

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

**Володимир Ковальчук, Любов Білецька,
Людмила Силюга, Наталя Стасів, Тетяна Салдан**

**ФОРМУВАННЯ ПРИЙОМІВ МОДЕЛЮВАННЯ
НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ
У ПОЧАТКОВІЙ ШКОЛІ**

Дрогобич, 2021

УДК 51(07)

Ф 79

*Рекомендовано до друку вченою радою
Дрогобицького державного педагогічного університету
імені Івана Франка (протокол № 13 від 21.10.2021 р.)*

Рецензенти:

Комарницька Леся Іванівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики навчально-наукового інституту фізики, математики, економіки та інноваційних технологій (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка);

Кобрій Ольга Миколаївна, доктор педагогічних наук, професор кафедри загальної педагогіки та дошкільної освіти (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка).

Відповідальний за випуск:

Ковальчук Володимир Юльянович, доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри математики, інформатики та методики їх викладання у початковій школі (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка).

Формування прийомів моделювання на уроках математики у початковій школі : навчальний посібник [для підготовки фахівців другого (магістерського) рівня вищої освіти галузі знань 01 «Освіта / Педагогіка» спеціальності 013 «Початкова освіта»] / В. Ковальчук, Л. Білецька, Л. Силюга, Н. Стасів, Т. Салдан. Дрогобич : Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка 2021. 50 с.

Ф 79

Навчальний посібник написаний відповідно до програми курсу «Формування прийомів моделювання на уроках математики у початковій школі» для підготовки фахівців другого (магістерського) рівня вищої освіти галузі знань 01 «Освіта / Педагогіка» спеціальності 013 «Початкова освіта» денної та заочної форм навчання.

У посібнику вміщено тексти лекцій, питання для самоконтролю, тематика практичних занять, завдання для самостійної роботи з дисципліни «Формування прийомів моделювання на уроках математики у початковій школі». Методичні рекомендації щодо виконання контрольної роботи і типовий її варіант допоможуть студентам у підготовці до її написання.

ЗМІСТ

Вступ	4
-------------	---

Теоретичний блок

1. МОДЕЛЮВАННЯ ЯК МЕТОД ПІЗНАННЯ ТА НАВЧАННЯ	5
1.1. Суть понять «модель» та «моделювання»	5
1.2. Класифікація моделей	7
1.3. Властивості та функції моделей	9
1.4. Моделювання як метод навчання	10
1.5. Система навчальних принципів та умов розвитку навичок моделювання у початковому курсі математики	13
1.6. Параметри сформованості у молодших школярів вмінь моделювання у процесі навчання математики	15
1.7. Структура компетентності з математичного моделювання	16

2. МОДЕЛЮВАННЯ ЯК ЗМІСТОВА ЛІНІЯ

ПОЧАТКОВОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ	21
2.1. Методичні прийоми моделювання простих і складених сюжетних задач.	21
2.2. Формування вмінь моделювання обчислювальних навичок учнів початкової школи	28
2.3. Використання елементів теорії графів у початковому курсі математики .	31

Практичний блок

Теми практичних занять	37
Питання для самоконтролю	38
Завдання для самостійної роботи	39
Методичні рекомендації щодо написання контрольної роботи	48
Типовий варіант контрольної роботи	49

ВСТУП

Головною метою вивчення дисципліни *«Формування прийомів моделювання на уроках математики у початковій школі»* є піднесення рівня математичної культури студентів-магістрантів спеціальності «Початкова освіта».

Навчальна дисципліна у структурно-логічній схемі підготовки фахівців другого (магістерського) рівня вищої освіти є вихідним компонентом природничо-математичного циклу дисциплін. Дисципліна формує у магістрів загальні уміння:

- розв'язувати актуальні проблеми математичної освіти вчителя початкової школи;
- удосконалювати взаємозв'язок дібраних методів, прийомів та засобів навчання та інноваційних технологій;
- орієнтуватися в теоретичних і практичних проблемах концепції розвитку початкової математичної освіти в Україні, в основних тенденціях розвитку математичної освіти учителя початкової школи.

Ознайомлення студентів із теоретичними основами і принципами є невід'ємною складовою підготовки майбутніх фахівців до викладання математики у початковій школі.

1. МОДЕЛЮВАННЯ ЯК МЕТОД ПІЗНАННЯ ТА НАВЧАННЯ

1.1. Суть понять «модель» та «моделювання»

Модель (від лат. *modulus* – міра, аналог, зразок, взірець) – це об'єкт, процес чи явище, що відтворює точну або спрощену версію об'єкта, який ми моделюємо. Модель імітує основні властивості та характерні особливості досліджуваного об'єкта [15].

У науково-методичній літературі можна знайти різні означення поняття «модель». Наведемо їх приклади.

В Українському педагогічному словнику знайдемо наступне визначення: Моделі навчальні – навчальні посібники, які є умовним образом деякого об'єкта, який забезпечує пропорції частин і зовнішню схожість з цим об'єктом за допомогою певних схем, використовуючи умовні зображення [7].

Сучасний тлумачний словник української мови так пояснює лексичне значення слова «модель»: *«Модель – уявний чи умовний (зображення, опис, схема і т. ін.) образ якогось об'єкта, процесу чи явища, що використовується як його представник»* [8, 486].

У Великому тлумачному словнику сучасної української мови подано декілька значень поняття «модель». Наведемо приклад одного з них, яке, на нашу думку, найпростіше для розуміння: *«Модель – зразок, що відтворює, імітує будову і дію якого-небудь об'єкта, використовується для одержання нових знань про об'єкт»* [2, 683].

Більш сучасне означення цього поняття міститься в Енциклопедії освіти: *«уявна або матеріально-реалізована система, котра відображає або відтворює об'єкт дослідження (природний чи соціальний) і здатна змінювати його так, що її вивчення дає нову інформацію стосовно цього об'єкта»* [6, 803].

Узагальнивши усі наведені означення, Волошена В. В. дає таке спростоване означення: *«модель – це замітник реального об'єкта, який створюється з метою отримання нових знань про об'єкт, що моделюється»* [3, 42].

До основних **характеристик** моделей належать: ступінь універсальності моделі; точність моделі; адекватність моделі; економічність моделі.

Є кілька **причин**, чому нам потрібно вивчати моделі замість реальних об'єктів.

По-перше, на реальні об'єкти зазвичай впливає велика кількість різних факторів, що унеможлиблює зробити певні висновки з їхніх досліджень.

По-друге, у багатьох випадках дослідження реальних систем передбачає значні матеріальні та часові витрати і буває шкідливим для довкілля. Наприклад, дослідження різних епідеміологічних ситуацій.

По-третє, у процесі дослідження можна прогнозувати поведінку розглядуваних об'єктів за допомогою створення їх моделей.

По-четверте, необхідність у розробці моделей зумовлена неможливістю вивчення реальних об'єктів через їх занадто великі або занадто малі розміри, тривалість проходження чи руйнування реальних систем.

Як показав аналіз проведених означень поняття моделі неможливо створити універсальну модель. Кожна з них лише наближено описує властивості певного об'єкта чи явища. Зауважимо, що різні моделі відображають різні його властивості.

Для того, щоб побудувати модель, використовують метод **моделювання**.

Філософський словник трактує його таким чином: «**моделювання** – спосіб дослідження об'єктів пізнання шляхом вивчення їх моделей» [13, 391].

Сучасний тлумачний словник української мови так пояснює лексичне значення слова «моделювати»: «**Моделювати** – досліджувати якісь об'єкти, системи, явища, процеси через побудову і вивчення їх моделей» [8, 486].

У Великому тлумачному словнику сучасної української мови подано наступне означення поняття «моделювання»: «**Моделювання** – дослідження яких-небудь об'єктів, систем, явищ, процесів шляхом побудови і вивчення їх моделей» [2, 683].

Таким чином, можна стверджувати, що моделювання – це метод вивчення властивостей конкретного досліджуваного об'єкта за допомогою іншого,

схожого до нього (моделлю), який може замінити його для того, щоб отримати нові дані про певний об'єкт. Моделювання – це ефективний інструмент, що дає змогу досліджувати спостережуваний об'єкт.

Метод моделювання володіє певною характерною особливістю. Вона полягає у залежності від завдання дослідження певних властивостей об'єкта, від встановлених відношень між його структурними елементами створюється відповідна модель. Коли ми пізнаємо модель, то вона, як копія об'єкта, безпосередньо слідує за ним. Якщо ми відтворюємо модель, то об'єкт слідує за моделлю, копіюючи її [3].

Якщо досить складно досліджувати певне явище, процес або певні властивості об'єкта, тоді використовують метод моделювання. Зауважимо, що будь-який об'єкт можна змоделювати. У цьому полягає така властивість методу моделювання як загальність [15].

У процесі моделювання ми замінюємо один об'єкт іншим для того, щоб отримати потрібну інформацію про досліджуваний об'єкт через його модель. Така заміна дає можливість теоретично вивчати властивості досліджуваного об'єкта або проводити експерименти з його елементами.

1.2. Класифікація моделей

Оскільки поняття моделі в науці та техніці має чималу кількість значень, а моделювання є поліфункціональним у використанні, то існує багато форм і типів моделей.

За способом реалізації моделі поділяються на *реальні* й *уявні, фізичні* та *абстрактні*.

Реальні моделі належать до практичної галузі. Вони відтворюють просторові, фізичні і структурні властивості досліджуваних об'єктів.

Уявні моделі – до теоретичної галузі та поділяються на:

- 1) образні (креслення, малюнки тощо),
- 2) знакові (ноти для запису музичних творів, математичні формули, рівняння).

Фізичні моделі – це моделі, що відтворюють оригінал у спрощеному вигляді, і природа компонентів цих моделей може відрізнятися від природи елементів, що складають об'єкт моделювання. Ці моделі створені на основі теорії подібності, а подібність здійснюється за тими параметрами, які є важливими для дослідника. Зазвичай існують фізичні моделі таких видів:

Натурні моделі – це реальні досліджувані системи, які повністю або майже повністю співпадають з об'єктом і тому за їх допомогою дослідники отримують досить точні і надійні результати моделювання. Однак створення та ефективне дослідження таких моделей повинно враховувати високу вартість цього підходу.

Квазінатурні моделі – це ті, які можна представити як сукупність природних і математичних моделей. Такі моделі часто використовуються при розробці нових систем або при створенні та тестуванні їх програмного забезпечення. Такий вид моделі необхідний, якщо системи ще не існують, або її природну модель складно відтворювати.

Ідеальні моделі, які ще називають абстрактними, концептуальними, включають моделі двох типів:

- **уявні** – моделі, які існують в уяві людини;

- **математичні** – моделі, які існують у вигляді виразів, рівнянь чи нерівностей зі сталими чи змінними коефіцієнтами, таблиць, схем, графіків і використовуються для математичного опису певних явищ і процесів [3, 53]. Одні з них не враховують вплив випадкових факторів на об'єкт моделювання, а інші такий вплив враховують. Відповідно до принципу побудови і характеру функціонування виділяють такі типи математичних моделей: **аналітичні та імітаційні**. Аналітичні моделі створюються тоді, коли аналітичні залежності можуть повністю описати досліджуване явище. Під час їх побудови процеси функціонування їхніх елементів фіксуються у вигляді певних математичних взаємозв'язків – формул, рівнянь тощо. Часто неможливо скласти аналітичні моделі для складних об'єктів, процесів або явищ. Тоді створюють імітаційні моделі, які з меншою точністю відтворюють досліджуваний процес чи явище. У

цих моделях певні властивості оригіналу описуються аналітичними залежностями, а штучні методи з використанням обчислювальної техніки використовуються для опису інших. Під час їх побудови і використання алгоритму моделювання відтворюється функціонування цього об'єкта, певних явищ, з яких складається досліджуваний процес, що відбувається у системі, без порушення взаємозв'язку між ними.

