

Міністерство освіти і науки України

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

завідувач кафедри математики та економіки,

кандидат пед. наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК

«__» _____ 2025 р.

**Технології використання наочності при вивченні взаємного
розміщення прямих і площин у курсі стереометрії
загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим
вивченням математики**

Спеціальність 014 «Середня освіта (Математика)»

Магістерська робота

на здобуття кваліфікації – магістр середньої освіти. Вчитель математики,
вчитель інформатики.

Автор роботи: Шульга Володимир Богданович _____

підпис

Науковий керівник: кандидат педагогічних наук, доцент

Гордієнко Ірина Валеріївна _____

підпис

Дрогобич, 2025

Захист магістерської роботи

***Технології використання наочності при вивченні взаємного розміщення
прямих і площин у курсі стереометрії загальноосвітніх навчальних закладів
з поглибленим вивченням математики***

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

[illegible]

дата

Голова ЕК _____

підпис

прізвище, ім'я

Секретар ЕК

підпис

прізвище, ім'я

Анотація

Шульга В.Б. *Технології використання наочності при вивченні взаємного розміщення прямих і площин у курсі стереометрії загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики* – Рукопис. – 48 с.

Розкрито психолого-педагогічні засади використання наочності у процесі навчання математики. Обґрунтовано дидактичне значення принципу наочності у формуванні просторових уявлень і понять. Проаналізовано класифікацію засобів наочності у навчанні стереометрії. Узагальнено та систематизовано матеріали про знання та вміння учнів про взаємне розміщення прямих і площин у просторі. Описано технології використання інтерактивних та інформаційно-комунікаційних технологій для візуалізації просторових об'єктів.

Ключові слова і фрази: шкільний курс стереометрії, наочність, взаємне розміщення прямих і площин у просторі.

Annotation

Shulga V.B. *Technologies for using visualization when studying the mutual placement of lines and planes in the course of stereometry of general educational institutions with in-depth study of mathematics* – Manuscript. – 48 p.

The psychological and pedagogical principles of using visualization in the process of teaching mathematics are revealed. The didactic significance of the principle of visualization in the formation of spatial ideas and concepts is substantiated. The classification of visualization tools in teaching stereometry is analyzed. Materials on students' knowledge and skills about the mutual placement of lines and planes in space are summarized and systematized.

The technologies for using interactive and information and communication technologies for visualizing spatial objects are described. The school course of stereometry, visualization, mutual placement of lines and planes in space.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
 РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИКОРИСТАННЯ НАОЧНОСТІ В НАВЧАННІ СТЕРЕОМЕТРІЇ.....	7
1.1. Психолого-педагогічні засади використання наочності у процесі навчання математики.....	7
1.2. Дидактичне значення принципу наочності у формуванні просторових уявлень і понять.....	9
1.3. Класифікація засобів наочності у навчанні стереометрії	12
 РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ НАОЧНОСТІ ПРИ ВИВЧЕННІ ВЗАЄМНОГО РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН.....	15
2.1. Зміст теми «Взаємне розміщення прямих і площин» у шкільному курсі стереометрії.....	15
2.2. Узагальнення та систематизація знань та вмінь учнів про взаємне розміщення прямих і площин у просторі.....	24
2.3. Технології використання інтерактивних та інформаційно-комунікаційних технологій для візуалізації просторових об'єктів.....	35
 ВИСНОВКИ.....	46
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	47

ВСТУП

Сучасна математична освіта перебуває на етапі активних змін, зумовлених реформуванням освітнього простору України відповідно до положень Концепції «Нова українська школа», що акцентує увагу на розвитку компетентностей, критичного мислення та вміння застосовувати знання в практичній діяльності. Особливої актуальності набуває проблема підвищення ефективності навчання геометрії, зокрема її просторової складової — стереометрії, що є важливою передумовою формування в учнів просторового мислення та уявлень про тривимірний світ.

Одним із провідних дидактичних принципів, що забезпечує глибоке і свідоме засвоєння навчального матеріалу, є принцип наочності. Наочність у навчанні математики виступає не лише засобом ілюстрації, а й дієвим інструментом пізнання, який допомагає учням перейти від конкретного сприйняття об'єктів до абстрактного мислення. Як зазначає О. Савченко, наочність у сучасній школі має розглядатися в контексті інтерактивної взаємодії вчителя й учня, що сприяє розвитку самостійності мислення і дослідницьких умінь школярів.

У курсі стереометрії тема «Взаємне розміщення прямих і площин» є фундаментальною для подальшого вивчення геометричних понять. Вона формує основи просторових уявлень, необхідних для розуміння властивостей тіл, визначення їх взаємного положення, побудови перетинів тощо. Ефективне опанування цієї теми потребує системного використання різних видів наочності — предметної, графічної, мультимедійної та інтерактивної.

Значна кількість досліджень присвячена проблемі розвитку просторового мислення учнів і застосуванню наочності в навчанні геометрії (Г. М. Бевз, В. Г. Бевз, Г. П. Бевз, О. І. Скафа, Л. М. Федоренко, Л. В. Капіносов, І. І. Тарасенкова, Н. А. Тарасенкова, О. А. Швеця [2, 12, 13, 15]). Проте питання технологізації процесу використання наочності при вивченні взаємного розміщення прямих і площин у школах із поглибленим вивченням математики залишається недостатньо дослідженим.

Актуальність дослідження зумовлена потребою в оновленні методики навчання стереометрії на основі сучасних педагогічних технологій, які забезпечують візуалізацію складних просторових об'єктів та сприяють глибшому засвоєнню знань.

Об'єкт дослідження — процес навчання стереометрії у закладах загальної середньої освіти з поглибленим вивченням математики.

Предмет дослідження — технології використання наочності при вивченні взаємного розміщення прямих і площин.

Мета дослідження — теоретично обґрунтувати та експериментально перевірити ефективність технологій використання наочності у процесі навчання теми «Взаємне розміщення прямих і площин».

Завдання дослідження:

1. Проаналізувати психолого-педагогічні й дидактичні основи використання наочності в навчанні математики.
2. Дослідити сучасні технології візуалізації навчального матеріалу зі стереометрії.
3. Розглянути технології використання інтерактивних та інформаційно-комунікаційних технологій для візуалізації просторових об'єктів при вивченні теми «Взаємне розміщення прямих і площин».

Методи дослідження: теоретичний аналіз психолого-педагогічної, методичної та навчальної літератури; узагальнення педагогічного досвіду; педагогічне спостереження; анкетування.

Наукова новизна дослідження полягає в уточненні поняття «технології використання наочності в навчанні стереометрії» та розробленні моделі їх упровадження у процес вивчення взаємного розміщення прямих і площин.

Практичне значення полягає у створенні методичних рекомендацій для вчителів математики, які працюють у класах із поглибленим вивченням предмета.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИКОРИСТАННЯ НАОЧНОСТІ В НАВЧАННІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

1.1. Психолого-педагогічні засади використання наочності у процесі навчання математики

Психолого-педагогічні засади використання наочності у процесі навчання математики ґрунтуються на положеннях теорії пізнання, психології навчання та дидактики, які визначають взаємозв'язок між чуттєвим і раціональним у процесі формування знань. Наочність розглядається як необхідна умова переходу від емпіричного рівня засвоєння матеріалу до теоретичного, що забезпечує цілісність пізнавальної діяльності учня. Її сутність полягає у створенні таких умов, за яких знання набувають конкретно-образного вираження, стають доступними для осмислення, узагальнення та перенесення у нові ситуації.

Наукові засади застосування наочності в навчанні математики розроблялися багатьма вітчизняними та зарубіжними педагогами і психологами — Л. С. Виготським, П. Я. Гальперінім, Ж. Піаже, Дж. Брунером, Н. Ф. Талізінною, О. Я. Савченко та ін. Згідно з положеннями культурно-історичної теорії Л. С. Виготського [4], розвиток мислення дитини відбувається у взаємодії із зовнішнім світом, а засоби навчання виступають опосередковуючими ланками між дитиною та об'єктом пізнання. Наочність, у цьому розумінні, є тим психологічним інструментом, який допомагає учневі засвоїти нові способи дії, перетворюючи зовнішню діяльність у внутрішній план мислення. Саме через використання моделей, креслень, графічних зображень, об'ємних фігур формується логічна структура математичних знань.

Значний внесок у розроблення психолого-педагогічних основ використання наочності зробив П. Я. Гальперін, який довів, що засвоєння знань проходить кілька етапів: від матеріальних дій із предметами — до мисленнєвих операцій. У цьому процесі наочні засоби виконують роль матеріалізованої форми дії, яка допомагає учням усвідомити закономірності, структуру об'єктів, співвідношення між їх властивостями. Отже, наочність не лише полегшує

сприймання, а й забезпечує формування внутрішніх розумових структур, що відповідають логіці наукового мислення.

Психологи когнітивного напрямку (Ж. Піаже, Дж. Брунер, Г. Гарднер [9, 5]) розглядають наочність як важливий засіб когнітивного розвитку особистості. Ж. Піаже підкреслював, що в підлітковому віці, коли формується формально-операційне мислення, учень ще потребує опори на конкретні образи, що виступають підґрунтям для формування абстрактних понять. Дж. Брунер виділив три форми представлення знань — дієву, іконічну (наочну) та символічну, наголошуючи, що повноцінне навчання відбувається лише тоді, коли між цими формами встановлюються зв'язки. У цьому контексті візуалізація математичних понять сприяє узгодженню між образним і логічним мисленням, допомагає здійснювати переходи від конкретного до абстрактного та навпаки.

На сучасному етапі розвитку педагогічної науки наочність трактується не лише як статичний засіб демонстрації, а як інтерактивний, динамічний компонент навчального середовища. У концепції Нової української школи підкреслюється важливість створення освітнього простору, який забезпечує діяльнісне, дослідницьке, проблемно-орієнтоване навчання. У цьому процесі засоби наочності — фізичні, графічні, цифрові — виступають засобами пізнавальної діяльності, стимулюють розвиток критичного та креативного мислення, сприяють формуванню просторової уяви та інформаційно-комунікаційної компетентності.

