

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

завідувач кафедри математики та економіки,

кандидат пед. наук, доцент

_____Тарас ВІЙЧУК

«__» _____2025 р.

**Пропедевтика формування стереометричних уявлень
учнів в курсі математики 7-9 класів**

Спеціальність 014 «Середня освіта (Математика)»

Магістерська робота

на здобуття кваліфікації – магістр середньої освіти. Вчитель математики,
вчитель інформатики.

Автор роботи: Яремій Андрій Євгенович_____

підпис

Науковий керівник: кандидат педагогічних наук, доцент

Гордієнко Ірина Валеріївна _____

підпис

Дрогобич, 2025

Пропедевтика формування стереометричних уявлень учнів в курсі математики 7-9 класів

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

[illegible]

Голова ЕК

прізвище, ім'я

підпис

прізвище, ім'я

Анотація

Яремій А.Є. Пропедевтика формування стереометричних уявлень учнів в курсі математики 7-9 класів – Рукопис. – 50 с.

Описано психолого-педагогічні засади розвитку просторового мислення. Розкрито математичні поняття стереометрії, їх структуру і пропедевтичні етапи навчання стереометрії. Виділено роль наочності та моделювання у формуванні уявлень та місце стереометричного матеріалу в курсі математики 7-9 класів та вимоги до його засвоєння. Розроблено методику формування уявлень і понять про стереометричні фігури та деякі їх властивості.

Ключові слова і фрази: стереометрія, просторові уявлення учнів, пропедевтика стереометрії, просторове мислення.

Annotation

Yaremiy A.E. Propaedeutics of the formation of stereometric ideas of students in the mathematics course of grades 7-9 – Manuscript. – 50 p.

The psychological and pedagogical principles of the development of spatial thinking are described. The mathematical concepts of stereometry, their structure and propaedeutic stages of teaching stereometry are revealed. The role of visualization and modeling in the formation of ideas and the place of stereometric material in the mathematics course of grades 7-9 and the requirements for its assimilation are highlighted. A methodology for the formation of ideas and concepts about stereometric figures and some of their properties is developed.

Keywords and phrases: stereometry, spatial ideas of students, propaedeutics of stereometry, spatial thinking.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1. Теоретичні основи формування стереометричних уявлень.....	7
1.1. Психолого-педагогічні засади розвитку просторового мислення.....	7
1.2. Математичні поняття стереометрії та їх структура.....	11
1.3. Пропедевтичні етапи навчання стереометрії.....	14
1.4. Роль наочності та моделювання у формуванні уявлень.....	18
РОЗДІЛ 2. Методика формування стереометричних уявлень учнів.....	22
2.1. Місце стереометричного матеріалу в курсі математики 7-9 класів та вимоги до його засвоєння.....	22
2.2. Методика формування уявлень і понять про стереометричні фігури та деякі їх властивості	29
ВИСНОВКИ.....	48
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	50

ВСТУП

Сучасна математична освіта в умовах Нової української школи орієнтована на формування у школярів не лише знань і вмінь, а й компетентностей, необхідних для життя в умовах інформаційного суспільства. Одним із ключових напрямів такого розвитку є формування просторового мислення та стереометричних уявлень, які дозволяють учням адекватно сприймати та аналізувати тривимірні об'єкти, здійснювати моделювання та прогнозування результатів математичних операцій у просторі. Вміння оперувати тривимірними об'єктами, визначати їхні властивості та взаємне розташування є основою не лише для засвоєння геометрії, а й для розвитку логічного мислення, просторової уяви та аналітичних здібностей, необхідних у подальшому навчанні фізики, інформатики, інженерії та суміжних точних наук.

Актуальність дослідження зумовлена кількома чинниками. По-перше, практика навчання математики в середніх класах демонструє, що значна частина учнів стикається з труднощами у формуванні чітких стереометричних уявлень, що обмежує їхню здатність розв'язувати задачі на обчислення об'ємів, площ поверхонь, будувати геометричні моделі та аналізувати просторові взаємозв'язки. По-друге, сучасний розвиток освітніх технологій вимагає впровадження інтерактивних, наочних та моделювальних методів навчання, які сприяють активізації пізнавальної діяльності, самостійності учнів і розвитку їхнього критичного мислення.

Пропедевтична підготовка у формуванні стереометричних уявлень є надзвичайно важливим етапом, який передуює опануванню складних геометричних конструкцій. Вона включає систематичне формування просторових уявлень через вправи, наочні матеріали, комп'ютерні моделі та проблемні завдання, що дозволяють учням поступово оволодіти поняттями тривимірних тіл, їхніх властивостей та взаємного розташування у просторі. Недостатня увага до пропедевтики у традиційних підручниках та методичних рекомендаціях створює прогалини в знаннях школярів, що негативно впливає на засвоєння курсу стереометрії та ефективність подальшого навчання.

Наукова новизна роботи полягає у розробці комплексного підходу до пропедевтики стереометричних уявлень, який інтегрує традиційні методи навчання з сучасними інтерактивними технологіями, орієнтованими на розвиток просторового мислення. Запропонований підхід включає систему послідовних вправ і завдань, які спрямовані на поступове формування уявлень про тривимірні об'єкти та їхні властивості, стимулюють активну пізнавальну діяльність учнів та сприяють розвитку логіко-структурованого мислення.

Мета дослідження полягає у визначенні ефективних пропедевтичних засобів формування стереометричних уявлень учнів середньої школи та розробці методичних рекомендацій для їх практичного використання у навчальному процесі.

Для досягнення поставленої мети визначено такі завдання:

1. Проаналізувати сучасний стан проблеми формування стереометричних уявлень у науково-методичній літературі.
2. Виявити психологічні та вікові особливості розвитку просторового мислення учнів 7–9 класів.
3. Розробити пропедевтичну систему вправ і завдань для поступового формування стереометричних уявлень.
4. Сформулювати практичні методичні рекомендації для вчителів математики щодо впровадження пропедевтики стереометричних уявлень у навчання.

Об'єкт дослідження – навчальний процес з математики в середній школі.

Предмет дослідження – пропедевтичні засоби та методики формування стереометричних уявлень учнів 7–9 класів.

Практична значущість дослідження полягає у можливості використання розроблених методичних матеріалів та рекомендацій у гімназіях для підвищення ефективності викладання стереометрії, розвитку просторового мислення, формування логічних та аналітичних компетентностей учнів, а також підготовки їх до самостійного опанування більш складних геометричних та наукових понять у старшій школі.

РОЗДІЛ 1. Теоретичні основи формування стереометричних уявлень

1.1. Психолого-педагогічні засади розвитку просторового мислення

Формування просторового мислення учнів є одним із ключових завдань сучасної математичної освіти, оскільки воно визначає здатність до оперування тривимірними об'єктами, прогнозування їхнього розташування в просторі та виконання складних аналітичних дій. Просторове мислення безпосередньо пов'язане з розвитком уяви, абстрактного та логічного мислення, а також є основою для подальшого вивчення геометрії, стереометрії, креслення та технічного моделювання [4].

Просторове мислення – це складний психічний процес, який включає здатність аналізувати, уявляти і маніпулювати об'єктами в тривимірному просторі. Його структура включає:

- 1. Візуально-просторове сприйняття**, яке забезпечує точне сприйняття взаємного розташування предметів у реальному просторі. Учні, які мають високий рівень розвитку цього компонента, здатні швидко визначати відстані, кути та розміщення об'єктів.
- 2. Просторове уявлення**, що дозволяє формувати внутрішні образи об'єктів і взаємних зв'язків між ними. Це дає змогу виконувати уявні маніпуляції без наявності фізичних моделей.
- 3. Просторові операції**, які включають уявні перетворення, обертання, симетричні відображення та проєкції. Вони є основою для вирішення задач на визначення взаємного розташування прямих, площин та многогранників.

Дослідження когнітивних психологів показують, що розвиток просторового мислення відбувається у вікових етапах. У підлітковому віці (12–15 років), який відповідає навчанню у 7–9 класах, відбувається активне формування абстрактного просторового мислення. Учні переходять від конкретного сприйняття моделей до здатності оперувати абстрактними геометричними об'єктами та поняттями [7, 8].

Навчальна діяльність відіграє ключову роль у розвитку просторового мислення. Важливо забезпечити умови для формування внутрішніх моделей простору через активне сприйняття та практичні дії. На думку Л.С. Виготського [4], навчання випереджає розвиток, і правильно організована педагогічна діяльність стимулює формування структур мислення, які потім учні застосовують самостійно.

Д.Б. Ельконін [7] підкреслює, що процес розвитку просторового мислення включає кілька етапів: від наочно-дійсвенного сприйняття до уявного оперування. На першому етапі учні працюють із тривимірними моделями, конструкторськими наборами, макетами та об'ємними геометричними об'єктами. На наступному етапі – виконують уявні трансформації, обертання та побудову проєкцій без фізичної присутності моделей.

Сучасна педагогіка виділяє декілька основних принципів, що забезпечують ефективний розвиток просторового мислення:

1. **Принцип наочності та моделювання.** Використання об'ємних моделей, макетів, графічних та комп'ютерних 3D-зображень дозволяє учням наочно бачити взаємне розташування об'єктів і формувати внутрішні уявлення про простір [10]. Наприклад, моделювання куба або піраміди допомагає учням зрозуміти, як розташовані грані, ребра та вершини.
2. **Принцип поступовості та системності.** Розвиток просторового мислення повинен здійснюватися послідовно – від простих об'єктів до складних структур. Така система дозволяє поступово розвивати абстрактне мислення і уникати перевантаження учнів новим матеріалом [8].
3. **Принцип активності та дослідницької діяльності.** Учні повинні самостійно досліджувати об'єкти, створювати моделі, виконувати завдання на побудову та трансформацію. Активна діяльність сприяє формуванню уявних операцій та здатності до аналітичного мислення [5].
4. **Принцип інтеграції навчальних дисциплін.** Просторове мислення розвивається ефективніше, якщо завдання інтегровані з іншими предметами: кресленням, природознавством, фізикою, інженерією та мистецтвом. Наприклад, завдання з побудови моделі моста або

архітектурної споруди розвивають просторові уявлення та логіку одночасно.

