематизації знань учнів щодо кулі. Після розгляду конкретних прикладів пояснюють поняття радіуса, діаметра кулі, а також визначають, що таке сфера.

Для закріплення уявлень про тіла обертання доцільно співставляти моделі циліндра, конуса та кулі із їхніми зображеннями. Такі вправи дозволяють формувати чіткіші просторові уявлення та навички розпізнавання форми

предмета за його зображенням. За наявності технічних засобів навчання можна використовувати демонстраційні фільми, кодоскоп або комп'ютерні моделі.

Обчислення площі поверхні та об'єму тіл обертання доцільно розглядати після вивчення теми «Довжина кола та площа круга». Оскільки бічна поверхня тіл обертання відрізняється від плоских фігур, перед повідомленням формул учням слід показати розгортки циліндра та конуса. Зауважують, що поверхню кулі неможливо розгорнути на площину, тому її обчислення потребує окремого підходу. Для демонстрації зручно використовувати розшивні моделі цих тіл.

Під керівництвом учителя учні доходять висновку, що розгортка циліндра складається з прямокутника (бічна поверхня) та двох кругів (основи). При цьому основа прямокутника дорівнює довжині кола основи циліндра, а висота — висоті циліндра. Використовуючи формулу площі прямокутника, отримують: бічна поверхня циліндра дорівнює добутку довжини кола основи на висоту. У процесі навчання доцільно звернути увагу учнів на схожість формул для обчислення площ бічних поверхонь циліндра та прямої призми (Колягін, 2000; Мороз, 2017).

Оскільки розгортка бічної поверхні конуса є круговим сектором, з яким учні 5–6-х класів лише ознайомлюються, для обчислення площі бічної поверхні доцільно користуватися готовою формулою. Обґрунтування цієї формули здійснюється у систематичному курсі стереометрії.

Після першого ознайомлення з конусом не всі учні усвідомлюють, що саме зображає твірну на розгортці бічної поверхні, а що відповідає довжині кола основи. Учні також бракує навичок для визначення радіуса основи конуса, якщо відома довжина кола основи. Тому перед розв'язуванням задач на обчислення площі поверхні конуса доцільно використати готову розгортку, щоб пригадати необхідні дані.

Формули для обчислення об'єму циліндра, конуса, кулі, а також площі поверхні кулі повідомляються учням у готовому вигляді. Їх запам'ятовування не є обов'язковим; головне — вміння застосовувати ці формули при розв'язуванні простих практичних задач.

У 5–6-х класах на основі спостережень предметів та їх зображень, порівнянь з іншими предметами та практичних дій з виготовлення моделей формуються первинні уявлення про прості геометричні тіла та деякі їх властивості. Чим більше таких уявлень сформовано, тим легше учням опановувати нові поняття на основі словесного опису.

Подальше навчання має бути спрямоване на формування нових уявлень про геометричні тіла та продовжуватися під час вивчення систематичного курсу планіметрії у 7–9-х класах.

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження дало змогу теоретично обґрунтувати й експериментально перевірити ефективність пропедевтики формування стереометричних уявлень учнів 5–6 класів у процесі вивчення математики. Отримані результати підтверджують доцільність і необхідність цілеспрямованого розвитку просторового мислення учнів уже на початкових етапах систематичного вивчення математичних дисциплін.

У процесі дослідження з'ясовано, що стереометричні уявлення є важливим компонентом просторового мислення, який забезпечує здатність учнів уявляти, аналізувати та оперувати просторовими об'єктами. Формування таких уявлень у 5–6 класах виступає необхідною пропедевтикою до подальшого вивчення курсу геометрії, зокрема стереометрії. Це дозволяє створити цілісну систему геометричних знань, де наочно-образні форми мислення поступово переходять у логічно-абстрактні.