Такі типи моделей відрізняються між собою тим, що в імітаційній моделі реальна система розділена на декілька елементів або частин. Тоді поведінка досліджуваного об'єкта розглядається як поведінка сукупності цих елементів, які за допомогою встановлення певних взаємозв'язків між ними об'єднані в одне ціле [10].

1.3. Властивості та функції моделей

До основних властивостей моделей належать їх **обмеженість, наближеність, повнота, адекватність та правдивість.**

Обмеженість моделі означає відображення певних характеристик та відносин, властивих оригіналу. Кінцевість обумовлена обмеженням часом, пам'яттю комп'ютера та іншими ресурсами, необхідними для створення моделі. Інша причина полягає у тому, що не всі зв'язки досліджуваного об'єкта та його елементів із середовищем суттєво впливають на властивості, що вивчаються. У зв'язку з цим зникає необхідність розглядати інші зв'язки та елементи, які можуть привести до створення складної моделі та помилок при обчисленнях.

Наближеність моделі означає, що вона лише приблизно і тим самим неповно відображає оригінал, властивості та взаємозв'язки його елементів.

Щоб визначити ступінь **повноти** моделі, необхідно знати мету і завдання її створення для дослідження оригіналу. При цьому треба усвідомити, чи є потреба будувати модель, що є точною копією об'єкта. Модель повинна повністю відтворювати тільки ті ознаки об'єкта дослідження, які вивчаються, та ті її компоненти, зв'язки, які здатні суттєво впливати на них.

Адекватність моделі означає можливість досягнення цілей моделювання, а її **правдивість** дає відповідь на питання: «Чи відповідає

створена модель сукупності знань про досліджуваний об'єкт?». При створенні моделі необхідно пам'ятати, що її достовірність не гарантує її адекватність у зв'язку з нагромадженням помилок в обчисленнях. З іншого боку, моделі, що не відповідають дійсності, можуть бути адекватними.

На основі проведеного аналізу різних видів моделей В. Ф. Паламарчук визначає їх **основні функції** [12, 98]:

- **описова** – полягає у виділенні та узагальненні в досліджуваному об'єкті суттєвих елементів та взаємозв'язків між ними;
- **конструктивна** – полягає у виявленні здатності певної моделі для застосування набутих знань у нових умовах;
- **евристична** – орієнтована на здобуття нових знань на основі систематизації отриманих знань, умінь та навичок учнів.

1.4. Моделювання як метод навчання

Для чого потрібен учням початкових класів метод моделювання? Існує низка причин. Назвемо найбільш вагомі, які дають можливість вважати моделювання методом навчання.

По-перше, використання в освітньому процесі різних видів моделей змінює ставлення учнів молодшого шкільного віку до навчальної дисципліни, робить їхню освітню діяльність більш продуктивною.

По-друге, цілеспрямоване та систематичне оволодіння молодшими школярами методом моделювання знайомить їх з методами наукового пізнання, забезпечує їх інтелектуальний розвиток.

Для того, щоб учні оволоділи методом моделювання як методом пізнання, необхідно, щоб вони самі будували моделі, досліджували за їх допомогою будь-які предмети, процеси та явища [14, 10].

Процес моделювання можна розділити на кілька етапів:

- постановка та усвідомлення дітьми завдання (учитель знайомить учнів із знаками, символами, за якими можна будувати моделі);
- власне моделювання (зазвичай у формі групової роботи);

- презентація та обговорення моделей (вибір найбільш зручної, найбільш зрозумілої, виправлення помилок, доповнення тощо);

- специфікація та зміна моделі.

Від предметної дії учень переходить (через копіювальний малюнок та предметну модель) до графічної моделі (схеми), а від неї – до знака (буква або формула), а пізніше – до словесної (правила та визначення) [9, 64].

Моделювання у системі початкової освіти дає можливість:

- розвивати навички та вміння моделювати різні ситуації, явища, акції, освітні проекти;
- в результаті моделювання схеми, розкладу, креслення, таблиці, правила, алгоритму, діаграми, формули, знайти рішення та виконати математичні розрахунки.

Процес моделювання сприяє розвитку теоретичного мислення учнів, що змушує їх рухатися вперед. Як результат, діти навчаються «абстрагуванню, конкретизації, розвивають такі розумові операції, як аналіз, синтез та порівняння» [11, 6].

Моделювання у навчанні не бажане, але необхідне, оскільки воно створює умови повноцінного і міцного оволодіння учнями методами пізнання та методами навчальної діяльності.

Метою моделювання є залучення кожного учня до активної діяльності на всіх уроках, доведення досліджуваної теми до формування концепцій та стійких навичок.

Моделювання не тільки активізує пізнавальну діяльність учнів, але також

- стимулює пізнавальні потреби;
- позитивно впливає на розвиток бажання та здатності вчитися;
- пробуджує в учнів творчий підхід до дійсності, стосунків з людьми, що характеризує людину як особистість.

Метод моделювання у процесі навчання застосовується у двох аспектах – як метод пізнання і як засіб навчання. У першому випадку методом моделювання учні повинні оволодіти. У другому – метод моделювання учні повинні засвоїти під час навчання [3].

Використання різних типів моделей в освітньому процесі:

- сприяє самостійному оволодінню школярами новими знаннями;
- підвищує їх інтерес до вивчення того чи того предмета;
- створює позитивний вплив на мотивацію учнів до навчання;
- активізує пошук шляхів вирішення освітніх питань;
- формує в учнів знання, уміння та навички, які будуть їм потрібні у повсякденному житті та майбутній роботі;
- розвиває критичне мислення школярів [3].

За допомогою методу моделювання вчитель встановлює на уроках міждисциплінарні зв'язки. Використовуючи під час навчального процесу різні моделі, досвідчений вчитель може легко перейти від вивчення складного незнайомого явища до більш простого та зрозумілого у процесі його дослідження.

Моделювання є важливим принципом розвивального навчання. Діти шукають спільний шлях у предметно-практичній діяльності, центральною освітньою дією якої є моделювання, оскільки саме за допомогою моделі розкриваються загальні шляхи вирішення класу різних проблем. Моделювання є засобом створення проблемних ситуацій і тому заохочує учнів до активної пізнавальної діяльності та, що найголовніше, до роздумів. У зв'язку з цим, у навчальному процесі моделювання володіє пізнавальною, розвиваючою функціями, є засобом формування і розвитку математичних знань, умінь і навичок. Це означає, що включення моделювання у процес навчання раціоналізує його. Систематичне використання моделювання як методу та засобу навчання сприяє формуванню в учнів наукових понять та загальних здібностей дій з ними, формуванні теоретичного типу мислення, що є основою успішного навчання в середній і старшій школі.

1.5. Система навчальних принципів та умов формування навичок моделювання у початковому курсі математики

Загальною основою вдосконалення шкільної освіти щодо розвитку навичок моделювання в учнів початкових класів є діяльнісний підхід до засвоєння учнями навчального змісту. Відповідно до цього визначаються дидактичні принципи розвитку навичок моделювання у молодших школярів:

- **принцип науковості та цілісності світогляду**, що є широким відображенням ролі та значення методу моделювання у різних галузях сучасної науки. Дотримуючись цього принципу, вчитель повинен викладати предмет на основі перевірених наукових даних. Зв'язок з різними науковими областями формує цілісність світогляду;

- **принцип доступності та дохідливості** ґрунтується на основному положенні навчання – що складнішим для розуміння є навчальний матеріал, то доступніше і дохідливіше вчитель повинен його подавати;

- **принцип наочності** дає можливість проілюструвати реальні ситуації, передбачає навчання на основі сприймання конкретних процесів і явищ та їх зображень, активізує зорову пам'ять;

- **принцип безперервності та міцності знань** забезпечує тривале збереження в пам'яті структури моделей на основі їх використання при вивченні кожної теми. Це сприяє міцному засвоєнню нових знань, спираючись на попередні знання, активізуючи мислення учнів під час повторення.

- **принцип систематичності та послідовності** забезпечує послідовний виклад навчального матеріалу за допомогою систематичного переходу від проміжних моделей до їх узагальнень у процесі оволодіння новими знаннями та вміннями;

- **принцип індивідуального підходу** дає можливість кожному школяреві опанувати навчальний матеріал по-своєму залежно від особливостей їх розумового розвитку, формування знань, умінь та навичок.

Дидактичні принципи формування вмінь моделювання взаємопов'язані між собою, доповнюють один одного, реалізуються у процесі опанування навичками роботи з різними моделями, розкривають і конкретизують різні аспекти використання методу моделювання у навчальному процесі.

На основі використання системи наведених вище навчальних принципів учитель визначає зміст, методи, прийоми та організаційні форми розвитку вмінь учнів моделювати певні об'єкти, процеси чи явища навколишньої дійсності.

Дидактичними умовами розвитку навичок моделювання учнів початкових класів у процесі викладання математики є:

- наявність зацікавленості та потреби учнів у свідомому оволодінні методом моделювання;
- багатоплановість змісту освіти у контексті формування навичок моделювання;
- регулярність і послідовність навчально-пізнавальної діяльності школярів;
- поєднання прийомів організації моделювання;
- само- та взаємоконтроль учнів в освітньому процесі;
- оцінка формування у школярів навичок моделювання;
- єдність навчальної та дослідницької діяльності в процесі розвитку навичок моделювання.

З урахуванням дидактичних умов загальна структура процесу формування в учнів початкових класів вмінь моделювання під час навчання математики набуває конкретного характеру і сприяє розвитку математичних здібностей молодших школярів.

1.6. Параметри сформованості у молодших школярів вмінь моделювання у процесі навчання математики

Для того, щоб розробити програму ефективного розвитку знань, умінь і навичок моделювання у молодших школярів під час вивчення математики, треба визначити головні параметри – показники, критерії та рівні сформованості цих умінь і навичок.

Виділення рівнів сформованості навичок моделювання в учнів початкової школи пов'язане із уточненням показників для їх визначення. У зв'язку з цим, необхідно визначити певні критерії:

- готовності до навчання;
- сформованості різних якостей особистості;
- особистого удосконалення навчальної діяльності;
- творчих здібностей людини;
- формування та розвитку культури розумової праці людини [1].

Кожен критерій має свої показники, які характеризують інші якісні та кількісні зміни. Учені виділили показники сформованості навичок методу моделювання в учнів у процесі вивчення математики. Розглянемо деякі з них.

Показниками першого критерію є готовність учнів підвищити свою допитливість, інтерес до змісту знань та бажання їх більшити.

Показниками другого критерію є готовність учнів покращити результати навчання.

Показниками третього і четвертого критеріїв є обізнаність, систематичність знань, точність, сила знання, ефективність знань.

Показниками п'ятого критерію є ступінь незалежності школярів та їх передача знань і вмінь новій предметно-практичній галузі діяльності.

Після того, як вчитель визначить критерії та показники сформованості навичок моделювання у процесі викладання природничо-математичних дисциплін, він повинен виявити рівні сформованості цих умінь.

Охарактеризуємо рівні сформованості в учнів навичок вмінь моделювання, поклавши в основу їх правильність та раціональність [3].

У *першому рівні* метод моделювання або не використовується взагалі, або якщо використовується, то неправильно.

У *другому рівні* метод моделювання використовується частково правильно.

У *третьому рівні* метод моделювання використовується правильно у знайомих ситуаціях.

У *четвертому рівні* метод моделювання використовується правильно у новій ситуації.

У *п'ятому рівні* метод моделювання використовується правильно і раціонально у новій ситуації.

Таким чином, критерії формування навичок моделювання є його якісними характеристиками, а рівні – кількісними.