Для формування просторового мислення застосовуються різноманітні методи:

- **Наочні методи.** Використання макетів, геометричних моделей та конструкторських наборів дозволяє учням сприймати об'єкти у тривимірній формі та аналізувати взаємне розташування елементів.
- **Графічні методи.** Креслення, побудова проєкцій, схем, робота з координатними площинами формують уявлення про відстані, кути та взаємне розташування об'єктів.
- **Інтерактивні методи.** Використання комп'ютерного моделювання, віртуальної реальності та 3D-завдань дозволяє учням виконувати складні просторові перетворення і розвивати абстрактне мислення [11].
- **Проблемне навчання.** Завдання, що вимагають логічного аналізу та просторового прогнозування, сприяють формуванню навичок самостійного мислення.
- **Ігрові методи.** Дидактичні ігри на орієнтацію у просторі, конструкторські ігри та моделювання стимулюють розвиток уяви та логіки одночасно.

Особливе місце посідають **пропедевтичні завдання**, які підготовлюють учнів до оперування абстрактними об'єктами. До них відносяться:

- складання многогранників із плоских форм;
- побудова симетричних фігур;
- визначення взаємного розташування елементів у моделі куба, призми або піраміди;
- виконання завдань на побудову проєкцій та уявне обертання об'єктів.

У віці 12–15 років учні здатні до абстрактного та логічного мислення, проте для ефективного розвитку просторового мислення необхідна поступова педагогічна підтримка. Наочні моделі та пропедевтичні завдання залишаються важливими для формування внутрішньої моделі простору та розвитку уяви.

Педагогічне керівництво має полягати у створенні ситуацій успіху, стимулюванні дослідницької діяльності, організації практичних завдань та

інтерактивних вправ. У такому випадку учні отримують не лише знання, а й навички, які забезпечують ефективне оперування об'єктами у просторі [4, 5].

Психолого-педагогічні засади розвитку просторового мислення включають:

- врахування психологічної природи мислення та етапів його формування;
- організацію активної, наочної та дослідницької діяльності;
- застосування методів наочності, інтерактивних технологій та ігрових прийомів;
- формування пропедевтичних умінь для підготовки до абстрактного оперування об'єктами;
- поступовий перехід від конкретних моделей до абстрактного мислення;
- інтеграцію навчального матеріалу з іншими предметами для комплексного розвитку.

Реалізація цих засад у навчальному процесі сприяє формуванню цілісного просторового мислення, що є фундаментом для успішного оволодіння стереометрією та іншими математичними дисциплінами.

Таблиця. Психолого-педагогічні засади розвитку просторового мислення у 7–9 класах

Компонент просторового мислення	Психологічна сутність	Педагогічні методи розвитку	Приклади навчальних завдань
Візуально-просторове сприйняття	Здатність точно сприймати взаємне розташування об'єктів у просторі	Робота з об'ємними моделями, макетами, конструкторами	Побудувати куб і позначити всі вершини та діагоналі; визначити, які діагоналі перетинаються
Просторове уявлення	Формування внутрішніх образів об'єктів та взаємних зв'язків	Наочні та графічні моделі, креслення, 3D-зображення	Побудувати уявну модель піраміди та визначити площину, що проходить через вершину та середину основи

Компонент просторового мислення	Психологічна сутність	Педагогічні методи розвитку	Приклади навчальних завдань
Просторові операції	Здатність виконувати уявні перетворення, обертання, симетричні відображення, проєкції	Інтерактивні вправи, комп'ютерне моделювання, проблемні завдання	Уявно обернути куб на 90° і визначити нові взаємні розташування граней; виконати побудову проєкцій призми
Аналітичні та логічні дії	Здатність аналізувати просторові відношення та прогнозувати їхні зміни	Проблемне навчання, ігрові завдання, проектна діяльність	Визначити взаємне розташування прямих у багатограннику; знайти площу грані за умовами задачі
Пропедевтичні уміння	Навички підготовки до абстрактного оперування об'єктами	Поступова систематична робота з простими моделями до складних, інтеграція з іншими предметами	Складання многогранників з плоских форм; побудова симетричних фігур; моделювання взаємного розташування об'єктів у просторі

1.2. Математичні поняття стереометрії та їх структура

Стереометрія є розділом геометрії, який досліджує властивості та взаємне розташування об'єктів у тривимірному просторі. В основі стереометрії лежить система математичних понять, що формуються на рівні абстракцій і внутрішніх моделей простору, які дозволяють учням оперувати не тільки наочними об'єктами, але й їхніми уявними проєкціями, перетинами, симетріями та трансформаціями [3], [11].

Математичні поняття стереометрії є структурованими ієрархічно, вони включають фундаментальні елементи, такі як **точка, пряма, площина,**

многогранники, криві в просторі, а також відношення між ними — **паралельність, перпендикулярність, перетин**, що складають основу просторового аналізу. У навчальному процесі ці поняття повинні формуватися поступово, враховуючи вікові особливості учнів та психолого-педагогічні засади розвитку просторового мислення [7], [8].

1. **Точка** – найпростіше абстрактне поняття, що визначає положення в просторі, але не має розмірів. Точки служать основою для побудови прямих, площин та многогранників.
2. **Пряма** – множина точок, що простягається без кінця в обох напрямках. Пряма є базовим елементом для визначення перетинів та відстаней у просторі.
3. **Площина** – множина точок, що простягається безмежно у двох вимірах. Площина визначає взаємне розташування прямих, поверхонь многогранників та їхніх перетинів.
4. **Многогранники** – обмежені тривимірні тіла, утворені плоскими гранями. До найбільш відомих належать куб, призма, піраміда, тетраедр.
5. **Криві в просторі** – траєкторії руху точок, які можуть бути прямими, дугами або кривими перетину поверхонь.

Кожне поняття стереометрії має як наочне уявлення, так і абстрактну структуру, що формується через послідовне використання макетів, графічних схем та абстрактних задач.

Особливе значення мають поняття, що описують взаємне розташування об'єктів:

- **Паралельні та перпендикулярні об'єкти** – прямі та площини, які мають чіткі просторові відношення. Наприклад, паралельні грані куба або перпендикулярність ребра призми до її основи.
- **Перетинні об'єкти** – прямі, площини та многогранники, що мають спільні точки або лінії. Наприклад, лінія перетину двох площин або перетин діагоналей многогранника.

Ці поняття формують у учнів здатність аналізувати просторові співвідношення, визначати кути між площинами, передбачати траєкторії перетинів та складати логічні висновки про структуру об'єктів.

Сучасна педагогіка виділяє три основні рівні структури стереометричних понять:

1. **Наочний рівень** – формування образів об'єктів у реальному просторі за допомогою макетів, моделей, конструкторських наборів. Учні можуть фізично обертати куб, призму, досліджувати взаємне розташування граней та вершин.
2. **Графічний рівень** – побудова проєкцій об'єктів на площини, креслення граней, ліній перетину, координатних схем. Цей рівень дозволяє формувати навички аналітичного креслення та просторового аналізу.
3. **Абстрактний рівень** – оперування поняттями у мисленні без фізичної моделі. Учні виконують уявні трансформації, обертання, визначають взаємне розташування об'єктів та кути між площинами, використовують формули для обчислення площ та об'ємів.

Ця ієрархічна структура забезпечує поступовий перехід від наочно-дійового сприйняття до абстрактного мислення, що є ключовим для засвоєння стереометрії.

Для ефективного засвоєння стереометричних понять у 7–9 класах застосовуються наступні педагогічні принципи:

1. *Принцип послідовності*: навчання починається з простих тіл (куб, призма), поступово ускладнюється (піраміда, тетраедр, многогранники).
2. *Принцип наочності*: використання макетів, конструкторських наборів, інтерактивних 3D-зображень.
3. *Принцип активності*: стимулювання дослідницької діяльності, самостійної побудови моделей та проєктів.
4. *Принцип інтеграції*: зв'язок із кресленням, технологією, фізикою та мистецтвом для розвитку просторового мислення та аналітичних навичок [10].

Реалізація понять стереометрії на уроках включає:

- Наочні завдання: складання многогранників із плоских граней, моделювання кубів та пірамід.
- Графічні завдання: побудова фронтальних і горизонтальних проєкцій, креслення ліній перетину.

- **Абстрактні завдання:** визначення кутів між площинами, перетинів прямих, аналіз взаємного розташування об'єктів у просторі.

Такі завдання сприяють розвитку просторового мислення, логіки та аналітичних навичок одночасно, готуючи учнів до успішного опанування стереометрії та інших природничо-математичних дисциплін.

Формування стереометричних понять тісно пов'язане з розвитком просторового мислення, оскільки учні вчаться:

- створювати внутрішні моделі тривимірних об'єктів;
- виконувати уявні трансформації та обертання;
- прогнозувати результат перетинів та взаємного розташування об'єктів.

Комплексна робота з наочними, графічними та абстрактними рівнями формує цілісне розуміння просторових об'єктів, що є необхідною умовою для подальшого навчання у старших класах.

Таблиця. Структура математичних понять стереометрії та приклади завдань

Рівень	Основні поняття	Приклади завдань
Наочний	Куб, призма, піраміда, тетраедр	Скласти макет куба; визначити взаємне розташування граней та вершин
Графічний	Лінії перетину, проєкції, координати	Побудувати фронтальну та горизонтальну проєкції піраміди; визначити перетин площин
Абстрактний	Перпендикулярність, паралельність, кути між площинами	Уявно обернути куб; знайти кут між площинами; визначити взаємне розташування прямих у многограннику

1.3. Пропедевтичні етапи навчання стереометрії

Стереометрія є розділом геометрії, який досліджує властивості тривимірних об'єктів та взаємне розташування прямих, площин і тіл у просторі. Ефективне навчання стереометрії у середній школі потребує поетапного введення понять, що забезпечує поступовий розвиток просторового мислення, логіки та

аналітичних навичок учнів. Пропедевтика стереометрії передбачає системне введення понять і методів роботи з об'єктами простору, починаючи з наочно-дійового рівня, переходячи через графічне моделювання до абстрактного оперування. Такий підхід дозволяє здійснювати поступовий перехід від конкретних образів до абстрактного мислення, що дає змогу виконувати складні аналітичні та конструкторські завдання.