Аналіз психолого-педагогічних і методичних джерел засвідчив, що розвиток просторових уявлень є складним багаторівневим процесом, який пов'язаний із віковими особливостями молодших підлітків. У цьому віці активно формується просторове сприйняття, візуально-образна пам'ять і уява, що створює сприятливі умови для запровадження пропедевтичних елементів стереометрії у навчальний процес.

Проведений аналіз навчальних програм і підручників з математики для 5–6 класів показав, що вони містять значний потенціал для розвитку просторового мислення: теми, пов'язані з геометричними фігурами, побудовами, вимірюваннями, координатами, масштабом, можуть бути використані як основа для введення елементів тривимірності. Однак цей потенціал реалізується не повною мірою через відсутність цілісної методичної системи пропедевтики стереометричних уявлень.

Розроблена методика пропедевтики формування стереометричних уявлень передбачає поетапне формування знань і вмінь:

- **перший етап** – створення наочно-образної бази через спостереження, маніпуляції з предметами, моделювання геометричних тіл;
- **другий етап** – формування елементарних уявлень про просторові фігури на основі порівняння, узагальнення та класифікації;
- **третій етап** – розвиток здатності до уявного перетворення просторових об'єктів, побудови зображень, встановлення відношень між площинними й просторовими фігурами.

Отже, результати дослідження дозволяють зробити такі **узагальнені висновки**:

1. Формування стереометричних уявлень є важливим складником математичної підготовки учнів і потребує системного підходу, що забезпечує наступність між початковою, базовою і старшою школою.
2. Пропедевтика елементів стереометрії у 5–6 класах має будуватися на засадах наочності, моделювання, інтеграції з іншими видами діяльності та поступового переходу від конкретно-дійового до абстрактного рівня мислення.
3. Розроблена методика пропедевтики стереометричних уявлень позитивно впливає на розвиток просторового мислення, математичної мови й логічних операцій учнів.
4. Використання сучасних дидактичних засобів (моделей, інтерактивних ресурсів, 3D-зображень) підвищує ефективність навчального процесу, активізує пізнавальну діяльність школярів та сприяє формуванню стійкого інтересу до математики.

Практичне значення одержаних результатів полягає в можливості застосування розроблених рекомендацій і дидактичних матеріалів у практиці роботи вчителів математики, у процесі підготовки студентів педагогічних спеціальностей, а також у вдосконаленні змісту шкільних програм з математики. Перспективними напрямками подальших досліджень є розроблення системи завдань і засобів для формування просторового мислення з використанням технологій доповненої реальності, а також удосконалення методики вивчення стереометрії в 7–9 класах на основі пропедевтичних напрацювань.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Білий Б. М. *Методика викладання математики: становлення і розвиток в УРСР*. — Київ : КТЕІ, 1971. — 216 с.
2. Виготський Л. С. *Мислення і мова*. — К. : Педагогіка, 1982.
3. Гальперін П. Я. *Про формування розумових дій*. — В. : В-во В. ун-та, 1966.
4. Гончаренко С. У. *Педагогічний словник*. — К. : Либідь, 2012.
5. Дубинчук О. С., Тесленко І. Ф. *Геометрія : підручник для 8-го класу середньої школи*. — Київ : Радянська школа, 1961. — 129 с.
6. Кантор І. Л. *Психологія просторового мислення школярів*. — Харків : Основа, 2005.
7. Колягін Ю. М. *Методика викладання математики в середній школі*. — К. : Радянська школа, 2000.
8. Мороз Н. В. *Формування просторових уявлень у процесі навчання геометрії*. — Харків : Основа, 2017.
9. Піаже Ж. *Мова і мислення дитини*. — К. : Основи, 1994.
10. Савченко О. Я. *Дидактика початкової школи*. — К. : Освіта, 2019.
11. Тесленко І. Ф., Матюшко І. С., Рафаловський Е. В. *Геометрія: практикум з розв'язування задач*. — Київ : Вища школа, 1985. — 184 с.
12. Гордієнко І., Шиманський М. Про елементи стереометрії у 5-6 класах. *Актуальні проблеми сучасної науки: матеріали XII-ї міжнародної науково-практичної конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій*. — Дрогобич, 2025. — С. 269–270.