1.7. Структура компетентності з математичного моделювання

Компетентність учнів у математичному моделюванні розуміється як особисте новоутворення, яке поєднує знання, вміння, навички, що дає змогу:

- будувати проблему;
- вибирати об'єкти моделювання та знаходити взаємозв'язки між компонентами процесу дослідження;
- перекласти практичні ідеї в математичні формули та знаки;
- зрозуміти алгоритми та математичні методи розрахунків характеристик математичної моделі;
- зробити інтерпретацію отриманих даних та сформулювати правильні висновки [3, 83].

У наукових дослідженнях В. В. Волошеної виділені структурні компоненти математичного моделювання. Розглянемо їх детальніше.

Теоретичний компонент компетентності в математичному моделюванні – це сукупність знань, основними з яких є: наукове знання основних положень

математичного моделювання; кваліфікація існуючих моделей; основні принципи теорії моделювання та математичного моделювання; властивості моделей та відповідні вимоги; особливості різних математичних моделей; процеси та явища; теоретичні та методологічні знання про сутність та методи здійснення діяльності у галузі математичного моделювання.

Практична складова компетентності в математичному моделюванні містить низку навичок, до яких належать:

- інтелектуальні навички – розуміти прикладні проблеми різного формулювання, знайти потрібну інформацію для їх роз'яснення; розрізняти особливості складання математичної моделі; порівнювати, відокремлювати, упорядковувати отриману інформацію; визначати методи дослідження; приймати рішення та аналізувати отримані результати побудови математичної моделі;

- конструкторські навички – розробляти план створення та дослідження математичної моделі; розбивати процес побудови математичної моделі на окремі етапи; розробити математичну модель за допомогою існуючих та при необхідності створених нових відношень; застосовувати інформаційні технології в галузі математичного моделювання; інтерпретувати отримані результати, порівнювати їх та у випадку їх недотримання вносити необхідні поправки;

- організаторські здібності – належним чином підтримувати взаємовідносини з усіма учасниками процесу побудови математичної моделі досліджуваного процесу чи явища;

- навички спілкування – слухати і розуміти співрозмовника, відчувати і підтримувати зворотний зв'язок під час спілкування для вирішення прикладної проблеми; швидко і правильно орієнтуватися у процесі зміни умов спілкування; брати участь у діалогах, дискусіях;

- рефлексивні навички – виявляти недоліки та оцінювати результати своєї діяльності над побудовою, дослідженням, аналізом математичних

моделей і на цій основі організувати самоосвіту в галузі математичного моделювання.

Особистісний компонент характеризується орієнтацією особистих якостей дослідника, що впливають на якість математичного моделювання. До них належать цілеспрямованість, толерантність, активність, відповідальність, незалежність, ініціативність, адекватна самооцінка.

Мотиваційно-цільовий компонент передбачає усвідомлення учнем та викладачем необхідності розвитку та формування навичок математичного моделювання на уроках природничих та математичних циклів. Це створює постійну мотивацію для постійного процесу їх вдосконалення.

Змістовно-інформаційний компонент передбачає ознайомлення школярів зі змістом навчальної та пізнавальної діяльності, що сприяє розвитку навичок математичного моделювання. Вчитель визначає мету і завдання, збирає необхідний дидактичний матеріал та розробляє методи роботи у відповідності до навчальної програми. Інформаційний компонент відображає здатність особистості виявляти інформаційні потреби, шукати інформацію та ефективно працювати з нею у всіх її формах та уявленнях, оволодіваючи інформаційними навичками з предметів та освітніх галузей, а також у середовищі, пошуку, аналізі та відборі інформації, його трансформація, збереження та передача.

Операційний компонент передбачає здобуття базових предметних знань завдяки спеціально організованій роботі школярів. Основними методами засвоєння предметного змісту є дидактичні завдання та вправи, алгоритмічні завдання, дослідницькі завдання, які сприяють розвитку навичок математичного моделювання.

Діагностично-коригувальний компонент передбачає проведення аналізу стану розвитку навичок математичного моделювання для подальшого коригування. Тут можна запропонувати прямі та непрямі способи управління навчальною діяльністю школяра. Прямий метод передбачає використання спеціальних правил і вказівок. Непрямий спосіб управління базується на використанні завдань експериментального характеру. Ці два методи слід

використовувати залежно від цілі навчання. Учень сам повинен обирати потрібний йому метод під час розв'язування навчальних завдань для формування навичок математичного моделювання.

Контрольно-результативний компонент розвитку навичок математичного моделювання виконує функцію контролю за процесом та результатами розвитку цих навичок в учнів. Тому під час навчальної діяльності треба так її планувати, щоб учні навчилися організовувати свою роботу відповідно до їх запланованих дій.

На думку М. Голованя [4], математична компетентність має п'ять структурних компонентів: мотиваційний, когнітивний, діяльнісний, ціннісно-рефлексивний, емоційно-вольовий. Вони взаємопов'язані і не можуть існувати самі собою.

Література

1. Бугрій О. В. Теорія і методика формування інтелектуальних умінь у процесі географічної освіти : дис. ... доктора пед. наук : 13.00.02. Кривий Ріг, 2006. 404 с.
2. Великий тлумачний словник сучасної української мови. / укл. Бусел В. Т. Київ-Ірпінь : Перун, 2005. 1728 с.
3. Волошена В. В. Розвиток умінь математичного моделювання у старшокласників в процесі навчання природничо-математичних предметів: : дис. ... доктора пед. наук : 13.00.09. Київ, 2017. 250 с.
4. Головань М. С. Математичні компетентності чи математична компетентність? Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу. «ІТМ*плюс-2012». С. 36–38.
5. Глобін О. І., Бурда М. І., Васильєва Д. В., Волошена В. В., Вашуленко О. П., Мацько Н. Д., Хмара Т. М. Компетентнісно орієнтована

методика навчання математики в основній школі : метод. посібник. Київ : Педагогічна думка, 2015. 245 с.

6. Енциклопедія освіти / гол. ред. В. Г. Кремінь. Київ : Юрінком-Інтер, 2008. 1040 с.

7. Гончаренко С. Український педагогічний словник. Київ : Либідь, 1997. 375 с.

8. Дубічинський В. Сучасний тлумачний словник української мови 100000 слів. Харків : Школа, 2012. 1008 с.

9. Інноваційні технології в початковій школі. Київ : Шкільний світ, 2008. 112 с. (Бібліотека «Шкільного світу»).

10. Катеринюк Г. Д. Педагогічні умови формування та розвитку здатності до математичного моделювання. *«Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору»*. Київ : Гнозис, 2016. С. 239–246.

11. Нікітіна Ю. Розв'язування текстових задач способом моделювання. *Початкова освіта*. 2009. № 44 (524). С. 6–7.

12. Паламарчук В. Ф. Школа учит мыслить / издание 2-е, доп. и перераб. / Москва : Просвещение, 1987. 208 с.

13. Філософський енциклопедичний словник / за ред. В. І. Шинкарука. Київ : Абрис, 2002. 742 с.

14. Штефан Л. Нестандартні підходи до розв'язання задач. *Початкова освіта*. 2010. № 40 (568). С. 8–15.

15. URL : <https://www.uzhnu.edu.ua/en/infocentre/get/25551>

2. МОДЕЛЮВАННЯ ЯК ЗМІСТОВА ЛІНІЯ ПОЧАТКОВОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

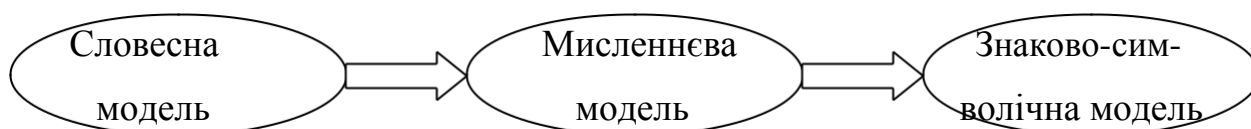
2.1. Методичні прийоми моделювання простих і складених сюжетних задач

Моделювання задачі – це використання специфічних предметів та знаків, якими замінюються її числові дані, зображуються зв'язки і залежності між даними і невідомим, причому із згаданими предметами та знаками учні мають бути ознайомлені та використовувати їх у навчальній діяльності (малювати, креслити у зошиті, виконувати практичні дії – розрізати на частини, порівнювати, складати з окремих частин ціле тощо).

Спеціально зорієнтована методика розв'язування сюжетних задач формує в учнів загальні прийоми моделювання і одночасно розвиває уміння розв'язувати задачі, оскільки вчить співвідносити певні сюжетні взаємозв'язки з математичними і навпаки. При цьому виникають певні труднощі. Одні з них спричинені складністю задачі. Для їх подолання застосовують так звані допоміжні моделі – це, різного роду, схеми, малюнки, креслення тощо. Інші труднощі можуть бути змістовного характеру. Для їх подолання учень умову задачі замінює її моделлю, яка називається вирішальною [6].

Залежно від сформованих в учня здібностей до пошуку різних шляхів розв'язання задачі вчитель визначає вид і характер моделювання.

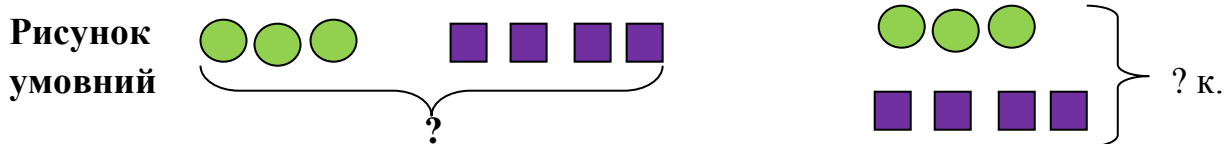
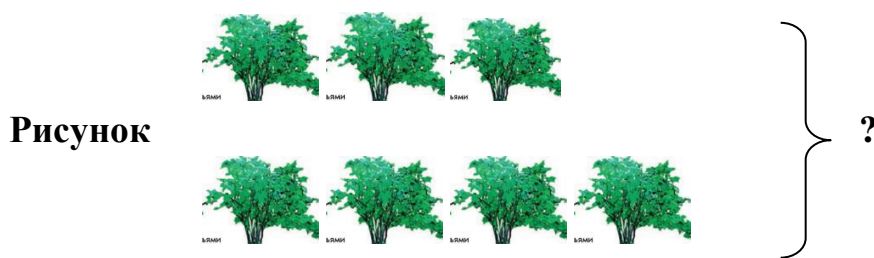
Відповідно до методики початкового курсу математики усі поняття, які ми використовуємо при розв'язуванні простих і складених сюжетних задач, повинні засвоюватися за допомогою моделей. Тому школярі, на думку Фефілової Т. В., повинні знати різні типи моделей та вміти переходити від реальності до моделі і навпаки. У зв'язку з цим, вона розглядає такі етапи процесу моделювання задачі [5, 97]:



Цю схему можна пояснити так: при ознайомленні з умовою задачі учень уважно читає її текст, тобто створює словесну модель. Після цього він повинен уявити ситуацію, описану в задачі, тобто створити мисленнєву модель. При цьому виникають певні труднощі змістового характеру. Для їх подолання вчитель повинен застосувати так звані допоміжні моделі – це предметні, знакові, графічні, схематичні, структурні моделі. У процесі проведеного аналізу учень приступає до розв’язання задачі за допомогою математичних символів, тобто створює знаково-символічну модель.

Одним з найпростіших прийомів моделювання задачі є **предметне моделювання**. Цей спосіб моделювання використовують на початкових етапах навчання розв’язуванню задач, оскільки саме в цей період важливим є правильне розуміння значення дії, яку можна проілюструвати наочно [5, 98]. Предметна модель сюжетної задачі – це будь-яке наочне відновлення тієї реальної ситуації, що описана в задачі. Щоб оволодіти вмінням складати моделі, діти повинні поділити задачу на смислові частини, у кожній частині визначити об’єкти та відношення між ними, а потім замінити реальні предмети на їх моделі у вигляді зменшених зображень. Ними можуть бути макети, муляжі, малюнки, умовні малюнки, геометричні фігури.