Психолого-педагогічні засади пропедевтики стереометрії ґрунтуються на положеннях вікової психології та когнітивної науки. Наочно-дійове навчання є початковим етапом формування просторових уявлень. Учні працюють із реальними об'єктами, макетами та конструкторами, що дозволяє сформувати перші уявлення про властивості об'єктів простору. За Л.С. Виготським [4], наочно-дійові дії є фундаментом для розвитку абстрактного мислення, оскільки вони дають школярам можливість безпосередньо відчувати та сприймати просторові відношення між об'єктами. Наступним рівнем є графічне моделювання, коли учні опановують креслення, побудову проєкцій, аналіз граней і ребер тіл. Це сприяє розвитку здатності аналітично відображати тривимірні об'єкти на площині та готує до абстрактного мислення. Завершальним етапом пропедевтики є абстрактне мислення, на якому учні виконують операції над уявними об'єктами, визначають кути між площинами, аналізують взаємне розташування прямих і площин та виконують обчислення площі і об'ємів.

Наочно-дійовий етап характеризується роботою з фізичними об'єктами, такими як куби, піраміди, призми та тетраедри. Учні вчаться визначати вершини, ребра та грані тіл, аналізувати взаємне розташування граней та ребер, встановлювати паралельність і перпендикулярність. Виконуючи практичні завдання, такі як складання моделі куба та позначення всіх його вершин і ребер, учні формують первинні уявлення про просторові об'єкти. На цьому етапі важливо поєднувати фізичну маніпуляцію з обговоренням та аналізом, щоб учні не лише механічно виконували дії, але й усвідомлювали властивості об'єктів.

Графічний етап передбачає перехід від фізичних моделей до їхніх зображень на площині. Учні опановують фронтальні та горизонтальні проєкції, креслять

грані та ребра тіл, визначають лінії перетину площин та симетричні відображення. Цей етап формує здатність аналітично відображати тривимірні об'єкти на двовимірній площині, розвиваючи просторове та логічне мислення. Використання комп'ютерного моделювання, інтерактивних 3D-зображень і графічних програм допомагає учням глибше усвідомити властивості об'єктів, сприяє розвитку аналітичного мислення та навичок точного відображення просторових взаємозв'язків.

Абстрактний етап є логічним завершенням пропедевтичного циклу. Учні починають оперувати поняттями в уяві, виконують складні аналітичні завдання, визначають кути між площинами та прямими, аналізують взаємне розташування об'єктів і виконують обчислення площ і об'ємів. Такий рівень розвитку дозволяє формувати у школярів уміння мислити абстрактно, застосовувати логічні операції та математичні формули, робити узагальнення та систематизацію знань. Наприклад, учні можуть розрахувати кут між діагоналями куба або знайти об'єм призми за заданими розмірами граней, використовуючи раніше засвоєні графічні та наочні навички.

Послідовне поєднання всіх трьох рівнів навчання – наочно-дійового, графічного та абстрактного – забезпечує ефективне формування просторового мислення. Під час навчання доцільно інтегрувати інтерактивні технології, ігрові методи та проектну діяльність, що дозволяє активізувати мислення учнів, формувати глибоке розуміння об'єктів простору, розвивати аналітичні навички та готувати до розв'язання складних задач.

Таблиця. Етапи пропедевтики стереометрії

Етап	Основні завдання	Засоби навчання	Очікувані результати
Наочно-дійовий	Ознайомлення з об'єктами простору, визначення вершин, граней та ребер	Макети, конструкторські набори, реальні предмети	Формування первинних уявлень про об'єкти та їх властивості

Етап	Основні завдання	Засоби навчання	Очікувані результати
Графічний	Побудова проєкцій, креслень, аналіз ліній перетину	Креслярські інструменти, графічні програми	Розвиток аналітичного сприйняття та навичок графічного відображення об'єктів
Абстрактний	Виконання операцій у мисленні, обчислення кутів та об'ємів, аналіз взаємного розташування об'єктів	Проблемні задачі, інтерактивні моделі, ігрові завдання	Формування абстрактного просторового мислення та здатності до логічного аналізу

Таблиця. Приклади завдань на різних етапах пропедевтики

Етап	Приклади завдань
Наочно-дійовий	Скласти модель куба або піраміди; визначити взаємне розташування граней і ребер; визначити кількість вершин і ребер
Графічний	Побудувати фронтальні та горизонтальні проєкції піраміди; визначити лінію перетину двох площин; виконати креслення симетричного відображення
Абстрактний	Знайти кут між діагоналями куба; визначити взаємне розташування двох площин у піраміді; обчислити площу та об'єм призми або піраміди

Пропедевтичні етапи навчання стереометрії є основою для подальшого успішного засвоєння дисципліни в старших класах. Вони забезпечують формування логічного та просторового мислення, аналітичних здібностей та навичок систематизації знань. Такий підхід до навчання сприяє підвищенню мотивації учнів, розвитку їхньої самостійності та готовності до вирішення практичних задач, а також дозволяє ефективно інтегрувати знання з інших предметів, таких як фізика, технологія чи мистецтво. Використання комплексних методів навчання, поєднання наочно-дійових, графічних та абстрактних етапів

створює умови для цілісного та системного розвитку учнів і забезпечує їх успішну підготовку до засвоєння складних понять стереометрії в подальшому навчанні.

1.4. Роль наочності та моделювання у формуванні уявлень

Наочність і моделювання є ключовими методами формування стереометричних уявлень учнів середньої та старшої школи. Вони забезпечують перехід від конкретного сприйняття об'єктів до абстрактного аналізу їх властивостей, структури та взаємного розташування у просторі. В основі цих методів лежить психолого-педагогічна концепція розвитку мислення учнів через активну діяльність та сенсорний досвід [4], [7]. Учні отримують можливість не лише спостерігати об'єкти, але й виконувати конкретні дії з ними, що дозволяє глибше усвідомлювати закономірності і властивості тіл.

Наочність у навчанні стереометрії реалізується через макети, конструкції, демонстраційні матеріали, інтерактивні дошки, комп'ютерні 3D-моделі та мультимедійні презентації. Використання фізичних макетів дозволяє учням наочно спостерігати взаємне розташування вершин, ребер і граней тіл, встановлювати паралельність і перпендикулярність площин, а також аналізувати наслідки обертання об'єктів. Наприклад, робота з макетом куба дає змогу визначити, які грані паралельні, які перпендикулярні, а які утворюють кут, що сприяє формуванню просторового мислення на базі конкретних дій.

Моделювання дозволяє створювати спрощені або умовні моделі об'єктів, що дає змогу учням аналізувати складні просторові взаємозв'язки, які важко спостерігати безпосередньо. Воно може бути фізичним, графічним або комп'ютерним. Учні можуть виконувати креслення різних видів многогранників, моделювати лінії перетину площин, визначати кути між ребрами або площинами, обчислювати площу та об'єм тіл. Такий підхід сприяє поступовому переходу від конкретного до абстрактного рівня мислення і формує здатність оперувати уявними об'єктами, робити узагальнення та логічні висновки [10], [1].

Особливо важливим є поєднання наочно-дійового та графічного рівнів навчання. Після роботи з макетами учні виконують креслення тіл, проєкцій та ліній перетину, що дозволяє відобразити об'єкт на площині та сформувати аналітичні навички. Наприклад, спочатку учні конструюють макет призми або піраміди, позначають вершини, ребра і грані, а потім будують фронтальну та горизонтальну проєкції цих тіл на папері. Таке поєднання наочного та графічного навчання сприяє формуванню цілісного просторового мислення та умінню аналітично працювати з об'єктами у просторі.

Наочність і моделювання також виконують мотиваційну функцію, підвищуючи активність учнів і їх зацікавленість навчанням. Використання інтерактивних 3D-моделей, комп'ютерних симуляцій і мультимедійних програм дозволяє створювати динамічні ситуації, які неможливо відтворити за допомогою статичних макетів. Наприклад, учні можуть спостерігати обертання тіла у просторі, зміну його проєкцій під різними кутами або взаємне розташування площин у складних многогранниках. Це дозволяє формувати уявлення про об'єкти, що розташовані поза прямою доступністю спостереження, і розвивати здатність до просторової уяви.

Особливу увагу слід приділяти поетапному розвитку просторового мислення через наочність і моделювання. Перший етап – наочно-дійовий – спрямований на формування базових уявлень про об'єкти простору через фізичні моделі, макети, конструктори. На цьому етапі учні вчаться визначати вершини, ребра, грані, встановлювати паралельність і перпендикулярність елементів. Другий етап – графічне моделювання – передбачає побудову креслень, фронтальних і горизонтальних проєкцій, визначення ліній перетину площин. Третій етап – абстрактне мислення – реалізується через уявне оперування об'єктами, визначення кутів між ребрами та площинами, обчислення площ і об'ємів, аналіз закономірностей та узагальнень. Така послідовність забезпечує комплексний розвиток просторового та аналітичного мислення, що є основою для подальшого успішного освоєння стереометрії [7], [10].

Наочність і моделювання також сприяють формуванню уявлень про взаємне розташування прямих і площин, що є однією з найбільш складних тем

стереометрії для учнів 7–9 класів. Вчитель може використовувати макети, графічні схеми та комп’ютерні моделі для демонстрації паралельності, перпендикулярності та перетину площин. Наприклад, завдання «побудувати лінію перетину двох площин у многограннику» або «визначити кут між діагоналями куба» розвивають здатність оперувати уявними об’єктами та робити логічні висновки.