ДОДАТКИ

Тематична діагностувальна робота №5 з математики

Просторові геометричні фігури. Вимірювання величин

дата

Виконав/-ла

Учень/учениця 6__ класу

Назва закладу

Прізвище та ім'я

Шановний /- на шестикласнику/-це

Запрошуємо Тебе у чарівний світ математики.

Попробуй продіагностувати свої знання. Читай уважно кожне завдання.

У деяких із них потрібно вибрати одну із вказаних відповідей, в інших записати повне розв'язання, пояснення і відповідь. Уважно перевір свої записи.

Успіхів Тобі! Ти все зможеш!

Тематична діагностувальна робота №5
з математики
Просторові геометричні фігури. Вимірювання величин

1. Розглянь предмети певної геометричної форми, зображені на малюнках. Визнач форму кожного предмета та продовж речення.



Пакетик чаю має форму _____

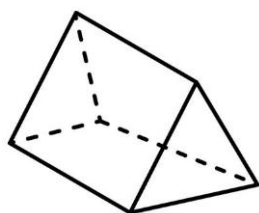
Консервна банка має _____

форму _____

Вафельний ріжок має форму _____

(3 бали)

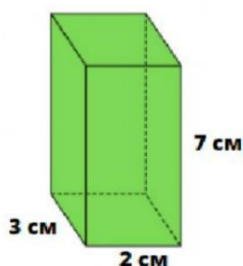
2. Обери рядок, у якому правильно вказано кількість ребер трикутної призми.



- А 3
Б 5
В 6
Г 9

(1 бал)

3. Зазнач рядок, у якому записано вираз для обчислення об'єму прямокутного паралелепіпеда.

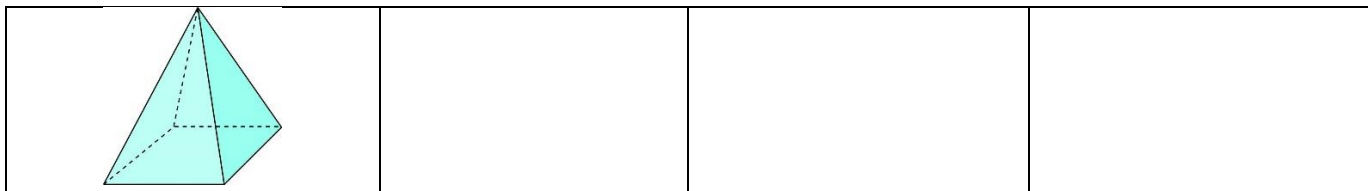


- А $3 + 2 + 7$
Б $(3 + 2 + 7) \cdot 2$
В $3 \cdot 2 \cdot 7$
Г $3 \cdot 2 + 7$

(1 бал)

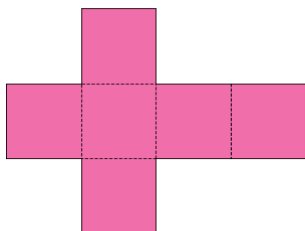
4. Розглянь рисунок, на якому зображено чотирикутну піраміду, та заповни таблицю.

