

**МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ІНФОРМАТИКИ
У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ІНФОРМАТИКИ СТАРШОЇ ШКОЛИ**

УДК 371.2: 378

DOI: <https://doi.org/10.24919/2308-4634.2023.288035>

Тарас Кобильник, кандидат педагогічних наук, доцент,
доцент кафедри фізики та інформаційних систем
Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка
Оксана Сікора, кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри фізики та інформаційних систем
Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка

**МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ІНФОРМАТИКИ
У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ІНФОРМАТИКИ СТАРШОЇ ШКОЛИ**

У статті розглядаються зміст математичних основ інформатики шкільному курсі інформатики старшої школи. Нами детально проаналізовано зміст вибіркового модуля “Математичні основи інформатики” та зміст програми з інформатики (профільний рівень). Розглядається актуальність вивчення математичних основ інформатики. Теоретичний матеріал ілюструється практичними прикладами. Звертається увага на таку проблему як математична підготовка учнів.

Ключові слова: шкільний курс інформатики; математичні основи інформатики; графі; системи числення; формальна логіка.

Рис. 1. Літ. 10.

Taras Kobylnyk, Ph.D. (Pedagogy), Associate Professor,
Associate Professor of the Physics and Information Systems Department,
Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University
Oksana Sikora, Ph.D. (Technical Sciences), Associate Professor,
Associate Professor of the Physics and Information Systems Department,
Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University

**MATHEMATICAL FUNDAMENTALS OF COMPUTER SCIENCES
IN THE SCHOOL COURSE OF COMPUTER SCIENCES IN SENIOR SCHOOL**

In the article, we analyze the content of the mathematical foundations of informatics for the high school informatics course. We have analyzed in detail the content of the elective module “Mathematical Foundations of Informatics” and the content of the program in Informatics (profile level). The absence of mathematical foundations of informatics in the content of the school informatics course (as a separate mandatory content line or a component of another) is a consequence of the dominant role of the user-programmer approach in the teaching of informatics in institutions of general secondary education.

The content of the elective module “Mathematical Foundations of Informatics” reveals the relationship between mathematics and informatics, shows how the development of one of these scientific areas stimulated the development of the other. An in-depth view of the mathematical apparatus used in computer science is given, it is shown how the theoretical results obtained in mathematics served as a source of new ideas and results in the theory of algorithms, programming and other sections of computer science.

We focus on the low level of the students’ mathematical knowledge. This leads to a decrease in the ability to think critically and logically. The reasons for this are seen as unpreparedness of teachers and lack of motivation of students. The level of mathematical knowledge also affects the success of students in other subjects (not only computer science). Ignorance of mathematics reduces the ability to think critically and logically.

The relevance of studying the mathematical foundations of informatics is considered. Theoretical material is illustrated with practical examples. Attention is drawn to such a problem as mathematical training of students. We see the development of educational and methodical materials for the high school computer science course as a promising direction for future research.

Keywords: school computer science course; mathematical foundations of computer science; graphs; number systems; formal logic.

Постановка проблеми. Сучасний розвиток суспільства характеризується проривом цифрових технологій у всіх сферах життя. Відповідно важливу роль у шкільній освіті відіграє такий предмет, як “Інформатика”. Дуже часто інформатику учні ототожнюють з різноманітними інформаційно-комунікаційними технологіями, включаючи в них і алгоритмізацію та програмування, і зовсім забувають, що основою інформатики є

математика. Це важливий аспект шкільної інформатичної освіти, оскільки для побудови та дослідження різноманітних моделей використовується певний математичний апарат. Дуже рідко учні задумуються над такими питаннями, як:

- чому в комп’ютерах використовується саме двійкова система числення і навіть її взагалі?

- для зберігання в комп’ютерах графічних даних використовується растрове та векторне подання. Чи

можна будь-яку фотографію зберегти у комп'ютері так, щоб її цифрове подання було ідентичним оригіналу?