Таблиця. Види наочності та моделювання у навчанні стереометрії

Вид наочності	Методи	Приклади використання	Педагогічний ефект
Фізична	Макети, конструктори, демонстраційні набори	Побудова куба, піраміди, призми; визначення вершин, ребер і граней	Формування первинних просторових уявлень, розвиток сенсорного досвіду
Графічна	Креслення, фронтальні та горизонтальні проєкції	Побудова проєкцій тіл, ліній перетину площин	Розвиток аналітичного та абстрактного мислення
Інтерактивна	3D-моделі, комп’ютерні програми, мультимедійні симуляції	Обертання тіл, зміна положення площин, дослідження багатогранників	Мотивація, розвиток просторової уяви, дослідницькі навички
Проектна	Конструкторські та дослідницькі завдання	Створення моделей тіл із підручних матеріалів; визначення об’єму і площі	Формування системного мислення та комплексного уявлення про об’єкти

Таблиця. Етапи формування стереометричних уявлень через
наочність і моделювання

Етап	Засоби навчання	Приклади завдань	Очікувані результати
Наочно-дійовий	Макети, конструктори, фізичні моделі	Побудувати куб або піраміду; визначити вершини, ребра, грані	Формування первинних уявлень про просторові об'єкти
Графічний	Креслення, фронтальні та горизонтальні проєкції	Побудувати проєкції піраміди; визначити лінію перетину площин	Розвиток аналітичного сприйняття та навичок відображення об'єктів на площині
Абстрактний	Проблемні задачі, інтерактивні моделі	Обчислити площу та об'єм призми; визначити кут між площинами	Формування абстрактного просторового мислення та логічних навичок
Дослідницький	Дослідницькі та алгоритмічні завдання	Аналіз властивостей куба, тетраедра; узагальнення закономірностей	Системне розуміння просторових об'єктів, розвиток логіки та аналітики

РОЗДІЛ 2. Методика формування стереометричних уявлень учнів

2.1. Місце стереометричного матеріалу в курсі математики 7-9 класів та вимоги до його засвоєння

Структурування змісту геометричної підготовки учнів доцільно здійснювати на основі низки фундаментальних принципів. Насамперед у курсі математики 5–6 класів важливо забезпечити ознайомлення школярів із базовими поняттями геометрії площини та простору на наочно-інтуїтивному та операційному рівнях, а також сформувати первинні вміння застосовувати формули для обчислення площ поверхонь та об'ємів найпростіших геометричних тіл. Як зазначає Н. Тарасенкова, початкове знайомство учнів із просторовими уявленнями сприяє створенню передумов для розвитку логічного мислення та підготовки до засвоєння систематичного курсу геометрії [12].

Подальше систематичне вивчення геометрії розпочинається у 7 класі з курсу планіметрії, де відбувається розширення змістового компонента за рахунок включення елементів стереометрії. Це забезпечує послідовність і наступність у формуванні просторових уявлень школярів. За твердженням О. Савченко, інтеграція планіметричного й стереометричного матеріалу сприяє глибшому розумінню властивостей геометричних об'єктів та розвитку здатності встановлювати міжпредметні зв'язки [11].

Органічне поєднання стереометричного та планіметричного матеріалу в процесі навчання є важливою умовою формування цілісної геометричної картини світу. Властивості плоских фігур доцільно розкривати на основі їх відповідних просторових аналогів, що дозволяє учням усвідомлювати єдність і взаємозв'язок двовимірних та тривимірних структур. Подібний підхід підкреслював і Г. Дорофєєв, наголошуючи, що практичний зміст геометрії стає більш зрозумілим, коли він підкріплюється конкретними просторовими моделями [6].

Стереометричний компонент геометричної підготовки в основній школі має орієнтуватися на практичну діяльність. Досліди, експериментальні завдання та інтуїтивні узагальнення забезпечують формування необхідного запасу просторових уявлень, які стають основою для подальшого систематичного та

науково-теоретичного засвоєння стереометрії у старшій школі (10–11 класи). Як зазначає І. Шкіль, практична спрямованість навчання дозволяє учням не лише опановувати знання, але й формувати навички застосування геометрії у повсякденних ситуаціях [13].

Завершальним етапом курсу планіметрії є узагальнюючий розділ «Елементи стереометрії», який виступає своєрідним містком між основною та старшою школою, забезпечуючи наступність і системність у розвитку геометричного мислення. За словами В. Бевза, цей етап має особливе значення, оскільки він формує в учнів цілісне уявлення про геометрію як про послідовну, логічно вибудовану науку [2].

Уявлення про місце стереометричного матеріалу в курсі математики основної школи та його структурування дає таблиця.

Структурування навчального матеріалу з геометрії

Клас	Планіметричний матеріал	Елементи стереометрії
7	Взаємне розміщення прямих на площині. Паралельні прямі на площині. Перпендикулярні прямі на площині. Рівність трикутників	Взаємне розміщення прямих у просторі. Паралельні прямі в просторі, мимобіжні прямі. Перпендикулярні прямі в просторі. Ілюстрація паралельних, перпендикулярних і мимобіжних прямих на моделях геометричних тіл та їх зображеннях
	Коло. Дотична до кола та її властивості. Коло, описане навколо трикутника. Коло, вписане у трикутник. Розв'язування задач на побудову	Коло як основа тіл обертання. Ілюстрація елементів кола на моделях тіл обертання та їх зображеннях

8	Чотирикутники: паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат; їх властивості. Трапеція та її властивості. Теорема Піфагора	Ілюстрація чотирикутників та їх властивостей на моделях прямого паралелепіпеда, прямої призми, піраміди та їх зображеннях. Застосування теореми Піфагора для обчислення елементів геометричних тіл
9	Декартові координати на площині. Перетворення фігур на площині. Вектори на площині. Розв'язування трикутників	Куб, циліндр, конус, куля як фігури, що мають вісь симетрії. Обчислення елементів відомих стереометричних фігур з використанням теорем синусів і косинусів
	Многокутники. Правильні многокутники. Довжина кола. Довжина дуги. Площі фігур	Поняття про площу поверхні геометричного тіла. Поверхня призми, піраміди. Обчислення площ поверхонь призми, піраміди за формулами. Поверхня циліндра, конуса, кулі. Обчислення площ поверхонь циліндра, конуса, кулі за формулами. Прямі та площини в просторі. Многогранники. Тіла обертання. Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл

ОБОВ'ЯЗКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

7-9-й класи

Елементи стереометрії

1. Прямі на площині та в просторі. Паралельність і перпендикулярність прямих на площині та в просторі

1. На моделі прямокутного паралелепіпеда (або на його зображенні) покажіть по дві пари:

- а) паралельних прямих;
- б) перпендикулярних прямих;
- в) мимобіжних прямих.

2. На каркасній моделі піраміди покажіть прямі, що не перетинаються.

3. На моделі трикутної піраміди покажіть:

- а) дві мимобіжні прямі;
- б) дві прямі, що перетинаються.

4. На зображенні прямої призми покажіть:

- а) дві паралельні прямі;
- б) дві перпендикулярні прямі;
- в) дві мимобіжні прямі.

5. На зображенні чотирикутної піраміди покажіть дві мимобіжні прямі.

6. На зображенні куба покажіть дві прямі, паралельні третій.

2. Рівність трикутників.

1. На зображенні трикутної призми назвіть і покажіть рівні трикутники.

2. Основою піраміди $PABCD$ є прямокутник $ABCD$. Її бічні ребра PA, PB, PC, PD рівні. Для кожної її трикутної грані назвіть рівну їй грань.

3. У чотирикутній піраміді $SABCD$ всі ребра рівні. Встановіть вид трикутників SAB, SAC, BCD .

4. У призмі $ABCA_1B_1C_1$ бічні грані ABA_1B_1 та BCB_1C_1 рівні. Доведіть, що в трикутнику ABC , який є основою призми, кути A та C рівні.

3. Коло.

1. На моделі або зображенні циліндра покажіть коло, його центр, радіус.

2. На зображенні конуса проведіть діаметр та хорду кола основи.

3. На каркасній моделі кулі покажіть її центр, радіус, діаметр.

4. Чотирикутники.

1. На моделі прямої призми, основою якої є паралелограм, покажіть рівні грані.

2. Основою прямої призми є ромб. Доведіть, що її бічні грані – рівні прямокутники.

3. На моделі прямої призми, основою якої є рівнобічна трапеція, покажіть:

а) рівні бічні грані;

б) паралельні прямі;

в) перпендикулярні прямі.

4. На зображенні піраміди, основою якої є прямокутник, проведіть діагоналі основи та позначте точку їх перетину.

5. Основою піраміди є прямокутник. Бічні ребра піраміди рівні. Доведіть рівність трикутників, що містять вершину піраміди та діагоналі основи.

5. Теорема Піфагора.

1. Ребро куба дорівнює a . Знайдіть довжину діагоналі його грані.

2. Ребро куба дорівнює a . Знайдіть довжину його діагоналі.

3. Дано зображення прямокутного паралелепіпеда. Знайдіть довжини діагоналей паралелепіпеда, якщо довжини трьох ребер, що виходять з однієї вершини, дорівнюють 2 дм, 3 дм, 6 дм.

4. Обчисліть діагональ бічної грані прямої призми, основою якої є ромб зі стороною 6 см, а бічне ребро дорівнює 8 см.

5. Обчисліть висоту бічної грані піраміди, основою якої є квадрат зі стороною 10 см. Довжина кожного бічного ребра 13 см.

6. Розв'язування трикутників.

1. Основа прямого паралелепіпеда – ромб зі стороною 6 см і кутом 60° . Висота паралелепіпеда дорівнює 8 см. За готовим зображенням знайдіть довжину меншої діагоналі паралелепіпеда.

2. За готовим зображенням обчисліть діагоналі прямої призми, основою якої є паралелограм зі сторонами 2 см і 3 см та гострим кутом 45° . Висота призми 4 см.

3. Основою піраміди $SABCD$ є прямокутник $ABCD$. O – точка перетину його діагоналей; SO – висота піраміди. Обчисліть довжину бічного ребра піраміди, якщо її висота дорівнює 14 см, а кут між діагоналлю основи та бічним ребром 60° . Скористайтесь готовим рисунком.

4. Висота прямої призми, основою якої є квадрат, дорівнює h , а діагональ призми утворює з діагоналлю основи кут α . Знайдіть:

а) діагональ призми;

б) діагональ основи призми.

5. Діагональ осьового перерізу циліндра d нахилена до площини його основи під кутом α . Знайдіть:

а) висоту циліндра;

б) діаметр основи.

7. Прямі та площини в просторі.

1. На моделі прямої трикутної призми покажіть:
 - а) паралельні пряму та площину;
 - б) перпендикулярні площини.
2. На моделі трикутної піраміди покажіть дві площини, що перетинаються.
3. Зобразіть площину α , що проходить через пряму b .
4. Зобразіть площину α і пряму c , які перетинаються у точці N .
5. Зобразіть площини α та β , що перетинаються по прямій m .