Задача. У садочку росло 3 куці агрусу. Тато посадив ще 4 куці. Скільки всього куців агрусу стало у садочку?



При ознайомленні учнів із задачами з пропорційними величинами доцільним є використання **знакового моделювання** – моделювання за

допомогою таблиці. За кількістю даних у задачі величин таблиця містить три або чотири колонки. «Оформлення умови й запитання задачі в табличній формі дає можливість учневі швидше визначити характер і кількість задіяних у задачі величин, а також структуру зв'язків між ними» [5, 98]. Для побудови знакової моделі задачі значення однієї і тієї самої величини треба записувати у стовпчик одне під одним.

Задача. *З 10 кг пшениці виходить 9 кг борошна. Скільки кілограмів борошна можна одержати зі 100 кг такої пшениці?*

Знакова модель даної задачі має вигляд:

Вихід борошна з 1кг пшениці	Маса пшениці	Маса борошна
Однаковий	10кг	9кг
	100кг	?

При складанні **схематичної моделі задачі** у вигляді короткого запису умови учні повинні знати такі основні правила:

- використовувати слова, які визначають дію або залежність між даними і шуканою величинами;
- зв'язані між собою дані записуються в одному рядку;
- число, яке є сумою кількох даних, записувати справа від них і відокремлювати фігурною дужкою;
- запитання задачі позначати знаком запитання;
- вважається обов'язковим скорочений запис шуканого числа біля знаку питання;
- назви предметних дій (наприклад купував, продав, вирізала, було, залишилося) краще записувати повним словом.

Задача. *На автостоянці було 8 автомобілів. Коли з неї виїхало декілька автомобілів, то на ній залишилося 3 автомобілі. Скільки автомобілів виїхало з автостоянки?*

Схематична модель даної задачі має вигляд:

Було – 8 авт.

Виїхало – ? авт.

Залишилось – 3 авт.

Якщо в умові задачі фігурують одні і ті ж предмети, але вони відрізняються певною ознакою, то в короткому записі необхідно вказувати і предмет, і ознаку.

Задача: *Мартуся намалювала 8 червоних трикутничків, а синіх у 3 рази більше. Скільки синіх трикутничків намалювала Мартуся?*

Червоні трикутнички – 8 шт.

Сині трикутнички – ?, у 3 р. більше.

При розв'язуванні задач на знаходження суми для складання схематичної моделі використовується фігурна дужка.

Задача. *У відрі 5 л води, а в банці 3 л води. Скільки літрів води у відрі та банці разом?*

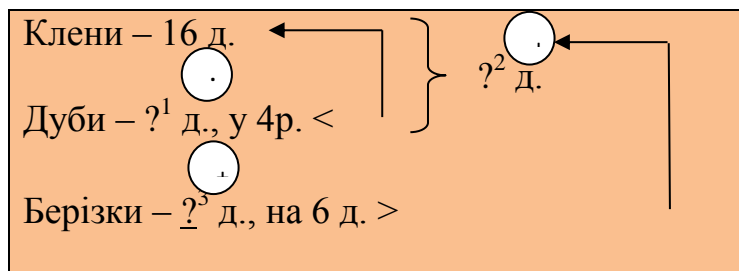
Відро – 5л
Банка – 3л }
}

У сучасній методиці викладання математики у початковій школі часто використовується такий спосіб роботи з умовою і запитанням задачі:

- поступово аналізуючи задачу, крок за кроком складаємо короткий запис;
- виділяємо головні слова;
- позначаємо відомі і невідомі числа;
- ставимо нумерацію та знак дії.

При розв'язуванні задач на 2 і більше дій, біля кружечка із позначенням дії з'являється її номер.

Задача. *У парку росте 16 кленів, дубів – у 4 рази менше, ніж кленів, а берізок на 6 більше, ніж кленів і дубів разом. Скільки берізок росте у парку?*



При ознайомленні учнів з різними типами простих задач доцільно застосовувати **структурні моделі** – схематичні креслення, які

- відображають відношення між даними у задачі величинами;
- сприяють повному сприйняттю сюжету задачі;
- конкретизують абстрактні поняття, які є в умові задачі [5, 99].

У структурних моделях самі співвідношення зображуються у вигляді замкнених геометричних фігур, які об'єднують умовні позначення членів, що входять до складу цього співвідношення: цілого у вигляді кружечка і частини у вигляді трикутника та формули їх знаходження:

$$\begin{aligned} \bigcirc &= \triangle + \triangle \\ \triangle &= \bigcirc - \triangle \end{aligned}$$

Коли вводиться термін «множення», з'являються інші знаки:

\triangle	\square	\bigcirc
мірка	кількість мірок	ціле

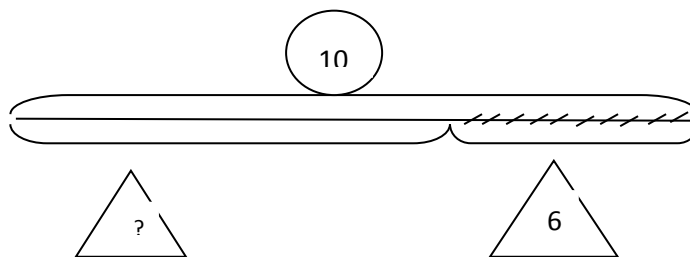
Виводяться формули:

$$\begin{aligned} \triangle \times \square &= \bigcirc \\ \bigcirc : \triangle &= \square \\ \bigcirc : \square &= \triangle \end{aligned}$$

Невідому величину на схемі позначаємо знаком запитання.

Задача. Рибалка впіймав 10 риб. 6 маленьких риб він випустив у річку.

Скільки риб залишилось у рибалки?

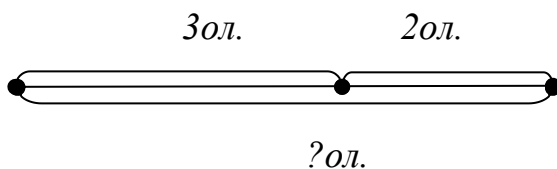


Одним із прийомів моделювання простих і складених сюжетних задач є **графічне моделювання**. Схема, яка фіксує результат аналізу умови задачі, складається з відрізків і за допомогою довжини моделює відношення між будь-якими величинами. На схемі рівними відрізками відображають рівність величин, а нерівними відрізками — нерівність. Розміщуємо відрізки так, щоб їх початки збігалися.



Учні кожне числове дане позначають відрізком довільної довжини, але такої, щоб зберігалось співвідношення за величиною.

Задача. У Василька 3 олівці. Сестричка дала йому ще 2 олівці. Скільки олівців стало у Василька?



Графічне моделювання задачі є більш абстрактним способом моделювання по відношенню до знакового чи схематичного моделювання. При використанні цього виду моделювання учні повинні вміти будувати графічні моделі у вигляді відрізків певної довжини відповідно до сюжету задачі та читати графічне зображення умови задачі.

Для того, щоб розв'язати певну сюжетну задачу математичними методами, її зміст перекладають на мову математики і в результаті отримують **математичну модель** початкової задачі, де вже фігурують не реальні об'єкти, а абстрактні математичні поняття, числа, вирази, відношення, рівняння.

При розв'язуванні сюжетної задачі методом математичного моделювання необхідно пройти такі етапи [7]:

- *перший етап* – **створення математичної моделі**. На цьому етапі сюжетну умову задачі перекладають на мову математики;
- *другий етап* – **дослідження математичної моделі**. На цьому етапі розв'язують отриману математичну задачу у вигляді виразів та рівнянь;
- *третій етап* – **інтерпретація розв'язків**. На цьому етапі отримані результати розв'язку математичної задачі перекладають з мови математики на сюжетну мову.

Створення математичної моделі задачі називається процесом математизації тексту задачі. Основне завдання вчителя полягає у навчанні учнів правильному вибору математичної моделі, якою може бути вираз, рівняння

тощо. Не можна ігнорувати 3-й етап, оскільки в результаті реалізації моделі можна отримати дані, окремі з яких не задовольняють умові задачі (напр. від’ємне значення площі або дробове значення кількості предметів). У такому випадку такі дані треба відкинути. Після засвоєння у 4-ому класі основних методів розв’язування простих і складених лінійних рівнянь з однією змінною, вчителю необхідно вказувати учням на ті задачі, які раціональніше розв’язувати за допомогою рівнянь.

Задача: Мотоцикліст був у дорозі 4 год, після чого йому залишилося проїхати 150 км. З якою швидкістю рухався мотоцикліст, якщо весь шлях дорівнював 390 км?

Табличний запис задачі рідною мовою та мовою алгебри має вигляд:

Рідною мовою	Мовою алгебри
Мотоцикліст рухався з деякою швидкістю	x
Був у дорозі 4 год. Шлях, який він подолав за цей час, дорівнює добутку швидкості на час	$x \cdot 4$
Залишилося проїхати 150 км. Це число дорівнює різниці чисел 390 і знайденого добутку	$390 - x \cdot 4 = 150$

Розв’яжемо утворене рівняння:

$$390 - x \cdot 4 = 150 \Rightarrow x \cdot 4 = 390 - 150 \Rightarrow x \cdot 4 = 240 \Rightarrow x = 240 : 4 \Rightarrow x = 60.$$

В і д п о в і д ь: мотоцикліст рухався зі швидкістю 60 км / год.

З використанням великого арсеналу моделей навчання розв’язувати задачі молодшим школярам буде цікавіше вчитися, а вчителів – легше їх учити. Обґрунтовуючи свої дії у процесі побудови певної моделі розв’язування задачі, учні розвивають вміння міркувати, послідовно й аргументовано викладати власні думки [5, 102].

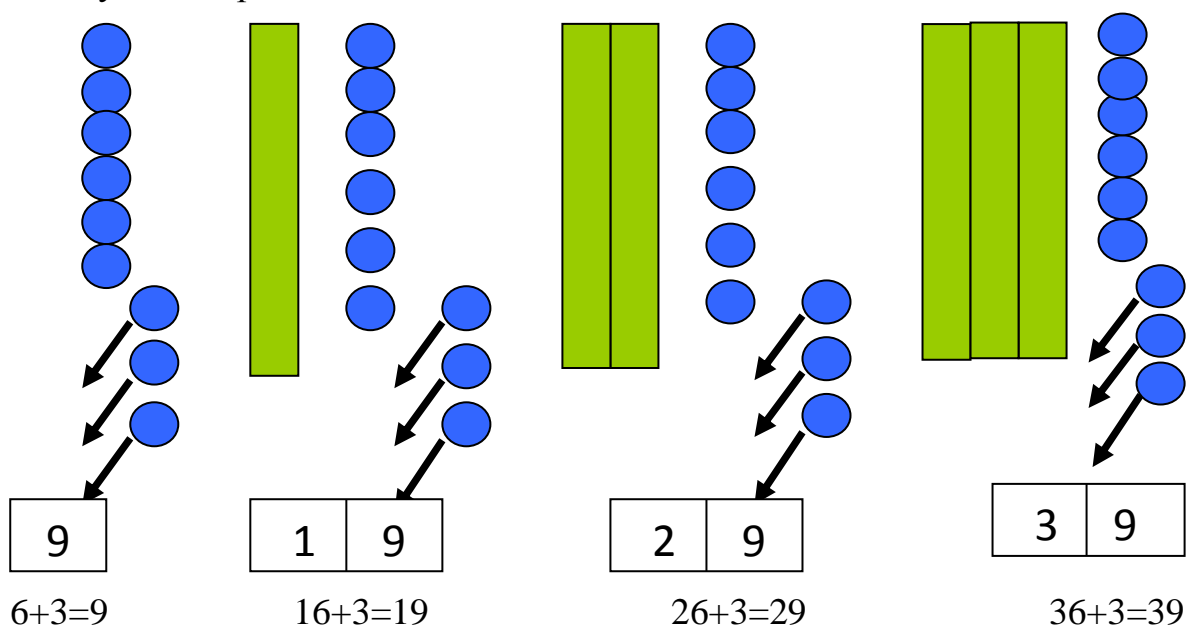
2.2. Формування вмінь моделювання обчислювальних навичок учнів початкової школи