Власне на ці та інші питання учні можуть відповісти, обравши і опанувавши вибіркового модуль “Математичні основи інформатики”.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. На важливість математичної підготовки вказує М. Жалдак. На його думку, “...алгоритмізація і програмування – це та сама математика: аналіз умов задачі, побудова математичної (чи інформаційної) моделі задачі, розкладання задачі на підзадачі (за правилами структурного програмування і розкладання алгоритму на блоки за методом “згори донизу”, аналіз алгоритму “знизу догори”) аж до найпростіших, які розв’язуються елементарно” [4, 8]. На його думку, хто не вміє розв’язувати математичні задачі, той не може бути хорошим програмістом, “...оскільки навчання інформатики формує вміння аналізувати, виробляє логічне мислення, здатності до евристичних пошуків, творчості, обґрунтування чи спростування різноманітних гіпотез, аргументованих висновків стосовно досліджуваних явищ і причинно-наслідкових зв’язків між ними. ...алгоритмізація та програмування – це та сама математика: аналіз умов задачі, побудова математичної (чи інформаційної) моделі задачі, розклад задачі на підзадачі аж до найпростіших, які розв’язуються елементарно” [4, 8].

Крім того, на важливість математичних знань вказує і той факт, що розв’язування значної частини олімпіадних задач з програмування має математичну основу. На важливість математичної підготовки вказує і Т. Вакалок [3], наголошуючи, що під час розв’язування олімпіадних задач з програмування виникають труднощі, які пов’язані з математичним розв’язком задачі. Автор вказує на важливість таких розділів математики як комбінаторика, теорія чисел, системи числення, геометрія, теорія ймовірностей, базові алгебраїчні поняття та лінійна алгебра у підготовці учнів до олімпіади з програмування.

У статті [6] автори на основі власного досвіду та проведеного аналізу наукових праць визначили проблемні аспекти навчання основ алгоритмізації і програмування у школі, серед яких відзначають математичну підготовку учнів. Вони зазначають, що рівень математичних знань впливає також на успішність учнів з інших предметів (не тільки інформатики).

На увагу заслуговує книга “Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science” (Конкретна математика. Основа інформатики) [6], де слово “конкретна” розшифровують як **КОН**тинуальна (**CON**tinuous) та **дисКРЕТНА** (**disCRETE**). Основою для цієї книги був розділ “Математичний вступ” у першому томі монографії Д. Кнута “The Art of Computer Programming. Fundamental Algorithms” (“Мистецтво програмування. Основні алгоритми”), у якому висвіт-

лювалися такі питання, як: математична індукція; числа, степені і логарифми; суми і добутки; цілочисельні функції та елементарна теорія чисел; перестановки і факторіали; гармонійні числа; числа Фібоначчі; твірні функції; аналіз алгоритму; асимптотичні подання.

Доцільно також сказати про підручник “Математичні основи інформатики” (який написаний відповідно до змісту однойменного вибіркового модуля) для учнів 10–11-х класів, які вивчають інформатику (рівень стандарту). У ньому міститься навчальний матеріал, який є теоретичною основою навчальної дисципліни “Інформатики”, без якого неможливо свідомо розуміти принципи дії комп’ютера та відповідного програмного забезпечення [9].

Мета дослідження: проаналізувати зміст математичних основ інформатики та навести методичні аспекти їх навчання у шкільному курсі інформатики старшої школи.

Виклад основного матеріалу. Дуже часто різні за змістом задачі приводять до побудови та дослідження одних і тих самих математичних моделей.

За результатами міжнародного дослідження PISA 36 % українських школярів не опанували мінімального базового рівня з математики. Такий стан спав призводить до зниження здатності критично та логічно мислити, що є надзвичайно важливим для належного опанування основ алгоритмізації та програмування. Причинами цього вбачають невідповідність вчителів і невмотивованість учнів [1]. Взагалі це надзвичайно складна проблема шкільної математичної освіти, яка потребує ґрунтовного та всебічного дослідження. Рівень математичних знань впливає також на успішність учнів з інших предметів (не тільки інформатики). Незнання математики знижує здатність до критичного й логічного мислення.