8. Многогранники. Тіла обертання.

1. Накресліть прямокутний паралелепіпед. Зобразіть діагоналі основи.
2. Накресліть многогранник, який має 4 грані. Скільки він має ребер, вершин?
3. Накресліть циліндр. Зобразіть його висоту, твірну.
4. Висота циліндра дорівнює 6 см, а радіус його основи 5 см. Знайдіть площу осьового перерізу.
5. Обчисліть діагональ осьового перерізу циліндра, твірна якого дорівнює 3,5 см, а радіус основи 2 см.
6. Накресліть конус. Зобразіть його висоту, твірну. Покажіть його вершину, основу.
7. Обчисліть площу осьового перерізу конуса, радіус основи якого дорівнює 15 мм, а твірна 30 мм.
8. Накресліть кулю. Зобразіть її радіус. Зобразіть переріз кулі площиною. Яка фігура утворилася в перерізі?
9. У кулі радіуса 26 см на відстані 10 см від центра проведено січну площину. Знайдіть площу перерізу.

9. Об'єм і поверхня геометричного тіла.

1. Знайдіть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда, у якого діагональ дорівнює 13 дм, висота 12 дм, а одне з ребер основи 4 дм.
2. Основою прямої призми є трикутник, у якого сторони довжиною 5 см і 6 см утворюють кут 30° . Бічне ребро призми дорівнює 4 см. Знайдіть об'єм призми.
3. У прямій призмі основа – прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Бічне ребро призми дорівнює 12 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.
4. Знайдіть площу поверхні піраміди, основою якої є квадрат. Кожне ребро піраміди дорівнює 3 дм.
5. Сторони прямокутника дорівнюють 4 см і 5 см. Знайдіть площу повної поверхні тіла, утвореного обертанням цього прямокутника навколо меншої сторони.
6. Осьовий переріз циліндра – прямокутник зі сторонами 12 см і 26 см. Знайдіть об'єм циліндра, якщо його висота дорівнює меншій стороні осьового перерізу.
7. Твірна та радіус основи конуса дорівнюють відповідно 5 м і 2 м. Знайдіть площу поверхні конуса.
8. Покрівля силосної башти має форму конуса. Висота покрівлі 2 м, діаметр башти 6 м. Знайдіть площу поверхні покрівлі.
9. Радіус кулі дорівнює 5 дм. Знайдіть площу її поверхні.
10. Переріз кулі площиною, що знаходиться від центра кулі на відстані 8 см, має радіус 6 см. Знайдіть об'єм кулі.

2.2. Методика формування уявлень і понять про стереометричні фігури та деякі їх властивості

У процесі навчання математики в 5–6-х класах у школярів формується початкове уявлення про найпростіші геометричні тіла та окремі їхні властивості. Це відбувається на основі спостережень за предметами та їх зображеннями,

порівнянь із навколишніми об'єктами, а також завдяки виконанню практичних дій, пов'язаних із моделюванням та виготовленням відповідних фігур. Чим ширшим є коло сформованих уявлень, тим легше учні засвоюють нові поняття, спираючись уже на словесні описи та абстрактні характеристики.

На наступному етапі навчання увага має зосереджуватися на розширенні системи просторових уявлень учнів, зокрема на ознайомленні з новими геометричними тілами та їхніми властивостями. Цей процес продовжується й набуває системного характеру під час вивчення курсу планіметрії у 7–9-х класах, де здійснюється послідовне поглиблення та узагальнення здобутих знань.

У межах експериментальної програми, запропонованої Л. Філон та В. Швецем, для учнів основної школи передбачено активне використання моделей просторових тіл і їх графічних зображень як засобу ілюстрації властивостей фігур на площині. Такий підхід забезпечує послідовний зв'язок між просторовими та площинними об'єктами, сприяючи формуванню в учнів цілісного уявлення про взаємозв'язок геометрії площини й простору. У процесі роботи відбувається поступове наповнення наявних у школярів образів стереометричних фігур, засвоєних у 5–6 класах, логіко-математичним змістом, завдяки чому вони трансформуються у повноцінні математичні поняття. Їх чіткі означення подаються пізніше — у межах систематичного курсу стереометрії.

Розпочинаючи вивчення систематичного курсу планіметрії в 7-му класі, одним із перших питань, що розглядають учні, є поняття про паралельність та перпендикулярність прямих, яке виступає базовим для подальшого опанування властивостей геометричних фігур та встановлення між ними взаємозв'язків.

Перед введенням поняття паралельності прямих доцільно актуалізувати знання учнів про можливі випадки взаємного розміщення прямих на площині, з якими вони ознайомилися в курсі математики 5–6 класів на емпіричному рівні. На цьому етапі школярі вже мають певні уявлення про паралельні та перпендикулярні прямі, а також володіють навичками їх побудови з використанням косинця та лінійки. Після відновлення цих знань учитель переходить до формулювання строгого означення та основної властивості паралельних прямих у площині. Водночас акцентується увага на тому, що в

подальшому учні ознайомляться із формулюванням ознаки паралельності прямих, яка є важливою для поглибленого вивчення даного поняття.

З метою запобігання механічному перенесенню знань учнів про взаємне розташування прямих з планіметрії на стереометрію у 7 класі доцільно ознайомити школярів із випадками взаємного розміщення прямих у просторі. Частина з них відома учням із власного життєвого досвіду або легко розпізнається за аналогією з відповідними планіметричними образами. Саме тому доцільно вводити ці уявлення ще до вивчення систематичного курсу стереометрії, що сприятиме розвитку просторового мислення та значно полегшить сприйняття початкових тем курсу, які нерідко викликають труднощі у школярів.

Ефективним методичним прийомом на цьому етапі є проблемна бесіда. Учитель нагадує означення: «Дві прямі на площині називають паралельними, якщо вони не перетинаються», після чого ставить питання: чи можна використати це означення у просторі? Для з'ясування відповіді розглядаються всі можливі випадки розташування двох прямих у просторі. Використовуючи каркасні моделі куба, призми чи піраміди, педагог демонструє приклади мимобіжних прямих. Оскільки учні вже мають сформоване уявлення про паралельні прямі, вони легко (що підтверджує педагогічна практика) доходять висновку, що ці прямі не є паралельними. Вчитель акцентує увагу на тому, що вони належать різним площинам, і вводить нове поняття – мимобіжні прямі. Для закріплення матеріалу пропонується навести приклади мимобіжних прямих, використовуючи предмети, розташовані у класній кімнаті.

Таким чином, учні узагальнюють, що у просторі можливі чотири випадки взаємного розміщення прямих: вони можуть збігатися, перетинатися, бути паралельними або мимобіжними.

Доцільним є використання моделей відомих многогранників та їх зображень для ілюстрації різних випадків взаємного розміщення прямих як на площині, так і в просторі. Як найпростіші наочні засоби можна застосовувати олівець, спицю чи паличку для моделювання прямих. Уявлення про площину

формуються на прикладах поверхні столу, аркуша паперу або картонної пластинки, що забезпечує опору на доступний учням чуттєвий досвід.

Після засвоєння поняття перпендикулярності прямих на площині, його означення та властивостей, учням пропонується перенести ці знання у тривимірний простір. Як і у випадку площини, у просторі дві прямі вважаються перпендикулярними, якщо вони перетинаються під прямим кутом. Для ілюстрації цього положення ефективно використовувати моделі прямокутного паралелепіпеда та прямої призми, які дозволяють наочно показати випадки перпендикулярності.

Таким чином, у процесі одночасного опрацювання понять паралельності та перпендикулярності прямих на площині в учнів формуються початкові уявлення про можливості їх взаємного розташування у просторі. Подальше вивчення геометричних тіл дає змогу конкретизувати ці уявлення: через аналіз взаємного розташування ребер паралелепіпеда, призми, піраміди, а також через розгляд співвідношень між висотою та твірними циліндра чи конуса. Це створює підґрунтя для систематичного вивчення просторової геометрії на старшому етапі навчання.

Прямокутний паралелепіпед є однією з найпростіших і водночас наочних просторових фігур, з якою учні знайомляться ще на початковому етапі вивчення геометрії. Введення понять паралельності та перпендикулярності прямих у просторі доцільно здійснювати на прикладі саме цієї моделі, оскільки вона дає змогу наочно продемонструвати сутність зазначених властивостей. Зокрема, бічні ребра прямокутного паралелепіпеда перпендикулярні до тих сторін основи, з якими вони мають спільну точку, та є паралельними між собою. У той самий час ребра, що не мають спільних точок зі сторонами основи, виступають прикладами мимобіжних прямих.

Подальше опрацювання тем курсу планіметрії варто здійснювати із систематичним використанням моделей просторових тіл, які учні вивчали у 5–6 класах. Це дозволяє вибудувати міжпредметні зв'язки між планіметрією та стереометрією, забезпечити послідовність формування просторових уявлень і сприяти глибшому засвоєнню властивостей плоских фігур. Ефективним засобом

закріплення таких знань є система задач, що інтегрують матеріал двох розділів і спонукають учнів застосовувати отримані знання у нових навчальних ситуаціях.

Особливо органічно такі зв'язки виявляються під час вивчення теми «Площі фігур» у 9 класі, яка тісно пов'язана з питанням обчислення площ поверхонь геометричних тіл. Формули для визначення площ поверхонь доводяться у систематичному курсі стереометрії, проте вже на даному етапі учні повинні оволодіти вміннями застосовувати їх у розв'язуванні елементарних практичних задач.

Після засвоєння понять площі плоских фігур та основних алгоритмів їх обчислення доцільно переходити до ознайомлення з поняттям поверхні просторового тіла. Учням варто пояснити, що поверхня призми чи циліндра складається з двох основ і бічної поверхні, поверхня піраміди та конуса – з однієї основи і бічної поверхні, а поверхня кулі становить сферу. Такий підхід забезпечує поступове розширення уявлень школярів від елементарних понять планіметрії до більш складних просторових характеристик, що має важливе значення для формування цілісного бачення геометричних об'єктів.