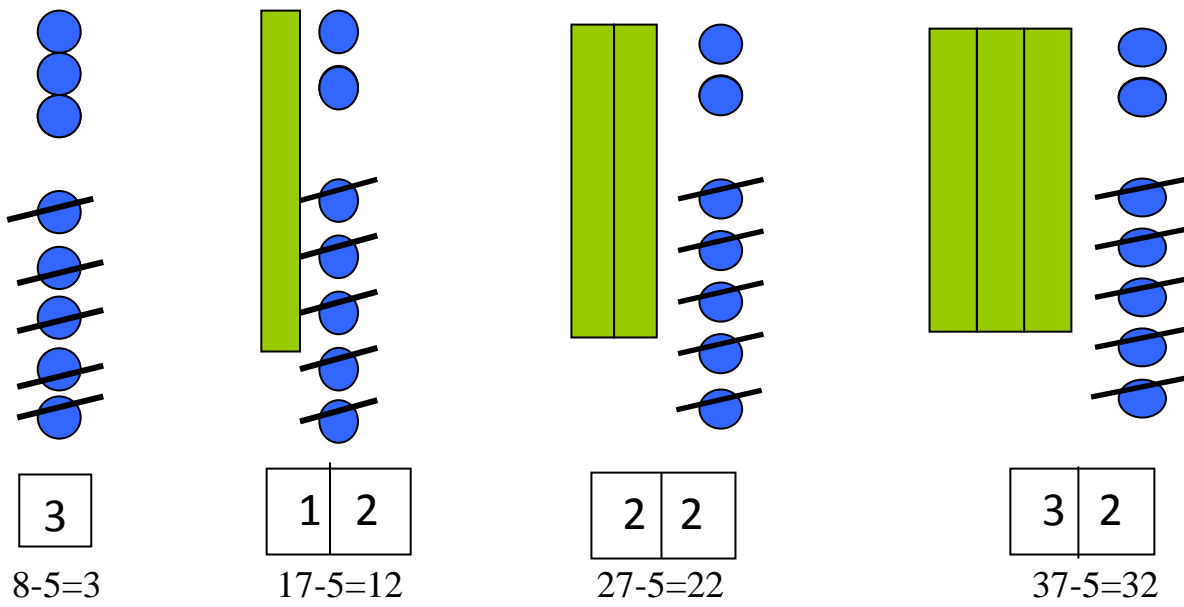
Основне завдання вчителя початкових класів у формуванні обчислювального складника математичної компетентності полягає у виробленні міцних знань, умінь і навичок безпомилково виконувати арифметичні операції першого і другого ступенів на множині натуральних чисел, знати компоненти арифметичних дій та властивості операції з ними.

Ознайомлення з арифметичними діями з натуральними числами здійснюється з використанням **предметного моделювання**.

Наприклад, при вивченні додавання в межах того чи того числа основним прийомом знаходження результатів дій є перелічування. Використовуючи цей метод, вчитель використовує набір кубиків різного кольору. В одного учня є 4 зелені кубики, а у другого 2 червоні кубики. На прохання вчителя учні на парту кладуть свої кубики. Учитель повідомляє, що зелені і червоні кубики об'єднали. Кубиків на парті стало більше.

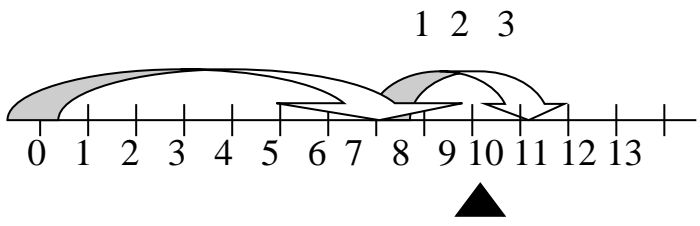
Вивчення додавання в межах того чи того числа розпочинається з розгляду малюнка, що ілюструє склад цього числа. За цим малюнком слід розглянути вправи не тільки на засвоєння складу числа, а й на складання та записування прикладів [3].



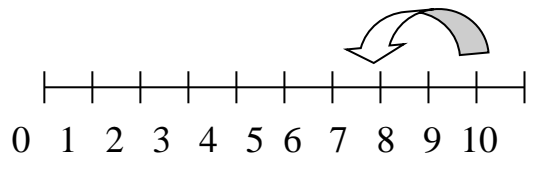


Графічні схеми використовуються при розв'язуванні прикладів на виконання арифметичних дій:

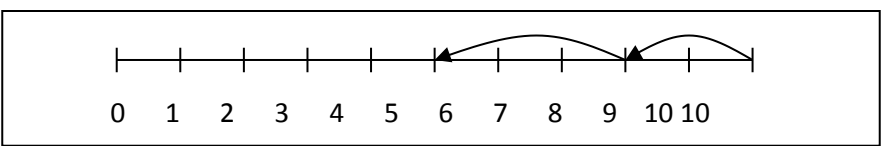
$7 + 3 = 10$



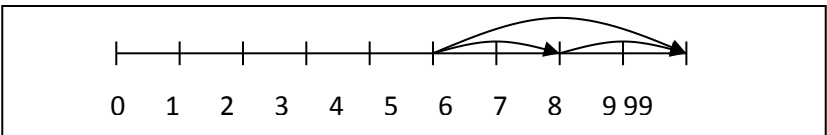
$10 - 2 = 8$



На основі послідовного віднімання від одного числа декількох інших чисел і послідовного додавання до одного числа декількох інших чисел ґрунтуються правила додавання і віднімання чисел групами, які доцільно вчителю пояснити на основі наступних схем:



$10 - 2 - 3 = 5$



$5 + 2 + 2 = 9$

Розглянемо використання основних видів **знакового моделювання** у формуванні обчислювальних навичок молодших школярів при вивченні письмового виконання арифметичних дій на прикладі роботи з багатоцифровими числами.

При вивченні додавання багатоцифрових чисел учні зустрічаються з такою проблемою: вони не бачать переходу через розряд. Під час вивчення нумерації у визначеному концентрі діти навчилися записувати багатоцифрові числа за допомогою таблиці, в якій чітко відокремлені всі розряди. Не слід при додаванні одразу переходити до знакової форми, доцільно декілька прикладів розв'язати за допомогою аналогічної таблиці. Наприклад, $2346 + 1245$ представимо як:

	Тисячі	Сотні	Десятки	одиниці
+	2	3	4	6
	1	2	4	5
				11

Оскільки діти знають, що в одній чарунці може знаходитися лише одна цифра, число 11 подається як сума $10 + 1$, тобто 1 десяток переходить до попередньої чарунки, де записується розряд десятків:

	Тисячі	Сотні	Десятки	одиниці
+	2	3	4	6
	1	2	4	5
	3	5	$8+1 \leftarrow$	1 дес.+1

Остаточна таблиця виглядатиме:

	Тисячі	Сотні	Десятки	одиниці
+	2	3	4	6
	1	2	4	5
	3	5	9	1

Вивчення кожного прийому повинно супроводжуватись докладним або коротким коментуванням. Нехай, наприклад, треба обчислити значення виразу 329×3 . Щоб правильно помножити багатоцифрове число на одноцифрове, треба:

1. Правильно підписати множники (у стовпчик) у такий спосіб, як і доданки при додаванні (якщо 1-й множник не закінчується на нуль чи нулі): одиниці під одиницями.

$$\begin{array}{r} \times \quad 329 \text{ (множник)} \\ \quad \quad 3 \text{ (множник)} \\ \hline 987 \text{ (добуток)} \end{array}$$

2. Множимо 9 одиниць на 3, буде 27. 27 — це 2 десятки і 7 одиниць.

3. 7 одиниць підписуємо у добуток під одиницями, а 2 десятки запам'ятовуємо.

4. 2 десятки множимо на 3, буде 6 десятків та плюс ще 2 десятки, які ми запам'ятали, буде 8 десятків.

5. 8 десятків підписуємо у добуток під десятками.

6. 3 сотні множимо на 3, буде 9 сотень.

7. 9 сотень підписуємо у добуток під сотнями.

Для повноцінного формування обчислювальної культури учнів початкових класів вчитель повинен пов'язувати теоретичний матеріал з практичними завданнями з математики, використовувати тренувальні завдання для усних і письмових обчислень.

2.3. Використання елементів теорії графів у початковому курсі математики

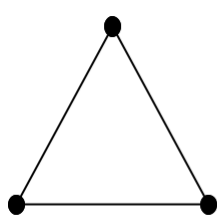
Будучи одним із фундаментальних понять сучасної математики, поняття «відповідності між елементами множин» на сучасному етапі реформування шкільного курсу математики повинно зайняти центральне місце і в курсі математики початкового навчання. Відношення можна виразити в різний спосіб: описово заданням усіх пар елементів, таблично, за допомогою так званих графів.

Граф – множина точок площини, з'єднаних між собою лініями. Точки називаються *вершинами*, лінії – *ребрами*. Граф дає можливість визначити

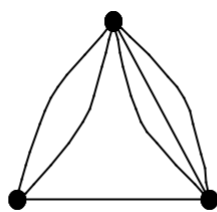
зв'язки між елементами розглядуваних множин – вершинами. При побудові графа на довжини ліній та їх форми не накладається ніяких умов.

Карнаух Т. О. визначає декілька типів графів [1, 3]:

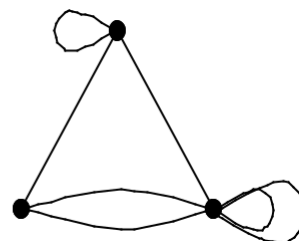
- *петля* – це ребро, що з'єднує вершину саму з собою;
- *мультиграф* – паралельні ребра з'єднують пари вершин, петлі відсутні;
- *псевдограф* містить петлі та кратні ребра;
- *звичайний граф* не містить петлі і кратні ребра;
- *змішаний граф* містить орієнтовані та неорієнтовані ребра одночасно.



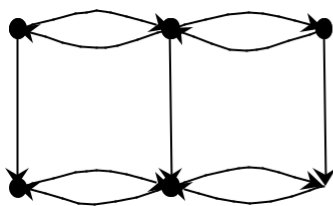
а) граф



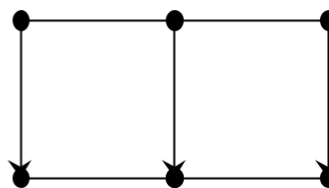
б) мультиграф



в) псевдограф



г) оргграф



д) змішаний граф

У науково-математичній літературі виділяють два види орієнтованих графів:

- якщо граф містить скінченну кількість ребер, то він називається **скінченним**;
- якщо кількість ребер графа є нескінченна, то він називається **нескінченним**.

Використання скінченних орієнтованих графів є одним із видів наочності, який застосовують вчителі на уроках математики. Граф замінює довгу словесну інструкцію вчителя і тим самим прискорює темп навчальної роботи.

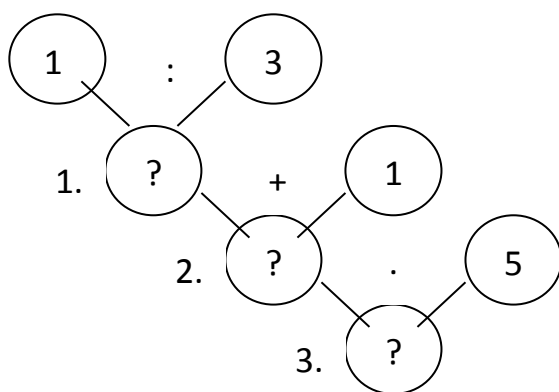
У початковому курсі математики використання теорії скінченних орієнтованих графів має велике значення при розв'язуванні сюжетних задач. З його допомогою учні:

- краще осмислюють зміст задачі;
- встановлюють взаємозв'язки між даними і шуканими величинами у задачі.