До найважливіших складових інформаційної культури сучасного фахівця, на думку М. Жалдака, треба віднести [4, 8]:

- розуміння сутності математичного моделювання, адекватності моделі досліджуваному явищу, коректності постановки задачі, стійкості методу розв’язування та відповідного алгоритму, впливу похибок на результати обчислень, володіння елементами обчислювальної і програмістської культури;

- володіння основами програмування, арифметичними та логічними основами ЕОМ, елементами схемотехніки ЕОМ.

Відповідно до навчальної програми з інформатики для учнів 10–11-х класів (рівень стандарту) вибірково-обов’язковий курс “Інформатика” будується за такими предметними змістовими лініями [5]:

- інформаційні технології в суспільстві;
- моделі і моделювання, аналіз та візуалізація даних;
- системи керування базами даних;

- технології опрацювання мультимедійних даних;
- сервіси інформаційно-комунікаційних мереж.

Як видно, зміст навчання інформатики на рівні стандарту (базовий модуль) має чітко виражену прикладну спрямованість (за винятком, можливо, окремих тем у змістовій лінії “Моделі і моделювання, аналіз та візуалізація даних”). Предметом вивчення інформатики як науки є формальні системи та точні математичні об’єкти, для дослідження яких використовуються математичні методи.

Відсутність математичних основ інформатики у змісті шкільного курсу інформатики (як окремої обов’язкової змістової лінії чи складової іншої) є наслідком домінування в навчанні інформатики в закладах загальної середньої освіти користувачько-програмістського підходу.

Таку прогалину може дещо заповнити вибірковий модуль “Математичні основи інформатики”, розрахований на 35 год., який спрямований на фундаментальну підготовку. Зміст його пропонується таким: системи числення; подання даних у комп’ютері; математична логіка; основи теорії інформації.

Метою навчання вибіркового модуля “Математичні основи інформатики” є ознайомлення учнів з фундаментальними поняттями (“інформація”, “кількість інформації”) та математичними методами в інформатиці.

З цього приводу доцільно зауважити, що питаннями, пов’язаними з системами числення та подання даних у комп’ютері, учні знайомляться у попередніх класах. У пропонованому модулі здійснюється систематизація й узагальнення такого матеріалу.

Математична логіка належить до важливих основ інформатики. Враховуючи сучасний розвиток інформатики, зокрема інтелектуалізацію інформа-

ційних систем, математична логіка набуває не тільки теоретичного, а й практичного значення. Як зазначено у [8, 6], “...результати, які одержані в галузі формальної логіки, і задачі, які розв’язуються її засобами і методами, знаходять різноманітні застосування в багатьох галузях комп’ютерної науки”. Математична логіка в інформатиці застосовується всюди: від простих умов в if-else до систем штучного інтелекту, криптографії та базах даних (мова запитів SQL).

Безперечно, важко переоцінити роль сучасних інформаційних технологій у нинішніх умовах. Проте незважаючи на це, єдиного підходу до тлумачення поняття “інформація” нема. Заповнити таку прогалину, власне, покликане вивчення такого розділу, як “Основи теорії інформації”. Детальний аналіз поняття “інформація” та методика його навчання здійснено у статті [10].

Графи як засіб розв’язування логічних задач. Існує значна кількість задач, які можна розв’язати з використанням теорії графів, зокрема логічні задачі, знаходження найкоротшого шляху, побудова каркасу найменшої вартості, задача складання розкладу, задача маршрутизації трафіку тощо.

Розглянемо логічну задачу, для розв’язування якої використовується теорія графів.

Приклад 1. Задача про кількість трицифрових чисел. Знайти всі трицифрові числа, у записі яких містяться цифри 6 і 8.

Розв’язування. Процес розв’язування такої задачі зручно подати у вигляді дерева (зв’язний граф без простих циклів) (Рис. 1).

Отже, аналізуючи отримане дерево, бачимо, що є вісім різних чисел, у записі яких містяться цифри 6 і 8.