Суттєвою психолого-педагогічною характеристикою наочності є її емоційно-мотиваційний потенціал. Дослідження показують, що використання візуальних засобів навчання підвищує рівень зацікавленості учнів, знижує навчальну тривожність, активізує пізнавальну діяльність. Завдяки поєднанню з іншими методами — проблемним, дослідницьким, діяльнісним — наочність сприяє формуванню позитивної навчальної мотивації, підтримує емоційний тонус, стимулює самостійне мислення.

У навчанні геометрії, зокрема стереометрії, використання наочності має особливе значення. Просторові відношення важко уявити без опори на моделі, малюнки, комп'ютерні візуалізації, що дають змогу здійснювати «внутрішній

експеримент» — розглядати об'єкт з різних ракурсів, змінювати його положення, аналізувати перетини, симетрії, проєкції. Використання програм типу *GeoGebra*, *Cabri 3D*, *SketchUp* або інтерактивних моделей дозволяє учням самостійно відкривати закономірності, аналізувати властивості просторових фігур і встановлювати між ними взаємозв'язки. Така діяльність має потужний розвивальний ефект, оскільки поєднує в собі наочність, активність і дослідницький підхід.

У педагогічному плані ефективність використання наочності залежить від дотримання низки умов: відповідності засобів навчальним завданням, оптимального співвідношення між наочним і абстрактним, урахування вікових та індивідуальних особливостей учнів. Важливо, щоб наочність не підмінювала собою мислення, а слугувала його стимулятором. Тільки тоді вона стає засобом інтелектуального розвитку, формування вміння бачити закономірності, аналізувати структуру задачі, узагальнювати способи дії.

Таким чином, психолого-педагогічні засади використання наочності у навчанні математики полягають у забезпеченні цілісності пізнавального процесу, розвитку логічного, просторового та креативного мислення учнів, підвищенні їх навчальної мотивації та активності. Наочність є необхідною умовою реалізації діяльнісного, компетентнісного та особистісно орієнтованого підходів у сучасній математичній освіті.

1.2. Дидактичне значення принципу наочності у формуванні просторових уявлень і понять

Принцип наочності є одним із найдавніших і водночас найактуальніших дидактичних принципів, який визначає структуру й характер процесу пізнання у навчанні математики. Його сутність полягає у створенні умов, за яких учень сприймає, осмислює й узагальнює навчальний матеріал через систему конкретних, візуально доступних образів, моделей, схем, графічних зображень або предметних дій. У навчанні геометрії, а особливо стереометрії, цей принцип має виняткове значення, оскільки саме він забезпечує перехід від чуттєвого

сприймання просторових об'єктів до формування абстрактних просторових понять і узагальнених способів мислення.

У дидактиці ще з часів Я. А. Коменського принцип наочності розглядався як основа ефективного засвоєння знань. У праці «*Велика дидактика*» він зазначав, що «нічого не має бути в розумі, чого не було б спочатку у відчуттях», наголошуючи на необхідності забезпечення чуттєвого досвіду у процесі навчання. Його ідеї отримали подальший розвиток у працях К. Д. Ушинського, який вважав, що наочність забезпечує природовідповідність навчання, спирається на психологічні закономірності пізнання дитини. В. О. Сухомлинський [12], продовжуючи цю традицію, наголошував, що справжнє навчання повинно бути «світлим, образним і емоційно забарвленим», бо саме через образи і спостереження формується глибоке розуміння сутності понять.

З психолого-педагогічної точки зору, наочність у навчанні виконує низку важливих функцій. По-перше, вона забезпечує *сенсорну основу* пізнання, тобто створює матеріальний фундамент для формування внутрішніх ментальних структур. По-друге, наочність має *когнітивну функцію*, оскільки сприяє кращому розумінню і запам'ятовуванню матеріалу. По-третє, вона виконує *мотиваційну функцію*, викликаючи інтерес до навчання, стимулюючи пізнавальну активність учнів. Нарешті, наочність має *розвивальне значення* — вона сприяє розвитку образного, просторового та логічного мислення, формує здатність до узагальнення, порівняння, аналізу та синтезу.

У контексті навчання геометрії принцип наочності стає засобом переходу від конкретних просторових образів до абстрактних геометричних понять. Під час вивчення взаємного розміщення прямих і площин у стереометрії учні повинні не лише сприймати просторові відношення, а й уміти уявляти, як вони змінюються при обертанні, паралельному перенесенні чи перетині об'єктів. Цей процес вимагає розвитку складних розумових дій — просторової уяви, зорово-рухових координацій, здатності до ментальних перетворень образів. Як підкреслює П. Я. Гальперін, будь-яка складна розумова дія повинна мати матеріальну або наочну основу на початкових етапах навчання. Отже, ефективне

формування просторових уявлень можливе лише за умови систематичного використання наочних засобів.

На сучасному етапі розвитку освіти принцип наочності набуває нового технологічного змісту. Якщо раніше під наочністю розуміли переважно предметні моделі, малюнки чи креслення, то сьогодні вона реалізується через мультимедійні презентації, комп'ютерні візуалізації, 3D-моделі, цифрові симуляції, інтерактивні навчальні середовища. Використання програм *GeoGebra 3D*, *SketchUp*, *Cabri Geometry* або доповненої реальності дозволяє учням самотійно моделювати просторові фігури, спостерігати взаємне розміщення прямих і площин, змінювати параметри моделей, аналізувати результати. Такі дії формують не лише просторові уявлення, а й навички дослідницької, аналітичної діяльності.

Наочність у процесі навчання стереометрії виконує роль **засобу формування компетентностей**, зокрема:

- **математичної** — через осмислення просторових закономірностей і логічних зв'язків;
- **інформаційно-цифрової** — через роботу з цифровими моделями й програмними середовищами;
- **дослідницької** — завдяки експериментуванню з наочними моделями;
- **комунікативної** — через обговорення побаченого, пояснення та обґрунтування спостережень.

У сучасній дидактиці (О. Савченко, Р. Шиян, І. Лернер, О. Онопрієнко, Т. Засєкіна, С. Архіпова) наочність розглядається не лише як методичний прийом, а як принципово важливий чинник формування пізнавальної діяльності учнів. Вона забезпечує активізацію внутрішніх механізмів мислення, створює умови для самотійного відкриття знань і переходу від зовнішнього сприймання до внутрішнього осмислення. Зокрема, у дослідженнях сучасних педагогів підкреслюється необхідність інтеграції традиційних і цифрових форм наочності, адже саме їх поєднання дозволяє створювати багатовимірне навчальне середовище, у якому учень не просто спостерігає, а взаємодіє з об'єктом пізнання.

Отже, дидактичне значення принципу наочності у формуванні просторових уявлень полягає у тому, що він забезпечує системність, усвідомленість і наукову глибину засвоєння знань. Наочність виступає інструментом інтелектуального розвитку, опорою для формування понять і засобом мотивації. Реалізація цього принципу в навчанні стереометрії сприяє не лише підвищенню якості знань, а й формуванню компетентної, дослідницьки спрямованої особистості, здатної до аналітичного мислення, самостійного моделювання та творчого розв'язання просторових задач.

1.3. Класифікація засобів наочності у навчанні стереометрії

Засоби наочності посідають центральне місце у процесі навчання стереометрії, оскільки вони забезпечують перехід від безпосереднього сприймання просторових об'єктів до абстрактного мислення, створюючи умови для глибокого розуміння взаємного розміщення прямих, площин і тіл у просторі. У дидактиці наочність розглядається не лише як допоміжний інструмент пояснення матеріалу, а як системоутворювальний компонент навчального процесу, що визначає його ефективність, логіку та структуру.

Під **засобами наочності** розуміють будь-які матеріальні або символічні об'єкти, що сприяють чуттєвому сприйманню навчальної інформації та допомагають учням осмислити сутність геометричних понять, властивостей і відношень. Як зазначає О. Савченко, засоби наочності — це «матеріальні чи віртуальні носії навчальної інформації, які відтворюють реальні або умовні об'єкти з метою формування в учнів правильних уявлень і понять». У навчанні стереометрії така роль наочності є особливо значущою, адже сприймання простору — процес складний і потребує багаторазового переходу від конкретного образу до узагальнення.

У педагогічній літературі існують різні підходи до класифікації засобів наочності. Найбільш поширеним є поділ за **характером сприймання**, який виділяє:

- **зорову наочність** (моделі, малюнки, схеми, графічні зображення, креслення, комп'ютерні візуалізації);

- **слухову наочність** (аудіозаписи, пояснення вчителя, відеофрагменти з коментарем);
- **кінестетичну (дієву) наочність** (маніпуляції з предметними моделями, складання фігур, експериментальні дії з матеріальними об'єктами).

Інший підхід ґрунтується на **ступені узагальненості зображення**, згідно з яким виділяють:

- **предметну (реалістичну) наочність** — реальні об'єкти або їх моделі (куб, піраміда, призма, площина, нитка як пряма тощо);
- **образну (графічну)** — малюнки, схеми, креслення, які відображають властивості об'єктів;
- **символічну (знакову)** — умовні позначення, формули, діаграми, графічні символи, що узагальнюють просторові властивості.

У навчанні стереометрії доцільно використовувати **комплексну систему наочності**, яка поєднує кілька її видів. Так, вивчення взаємного розміщення прямих і площин потребує одночасного використання предметних моделей (для первинного ознайомлення), графічних зображень (для узагальнення) та цифрових моделей (для динамічного спостереження і перетворення). Саме взаємодія цих форм дозволяє учням формувати не лише статичні, а й динамічні просторові уявлення, що є необхідною умовою розвитку просторового мислення.

За джерелом створення, засоби наочності можна поділити на:

- **природні** (реальні об'єкти довкілля, спостереження просторових відношень у навколишньому світі);
- **штучні (моделювальні)** — створені спеціально для навчання (пластикові або дерев'яні моделі, дротові каркаси, макети, прозорі фігури тощо);
- **технічні та цифрові** — мультимедійні презентації, відео, інтерактивні симуляції, комп'ютерні 3D-моделі, елементи віртуальної чи доповненої реальності.