Головне і проміжні запитання задачі на графі позначають кружечками зі знаком запитання. Кожний кружечок з'єднують з іншими двома кружечками за допомогою стрілок. У цих кружечках записують числа, за допомогою яких знаходять відповідь на запитання.

Задача. *Слюсар за 3 год виготовив 15 шестерень. Скільки шестерень він виготовить за 5 год, коли щогодини робитиме на одну шестерню більше, ніж раніше?*

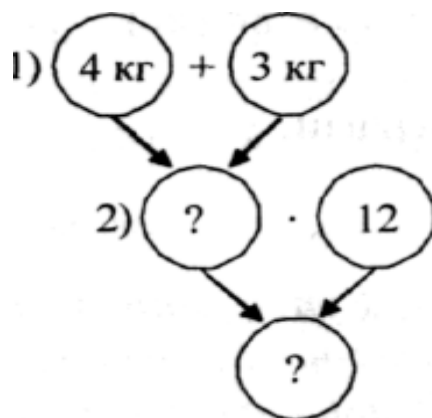
У процесі проведеного аналізу цієї задачі граф її розв'язання має вигляд:



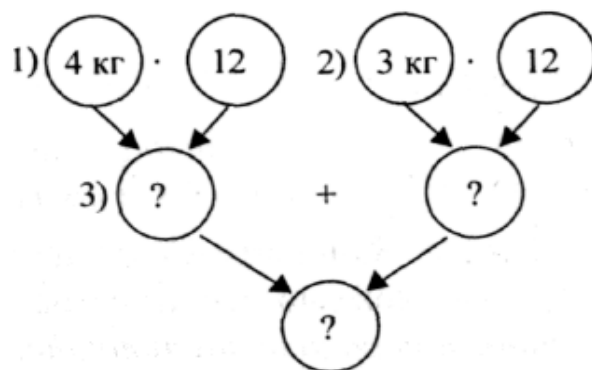
Задача. *Для ремонту однієї квартири витратили 4 кг білої фарби і 3 кг коричневої. Скільки кілограмів фарби потрібно для ремонту 12 таких квартир?*

Таку задачу можна розв'язати двома способами, кожен з яких ілюструється відповідним графом:

І спосіб.



II спосіб.



Графи у вигляді блок-схем доцільно використовувати і при формуванні обчислювальних умінь і навичок молодших школярів. Вони допомагають учням засвоювати правила виконання чотирьох арифметичних дій, запису різних обчислювальних алгоритмів. Покажемо, наприклад, методику побудови графа при обчисленні значення виразу $27 - (24 + 4) : 7$:

- у рядку записуємо числа в тому порядку, як вони записані у прикладі:

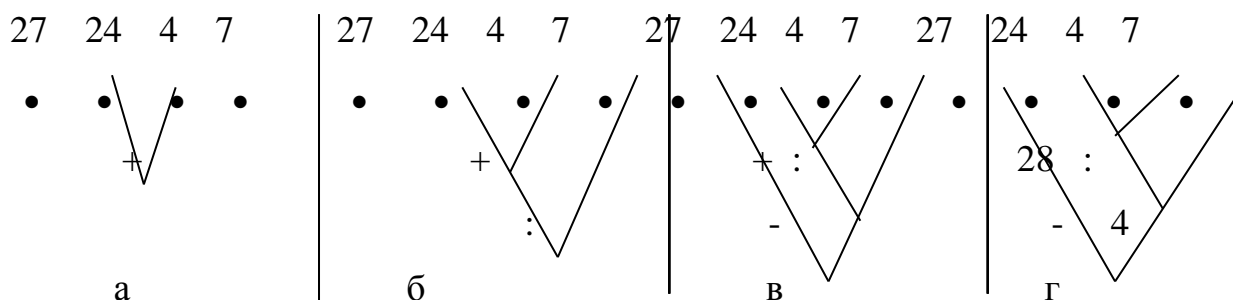
27; 24; 4; 7;

- спочатку треба знайти суму чисел 24 і 4 (рис. а) – числа 24 і 4 з'єднуємо ребрами графа і ставимо дію «+»;

- одержане число треба поділити на 7 (рис. б) – результат пешої дії і число 7 з'єднуємо ребрами графа і ставимо дію «:»;

- від 27 треба відняти частку (рис.в) – результат пешої дії і число 27 з'єднуємо ребрами графа і ставимо дію «-».

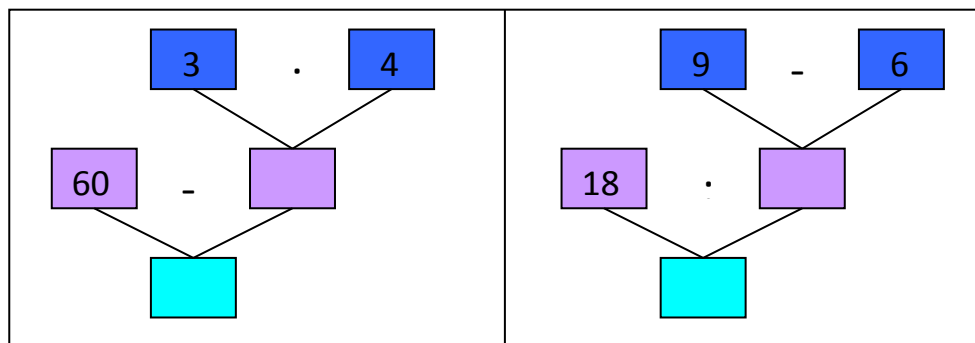
У ході виконання обчислень граф доповнюється проміжними результатами і відповіддю (рис. г)



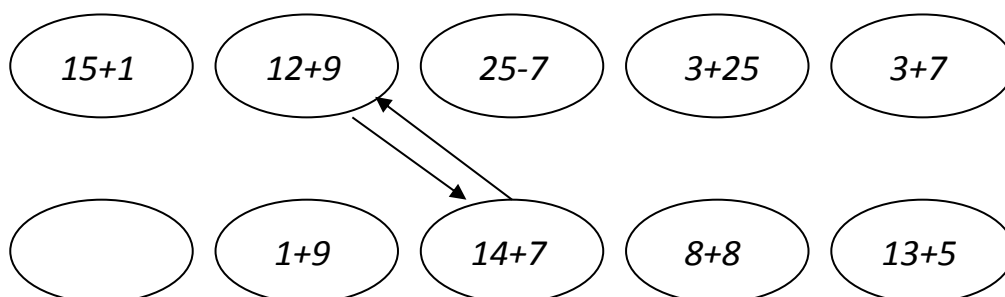
Користуючись схемами, можна пояснити порядок обчислення виразів і знайти їх значення.

$$60 - 3 \cdot 4$$

$$18 : (9 - 6)$$



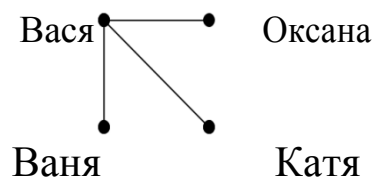
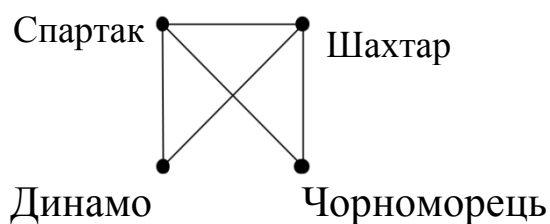
Завдання, подане на рисунку, дає можливість продемонструвати властивість симетричності числової рівності. Виконуючи вправу, учні міркують приблизно так: «Стрілки означають: $12+9 = 14+7$, або $14+7 = 12+9$ ».



Теорію скінчених графів у початковому курсі математики можна використовувати і при розв'язуванні задач з логічним навантаженням. У підручнику Карнаух Т. О. наведені такі приклади [1, 3]:

- на рисунку а) зображений граф футбольного турніру між командами. Команди є вершинами графа. Щоб показати, які команди зіграли між собою, потрібно сполучити ці вершини відрізком.

- на рисунку б) зображений граф знайомства між учнями. Учні є вершинами графа. Якщо учні знайомі між собою, то відповідні вершини з'єднаємо ребрами:



Література

1. Карнаух Т. О., Ставровський А. Б. Теорія графів у задачах. Київ : ВПЦ «Київський університет». 2004. 90 с.
2. Коваль Л. В., Скворцова С. О. Методика навчання математики у початковій школі : теорія і практика : підручник для студентів за спеціальністю 6.010100 "Початкова освіта". Харків : ЧП «Принт-Лідер», 2011. 414 с.
3. Ковальчук В., Білецька Л., Силюга Л., Стасів Н. Математика. Модуль 4. Відповідності. Відношення. Відображення : навчальний посібник для студентів напряму підготовки 6.010102 "Початкова освіта". Дрогобич : Коло, 2012. 54 с.
4. Павелко В. В. Моделювання як важлива умова забезпечення розуміння молодшими школярами логіки розв'язування математичних задач. URL : http://nbuv.gov.ua/UJRN/NZTNPUPed_2012_4_17
5. Фефілова Т. В., Андраш К. С. Використання способу математичного моделювання в початковому курсі математики під час розв'язування задач. *Педагогічні науки : теорія, історія, інноваційні технології*. 2015. № 8 (52). С. 94–103.
6. Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математики в школе. Москва : Просвещение, 1983. 160 с.
7. Швець В. О. Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики. *Дидактика математики : проблеми і дослідження* : міжнародний збірник наукових робіт. Донецьк : Вид-во ДонНУ, 2009. № 32. С. 16–23.

Теми практичних занять

- Тема 1.** Побудова математичної моделі простої сюжетної задачі.
Складання простої задачі за математичною моделлю.
- Тема 2.** Побудова математичної моделі складеної сюжетної задачі.
Складання складеної задачі за математичною моделлю
- Тема 3.** Побудова знакової моделі простої сюжетної задачі.
Складання простої задачі за знаковою моделлю.
- Тема 4.** Побудова знакової моделі складеної сюжетної задачі.
Складання складеної задачі за знаковою моделлю.
- Тема 5.** Побудова схематичної моделі простої сюжетної задачі.
Складання простої задачі за схематичною моделлю.
- Тема 6.** Побудова схематичної моделі складеної сюжетної задачі.
Складання складеної задачі за схематичною моделлю.
- Тема 7.** Побудова предметної моделі простої сюжетної задачі.
Складання простої задачі за предметною моделлю.
- Тема 8.** Побудова предметної моделі складеної сюжетної задачі.
Складання складеної задачі за предметною моделлю.
- Тема 9.** Побудова графічної моделі простої сюжетної задачі.
Складання простої задачі за графічною моделлю.
- Тема 10.** Побудова графічної моделі складеної сюжетної задачі.
Складання складеної задачі за графічною моделлю.
- Тема 11.** Побудова структурної моделі простої сюжетної задачі.
Складання простої задачі за структурною моделлю.
- Тема 12.** Побудова структурної моделі складеної сюжетної задачі.
Складання складеної задачі за структурною моделлю.
- Тема 13.** Предметне моделювання при усному рахунку.
- Тема 14.** Графічне моделювання при вивченні нумерації чисел.
- Тема 15.** Знакове моделювання при вивченні письмового виконання арифметичних дій на множині цілих невід'ємних чисел.
- Тема 16.** Розв'язування простих сюжетних задач за допомогою графів.
- Тема 17.** Розв'язування складених сюжетних задач за допомогою графів.
- Тема 18.** Використання графів при розв'язуванні завдань обчислювального характеру.
- Тема 19.** Творчі завдання, які розв'язуються за допомогою графів.
- Тема 20.** Прикладні задачі у початковому курсі математики.