Чотирикутна піраміда	Кількість ребер	Кількість граней	Кількість вершин
-------------------------	--------------------	---------------------	---------------------



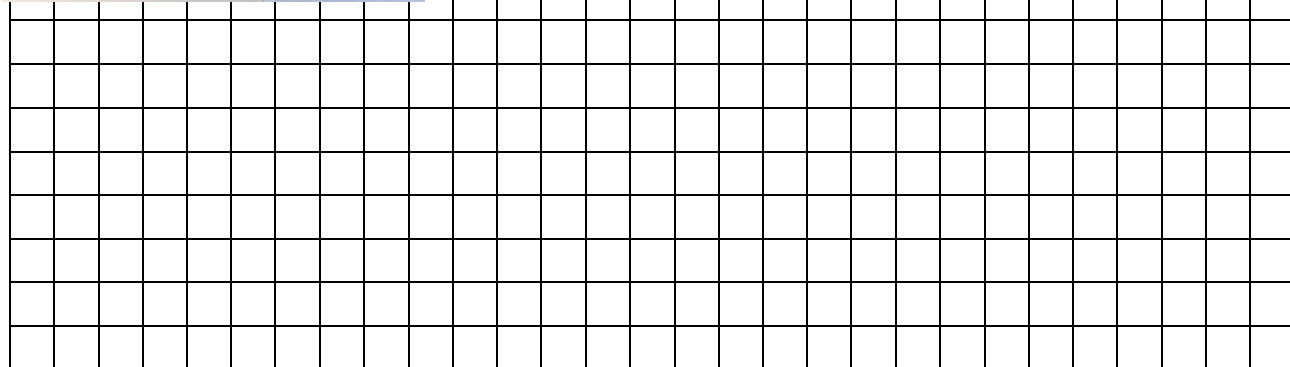
(3 бали)

5. Розглянь розгортку поверхні геометричного тіла та запиши назву просторової фігури, якій вона відповідає.



Відповідь: _____ (1 бал)

6. Каркасний басейн з вимірами 5 м, 3 м, 1 м заповнений водою повністю. Обчисли об'єм води, який використали для цього.



Відповідь: _____ (4 бали)

7. Розглянь таблицю. Вибери з довідничка ту формулу, за якою можна обчислити площу повної поверхні відповідної геометричної фігури. Впиши обрану формулу у відповідному рядку незаповненого стовпця.

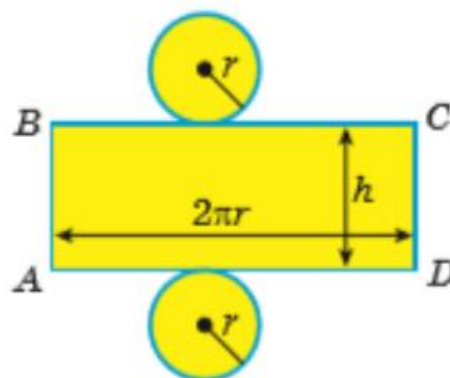
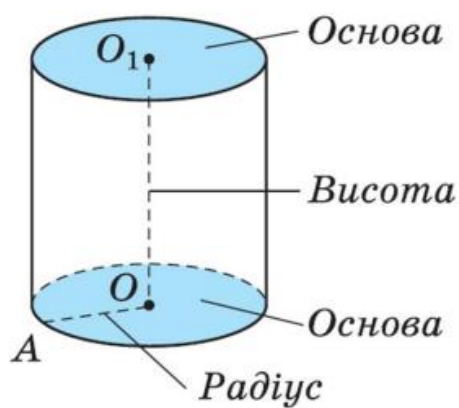
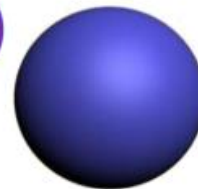
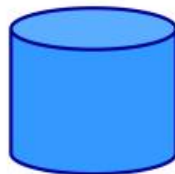
Довідничок: $S = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$, $S = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot h$, $S = 6 \cdot a^2$

Зображення	Площа повної поверхні	Розгортка
------------	-----------------------	-----------