Особливу роль сьогодні відіграють **цифрові засоби наочності**, які розширюють традиційне розуміння принципу наочності, дозволяючи реалізовувати його у нових педагогічних формах. Використання програм *GeoGebra 3D*, *Cabri 3D*, *SketchUp*, *Autodesk Fusion*, а також систем доповненої

реальності (*AR Geometry*) сприяє створенню інтерактивного освітнього середовища, у якому учні можуть не лише спостерігати, а й безпосередньо взаємодіяти з геометричними об'єктами, обертати їх, аналізувати взаємне розміщення, виявляти закономірності. Це відповідає вимогам Нової української школи щодо формування дослідницьких, аналітичних і інформаційно-комунікаційних компетентностей.

Окремі науковці (І. Лернер, Р. Шиян, О. Онопрієнко) пропонують класифікувати засоби наочності за **дидактичним призначенням**, виокремлюючи:

- **ілюстративні засоби** — ті, що допомагають пояснити або підтвердити новий матеріал (моделі, малюнки, презентації);
- **операційні засоби** — ті, що забезпечують виконання дій і формування навичок (геометричні інструменти, програми для побудови моделей);
- **контрольно-рефлексивні засоби** — ті, що сприяють самоперевірці, рефлексії, аналізу (інтерактивні вправи, тести, тренажери).

Класифікація засобів наочності має не лише теоретичне, а й практичне значення. Вона допомагає вчителю усвідомлено добирати наочний матеріал залежно від дидактичної мети, змісту теми, рівня підготовки учнів та навчальних умов. Водночас систематичне й методично обґрунтоване використання різних видів наочності сприяє розвитку в учнів уміння переходити від конкретних образів до узагальнених просторових понять, формує гнучкість мислення, аналітичність, уміння візуалізувати та моделювати просторові ситуації.

Таким чином, класифікація засобів наочності у навчанні стереометрії відображає багатовимірність цього дидактичного феномену. Вона показує, що ефективне застосування наочності — це не випадковий підбір ілюстрацій, а цілеспрямована педагогічна система, у якій кожен засіб виконує певну функцію: пізнавальну, мотиваційну, розвивальну або контролюючу. Поєднання традиційних, технічних та цифрових форм наочності забезпечує високий рівень розуміння стереометричних понять і створює умови для розвитку просторової компетентності учнів.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ НАОЧНОСТІ ПРИ ВИВЧЕННІ ВЗАЄМНОГО РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

2.1. Зміст теми “Взаємне розміщення прямих і площин” у шкільному курсі стереометрії загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики»

Навчальна програма з математики для поглибленого рівня укладена відповідно до Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти [16]. Згідно з положеннями цього стандарту, зміст математичної освіти має забезпечувати системність, науковість та практичну спрямованість навчального процесу.

Аналіз навчальної програми з геометрії (поглиблений рівень) для 10–11 класів, розробленої на основі зазначеного стандарту [16], засвідчує, що вона спрямована на формування в учнів цілісної системи геометричних знань, необхідних для подальшого навчання, майбутньої професійної діяльності та розв’язання прикладних задач.

Метою вивчення математики на поглибленому рівні є забезпечення свідомого оволодіння учнями системою знань, умінь і навичок, які мають не лише освітнє, а й практичне значення. Вони повинні стати підґрунтям для опанування інших навчальних дисциплін природничо-математичного циклу та подальшого навчання у закладах вищої освіти.

Відповідно до визначеної мети, програмою передбачено реалізацію таких **основних завдань**:

- 1. Формування наукового світогляду та системи уявлень про роль математики в пізнанні навколишнього світу.**
- 2. Оволодіння математичною мовою, основними поняттями, символами та методами, необхідними як у повсякденному житті, так і в майбутній професійній діяльності.**

3. **Розвиток мислення учнів** — логічного, просторового, інтуїтивного — а також пам'яті, уваги й уміння робити обґрунтовані висновки.
4. **Формування ключових і життєвих компетентностей**, зокрема вміння працювати з інформацією, приймати рішення, взаємодіяти в групі, виявляти наполегливість і відповідальність.
5. **Виховання громадянських і патріотичних якостей**, зокрема національної самосвідомості, поваги до української культури, історії та традицій.

Таким чином, програма з геометрії поглибленого рівня забезпечує не лише засвоєння теоретичних знань, а й створює умови для розвитку особистості учня, його творчого потенціалу, пізнавальної активності та готовності до самостійного навчання впродовж життя.

Випускник закладу загальної середньої освіти має володіти низкою умінь і компетентностей, які забезпечують здатність застосовувати математичні знання в різних життєвих та навчальних ситуаціях. Зокрема, він повинен уміти розпізнавати реальні або навчальні проблеми як математичні задачі, виокремлювати в них суттєві ознаки, перекладати зміст ситуацій мовою математики, будувати відповідні математичні моделі та знаходити їх розв'язки. Такі вміння є основою для застосування математики в інших галузях знань — фізиці, астрономії, географії, економіці, хімії, біології тощо.

Крім того, випускник має логічно та критично мислити, уміти аналізувати, порівнювати, робити узагальнення, прогнозувати результати математичних дій і перевіряти їх обґрунтованість.

Серед практичних умінь важливе місце посідає здатність виконувати різноманітні математичні розрахунки, а також здійснювати тотожні перетворення алгебраїчних, показникових, логарифмічних і тригонометричних виразів під час розв'язування задач прикладного та теоретичного характеру.

Учень також має вміти аналізувати та інтерпретувати графіки функціональних залежностей, досліджувати їхні властивості, робити висновки на основі отриманих результатів. Окрему компетентність становить уміння

обчислювати ймовірності випадкових подій, що формує підґрунтя для статистичного та стохастичного мислення.

Не менш значущою є здатність зображати геометричні фігури, виявляти взаємозв'язки між ними, доводити та обґрунтовувати їхні властивості, що забезпечує розвиток просторового мислення та уміння працювати з просторовими моделями.

Під час вивчення взаємного розміщення прямих і площин у просторі курсу стереометрії на поглибленому рівні у 10-му класі [16] учні вивчають наступні питання:

Тема 2. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

1. Взаємне розміщення двох прямих у просторі: прямі, що перетинаються; паралельні прямі; мимобіжні прямі. Ознака мимобіжних прямих.

2. Взаємне розміщення прямої та площини у просторі: пряма і площина, що перетинаються; паралельні пряма і площина.

3. Ознака паралельності прямої та площини.

4. Взаємне розміщення двох площин у просторі: площини, що перетинаються, паралельні площини.

5. Ознака паралельності площин. Властивості паралельних площин.

6. Паралельне проєкціювання, його властивості. Зображення плоских і просторових фігур у стереометрії.

7. Задачі на побудову перерізів многогранників методом слідів.

Тема 3. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

1. Перпендикулярність прямих у просторі.

2. Перпендикулярність прямої та площини. Ознака перпендикулярності прямої та площини.

3. Перпендикуляр і похила. Теорема про три перпендикуляри.

4. Перпендикулярність площин. Ознака перпендикулярності площин. Зв'язок між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин.

5. Кути у просторі: між прямими, між прямою і площиною, між площинами.

6. Двогранні кути.

7. Лінійний кут двогранного кута.

8. Відстані у просторі: від точки до прямої, відрізка, променя, від точки до площини, півплощини; від прямої до паралельної їй площини, між паралельними площинами, між мимобіжними прямими.

9. Ортогональне проєкціювання.

10. Зображення кола.

11. Площа ортогональної проєкції многокутника. Практичне застосування властивостей паралельності та перпендикулярності прямих і площин.

Очікувальні результати навчально-пізнавальної діяльності при вивченні теми № 2:

Учень / учениця

1. Демонструє на прикладах моделей стереометричних фігур розміщення: паралельних прямих, мимобіжних прямих, паралельність прямої до площини, паралельність двох площин. формулює означення, ознаки, теореми з тем, зазначених у змісті навчального матеріалу;

2. На зображених рисунках, моделях розрізняє можливі ситуації точок і прямих, розрізняє паралельні та мимобіжні прямі, проєкціювання відрізків у певному відношенні.

3. Пояснює та описує ознаки мимобіжних, паралельності прямої та площини; паралельності площин;

4. класифікує взаємне розміщення: двох прямих; прямої та площини; двох площин; зображення просторових фігур на площині за видом і формою;

5. зображає плоскі та просторові фігури на площині; паралельне проєкціювання многокутника на площину; переріз січної площини і многогранника;

6. обґрунтовує методи слідів і проєкцій під час побудови перерізів січної площини і многогранника;

7. ілюструє текстовий зміст геометричних тверджень та задач за допомогою рисунка;

8. характеризує властивості паралельних площин та паралельного проєкціювання;

9. розв'язує вправи, з теми «Паралельність прямих і площин у просторі».[16]

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів при вивченні теми № 3:

Учень/учениця

1. Демонструє на прикладах моделей стереометричних фігур розміщення: перпендикулярних прямих, перпендикулярність прямої до площини, перпендикулярність двох площин. формулює означення, ознаки, теореми з тем, зазначених у змісті навчального матеріалу;

2. формулює означення, ознаки, властивості понять, зазначених у змісті навчального матеріалу;

3. розрізняє перпендикуляр і похилу, перпендикуляр і проекцію похилої; кут між двома прямими простору, кут між прямою і площиною, кут між площинами;

4. розуміє зв'язок між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин, відстань від точки до прямої.

5. пояснює що таке двогранний кут, лінійний кут двогранного кута.