Взаємозв'язок тем планіметрії та стереометрії у курсі математики

Теми планіметрії	Приклади стереометричних відповідників	Наочні моделі та приклади	Методичні можливості
Паралельність прямих на площині	Паралельність і мимобіжність прямих у просторі	Каркас куба, призми; ребра меблів у класі	Формування уявлень про відмінність між паралельними та мимобіжними прямими
Перпендикулярність прямих	Перпендикулярність прямих у просторі	Прямокутний паралелепіпед, призма	Ілюстрація через перетин під прямим кутом у різних площинах
Площі плоских фігур	Площі поверхонь геометричних тіл	Призма, циліндр, піраміда, конус, куля	Розширення знань про площі від двовимірних об'єктів до тривимірних
Кути між прямими на площині	Кути між прямими та площинами у просторі	Моделі з дротинок, картонні схеми	Розвиток просторового мислення та аналітичних умінь

Теми планіметрії	Приклади стереометричних відповідників	Наочні моделі та приклади	Методичні можливості
Геометричні побудови на площині	Побудови перерізів багатогранників	Куб, призма, піраміда з прозорого пластику	Вміння переходити від площинних задач до просторових

Взаємозв'язок між темами планіметрії та стереометрії має важливе значення для поступового формування просторового мислення учнів. Продемонстровані у таблиці приклади свідчать, що перехід від вивчення властивостей фігур на площині до їх просторових аналогів відбувається природно та логічно. Використання наочних моделей багатогранників і тіл обертання допомагає учням усвідомити відмінності між площинними та просторовими об'єктами, що сприяє кращому засвоєнню навчального матеріалу.

Методична цінність такого підходу полягає у створенні системи навчальних завдань, де кожна нова тема спирається на вже сформовані уявлення учнів. Завдяки цьому учні не лише закріплюють знання з планіметрії, а й поступово переходять до більш складних просторових понять. Наприклад, знання про площу плоскої фігури стає підґрунтям для розуміння площ поверхонь геометричних тіл, а поняття паралельності й перпендикулярності прямих на площині логічно переходять у стереометричний контекст.

Таким чином, інтеграція планіметричного та стереометричного матеріалу забезпечує безперервність математичної освіти, дозволяє зменшити труднощі під час вивчення систематичного курсу стереометрії в старших класах і сприяє розвитку логічного та просторового мислення школярів.

Під площею повної поверхні призми розуміють суму площ її двох основ та площі бічної поверхні. Виведення формули для обчислення площі бічної поверхні прямої призми доцільно організувати у вигляді проблемного запитання: «Які дані необхідно знати для того, щоб визначити площу бічної поверхні прямої призми?» та «З яких многокутників складається її бічна поверхня?». У процесі міркувань учні доходять до узагальненого висновку: площа бічної поверхні

прямої призми визначається як добуток периметра основи на висоту призми (довжину бічного ребра).

Для піраміди площа бічної поверхні трактується як сума площ усіх її бічних граней. Після цього учням пропонується самостійно сформулювати вираз для знаходження площі повної поверхні піраміди. У разі виникнення труднощів учитель коригує хід міркувань, спрямовуючи школярів до правильного розв'язання.

Формули *площі бічної і повної поверхонь циліндра* учні також можуть вивести самостійно. Для більшості з них це завдання нескладне (особливо, якщо дозволити користуватися розгорткою поверхні циліндра). Формулу для *Обчислення площі бічної поверхні конуса* можна отримати так. Спочатку необхідно пригадати, що є розгорткою бічної поверхні. Якщо радіус основи конуса позначити через r , а твірну l , то його бічна поверхня є сектором круга радіуса l , довжина дуги якого дорівнює $2\pi r$. Площу сектора приймають за площу бічної поверхні конуса $S_{\text{б}}$. Вона відноситься до площі круга радіуса l , як $2\pi r : 2\pi l$. Отже,

$$\frac{S_{\text{б}}}{\pi l^2} = \frac{2\pi r}{2\pi l}$$

Звідки отримуємо, що

$$S_{\text{б}} = \pi r l$$

Далі пропонуємо записати формулу площі повної поверхні конуса:

$$S = \pi r l + \pi r^2$$

Слід зауважити, що існують поверхні, які неможливо розгорнути в плоскі за допомогою розгинання; зокрема, це стосується поверхні кулі, яка утворює сферу. Повідомляючи учням формулу для обчислення площі сфери, варто підкреслити, що її строгий вивід здійснюватиметься пізніше в курсі систематичної стереометрії.

Засвоєний матеріал закріплюється через розв'язування як навчальних, так і прикладних задач, що дозволяє учням застосувати отримані знання у різноманітних ситуаціях.

Наприкінці 9-го класу доцільно розглянути розділ «Елементи стереометрії», у межах якого учнів ознайомлюють із різними випадками взаємного розташування прямих і площин у просторі, підкреслюють властивості просторових фігур, питання паралельності та перпендикулярності, а також систематизують і доповнюють стереометричний матеріал, засвоєний у курсі математики 5–6 класів та планіметрії 7–9 класів. Основною метою вивчення цього розділу є розвиток просторових уявлень і уяви учнів, що має значення не лише для їх загального інтелектуального розвитку, а й виступає своєрідним завершенням шкільної геометричної підготовки. Це також створює основу для подальшого вивчення систематичного курсу стереометрії та продовження математичної освіти в старших класах або інших середніх навчальних закладах.

На вивчення розділу «Елементи стереометрії» доцільно відвести приблизно 8 навчальних годин. Оскільки матеріал є доступним для учнів, рекомендується організувати повторення відповідних питань з планіметрії для закріплення наявних знань та підготовки до сприйняття нових понять.

Особливістю вивчення елементів стереометрії у 9-му класі, на відміну від тем планіметрії, є те, що більшість стереометричних фактів подається учням без доведення. Обґрунтування та строгі доведення цих тверджень здійснюються у межах систематичного курсу стереометрії на старших етапах навчання. Водночас, як і раніше, засвоєння властивостей просторових фігур рекомендується проводити з активним використанням наочності: моделей, таблиць, схем, рисунків та інших візуальних засобів.

Вивчення розділу «Елементи стереометрії» доцільно розпочинати з аналізу взаємного розташування точок, прямих і площин у просторі. Учні вже отримали первинні уявлення про площину, а також про взаємне розміщення точок і прямих на площині та деякі їхні властивості у курсі планіметрії. Ці знання слід актуалізувати через повторення, надання конкретних прикладів плоских поверхонь із реального середовища, таких як підлога, стеля, віконне скло чи

поверхня спокійного озера, що сприяє формуванню цілісного просторового уявлення.

Після цього вчитель демонструє зображення площини, зазвичай у вигляді паралелограма, та її позначення, наприклад буквами грецького алфавіту $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Учні встановлюють, що через простір можна провести єдину площину за наступними умовами: 1) через дві прямі, що перетинаються; 2) через дві паралельні прямі; 3) через пряму та точку, що не належить їй; 4) через три точки, які не лежать на одній прямій. Для кожного з цих випадків доцільно наводити відповідні графічні ілюстрації, що дозволяє учням наочно уявити спосіб побудови площини та закріпити отримані знання.

Оскільки питання взаємного розташування прямих у просторі учні вже опрацьовували у курсі планіметрії 7-го класу, доцільно провести його повторення та актуалізацію. На цьому етапі слід сформулювати означення паралельних і мимобіжних прямих, а також розглянути ознаку паралельності прямих у просторі.

Одночасно необхідно проаналізувати випадки взаємного розташування точки та площини, прямої та площини, а також навчити учнів виконувати умовні зображення таких конфігурацій. Зокрема, слід показати: точку, що лежить у площині або поза нею; пряму, яка лежить у площині; пряму, що перетинає площину в одній точці; пряму, яка не має спільних точок із площиною (паралельна їй). На основі цих спостережень можна дати визначення паралельності прямої та площини: пряму та площину називають паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Слід показати учням, що коли пряма a та площина α паралельні, то використовуються такі записи:

$$a \parallel \alpha \text{ або } \alpha \parallel a.$$

Далі доцільно сформулювати ознаку паралельності прямої та площини. Наступним етапом навчання є розгляд випадків взаємного розташування двох площин у просторі. У процесі логічного аналізу учні, спираючись на раніше

отримані знання, легко приходять до висновку, що дві площини можуть або не мати спільних точок (бути паралельними), або перетинатися по прямій.

Для наочного закріплення цих понять ефективно використовувати моделі прямокутного паралелепіпеда або прямої призми. Учні інтуїтивно виділяють грані, що є паралельними, та ті, що перетинаються. Вчитель пояснює, що площини, у яких лежать ці грані, відповідно паралельні або перетинаються.

За аналогією з означенням паралельних прямих на площині, доцільно дати визначення паралельних площин: дві площини називають паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Для формування уявлень учнів про паралельність та перетин площин можна запропонувати їм практичне завдання: сконструювати моделі за допомогою двох аркушів паперу, демонструючи такі випадки:

- а) паралельні площини;
- б) площини, що перетинаються.

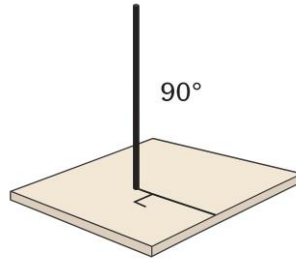
Учитель на дошці виконує відповідні графічні зображення, які ілюструють паралельність або перетин площин, після чого учні відтворюють їх у зошитах. На основі проведеної роботи формулюється ознака паралельності площин.

Перед вивченням перпендикулярності прямої та площини доцільно повторити поняття перпендикулярності прямих на площині та у просторі, нагадати учням означення перпендикулярних прямих, що забезпечує логічну послідовність подання нового матеріалу та підготовлює їх до засвоєння більш складних стереометричних понять.

Початкові уявлення про перпендикулярність прямої та площини учні можуть отримати на прикладах з повсякденного життя: стовп і поверхня землі, ніжка стільця та підлога, канат у спортивному залі, прикріплений до стелі тощо. Для наочного демонстрування цього поняття доцільно створити модель прямої, перпендикулярної до площини, використовуючи спицю та картонний аркуш.