Питання для самоконтролю

1. Суть поняття «модель».
2. Основні характеристики моделей.
3. Реальні та уявні моделі.
4. Фізичні та абстрактні моделі.
5. Властивості моделей.
6. Функції моделей.
7. Моделювання як процес побудови моделі.
8. Аналітичне математичне моделювання.
9. Імітаційне математичне моделювання.
10. Етапи процесу математичного моделювання.
11. Моделювання як метод навчання.
12. Теоретичний компонент розвитку вмінь математичного моделювання.
13. Практичний компонент розвитку вмінь математичного моделювання.
14. Особистісний компонент розвитку вмінь математичного моделювання.
15. Мотиваційно-цільовий компонент розвитку вмінь математичного моделювання.
16. Змістово-інформаційний компонент розвитку вмінь математичного моделювання.
17. Операційно-діяльнісний компонент розвитку вмінь математичного моделювання.
18. Діагностичний компонент розвитку вмінь математичного моделювання.
19. Контрольно-результативний компонент розвитку вмінь математичного моделювання.
20. Характерні ознаки компетентності учнів з математичного моделювання.
21. Параметри сформованості вмінь математичного моделювання у молодших школярів у процесі навчання математики.
22. Рівні сформованості в учнів початкових класів умінь математичного моделювання.
23. Навчальні принципи розвитку вмінь моделювання в учнів початкових класів.
24. Дидактичні умови формування вмінь моделювання у початковому курсі математики.
25. Дидактичні функції моделювання.

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати предметну, знакову, графічну, схематичну та структурну моделі розв'язування задач:

1) На алеї біля школи старшокласники посадили 4 ялини і 3 берези. Скільки всього дерев посадили старшокласники?

2) У кошику було 8 цибулин. Дві цибулини мама взяла для салату. Скільки цибулин залишилось у кошику?

3) Мама посадила 4 рядки огірків, по 3 огірки в кожному. Скільки всього огірків посадила мама?

4) 9 яблук бабуся розклала порівну на три тарілки. Скільки яблук поклала бабуся на кожну тарілку?

5) 9 яблук бабуся розклала на тарілки по 3 на кожну. Скільки тарілок використала бабуся?

6) Оля і Тетянка знайшли 12 грибів. Скільки грибів знайшла Тетянка, якщо Оля знайшла 2 гриби?

7) Коли з полиці Іринка взяла 5 книжок, то на ній залишилося ще 8. Скільки книжок було на полиці?

8) На столі лежало 15 зошитів. Коли Петрик роздав учням кілька зошитів, на столі залишилось ще 5. Скільки зошитів роздав Петрик учням?

9) У чорної курки 6 курчат, а в білої – на 2 більше. Скільки курчат у білої курки?

10) У чорної курки 6 курчат, що на 2 менше, ніж у білої. Скільки курчат у білої курки?

11) Токар за зміну виготовляє 10 деталей, а його учень – у 2 рази менше. Скільки деталей виготовляє учень за зміну?

12) Токар за зміну виготовляє 10 деталей, що у 2 рази більше, ніж його учень. Скільки деталей виготовляє учень за зміну?

13) Учні біля школи посадили 4 кущі троянди, а півонії – у 5 разів більше. Скільки кущів півонії посадили учні?

14) Учні біля школи посадили 4 кущі троянди. Це у 6 разів менше, ніж кущів півонії. Скільки кущів півонії посадили учні?

15) Тато купив 16 кг моркви, а огірків – у 4 рази менше. Скільки кілограмів огірків купив тато?

16) Тато купив 16 кг моркви, що у 4 рази більше, ніж огірків. Скільки кілограмів огірків купив тато?

17) Потяг складається з 8 зелених і 5 синіх вагонів. На скільки менше синіх вагонів, ніж зелених має потяг? Потяг складається з 8 зелених і 5 синіх вагонів. На скільки більше зелених вагонів, ніж синіх має потяг?

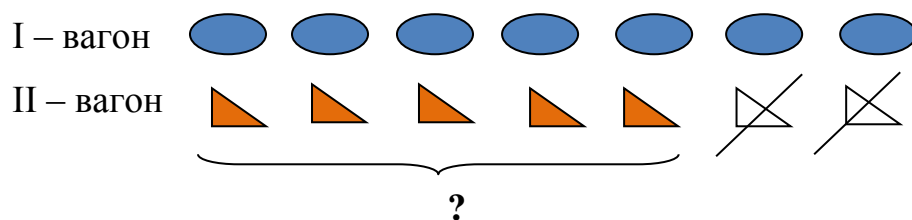
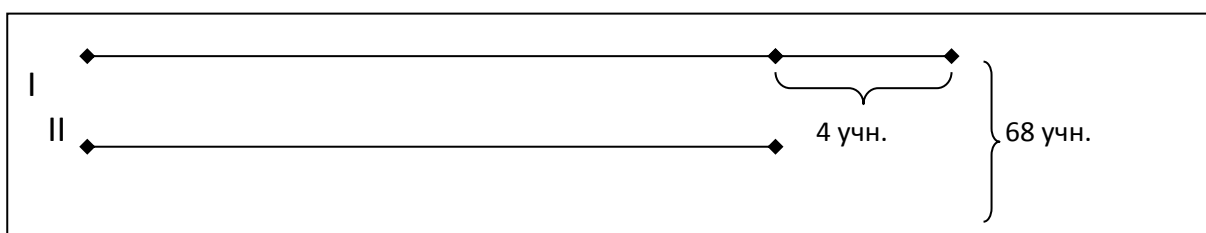
18) Шкільний двір має довжину 64 м, а коридор школи – 8 м. У скільки разів двір довший від коридора?

19) Шкільний двір має довжину 64 м, а коридор школи – 8 м. У скільки разів коридор коротший від двору?

20) У магазині було 6 ящиків з виноградним соком, а ящиків з яблучним соком – на 3 більше. Скільки всього ящиків із соком було в магазині?

2. Скласти і розв'язати задачі за поданими нижче моделями:

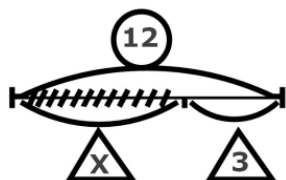
	Відстань за 1 год	Час руху	Загальна відстань
Велосипедист	12км	2год	} Однакова
Турист	? км	6год	



Було – ?

Вивезли – 7250 кг

Залишилося – на 3240 кг менше



3. Побудувати математичні моделі задач та розв'язати їх:

1. З листа жерсті довжиною 490 см потрібно вирізати смужки для серійного випуску виробів завдовжки 6 см і 8 см. Скільки дістанемо смужок кожного розміру, якщо їх має бути однакова кількість?
2. У господарстві виростили 180 кг волокна і насіння льону. Маса волокна вдвоє більша, ніж маса насіння. Скільки було зібрано волокна і насіння окремо?
3. Довжина прямокутника 10 см. Якщо його ширину збільшити на 4 см, його площа збільшиться на 20 см^2 . Знайти ширину утвореного прямокутника?
4. Периметр прямокутника 118 см. Одна його сторона на 12 см довша від другої. Знайти довжини сторін прямокутника.
5. У магазин привезли 3 т 5 ц гречаної крупи. Після цього, як вивантажили 4 однакові мішки з крупою, то залишилось 1 т 080 кг. Скільки кілограмів гречаної крупи було в кожному мішку?
6. Мотоцикліст був у дорозі 4 год, після чого йому залишилося проїхати 130 км. З якою швидкістю рухався мотоцикліст, якщо весь шлях дорівнював 390 км?
7. На будівництво електростанції приїхало 1275 робітників. Жінок приїхало у 4 рази більше, ніж чоловіків. Скільки жінок приїхало на будівництво?
8. Три сестрички їли цукерки. Катруся з'їла 5 цукерок, Мартуся – 3. Катруся і Улянка з'їли в 3 рази більше, ніж Марта. Скільки цукерок з'їла Катруся?
9. Садівник зібрав 1200 кг груш. Частину груш поклали в 90 ящиків. Після

цього залишилося ще 400 кг груш. Скільки кілограмів груш клали у кожен ящик?

10. У одному контейнері яблук у 2 рази більше, ніж у другому. Якщо в перший контейнер довантажити ще 80 т, а у другий – 145 т, то в обох контейнерах яблук стане порівну. Скільки тон яблук є у кожному контейнері?
11. У двох їдальнях було 1400 кг картоплі. Після того, як у першу їдальню завезли ще 500 кг, в їдальнях картоплі стало порівну. Скільки кілограмів картоплі було в кожній їдальні спочатку?
12. Велосипедист проїхав відстань між двома селами за 2 години, а пішохід пройшов її за 5 год. З якою швидкістю рухався пішохід, якщо вона на 9 км / год менша за швидкість велосипедиста?
13. Маса бочки з бензином 170 кг. Маса бензину на 130 кг більша за масу порожньої бочки. Яка маса бензину?
14. Мотузку завдовжки 90 м розрізали на дві частини, одна з яких на 3 м довша від другої. Знайти довжину кожної частини.
15. У їдальні було 80 л соку. Щодня витрачали по 10 л соку, після чого залишилося 20 л соку. Скільки днів витрачали по 10 л соку?
16. З полиці взяли декілька книжок, а потім ще 2 – всього 10 книжок. Скільки книжок стояло на полиці спочатку?
17. На полиці лежало декілька книжок. З неї взяли 2, після чого на полиці залишилось 10 книжок. Скільки книжок лежало на полиці спочатку?
18. Невідоме число зменшили у 23 рази і здобутий результат збільшили на 128. У кінцевому результаті дістали число 200. Складіть рівняння за умовою задачі.
19. Учень задумав число. Зменшив його у 3 рази і результат зменшив на 30, отримав 24. Яке число задумав учень?
20. Петро задумав число. Коли від третини цього числа він відняв 6, то отримав 18. Яке число задумав Петро?

4. Побудувати предметну та графічну моделі знаходження значень виразів:

$$(5 + 4) - 2; \quad (3 + 5) - 2; \quad (2 + 6) - 4; \quad (5 + 2) - 3.$$

5. Використовуючи знакове моделювання, обчислити значення виразів з повним коментарем:

$$1264 : 2; \quad 126 + 24; \quad 1264 - 126; \quad 1264 \cdot 2.$$

6. Розв'язати задачі, побудувавши граф до кожної з них:

1) Один верстат – автомат виготовляє за хвилину 12 деталей, а другий – 15 таких самих деталей. Скільки всього деталей буде виготовлено за 20 хвилин роботи двох верстатів?

2) 360 кг груш розклали у ящики по 12 кг і 9 кг. Ящиків по 9 кг було 8. Скільки було ящиків по 12 кг?

3) 42 ц кормів кролям вистачить на 7 днів, а вівцям – на 3 дні. На скільки днів вистачить цих кормів для кролів та овець разом?

4) 3 5 ц жита виходить 4 ц борошна. Скільки центнерів борошна можна одержати з 70 ц такого жита?

5) Маслозавод відправив у 3 магазини 2800 кг масла. У перший магазин завод відправив п'яту частину всього масла, у другий – $\frac{3}{7}$, а у третій – решту масла. Скільки кілограмів масла одержав кожний магазин?

6) Три однакові жатки за 6 год скошили 72 га жита. За скільки годин така одна жатка може скошити 24 га жита?