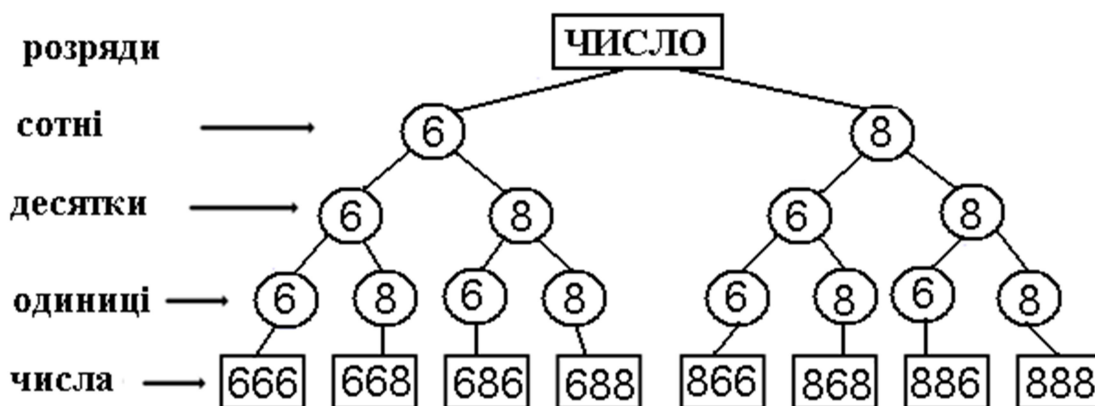


Рис. 1. Дерево задачі про трицифрові числа

Логічні формули. Закони алгебри логіки. За допомогою засобів алгебри логіки можна побудувати формальний універсальний спосіб розв’язування логічних задач. Наведемо приклад задачі, для роз-

в’язування якої зручно використовувати закони алгебри логіки.

Приклад 2. Було поставлено питання: хто з трьох учнів вивчав вибірковий модуль “Математичні ос-

нови інформатики”? Отримана відповідь (істинне твердження): “Якщо вивчав перший учень, то вивчав і другий. Але хибно: якщо вивчав третій, то вивчав і другий”. Хто вивчав вибіркового модуль “Математичні основи інформатики”?

Розв’язування. Нехай висловлення a_1, a_2, a_3 – перший, другий та третій учні вивчали вибіркового модуль “Математичні основи інформатики”. За умовою задачі висловлення $(a_1 \rightarrow a_2) \wedge (\bar{a}_3 \rightarrow \bar{a}_2)$ є істинним. Використовуючи співвідношення $a \rightarrow b = \bar{a} \vee b$ і спростивши вираз, отримаємо:

$$(a_1 \rightarrow a_2) \wedge (\bar{a}_3 \rightarrow \bar{a}_2) = (\bar{a}_1 \vee a_2) \wedge (\bar{a}_3 \vee \bar{a}_2) =$$

$$= (\bar{a}_1 \vee a_2) \wedge a_3 \wedge \bar{a}_2 = \bar{a}_1 \wedge a_3 \wedge \bar{a}_2 \vee a_2 \wedge a_3 \wedge \bar{a}_2.$$

Висловлення $a_2 \wedge \bar{a}_2$ є хибним і відповідно також є хибним висловлення $a_2 \wedge a_3 \wedge \bar{a}_2$. Тому повинне бути істинним висловлення:

$$\bar{a}_1 \wedge a_3 \wedge \bar{a}_2.$$

Це означає, що вибіркового модуль “Математичні основи інформатики” вивчав тільки третій учень, а перший та другий не вивчали.

Системи числення. В інформатиці важливе місце займають числа у двійковій, вісімковій та шістнадцятковій системах числення. Для переведення числа з однієї системи числення в інші у Python використовуються такі функції:

- `bin(n)` – переводить число у двійкову систему числення;
- `oct(n)` – переводить число у вісімкову систему числення;
- `hex(n)` – переводить число у шістнадцяткову систему числення.

Учням можна поставити запитання: як перевести число, наприклад, 25 у шісткову чи дванадцяткову системи числення? Для цього існує алгоритм переведення числа з десяткової системи числення в іншу. Наведемо приклад алгоритму переведення числа з десяткової системи числення у шісткову. Як правило, число у десятковій системі числення перетворюють шляхом обчислення остач від ділення на 6. При цьому частка, отримана на попередньому кроці, набуває значення діленого на наступному кроці. Ділення закінчується тоді, коли ділене дорівнює нулю. Отримані частки записуються з кінця, тобто остання остача буде першою цифрою у записі числа у шістковій системі числення. Проілюструємо цей алгоритм на такому прикладі.