Перевірку перпендикулярності можна здійснити за допомогою косинця. Прикладаючи косинець катетом до спиці з різних сторін, учні переконуються, що пряма і площина утворюють прямий кут у кожному випадку. На основі проведених спостережень формулюється означення перпендикулярних прямої та

площини: пряму, яка перетинає площину, називають перпендикулярною до цієї площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині і проходить через точку перетину.



Слід показати учням, що коли пряма a перпендикулярна до площини α , то це записують так:

$$a \perp \alpha \text{ або } \alpha \perp a.$$

Учням слід пояснити, що в курсі стереометрії доводиться така ознака перпендикулярності прямої і площини: «якщо пряма є перпендикулярною до двох прямих, які належать одній площині та перетинаються між собою, то ця пряма є перпендикулярною до всієї площини».

Основну увагу треба звернути на формування в учнів поняття відстані від точки до площини. Насамперед слід повторити, як знаходиться відстань від точки до прямої. Якщо пряма AB перпендикулярна до площини α і точка B лежить у цій площині, то відрізок AB називають перпендикуляром, опущеним з точки A на площину α . Довжину цього перпендикуляра називають відстанню від точки A до площини α .

Розгляд можливих випадків перетину двох площин приводить до уявлення про перпендикулярні площини. Нехай дві площини α та β перетинаються по прямої m . Якщо деяка площина γ перпендикулярна до прямої m і перетинає площини α та β по перпендикулярних прямих, то площини α та β називають *перпендикулярними*. Це записують так:

$$\alpha \perp \beta \text{ або } \beta \perp \alpha.$$

Після цього необхідно ввести означення перпендикулярних площин і подати відповідну ознаку, яка доводиться у систематичному курсі стереометрії. Пояснення доцільно супроводжувати демонстрацією моделей. Наприклад, якщо

прикласти косинець до двох площин, що перетинаються, так, щоб його катети були перпендикулярними до лінії їхнього перетину, можна отримати наочне уявлення про перпендикулярність площин. На практиці таку властивість зручно перевіряти за допомогою виска (шнура з вантажем). Саме цей спосіб застосовують, коли визначають вертикальність стін будівель. Не менш важливо, щоб школярі могли самостійно на моделях відомих геометричних тіл або на предметах з навколишнього середовища демонструвати приклади різних взаємних положень прямих і площин у просторі.

Згідно з дослідженнями психологів, середній шкільний вік є найбільш сприятливим для опанування методу проектування. Враховуючи це, вже під час вивчення курсу планіметрії доцільно знайомити учнів із побудовою зображень геометричних тіл. Як спосіб відображення просторових фігур варто розглянути паралельне проектування, зокрема побудову паралельної проєкції точки та фігури на площину, а також сформулювати властивості такої проєкції.

При вивченні теми «Елементи стереометрії» важливо узагальнити й систематизувати відомості про многогранники, які школярі вже засвоїли раніше. На основі набутого досвіду необхідно подати загальне уявлення про многогранник, його грані, вершини та ребра, а також сформулювати відповідне означення.

Многогранником називають геометричне тіло, поверхня якого утворена скінченною кількістю плоских многокутників.

Многокутники, що утворюють поверхню многогранника, називають його гранями; їхні сторони становлять ребра, а точки перетину ребер – вершини многогранника.

У процесі пояснення вчителю варто продемонструвати різноманітні моделі многогранників. Учні повинні навчитися визначати на них грані, ребра та вершини.

Також доцільно нагадати школярам, що з найпростішими видами многогранників – призмами та пірамідами – вони вже мали справу раніше й ознайомилися з їх основними елементами та окремими властивостями.

Першим видом многогранників, який доцільно розглянути, є призми. Раніше отримані відомості про призму слід пригадати та повторити. Зокрема, учні мають уміти впізнавати призму як многогранник, у якого дві грані – довільні, але рівні многокутники з паралельними відповідними сторонами, а решта граней – паралелограми. Рівні многокутники називають основами призми, а паралелограми – її бічними гранями.

Під час демонстрації моделей різних призм учитель має звернути увагу учнів на те, що існують призми з бічними гранями у вигляді прямокутників. У такому випадку бічне ребро перпендикулярне до площини основи. Можна дати визначення прямої призми: призмою називають прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основ; інакше призма вважається похилою. У курсі 9 класу зазвичай розглядають лише прямі призми.

Висотою прямої призми називають довжину її бічного ребра. Відрізок, який з'єднує дві вершини, що не лежать в одній грані, називають діагоналлю призми. Уявлення про діагональний переріз можна отримати, якщо розрізати модель призми, виготовлену з пластиліну, воску або гуми, площиною, що проходить через її бічні ребра.

Серед чотирикутних призм особливо виділяють ті, основою яких є паралелограм. Такі призми називають паралелепіпедами, тобто всі їхні грані є паралелограмами. Якщо бічні ребра паралелепіпеда перпендикулярні до площини основи, його називають прямим паралелепіпедом, в іншому випадку – похилим. У прямого паралелепіпеда дві грані (основи) – паралелограми, а решта – прямокутники.

Серед прямих паралелепіпедів виділяють ті, у яких основою є прямокутник – їх називають прямокутними паралелепіпедами. Особливий випадок прямокутного паралелепіпеда – куб, у якого всі ребра рівні.

Важливо, щоб учні усвідомили, що куб, прямокутний паралелепіпед і прямий паралелепіпед є різновидами призми. Доцільно навести такий ланцюг, який показує взаємозв'язок між цими поняттями: призма → чотирикутна призма → паралелепіпед → прямий паралелепіпед → прямокутний паралелепіпед → куб.

Деякі відомості про елементи прямої призми (грані, ребра, основи) учні вже знають. Їх слід уточнити, спираючись на планіметричні знання. Оскільки основи та бічні грані прямої призми є плоскими фігурами, для них діють планіметричні властивості, зокрема: бічні ребра рівні між собою, як протилежні сторони прямокутника.

Після цього, використовуючи властивості паралельного проектування, можна навчити учнів будувати зображення прямої призми. Послідовність дій така: спершу креслимо одну з основ призми (плоский багатокутник). Через вершини багатокутника проводимо вертикальні паралельні прямі та відкладаємо на них рівні відрізки, які будуть зображенням бічних ребер призми. Потім послідовно з'єднуємо кінці цих відрізків, щоб отримати зображення другої основи призми.

Одночасно доцільно ознайомити учнів із зображенням прямокутного паралелепіпеда та куба. За належної підготовки більшість учнів правильно виконує такі побудови і без труднощів визначає паралельні та взаємно перпендикулярні грані, ребра тощо.

Наступним видом многогранників, який слід розглянути, є піраміди. Учні вже мають певне уявлення про піраміду та знайомі з її основними характеристиками, тому ці відомості варто пригадати. Зокрема, піраміду вони впізнають як многогранник, у якого одна грань – довільний багатокутник, а решта граней – трикутники, що сходяться в одній вершині. Такий опис надає наочне уявлення про форму всіх граней піраміди, що значно полегшує сприйняття її структури та подальше вивчення властивостей. Під час узагальнення поняття слід дати чітке визначення піраміди.

Пірамідою називають многогранник, у якого одна грань є плоским багатокутником, а решта граней – трикутники, що сходяться в одній вершині. Варто пригадати різновиди пірамід залежно від форми багатокутника, який слугує основою, та показати їх на моделях і зображеннях.

Оскільки учні вже знайомі з поняттям перпендикулярності прямої та площини, можна ввести визначення висоти піраміди: це перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину основи. Точку, де цей перпендикуляр

перетинає площину основи, називають основою висоти. Висота утворює прямий кут з будь-якою прямою, що проходить через основу висоти в площині основи. Це положення активно використовується при розв'язуванні задач на обчислення елементів піраміди.

Навчання учнів побудові зображення піраміди проводять у такій послідовності: спершу креслять основу піраміди у вигляді плоского многокутника, потім позначають вершину піраміди і з'єднують її відрізками з вершинами основи. Ці відрізки відображають бічні ребра піраміди.

При побудові зображень призм і пірамід доцільно використовувати спеціальні демонстраційні комп'ютерні програми.

На наочному рівні варто показати учням діагональний переріз піраміди аналогічно до того, як це робилося для призм. Якщо піраміду перетнути площиною, паралельною основі, утворюються два многогранники: одна піраміда та зрізана піраміда. Необхідно підкреслити, що зрізана піраміда є окремим видом многогранників.

Грані, що лежать у паралельних площинах, називають основами, а решту – бічними гранями. Основи при цьому є подібними многокутниками, а бічні грані – трапеціями.

Учні вже знайомі з найпростішими тілами обертання у 5–6-х класах. У 9-му класі доцільно зосередитися на вивченні прямого кругового циліндра, прямого кругового конуса, зрізаного конуса та кулі.

Учні вже знайомі з тим, що поверхню циліндра можна отримати обертанням прямокутника навколо однієї з його сторін, а поверхню конуса – обертанням прямокутного трикутника навколо одного з катетів. Тому на уроці доцільно демонструвати моделі циліндрів і конусів, серед яких можуть бути як похилі, так і некругові форми. При цьому повідомляють, що надалі будуть розглядатися лише прямі кругові циліндри та конуси, які для спрощення називатимемо відповідно циліндрами і конусами.

Далі формулюють визначення циліндра як геометричного тіла, утвореного обертанням плоского прямокутника навколо однієї з його сторін. Вчитель пояснює, що називають основами, твірними, радіусом, висотою та віссю

циліндра, наголошуючи, що у прямого циліндра твірні перпендикулярні до площин основ.

Побудова зображень геометричних тіл є ефективним засобом розвитку просторових уявлень учнів. Для більшості школярів побудова зображень циліндра, конуса чи кулі не викликає суттєвих труднощів.

Після вивчення поняття паралельності площин учні легко помічають, що основи циліндра лежать у паралельних площинах. Якщо каркасну модель циліндра розташувати так, щоб його основи виглядали як еліпси, а твірні та висота були вертикальними, стає зрозумілою форма циліндра. Для побудови використовують шаблон: креслять два однакових еліпси – основи циліндра, малі осі яких розташовані на одній вертикальній прямій. Вертикальні дотичні до обох еліпсів утворюють контурні твірні циліндра.