6. класифікує взаємне розміщення: двох прямих простору; прямої та площини; двох площин;

7. зображає рисунком перетин двох прямих простору. прямої і площини під прямим кутом; перетин двох (трьох) площин під прямим кутом; кути у просторі: між двома прямими простору, прямою і площиною, двома площинами; ортогональне проєціювання многокутника на площину;

8. знаходить на рисунку та зображає відрізок, яким позначається (визначається) відстань у просторі: від точки до прямої, відрізка, променя; від точки до площини, півплощини; від прямої до паралельної їй площини; між паралельними площинами; між мимобіжними прямими;

9. аналізує та досліджує перпендикулярність деякої прямої до похилої чи її проекції за теоремою про три перпендикуляри;

10. обґрунтовує перпендикулярність прямих, прямої і площини, площин;

11. ілюструє текстовий зміст геометричних тверджень та задач за допомогою рисунка;

12. характеризує властивості перпендикулярних прямих простору на прикладах; прямокутні трикутники, кути яких утворені трьома попарно перпендикулярними прямими (площинами); форму ортогональної проекції многокутника; кут між многокутником та його проекцією;

13. розв'язує вправи з теми перпендикулярність прямих і площин у просторі. [16]

Основним шляхом реалізації визначених цілей навчання є систематичне розв'язування різноманітних типів задач, що виступає центральним елементом процесу формування математичних знань і мислення. Розв'язування задач спирається на сукупність базових, або провідних, завдань, які становлять теоретичну основу курсу геометрії.

До таких базових задач належать основні твердження — теореми, властивості геометричних фігур та різноманітні конструкції, які учні повинні засвоїти у процесі навчання. Кожна теорема чи властивість вимагає логічного доведення, що здійснюється шляхом виведення нового знання з раніше відомих положень. У сучасній математичній науці ці вихідні твердження прийнято називати аксіомами, адже саме вони становлять підґрунтя для побудови всієї системи геометричних знань.

Як зазначає А. В. Грохольська у навчальному посібнику *«Методика навчання математики в старшій та вищій школах»*, методична структура курсу геометрії відображає взаємозв'язок змістової частини навчального матеріалу з його навчально-виховними цілями. Цей взаємозв'язок можна подати у вигляді умовної схеми, що ілюструє єдність логічної структури геометричних знань, методів їх подання та способів формування в учнів просторового мислення і пізнавальної активності.

Цілі навчання → Зміст навчання → Методи і форми роботи → Результати навчання.

- **Цілі навчання** визначають загальний напрям освітнього процесу: формування в учнів просторових уявлень, логічного мислення, умінь

аналізувати, доводити та узагальнювати геометричні закономірності. Вони охоплюють як освітній, так і розвивальний та виховний аспекти.

- **Зміст навчання** відображає систему геометричних понять, тверджень, теорем, способів дій і методів доведення, що становлять ядро геометричної освіти. При доборі змісту враховується поступове ускладнення навчального матеріалу, зв'язок між планіметрією та стереометрією, а також необхідність формування міцних міжпредметних зв'язків.
- **Методи і форми роботи** виступають інструментом реалізації навчального змісту та досягнення поставлених цілей. До них належать аналітичні, дедуктивні та індуктивні методи, метод задач, використання наочних засобів, моделей, цифрових ресурсів і дослідницьких підходів. Особливе значення має застосування задач різних типів — навчальних, тренувальних, проблемних, творчих, що сприяють формуванню глибоких знань і стійких практичних умінь.
- **Результати навчання** виражаються у сформованості ключових компетентностей, математичної культури, здатності логічно міркувати, доводити твердження, аналізувати геометричні ситуації та застосовувати отримані знання в нових умовах.

Таким чином, методична структура курсу геометрії забезпечує цілісність навчального процесу, логічну послідовність формування знань і вмінь, а також узгодженість між теоретичним матеріалом і практичною діяльністю учнів. Вона створює умови для реалізації принципів науковості, системності, наочності та діяльнісного підходу, що є основою ефективного формування просторового мислення школярів у процесі вивчення стереометрії.

Тема «**Взаємне розміщення прямих і площин**» є однією з провідних у курсі стереометрії, адже вона формує основу просторового мислення, розуміння просторових відношень та логіко-дедуктивних структур у математичній діяльності. Зміст теми закладає базові знання для подальшого вивчення складніших геометричних об'єктів — многогранників, тіл обертання, перерізів, поверхонь та їх властивостей.

У програмах загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики вивчення теми передбачає системне формування понять про взаємне положення геометричних елементів у просторі. Учні послідовно ознайомлюються з основними випадками взаємного розміщення двох прямих (перетинаються, паралельні, мимобіжні), прямої і площини (пряма лежить у площині, паралельна або перпендикулярна до неї), двох площин (перетинаються, паралельні, перпендикулярні). Значну увагу приділено означенням, теоремам, аксіомам просторової геометрії та їх доведенням, побудові графічних моделей, аналізу зображень і практичному застосуванню знань.

Поглиблений рівень передбачає не лише засвоєння базових фактів, а й розвиток логічного, аналітичного та просторово-образного мислення через розв'язування задач підвищеної складності, які потребують поєднання візуалізації, просторової уяви та доказових міркувань (Мерзляк, Полонський, Якір, 2022 [8]). Учні виконують вправи на побудову та дослідження просторових конфігурацій, застосовують координатний і векторний методи для опису положення прямих і площин, встановлення умов їх паралельності та перпендикулярності. Така діяльність сприяє інтеграції знань геометрії з алгеброю, аналітичною геометрією та інформатикою.

Важливою умовою ефективного опанування теми є діяльнісний і проблемно-пошуковий підхід. Згідно з концепцією розвивального навчання, знання мають здобуватися учнями в результаті власної пізнавальної активності. Тому під час вивчення теми доцільно створювати ситуації пізнавального конфлікту, ставити перед учнями проблемні питання, що спонукають їх самостійно відкривати нові геометричні закономірності. Наприклад, запропонувати учням дослідити, чи можуть дві площини бути одночасно паралельними і мати спільну точку, або за допомогою моделей довести умову мимобіжності двох прямих.

Методичні рекомендації щодо реалізації змісту теми «Взаємне розміщення прямих і площин» у поглибленому курсі стереометрії можна звести до таких основних напрямів:

1. Поетапне формування просторових уявлень.

- Починати з роботи з реальними моделями (наприклад, куб, піраміда, призма), демонструючи положення прямих і площин.
- Поступово переходити до графічних і схематичних зображень, що формують уміння «бачити» просторові відношення на площині.
- Використовувати цифрові засоби візуалізації (GeoGebra 3D, SketchUp, Cabri 3D), які дозволяють змінювати ракурс, здійснювати обертання фігур, що підсилює просторове сприйняття.

2. Інтеграція практичних і дослідницьких завдань.

- Залучати учнів до побудови моделей із картону, дроту, 3D-друку, що допомагає конкретизувати абстрактні поняття.
- Організовувати навчальні експерименти: визначення взаємного розміщення прямих і площин у класних моделях або за допомогою інтерактивних інструментів.
- Використовувати задачі відкритого типу, де учні повинні не лише знайти відповідь, а й запропонувати власний спосіб доведення.

3. Застосування евристичних і візуально-аналітичних прийомів.

- Формувати вміння учнів здійснювати «перекодування» просторової інформації у графічну форму (креслення, ескіз, схема).
- Використовувати кольорові позначення, маркери, моделювання з прозорими площинами для підсилення наочності.
- Запроваджувати елементи STEM/STEAM-підходу: проєктні роботи, пов'язані з архітектурою, інженерією, дизайном.

4. Поглиблення аналітичного мислення через доведення.

- Вправи на доведення теорем про паралельність і перпендикулярність у просторі мають бути побудовані за принципом наростання складності — від репродуктивних до творчих.
- Доцільно включати задачі на аналіз хибних міркувань, контрприкладів, які сприяють розвитку критичного мислення.

5. Диференціація навчання.

- У класах із поглибленим вивченням математики доцільно виділяти завдання для самостійних міні-досліджень, створення презентацій або коротких доповідей про історичний розвиток понять стереометрії (на основі робіт Евкліда, Декарта, Гільберта).

Зміст і методика викладання цієї теми мають забезпечувати цілісне поєднання наочності, логічного доведення, діяльності та дослідницького пошуку, що в комплексі формує в учнів глибоке розуміння просторових відношень і розвиває мислення геометричного типу. Формування просторового мислення є не лише предметним, а й загальнорозвивальним результатом навчання, адже воно сприяє становленню творчої, пізнавально активної особистості, здатної до аналітичного бачення навколишнього світу.

2.2. Узагальнення та систематизація знань та вмінь учнів про взаємне розміщення прямих і площин у просторі

Уроки узагальнення і систематизації знань та вмінь традиційно розглядаються як важливий етап навчального процесу, що забезпечує глибоке осмислення й упорядкування вже засвоєного матеріалу. У педагогічній теорії підкреслюється, що саме на цьому етапі відбувається інтеграція знань, формування узагальнених способів дій, встановлення логічних зв'язків між окремими поняттями та темами. У межах концептуальних положень Нової української школи такі уроки набувають особливого значення, оскільки компетентнісний підхід вимагає не лише володіння окремими фактами, а здатності учня застосовувати набуті знання у нових ситуаціях, критично мислити, здійснювати рефлексію та самооцінку. Саме використання мультимедійних презентацій відкриває додаткові можливості для підвищення ефективності уроків цього типу, забезпечуючи сучасний формат подачі матеріалу, який відповідає цифровим потребам учнів та особливостям їхнього сприйняття інформації.

Мультимедійні презентації на уроках узагальнення і систематизації виконують одразу кілька дидактичних функцій. Передусім вони забезпечують

структурованість і чіткість навчального матеріалу. Візуальна організація інформації дозволяє виокремити ключові логічні блоки, показати взаємозв'язки між темами, підкреслити причинно-наслідкові залежності, що є надзвичайно важливим для математичних дисциплін, де знання мають характер системи. Завдяки використанню схем, таблиць, діаграм, інтелект-карт, алгоритмів та узагальнюючих моделей учитель може продемонструвати цілісну картину теми або розділу, створюючи для учнів логічний каркас, на якому базується подальше поглиблене засвоєння.