Приклад 3. Перевести число 64 з десяткової системи числення у шісткову.

$$64/6=10, \text{ остача } 4;$$

$$10/6=1, \text{ остача } 4;$$

$$1/6=0, \text{ остача } 1;$$

0 – кінець процесу ділення.

$$\text{Результат } 64_{10}=144_6.$$

Програмна реалізація наведеного алгоритму передбачає зберігання остач. У мові Python для цього можна використати змінну рядкового типу або спис-

ки. Для програмної реалізації використаємо змінну рядкового типу. Відповідно кожному нову остачу необхідно дописувати на початок рядка. Програмний код буде таким:

```
n=int(input('Введіть натуральне число у 10-й системі числення: '))
b=' '#змінна рядкового типу
k=int(input('Система числення, в яку переводимо: '))
while n>0:
    c=n%k
    if c<10:
        b=str(c)+b
    else:
        b=chr(ord('A')+c-10)+b
    n=n//k
print(b)
```

Протестуємо наведений код на кількох прикладах:

1) Введіть натуральне число у 10-й системі числення: 64

Система числення, в яку переводимо: 6
144

2) Введіть натуральне число у 10-й системі числення: 128

Система числення, в яку переводимо: 7
242

3) Введіть натуральне число у 10-й системі числення: 492

Система числення, в яку переводимо: 16
1EC

Зауважимо, що у програмному коді використано функції `chr` та `ord`, за якими отримується символ на основі його коду, та код на основі представлення символу відповідно.

Очевидно, що вивчення систем числення не обмежується переведенням чисел з однієї системи числення в іншу. Також у цьому розділі вивчаються арифметичні операції над числами, які задані в деякій позиційній системі.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Вивчення математичних основ інформатики буде сприяти:

- формуванню здатностей робити постановку задачі за допомогою чітких та зрозумілих комп’ютеру вказівок;
- розумінню таких фундаментальних понять, як “інформація”, “біти”, “пам’ять”;
- формуванню системного уявлення про математичні методи в інформатиці.

Перспективи подальших досліджень вбачаємо у розробці навчально-методичних матеріалів для навчання інформатики у старшій школі, зокрема елементів алгоритмізації та програмування з використанням мови Python.

ЛІТЕРАТУРА

1. “Математична катастрофа”: чому українські школярі розучились логічно мислити?: веб-сайт. URL: <https://www.dw.com/uk/математична-катастрофа-чому-українські-школярі-розучились-логічно-мислити/a-51698320>

2. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science / Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, O. Patashnik. 2nd Edition. Addison-Wesley Professional, 1994. 657 p.

3. Вакалюк Т.А. Математичні основи розв'язування олімпіадних задач з інформатики на сайті e-olimp. *Інформаційні технології в освіті* : зб. наук. праць. 2010. № 7. С. 139–144.

4. Жалдак М.І. Інформатика – фундаментальна наукова дисципліна. Вона має вивчати закони природи, інформаційні процеси і відповідні технології (продовження). *Комп'ютер у школі та сім'ї*. 2010. № 3. С. 7–11.

5. Інформатика. Навчальна програма вибірково-обов'язкового предмету для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (рівень стандарту). URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/program-y-10-11-klas/2018-2019/informatika-standart-10-11.docx>

6. Кобильник Т.П., Когут У.П., Сікора О.В., Жидик В.Б. Деякі проблемні аспекти навчання основ алгоритмізації та програмування у школі. *Молодь і ринок*. 2022. № 3–4 (201–202). С. 97–101.

7. Оцінювання якості програмних засобів навчального призначення для загальноосвітніх навчальних закладів : монографія / Жалдак М.І., Шишкіна М.П., Лапінський В.В. та ін. ; за наук. ред. проф. М.І. Жалдака. Київ : Педагогічна думка, 2012. 132 с.