Для організації роботи учнів слід забезпечити достатню кількість шаблонів еліпса різних розмірів.

Відомості, які учні раніше отримали про конус, слід пригадати та повторити. Прямий круговий конус визначають як геометричне тіло, утворене обертанням плоского прямокутного трикутника навколо одного з катетів. Пояснюють учням, як будувати зображення конуса: основою є круг, який на площині зображують у вигляді довільного еліпса, мала вісь якого розташована на вертикальній прямій. На цій прямій позначають точку – вершину конуса, і через неї проводять дві дотичні до еліпса, які служать контурними твірними. Отримана фігура є зображенням конуса на площині.

Також ознайомлюють учнів зі зрізаним конусом: якщо перетнути конус площиною, паралельною його основі, утворюється менший конус, який відтинається від великого. Частину, що залишилася, називають зрізаним конусом. Для наочності використовують відповідні моделі.

Варто звернути увагу учнів на практичне застосування конічних форм. З конусом, особливо зі зрізаним конусом, часто стикаються на виробництві, зокрема в токарній справі.

Учні отримують уявлення про осьовий переріз циліндра та конуса під час ознайомлення з тілами обертання. Уже в ході демонстраційного досліду, який

показує утворення цих тіл, слід звернути увагу на наявність осевого перерізу. При побудові зображень циліндра та конуса учням також показують, як зображується їх осевий переріз.

Що стосується кулі, учні вже знайомі з нею з попередніх класів. У 9-му класі доцільно розглядати кулю як тіло, утворене обертанням півкруга навколо його діаметра. Перед тим як дати визначення кулі, корисно пригадати відомі з планіметрії означення кола та круга. Після цього, аналогічно до циліндра та конуса, формулюють визначення кулі.

Кулю визначають як геометричне тіло, що утворюється обертанням півкруга навколо його діаметра, який слугує віссю. Центр півкруга збігається з центром кулі, а радіус півкруга одночасно є радіусом кулі. Поверхню кулі називають сферою. Варто зауважити, що сферу можна також отримати обертанням кола навколо його діаметра.

Переріз кулі площиною завжди є кругом. Доведення цього факту здійснюється у систематичному курсі стереометрії.

Контур кулі утворює коло. Якщо при побудові зображення кулі показати лише контур, рисунок буде недостатньо наочним. Тому його доцільно доповнити лініями та точками, що відображають окремі елементи кулі. Одне з великих кіл кулі називають екватором; діаметр, перпендикулярний до площини екватора, – віссю кулі, а його кінці – полюсами. Додавши на зображення екватор і полюси, рисунок стає об'ємним.

Екватор кулі на зображенні зображують у вигляді довільного еліпса, центр якого відповідає центру кулі. Можна запропонувати таку послідовність побудови зображення кулі:

1. Провести вертикальну вісь кулі та позначити на ній точку, що відповідає центру кулі.
2. Сумістити центр еліпса з цією точкою та вирівняти малу вісь еліпса вздовж вертикальної осі, щоб намалювати екватор.

3. Використати радіус, рівний великій півосі еліпса, для побудови кола з центром у точці, що відповідає центру кулі; це коло відображає контур кулі.
4. Для зображення полюсів провести дотичну до еліпса в кінці малої осі; відрізок між точкою дотику та перетином з контуром кулі відкласти по обидва боки від центру на осі кулі. Отримані точки є зображенням полюсів кулі.

За аналогією з дотичною до кола учням демонструють поняття дотичної площини до кулі.

Учні 9-го класу вже готові опановувати навички побудови таких зображень. Більшість школярів правильно зображує прямокутний паралелепіпед, куб, піраміду, циліндр, конус і кулю. Найпоширенішою помилкою залишається зображення невидимих ліній суцільною, а не пунктирною лінією.

Під час вивчення теми зображення геометричних тіл ефективно використовувати комп'ютерні засоби. Вони дозволяють виділити найважливіше, продемонструвати послідовність побудови та показати її в динаміці.

Учні вже знайомі з обчисленням об'ємів геометричних тіл у курсі математики 5–6 класів. Надалі варто наголосити, що кожне геометричне тіло має об'єм, виражений додатнім числом. При обчисленні об'ємів слід враховувати такі властивості:

1. Рівні геометричні тіла мають рівні об'єми.
2. Якщо тіло складається з частин без самоперетинів, його об'єм дорівнює сумі об'ємів цих частин.
3. Одиницею об'єму вважають об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини.

Зауважимо, що зазначені властивості об'ємів аналогічні до властивостей площ.

Оскільки формула для обчислення об'єму прямокутного паралелепіпеда відома учням ще з 5-го класу, то її необхідно пригадати:

$$V = abc,$$

де a, b, c – виміри паралелепіпеда.

Якщо добуток abc розглядати як площу основи паралелепіпеда, c – його висоту, то можна сказати так: об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту.

Після цього дається формула для обчислення об'єму прямої призми:

$$V = Sh$$

де S – площа основи призми, h – її висота.

Об'єм циліндра, як і об'єм призми, також дорівнює добутку площі його основи на висоту.

Варто пригадати, що основою циліндра є круг. Якщо його радіус позначити через r , а висоту циліндра через h , то його об'єм дорівнює:

$$V = \pi r^2 h$$

Учні вже знайомі з формулами для обчислення об'ємів піраміди, конуса та кулі. Варто зазначити, що формула для обчислення об'єму конуса аналогічна формулі для об'єму піраміди. Обчислення об'ємів і площ поверхонь многогранників та тіл обертання відпрацьовується під час розв'язування відповідних задач.

На завершення доцільно зауважити, що всі названі формули будуть обґрунтовані у систематичному курсі стереометрії.

Обсяг, зміст і спосіб викладу представленого стереометричного матеріалу є цілком доступними для розуміння учнями.

ВИСНОВКИ

У результаті проведеного дослідження було здійснено комплексний аналіз проблеми формування стереометричних уявлень учнів у курсі математики 7–9 класів та визначено ефективні пропедевтичні підходи до навчання стереометрії. Дослідження підтвердило, що успішне оволодіння стереометричними поняттями значною мірою залежить від міцної бази планіметричних знань та сформованих просторових уявлень у попередніх класах.

Встановлено, що пропедевтична підготовка учнів має включати:

1. **Ознайомлення з основними просторовими об'єктами** – многогранниками, циліндрами, конусами та кулями, їхніми гранями, ребрами, вершинами, твірними, висотами та діагональними перерізами.
2. **Формування навичок побудови зображень геометричних тіл** – включаючи осьові, діагональні перерізи та контури тіл, що дозволяє учням наочно уявляти просторові взаємозв'язки і розвивати просторове мислення.
3. **Використання різноманітних наочних засобів** – каркасних моделей, демонстраційних програм, інтерактивних засобів, шаблонів еліпсів і креслярських інструментів, що сприяє кращому засвоєнню матеріалу та підвищенню зацікавленості учнів.
4. **Застосування системи дидактичних вправ різного рівня складності**, включаючи практичні завдання на обчислення об'ємів та площ поверхонь, аналіз властивостей тіл та розв'язування прикладних задач, що забезпечує інтеграцію теоретичних знань і практичних навичок.

Дослідження показало, що учні, які пройшли пропедевтичну підготовку, легше засвоюють матеріал курсу стереометрії, швидше орієнтуються у просторових взаємозв'язках, коректно будують зображення тіл та правильно застосовують формули обчислення об'ємів і площ поверхонь. При цьому

ключовими факторами успішного навчання є систематичність, наочність, поетапність подачі матеріалу та інтеграція з попередніми знаннями з планіметрії. Особливу увагу слід приділяти розвитку просторового мислення учнів через поєднання традиційних і сучасних технологій навчання, зокрема використання комп'ютерних програм для динамічного моделювання тіл обертання, що дозволяє учням наочно спостерігати взаємне розташування граней, ребер, осей і перерізів.

Таким чином, пропедевтика формування стереометричних уявлень у курсі математики 7–9 класів є невід'ємним етапом підготовки учнів до більш глибокого вивчення геометрії. Вона забезпечує міцну методичну основу для розуміння стереометричних понять, розвитку просторового та логічного мислення, формування математичної компетентності, а також створює умови для подальшого успішного навчання в старших класах і застосування знань у практичній діяльності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Антоненко С. В. Розвиток просторового мислення школярів у процесі навчання математики : монографія. – Київ : Наукова думка, 2018. – 240 с.
2. Бевз В. Г. Методика навчання математики : навч. посіб. – Київ : Генеза, 2016. – 320 с.
3. Белова Н. П. Стереометрія: методика навчання у школі : навч. посіб. – Київ : Літера ЛТД, 2015. – 256 с.
4. Виготський Л. С. Психологія розвитку людини : монографія. – Київ : Педагогіка, 2000. – 296 с.
5. Gardner H. *Frames of Mind: The Theory of Multiple Intelligences*. – New York : Basic Books, 2011. – 528 p.
6. Дорофєєв Г. В. Геометрія: методичні аспекти викладання : навч. посіб. – Харків : Основа, 2017. – 280 с.
7. Ельконін Д. Б. Психологія розвитку. Проблеми вікової психології : монографія. – Київ : Просвіта, 1989. – 350 с.
8. Піаже Ж. *The Psychology of Intelligence*. – London : Routledge, 1972. – 297 p.
9. Рогов Є. І. Психологія навчання і виховання : навч. посіб. – Харків : Ранок, 2014. – 312 с.
10. Савченко О. С. Інтерактивні методи навчання у школі: теорія і практика : навч. посіб. – Київ : Літера ЛТД, 2016. – 240 с.
11. Савченко О. Я. Інтерактивні методи навчання в курсі геометрії : навч. посіб. – Київ : Педагогічна думка, 2020. – 256 с.
12. Тарасенкова Н. А. Методика навчання математики в основній школі : навч. посіб. – Черкаси : Вид. ЧНУ, 2018. – 300 с.
13. Гордієнко І., Яремій А. Про фузіонізм шкільного курсу геометрії. *Актуальні проблеми сучасної науки: матеріали XII-ї міжнародної науково-практичної конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій*. – Дрогобич, 2025. – С. 273–274.