Важливою перевагою презентацій є можливість урізноманітнення форм подання інформації. Слайди можуть містити рисунки, фотографії, відеофрагменти, динамічні моделі, інтерактивні елементи, аудіофайли. Психологи зазначають, що поєднання візуальних та аудіальних каналів сприяє кращому запам'ятовуванню та більш глибокій переробці інформації. Для сучасних підлітків, які є «цифровими уродженцями», саме мультимедійний формат сприймається як природний і стимулює вищий рівень мотивації та зосередженості.

Особливо значущою є роль презентацій під час узагальнення та систематизації знань із тем стереометрії, зокрема теми «Взаємне розміщення прямих і площин у просторі». Цей розділ є одним із найскладніших для учнів, оскільки оперує просторовими уявленнями, які не завжди легко сформулювати без спеціальних наочних засобів. Мультимедійні презентації дають можливість візуалізувати об'єкти простору, динамічно демонструвати їх взаємне положення, моделювати трикутні та багатогранні фігури, що значно підвищує рівень розуміння навчального матеріалу.

За допомогою презентацій учитель може показати базові випадки взаємного розміщення прямих у просторі: паралельні прямі, мимобіжні прямі, прямі, що перетинаються під різними кутами. Анімації дозволяють послідовно продемонструвати, як одна пряма переходить у різні положення щодо іншої, що формує уявлення про тривимірність та просторову мінливість. Наприклад, модель, у якій одна пряма «повертається» від положення в площині до

положення, мимобіжного іншій прямій, дозволяє учням візуально усвідомити різницю між прямими, які не перетинаються, але й не лежать в одній площині.

Узагальнюючи знання про взаємне розміщення площин, учитель може використовувати слайди з покроковими анімаціями: перетин площин у пряму, паралельні площини, випадок, коли площини мають спільну точку або збігаються. Візуально-динамічне подання цих ситуацій допомагає учням не лише повторити визначення та властивості, а й глибше усвідомити геометричну природу взаємодії площин.

Особливо корисними є презентації під час систематизації матеріалу на етапі розв'язування стереометричних задач. У таких презентаціях можна включити:

- поетапну побудову перерізів многогранників;
- схеми для визначення взаємного положення площини та прямої;
- інтерактивні задачі, у яких учні визначають, які елементи є паралельними, а які перетинаються;
- задачі з динамічним підсвічуванням частин фігури, що є ключовими для розв'язання.

Застосування таких прийомів створює додаткову опору на візуальне мислення та сприяє формуванню просторових уявлень – одного з найскладніших компонентів математичної компетентності. Під час узагальнюючих уроків це особливо важливо, оскільки учні мають побачити систему взаємозв'язків між вивченими поняттями: наприклад, як положення прямої щодо однієї площини впливає на її положення щодо іншої, або як властивості паралельності в плані переносяться на простір.

Крім того, презентації дозволяють ефективно організувати формувальне оцінювання у стереометрії: слайди з прикладами типових помилок учнів під час визначення взаємного положення прямих, аналізом неправильних креслень, порівнянням різних способів розв'язання задач, завданнями на самоперевірку. Це підсилює аналітичну складову уроку і допомагає учням усвідомити, що успішність у стереометричних темах значною мірою залежить від точності просторових уявлень і вміння будувати правильні моделі.

Отже, застосування мультимедійних презентацій під час узагальнення та систематизації знань з теми «Взаємне розміщення прямих і площин у просторі» є не лише доцільним, а й методично необхідним, оскільки дозволяє трансформувати абстрактні просторові залежності у зрозумілі, наочно представлені моделі, підсилює логічну, візуальну й діяльнісну складові уроку та сприяє формуванню стійких геометричних компетентностей.

Одним із ключових аспектів використання презентацій є підтримка діяльнісного характеру навчання. Мультимедійна презентація не повинна бути лише «інформаційною стрічкою»; вона має спонукати до активної взаємодії. Для цього використовують запитання для обговорення, фрагменти вправ із прихованими відповідями, інтерактивні елементи, QR-коди з посиланнями на тренажери чи додаткові завдання, елементи гейміфікації. Такий підхід дозволяє залучити учнів до спільного вироблення узагальнених висновків, а також підвищує темп уроку, його динамічність та емоційну привабливість.

На уроках систематизації знань учні часто виконують порівняльний аналіз, класифікацію, узагальнення, доведення, систематичне повторення способів розв'язування. Презентація в цьому випадку може включати порівняльні таблиці, блок-схеми алгоритмів, структурно-логічні моделі. Таке подання значно полегшує узагальнення, сприяє розвитку метапізнання й уміння бачити цілісність предмета.

Окремої уваги заслуговує потенціал презентацій у забезпеченні диференціації навчання. Учитель може підготувати альтернативні слайди з підказками, додатковими поясненнями чи завданнями підвищеної складності. Під час групової роботи учні можуть отримати різні за рівнем складності інструктивні картки у вигляді фрагментів презентації. Це особливо актуально на уроках узагальнення, де важливо підтримати кожного учня в досягненні визначених освітніх результатів, не перевантажуючи його й не знижуючи пізнавальний інтерес.

Наведемо приклад презентації для узагальнення та систематизації знань старшокласників про взаємне розміщення прямих і площин у просторі.

Розміщення прямих і площин в просторі



Пригадаємо!

- Які основні поняття геометрії ви знаєте?
- Наведіть приклади матеріальних об'єктів, математичними об'єктами яких є точка
- Наведіть приклади матеріальних об'єктів, математичними об'єктами яких є пряма
- Як позначаються точки?
- Як позначаються прямі?
- Яким може бути взаємне розміщення точки і прямої

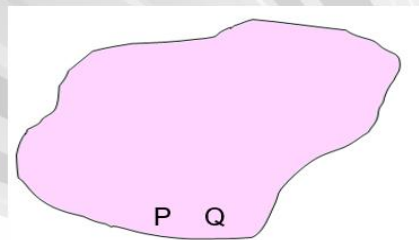
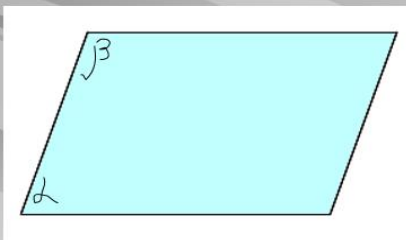
Площина



Площина

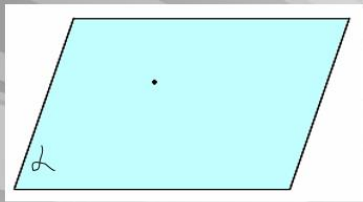
В геометрії площина необмежена, ідеально плоска і гладенька

Зображають і позначають

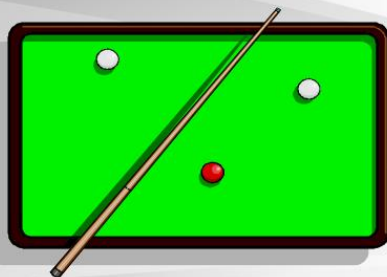


Яким може бути взаємне розміщення точки і площини?

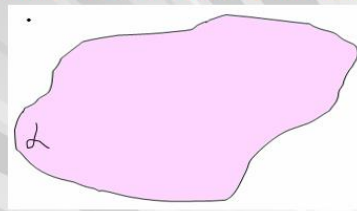
Точка належить площині



$$A \in L$$



Точка не належить площині

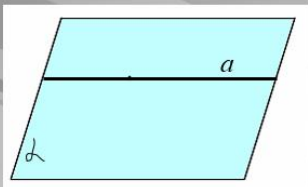


$$A \notin L$$



Яким може бути взаємне розміщення прямої і площини?

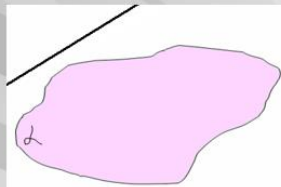
$$a \in L$$



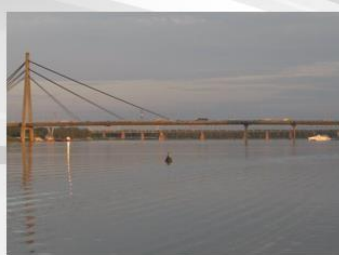
безліч спільних точок



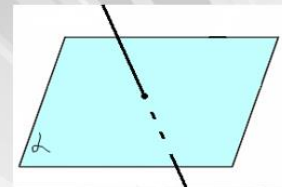
$$a \parallel L$$



немає спільних точок



$$a \cap L$$



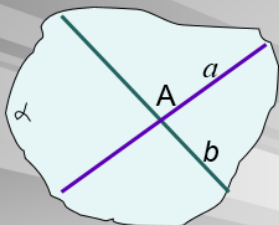
одна спільна точка



Взаємне розміщення прямих у просторі

a і b перетинаються

$$a \cap b$$



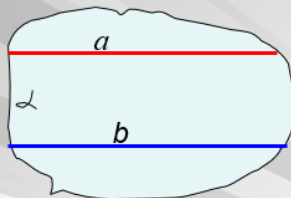
a і b мають одну спільну точку

a і b лежать в одній площині

Приклади

a паралельна b

$$a \parallel b$$



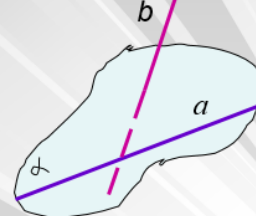
a і b не мають спільних точок

a і b лежать в одній площині

Приклади

a і b мимобіжні

$$a \not\subset b$$



a і b не мають спільних точок

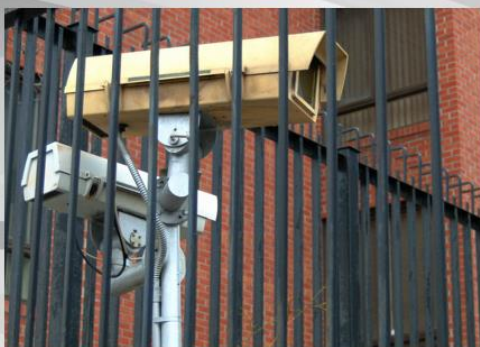
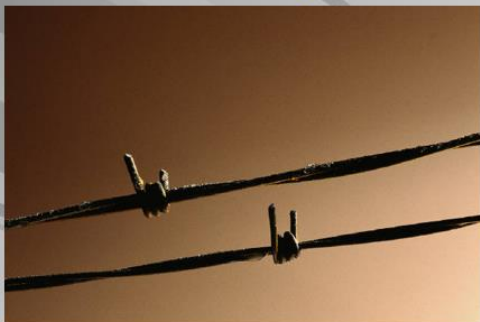
a і b не лежать в одній площині