8. Рамський Ю.С. Логічні основи інформатики : навч. посіб. Вид. 2-ге, доповнене. Київ : НПУ імені Драгоманова, 2013. 295 с.

9. Руденко В.Д. Математичні основи інформатики: Модуль для учнів 10–11 класів. Харків : Ранок, 2021. 192 с.

10. Шакоцько В.В. Елементи інформології в шкільному курсі інформатики. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова* : зб. наук. пр. Київ : Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2015. Серія 2. С. 10–23.

REFERENCES

1. “Matematychna katastrofa”: chomu ukraïnski shkoliari rozchuylys lohichno myslyty? (2022). [“Mathematical catastrophe”: why did Ukrainian students forget to think logically?]. Available at: <https://www.dw.com/uk/математична-катастрофа-чому-українські-школярі-розучились-логічно-мислити/a-51698320> [in Ukrainian].

2. Graham, R.L., Knuth, D.E. & Patashnik, O. (1994). Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science. 2nd Edition. Addison-Wesley Professional. 657 p. [in English].

3. Vakalyuk, T.A. (2010). Matematychni osnovy rozvyazuvannya olimpiadnykh zadach z informatyky na sayti e-olimp [Mathematical basics of solving Olympiad problems in informatics on the e-olimp website]. *Information technologies in education: Scientific Journal*. No. 7. pp. 139–144. [in Ukrainian].

4. Zhaldak, M.I. (2010). Informatyka – fundamentalna naukova dystsyplina. Vona maie vyvchaty zakony pryrody, informatychni protsesy i vidpovidni tekhnolohii (prodovzhennia) [Informatics is a fundamental scientific discipline. It should study the laws of nature, information processes and relevant technologies (continued)]. *Computer at school and family*. No. 3. pp. 7–11. [in Ukrainian].

5. Informatyka. Navchalna prohrama vybirkovy-obovyazkovoho predmetu dlya uchniv 10–11 klasiv zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv (riven standartu) [Informatics. Curriculum of an optional and mandatory subject for students of 10–11 grades of high school (standard level)]. Available at: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/program-y-10-11-klas/2018-2019/informatika-standart-10-11.docx> [in Ukrainian].

6. Kobyl'nyk, T.P., Kogut, U.P., Sikora, O.V. & Zhydyk, V.B. (2022). Deyaki problemni aspekty navchannya osnov alhorytmizatsiyi ta prohramuvannya u shkoli [Some problemal aspects of teaching the fundamentals of algorithmization and programming in school]. *Youth and market*. No. 3–4 (201–202). pp. 97–101. [in Ukrainian].

7. Otsynuyannya yakosti prohramnykh zasobiv navchalnoho pryznachennya dlya zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Evaluation of the quality of educational software for general educational institutions]. A monograph. Zhaldak M.I., Shishkina M.P., Lapinskyi V.V. and others; for sciences ed. Prof. M.I. Zhaldak. Kyiv, 2012. 132 p. [in Ukrainian].

8. Ramskym, Yu.S. (2013). Lohichni osnovy informatyky [Logical foundations of informatics]. Kyiv, 295 p. [in Ukrainian].

9. Rudenko, V.D. (2021). Matematychni osnovy informatyky [Mathematical foundations of informatics]. Module for students of grades 10–11. Kharkiv, 192 p. [in Ukrainian].

10. Shakotko, V.V. (2015). Elementy informolohiyi v shkilnomu kursy informatyky [Elements of informatics in the school course of informatics]. *Scientific journal of the National Pedagogical University named after M.P. Dragomanov: a collection of scientific works*. Kyiv, Series 2. pp. 10–23. [in Ukrainian].

Стаття надійшла до редакції 14.09.2023



“Досліджуй все, нехай для тебе на першому місці буде розум, дозволяй йому керувати собою”.

*Піфзагор
давньогрецький філософ*

“Була б мета поставлена – а ланцюжок проб і помилок сам приведе до бажаного результату”.

*Харукі Муракамі
японський письменник і перекладач*