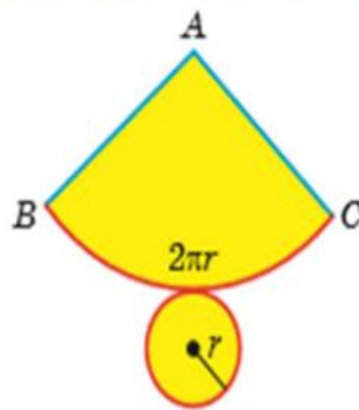
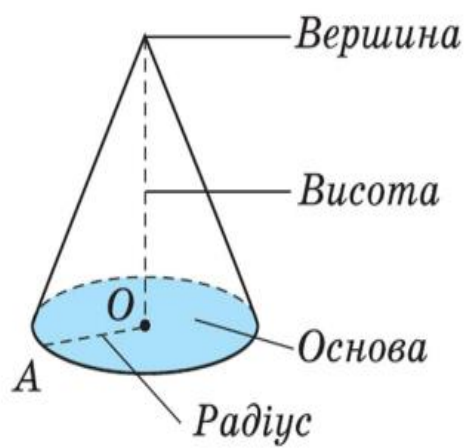
Циліндр. Конус. Куля

6 клас

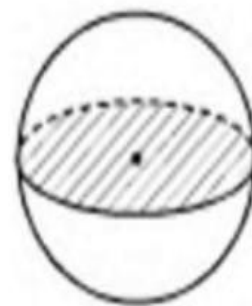
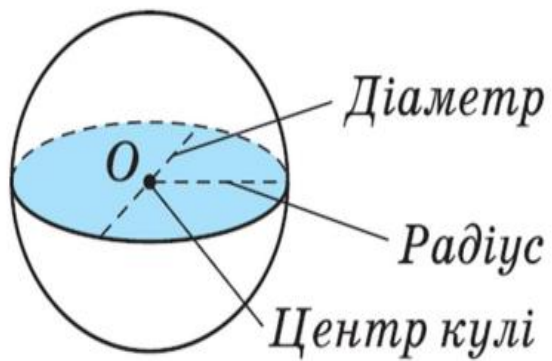
(Матеріал до уроку)



$$S_{\text{бічн}} = 2\pi r h$$



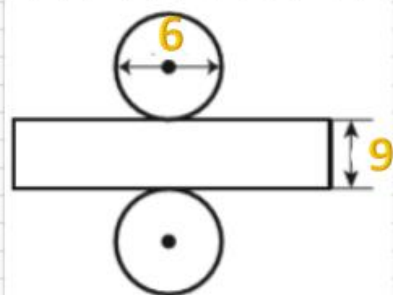
$$S_{\text{бічн.пов.}} = \pi r l.$$



$$S_{\text{бічн.пов.}} = 4\pi r^2$$

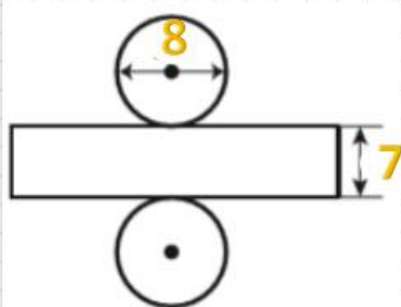
$$S_{\text{перерізу}} = \pi r^2$$

1. Радіус основи циліндра дорівнює 9 см, а його твірна — 7 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.



2. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, розгортку якого зображено на рисунку (довжини відрізків подано в сантиметрах).

3. Довжина кола, яке обмежує переріз кулі площиною, що проходить через її центр, дорівнює 12,56 см. Чому дорівнює радіус кулі?



4. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, розгортку якого зображено на рисунку (довжини відрізків подано в сантиметрах).

5. Довжина кола, яке обмежує переріз кулі площиною, що проходить через її центр, дорівнює 25,12 см. Чому дорівнює радіус кулі?

6. Радіус основи циліндра дорівнює 7 см, а його твірна — 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

7. Радіус кулі дорівнює 6 см. Знайдіть площу перерізу кулі площиною, яка проходить через центр кулі.

8. Радіус основи циліндра дорівнює 4 см, а його твірна — 9 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.