Приклади

Прямі перетинаються



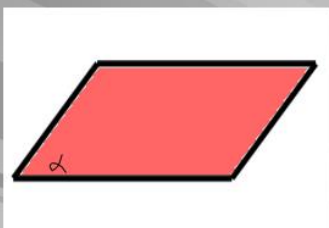
Прямі паралельні



Мимобіжні прямі

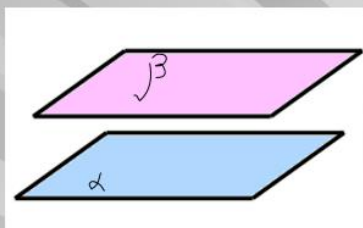


Взаємне розміщення площин



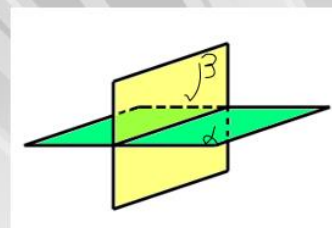
співпадають

безліч спільних точок



паралельні

не мають спільних точок

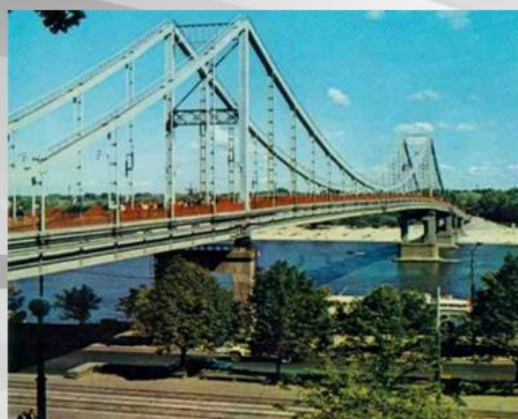


перетинаються

безліч спільних точок

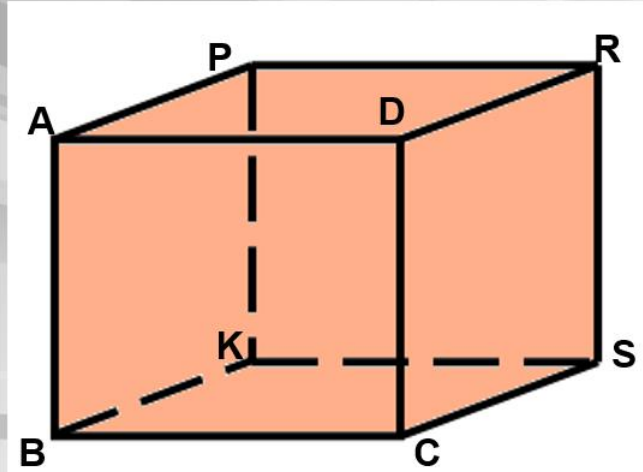


Частини яких прямих ви бачите?



Завдання

- Які з ребер куба лежать на паралельних прямих? Які на мимобіжних? Які на прямих, що перетинаються?



Зобразіть

- Прямую a , яка лежить на площині P ;
- Прямую c , яка перетинає площину P ;
- Дві площини, що перетинаються;
- Дві паралельні площини;
- Дві мимобіжні прямі.

Таким чином, використання презентацій на уроках узагальнення та систематизації знань і вмінь забезпечує значне підвищення якості навчально-пізнавальної діяльності, оскільки поєднує в собі інструменти візуалізації, інтерактивності, систематизації та оцінювання. Мультимедійні засоби сприяють розвитку логічного мислення, рефлексії, навчальної самостійності, формуванню

стійких міжтемних зв'язків і підвищенню мотивації до вивчення математики. В умовах цифрової трансформації освіти презентації стають невід'ємною складовою сучасного методичного інструментарію вчителя, дозволяючи організувати урок на високому методичному, технологічному та дидактичному рівні, відповідно до вимог компетентнісної освіти.

2.3. Технології використання інтерактивних та інформаційно-комунікаційних технологій для візуалізації просторових об'єктів

Сучасна система математичної освіти передбачає активне використання інтерактивних та інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) як ефективного засобу підвищення наочності навчання, особливо під час формування просторових уявлень і понять у курсі стереометрії. В умовах цифровізації освіти саме ІКТ стають потужним інструментом візуалізації просторових об'єктів, оскільки дозволяють перетворювати абстрактні геометричні моделі на динамічні, наочні, доступні для сприймання й аналізу учнями.

Використання інтерактивних технологій сприяє тому, що учні не лише спостерігають за готовими зображеннями, а й активно взаємодіють із навчальним матеріалом: будують, модифікують, обертають об'єкти, змінюють їх параметри, досліджують взаємне розміщення прямих і площин у просторі. Такий підхід відповідає вимогам діяльнісного та компетентнісного підходів, оскільки залучає школярів до пізнавальної діяльності, розвиває логічне, просторове та дослідницьке мислення.

Серед сучасних засобів, що використовуються у візуалізації просторових об'єктів, особливе місце займають програми GeoGebra 3D, Cabri 3D, SketchUp, Autograph, Cinderella, а також віртуальні лабораторії та системи доповненої реальності (AR). Їх використання дозволяє демонструвати геометричні властивості об'єктів у динаміці, здійснювати розрізи тіл, будувати перетини площин, виконувати аналітичні побудови у тривимірному середовищі.

На уроках стереометрії ефективним є поєднання віртуальних моделей з традиційними засобами наочності — кресленнями, макетами, об'ємними фігурами. Таке поєднання забезпечує розвиток уявлень про об'єм, форму, розміри та взаємне положення геометричних об'єктів. Дослідження доводять, що використання інтерактивних програмних середовищ підвищує рівень мотивації до навчання, сприяє кращому розумінню теоретичного матеріалу та зміцнює навички просторового аналізу.

Інформаційно-комунікаційні технології також відкривають можливості для індивідуалізації навчання, адже дозволяють кожному учневі працювати у власному темпі, досліджувати моделі, експериментувати з ними, самостійно відкривати закономірності. Такий підхід формує дослідницький стиль мислення, що є важливою складовою математичної компетентності.

Таким чином, інтерактивні та ІКТ-засоби є невід'ємною частиною сучасного процесу навчання стереометрії. Вони не лише підсилюють наочність, а й змінюють характер пізнавальної діяльності учнів — з пасивного сприйняття на активне конструювання знань, сприяючи розвитку просторового мислення, критичного аналізу та творчого підходу до розв'язування геометричних задач.

Одним із найефективніших способів реалізації принципу наочності в навчанні стереометрії є використання інтерактивних програмних середовищ, зокрема GeoGebra 3D, яке поєднує графічні, аналітичні та динамічні можливості. Програма дає змогу будувати тривимірні моделі, вільно змінювати їх розташування у просторі, виконувати обертання, розрізи, перетини площин, а також аналізувати взаємне розміщення об'єктів.

Методично доцільним є застосування покрокової візуалізації: спочатку учням демонструють побудову об'єктів (точки, прямої, площини), потім відображають їх взаємне положення, далі — виконують перетини чи паралельні побудови. Така послідовність відповідає принципу поступового ускладнення навчального матеріалу та сприяє усвідомленому сприйняттю просторових відношень.

Важливою є організація дослідницької діяльності учнів у середовищі GeoGebra 3D. Наприклад, під час вивчення теми *«Взаємне розміщення прямих у*

просторі» учням пропонується побудувати дві прямі, змінюючи їх положення, і самотійно встановити умови, за яких вони є паралельними, перетинаються або мимобіжні. Такий прийом забезпечує перехід від емпіричного до аналітичного рівня мислення, сприяючи формуванню узагальнених понять.

Під час вивчення теми *«Взаємне розміщення площин»* ефективним є використання динамічних моделей перетину площин. Учитель демонструє, як при зміні положення однієї площини змінюється лінія їхнього перетину. Учні спостерігають динаміку утворення спільної прямої, роблять висновки про геометричні закономірності.

Інтерактивні технології також дають змогу реалізувати прийом порівняння статичних і динамічних моделей. Наприклад, після побудови об'ємної фігури у середовищі GeoGebra 3D учням пропонується виконати аналогічне креслення на папері. Таке зіставлення розвиває вміння переносити просторові образи у площину, що є необхідною умовою успішного розв'язування стереометричних задач.

GeoGebra є сучасним динамічним геометричним середовищем з відкритим доступом, яке інтегрує можливості геометрії, алгебри, графіки, статистики, таблиць і числових обчислень в єдиній програмній платформі. Розробка цього програмного засобу була розпочата у 2001 році під керівництвом австрійського науковця Маркуса Хохенвартера, і з того часу GeoGebra активно використовується у навчальному процесі з метою візуалізації математичних понять та організації інтерактивного навчання [10].

GeoGebra є сучасним програмним продуктом, створеним на основі новітніх досягнень у сфері інформаційних технологій. Її розвиток постійно триває, що забезпечує удосконалення функціональних можливостей і розширення дидактичного потенціалу програмного середовища. Значним етапом у вдосконаленні програмного комплексу стало випускання версії GeoGebra 6.0.546 у 2019 році, яка отримала оновлений інтерфейс і розширений набір інструментів для побудови та візуалізації математичних об'єктів.

За допомогою програми можна виконувати побудови точок, відрізків, векторів, прямих як на площині, так і в тривимірному просторі; створювати

паралельні та перпендикулярні прямі, проводити бісектриси кутів, будувати різноманітні многокутники, многогранники та поверхні обертання. GeoGebra дає змогу визначати довжини відрізків, площі фігур, створювати дотичні до кривих, а також моделювати перерізи призм, пірамід і тіл обертання. Такі функціональні можливості забезпечують високий рівень інтерактивності, наочності та варіативності у процесі навчання геометрії, зокрема при формуванні просторових уявлень і розвитку стереометричного мислення учнів.

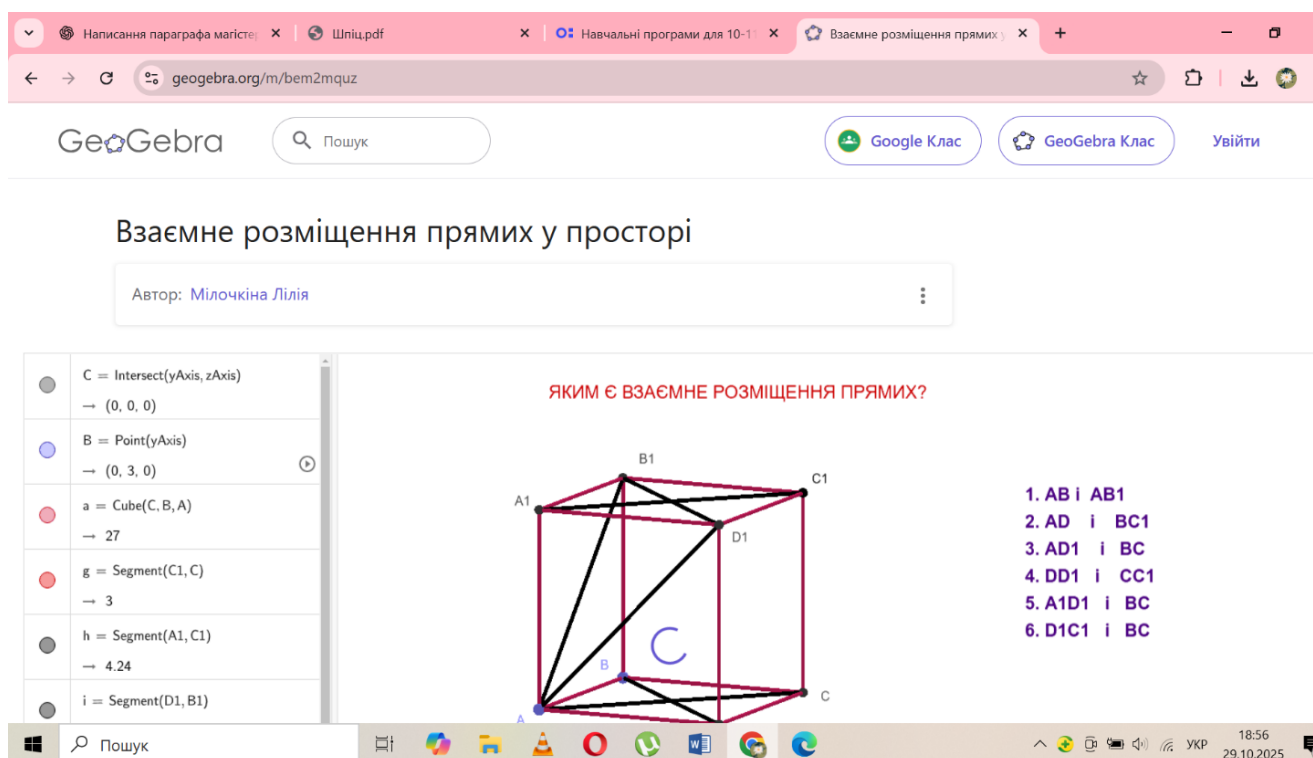
Використання програми GeoGebra 3D у процесі навчання стереометрії відкриває широкі можливості для підвищення ефективності формування просторових уявлень та розвитку логічного мислення учнів. Динамічне геометричне середовище дозволяє не лише відтворювати просторові об'єкти, але й досліджувати закономірності їх взаємного розміщення, здійснювати обертання, масштабування, побудову перерізів, а також візуалізувати процеси, які важко відтворити у традиційній площинній графіці/

Методично важливим є те, що GeoGebra 3D забезпечує інтерактивність навчального процесу, дозволяючи учням самостійно виконувати побудови, перевіряти правильність своїх дій і спостерігати результат у режимі реального часу. Такий підхід стимулює дослідницьку активність школярів, формує у них здатність до самостійного аналізу, узагальнення і висунення гіпотез, що відповідає сучасним вимогам компетентнісно орієнтованої освіти.

GeoGebra 3D ефективно реалізує принцип наочності, оскільки дає змогу учням не лише бачити готовий результат, а й спостерігати процес побудови просторових фігур крок за кроком. При цьому формується зв'язок між геометричним образом і його аналітичним описом, що сприяє розвитку вмінь переходу від конкретного зображення до абстрактного математичного моделювання.

Особливої уваги заслуговує використання GeoGebra 3D при вивченні теми *«Взаємне розміщення прямих і площин»*. Завдяки можливості обертання моделі учні можуть наочно простежити, як змінюється положення прямої відносно площини, які умови забезпечують їх паралельність або перетин. Такі побудови дозволяють сформувати у школярів інтуїтивне розуміння просторових

відношень та зміцнити зв'язок між візуальним і логічним компонентами мислення.



З методичної точки зору доцільно використовувати такі прийоми роботи з GeoGebra 3D:

- **візуально-аналітичний метод**, який поєднує побудову моделі з усним чи письмовим аналізом властивостей об'єктів;
- **дослідницькі завдання**, коли учні самостійно змінюють параметри моделі й формулюють висновки про залежності між елементами;
- **порівняння динамічних і статичних зображень**, що розвиває просторове бачення;
- **проектна діяльність**, у ході якої учні створюють власні тривимірні моделі, демонструючи засвоєння понять та умінь.

Таким чином, застосування GeoGebra 3D у навчанні стереометрії сприяє поєднанню теоретичних знань із практичними навичками, розвитку в учнів математичної культури, самостійності, критичного мислення та стійкої мотивації до пізнавальної діяльності.

Завдання 6

У середовищі «GeoGebra, 3D графіка» побудуйте площину та пряму ED, що їй належить, а потім ще одну пряму, яка паралельна ED та не належить побудованій площині.

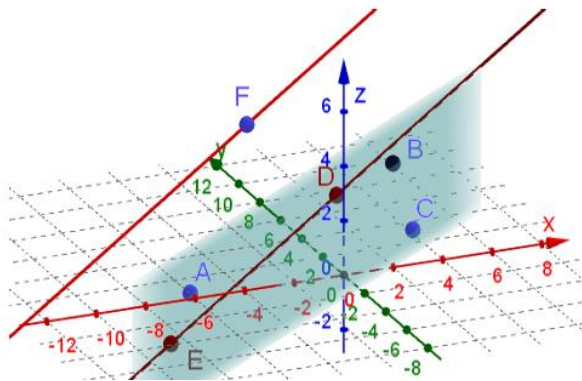
Технологія виконання

1. Запустіть додаток «GeoGebra, 3D графіка».
2. Щоб побудувати площину оберіть інструмент  (Площина через 3 точки) та вкажіть три точки на Полотні 3D.
3. Для побудови прямої ED виконайте такі дії:

⇒ за допомогою інструменту  (Точка) побудуйте точки D та E;

⇒ оберіть інструмент  та клацніть у точках D та E;

⇒ буде побудовано шукану пряму.



25

4. Щоб побудувати пряму, яка паралельна ED та не належить побудованій площині зробіть таке:

⇒ побудуйте точку, що не належить площині;

⇒ оберіть інструмент  (Паралельна пряма);

⇒ клацніть на прямій ED, а потім на побудованій точці;

⇒ буде побудовано пряму, яка паралельна ED та не належить побудованій площині (рисунок 6.1).

5. Збережіть створену модель у файлі під ім'ям "Завдання 6".
6. Закрийте програму.

Завдання 9

У середовищі «GeoGebra, 3D графіка» побудуйте малюнок до задачі:

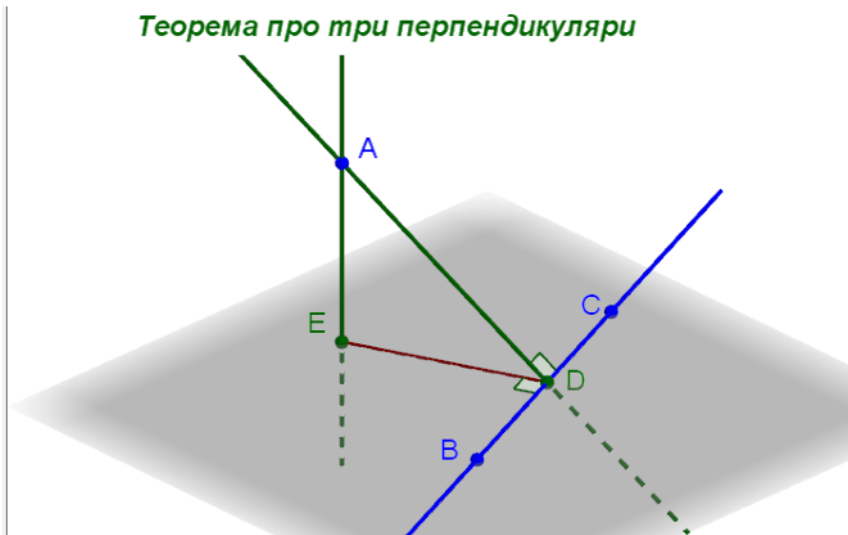
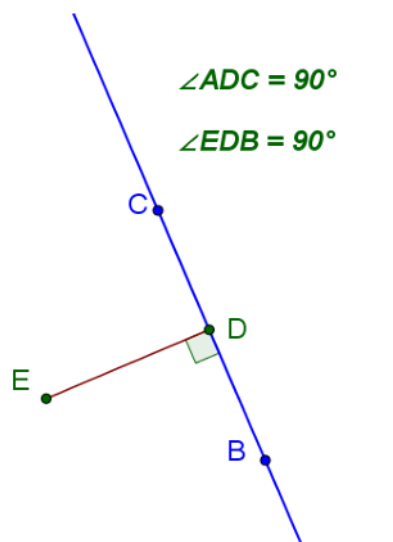
Через точку перетину діагоналей паралелограма $ABCD$ проведена пряма OM так, що точка M не належить площині паралелограма, $MA=MC$ і $MB=MD$. Доведіть, що пряма OM перпендикулярна до площини паралелограма.

Технологія виконання

1. Запустіть додаток «GeoGebra, 3D графіка».
2. Модель, згідно умови задачі, не є динамічною, тому для її побудови виконайте такі дії:
 - ⇒ якщо полотно (полотно 2D) відсутнє у вікні додатку, то відобразьте його (оберіть  /  Полотно) ;
 - ⇒ на полотні 2D побудуйте паралелограм $ABCD$, його діагоналі та точку їх перетину O ;
 - ⇒ відповідні побудови з'являться і на полотні 3D;
 - ⇒ щоб побудувати пряму OM на полотні 3D оберіть інструмент  (Перпендикулярна пряма) та натисніть у точці O , а потім на площині паралелограма;
 - ⇒ на полотні 3D побудуйте точку M та відрізки MA , MC , MB , MD .
3. Збережіть створену модель у файлі під ім'ям "Завдання 9".
4. Закрийте GeoGebra.

Завдання 16

У середовищі «GeoGebra, 3D графіка» створіть динамічну модель для вивчення теми «Теорема про три перпендикуляри» згідно зразка, поданого на рисунку 16. Точки A, B та C – динамічні. Кути ADC та EDB залишаються прямими при переміщенні точок A, B та C.



Технологія виконання

1. Відкрийте додаток «GeoGebra, 3D графіка».
2. Виведіть на екран  Полотно (Полотно 2D) та  Полотно 3D (у випадку відсутності).
3. Побудуйте точку А, що не належить площині xOy .
4. Побудуйте точки В та С, що належать площині xOy .
5. Побудуйте пряму ВС.
6. Побудуйте пряму, що проходить через точку А перпендикулярно ВС, та знайдіть точку її перетину з прямою ВС. Нехай це буде точка D.
7. Опустіть перпендикуляр з точки А на площину xOy за допомогою інструмента  Перпендикулярна пряма та знайдіть точку його перетину з площиною xOy за допомогою інструмента  Перетин. Нехай це буде точка Е.
8. За допомогою інструменту  Кут виміряйте та відобразьте на малюнку позначення кута ADC.
9. Скориставшись інструментом  Текст створіть на Полотні 2D напис $\angle ADC = 90^\circ$.
10. Побудуйте відрізок відрізок ED.
11. Виміряйте та відобразьте на малюнку позначення кута EDB.
12. Створіть на Полотні 2D напис $\angle EDB = 90^\circ$.
13. На Полотні 3D створіть напис *Теорема про три перпендикуляри*.
14. Модель створено.
15. Перевірте коректність роботи моделі.
16. Збережіть побудови у файлі під ім'ям «Завдання 16» та закрийте GeoGebra.

Завдання 4

За допомогою середовища «GeoGebra, 3D графіка» побудуйте:

- 1) Площину, що проходить через точки $A(1; -1; 2)$, $B(1; -1; -2)$ та $C(2; 2; 2)$.
- 2) Площину, яка проходить через 3 довільні точки, що не належать площині ABC та лінію перетину побудованих площин.

Технологія виконання

23

1. Запустіть додаток «GeoGebra, 3D графіка».

Завдання 4.1

2. Для побудови площини виконайте такі дії:

⇒ скориставшись досвідом, набутим під час виконання завдання 3.1, побудуйте точки $A(1; -1; 2)$, $B(1; -1; -2)$ та $C(2; 2; 2)$;

⇒ оберіть інструмент  (Площина через 3 точки);

⇒ клацніть по черзі у точках A, B і C.

Завдання 4.2

3. Щоб побудувати площину, що проходить через 3 довільні точки зробіть таке:

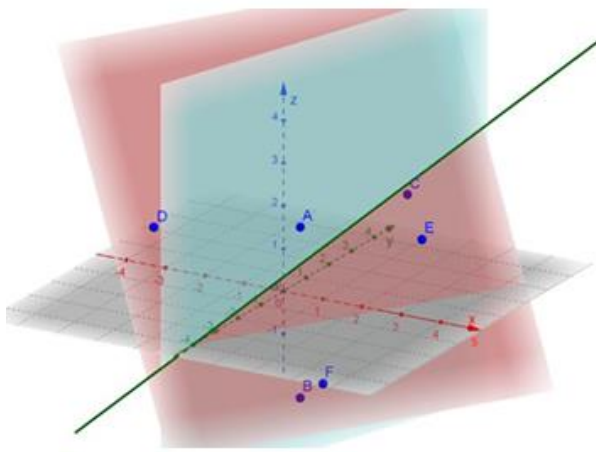


Рис. 4.2.1

⇒ оберіть інструмент ;

⇒ побудуйте точки, що не належать площині ABC (див. технологію виконання завдання №3, пункт 5);

⇒ з'явиться площина, що проходить через них.

4. Побудуйте лінію перетину площин. Для цього:

⇒ оберіть інструмент 

(Перетин двох поверхонь);

⇒ клацніть на одній площині, а потім на другій;

⇒ з'явиться пряма їх перетину (рис. 4.2.1).

5. Збережіть створену модель у файлі під ім'ям "Завдання 4".

6. Закрийте програму GeoGebra.

Важливо, щоб учитель не лише демонстрував можливості програм, а й організовував активну пізнавальну взаємодію: пропонував учням виконувати завдання у групах, створювати власні 3D-моделі, аналізувати результати, робити висновки. Таким чином, використання інтерактивних технологій у навчанні стереометрії стає інструментом розвитку просторового та логічного мислення, формування навичок дослідження і самостійного конструювання знань.

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження підтвердило, що використання технологій наочності є ефективним засобом формування просторового мислення та підвищення результативності навчання стереометрії у загальноосвітніх навчальних закладах з поглибленим вивченням математики.

Наочність у навчанні виступає не лише як допоміжний засіб, а як ключовий інструмент, що дозволяє учням активно взаємодіяти з матеріалом, спостерігати взаємне розташування прямих і площин, встановлювати закономірності та формувати стійкі уявлення про просторові об'єкти.

Ефективними є як традиційні засоби наочності — макети, моделі, креслення та об'ємні фігури, так і сучасні цифрові та інтерактивні технології, серед яких особливе місце займає GeoGebra 3D. Використання таких програм дозволяє учням будувати, змінювати та обертати тривимірні моделі, проводити перерізи, досліджувати властивості об'єктів у динаміці та робити висновки на основі власних спостережень, що стимулює розвиток дослідницького, аналітичного та критичного мислення.

Методично доцільним є поєднання демонстрацій, практичних завдань, дослідницьких проектів та інтерактивних вправ, що забезпечує поступове ускладнення навчального матеріалу і активне залучення учнів до процесу пізнання. Застосування наочності у поєднанні з інтерактивними та інформаційно-комунікаційними технологіями не лише підвищує мотивацію до навчання, але й формує в учнів ключові компетентності, необхідні для подальшого навчання та практичної діяльності, забезпечує розвиток просторової уяви, логічного мислення та вміння оперувати математичними моделями. Таким чином, системне використання технологій наочності у курсі стереометрії сприяє цілісному формуванню математичної компетентності учнів, підвищенню ефективності навчального процесу та досягненню сучасних освітніх стандартів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владіміров В. М., Владімірова Н. Г. Підручник для учнів 10–11 класів з поглибленим вивченням математики в середніх загальноосвітніх закладах. Київ: Освіта, 2000. 239 с.
2. Бевз Г. П. Методика викладання математики : навч. посібник. 3-тє вид., перероб. і допов. К.: Вища школа, 1989. 367 с.
3. Брунер Дж. Процес навчання. – К. : Освіта, 2004.
4. Виготський Л. С. Психологія розвитку людини. – М. : Педагогіка, 2000.
5. Gardner H. Frames of Mind: The Theory of Multiple Intelligences. – New York : Basic Books, 1983.
6. Засєкіна Т. М. Психолого-педагогічні аспекти формування просторових уявлень школярів. – Харків : Основа, 2018.
7. Коломієць О. М., Сільченко А. М. Застосування програми GeoGebra у навчанні учнів геометрії. Проблеми математичної освіти : матер. міжнар. наук.- метод. конф., м. Черкаси, 26-28 жовтня 2017 р. Черкаси : ФОП Гордиенко, 2017. С. 219-221.
8. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія. Поглиблений рівень: підручник для 10 класу. – К. : Гімназія, 2022.
9. Піаже Ж. The Psychology of Intelligence. – London : Routledge, 1972.
10. Ракута В. М. GeoGebra для вчителів математики. Стереометрія: навчальний посібник. – 2021. – 102 с.
11. Семенухіна О. В., Друшляк М. Г. Інструментарій програми GeoGebra 5.0 і його використання для розв'язування задач стереометрії. Інформаційні технології і засоби навчання. № 6. 2014. С. 124-133.
12. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. Київ : Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.
13. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. Ю., Коломієць О. М. Методика навчання математики : навч. посіб. – Черкаси : Брама, 2021.

14. Федоренко Л. М. Візуалізація як засіб формування просторового мислення учнів у процесі навчання геометрії // Математика в школі. – 2023. – № 4. – С. 12–18.
15. Швець В. О. Теорія та практика спрямованості шкільного курсу стереометрії: Навчальний посібник. В. О. Швець, А. В. Прус. Житомир : Видавництво ЖДУ імені І. Франка, 2007. 156 с.
16. <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
17. Hohenwarter M., Lavicza Z. The Use of GeoGebra in Mathematics Education: Research and Practice. – Linz : JKU, 2018.
18. Jones K. Dynamic Geometry Software and Visualization in 3D Geometry Education. – International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2020.
19. Гордієнко І., Шульга В. Про використання наочності в шкільному курсі математики. *Актуальні проблеми сучасної науки*: матеріали XII-ї міжнародної науково-практичної конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій. – Дрогобич, 2025. – С. 271– 272.