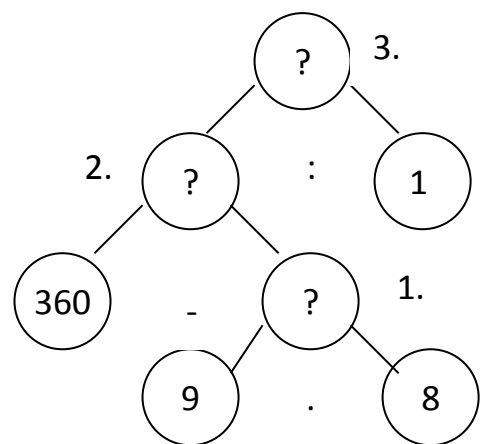
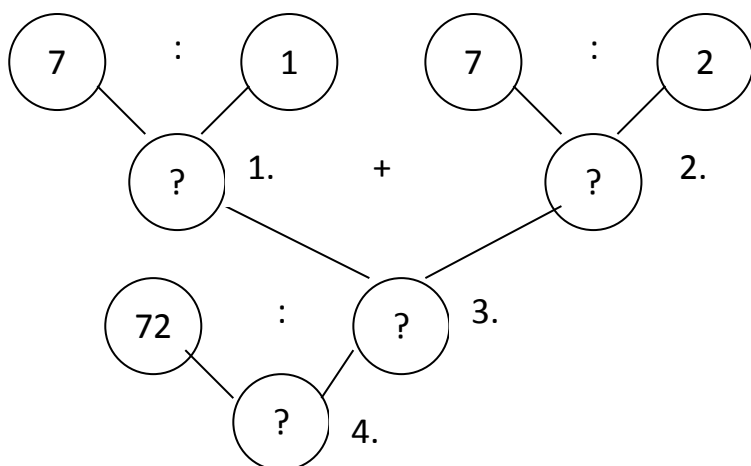
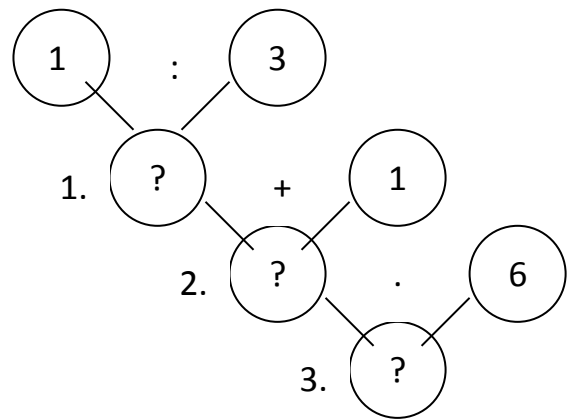
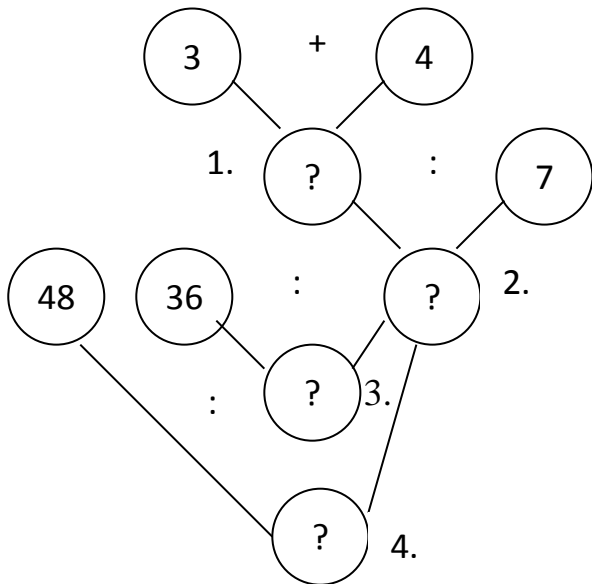
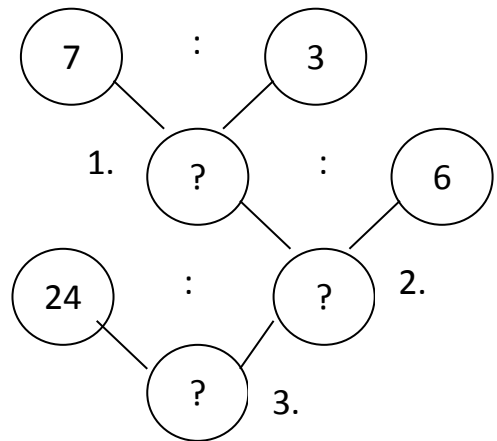
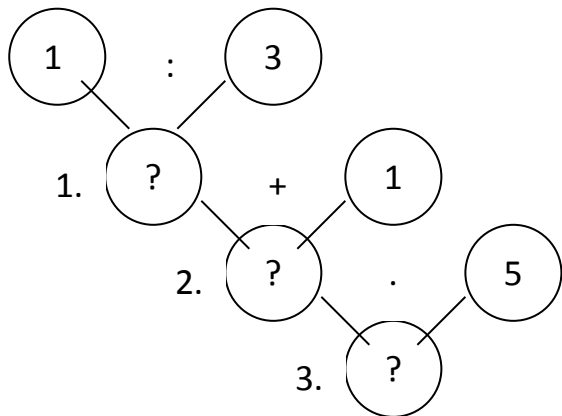
7) Дві сестри зібрали 7 ящиків полуниці. Старша сестра зібрала 36 кг полуниці, а молодша – 48 кг. Скільки ящиків полуниці зібрала кожна сестра?

8) Одна бригада зібрала 89 ящиків помідорів, а друга — 29 таких ящиків. При цьому друга бригада зібрала на 3600 кг менше, ніж перша. Скільки кілограмів помідорів зібрала кожна бригада окремо?

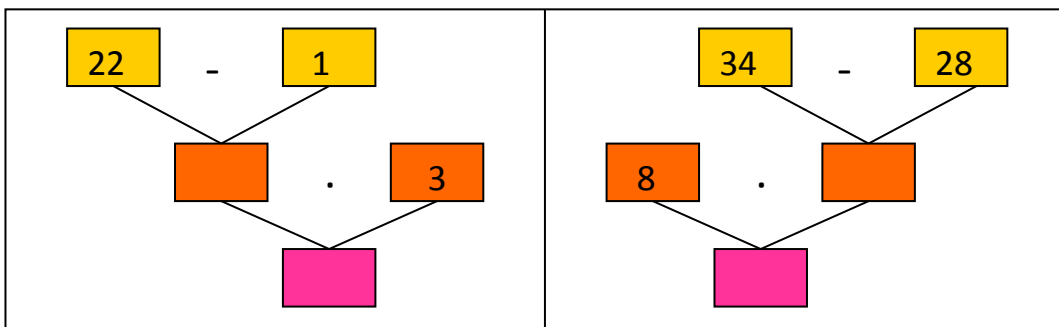
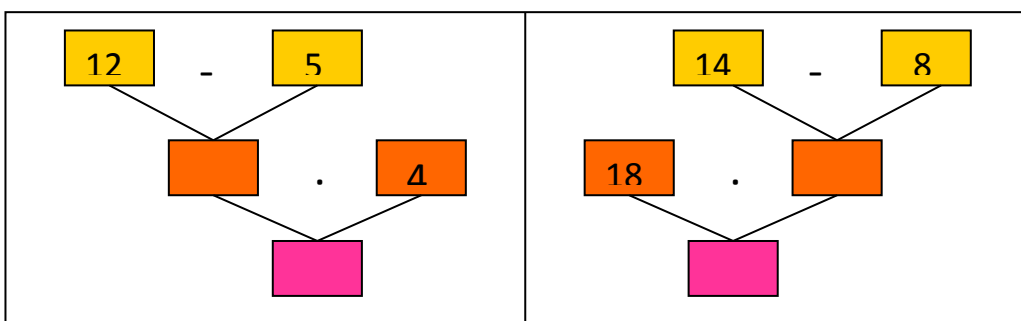
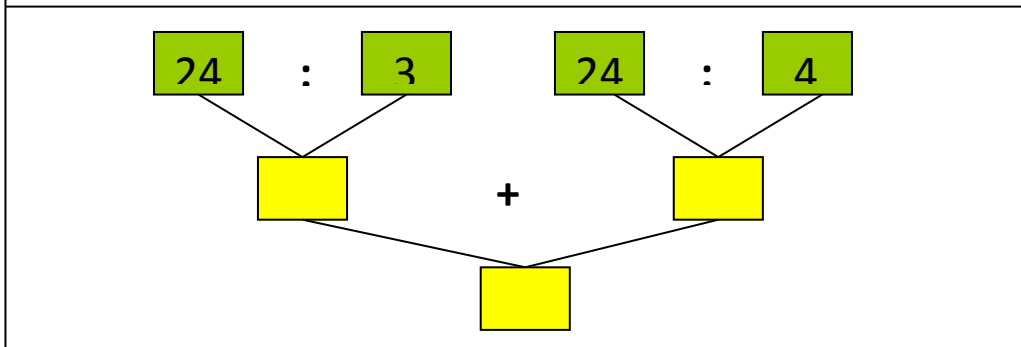
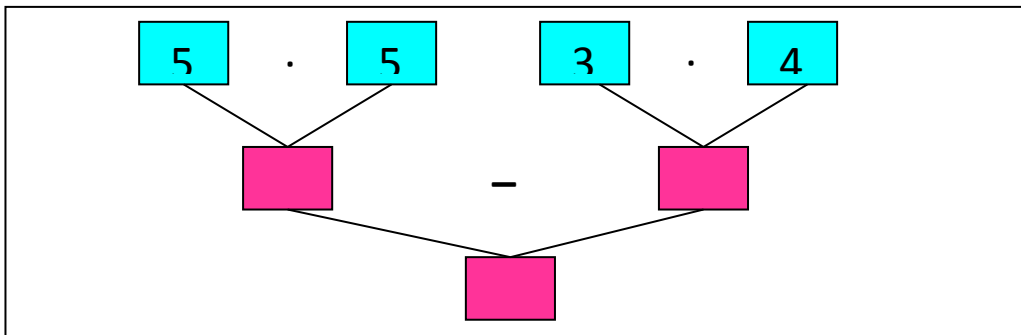
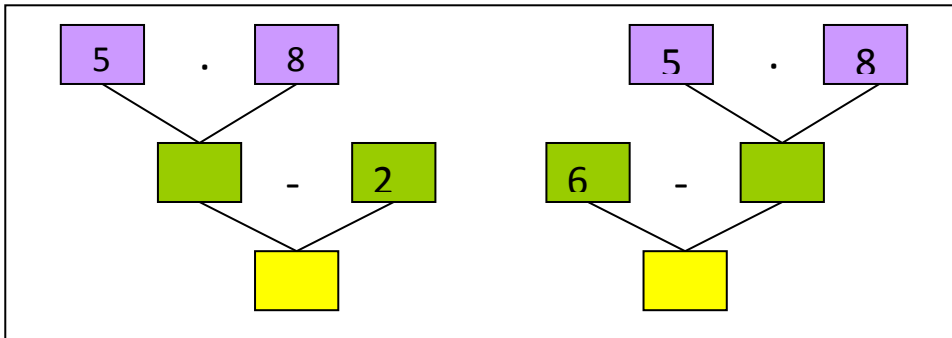
9) Бабуся за 3 год напекла 48 булочок, а її внучка за 1 год напекла 4 такі булочки. У скільки разів менше булочок напекла за 1 год внучка, ніж її бабуся?

10) 36 кг сої містить 7 кг жирів. Скільки кілограмів такої сої містить 14 кг жирів?

7. За графами скласти і розв'язати задачі:



8. Скласти вирази за схемами і знайти їх значення:



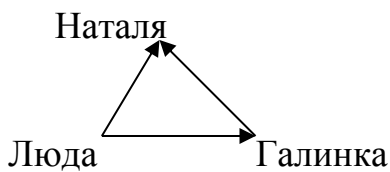
9. Побудувати графи для обчислення виразів:

$$30 + 42 : 7 - 15, \quad 50 + (4 \cdot 8 - 20 : 5),$$

$$40 - 4 \cdot 6 + 16 : 8, \quad (5 \cdot 8 - 22) + 6 \cdot 2.$$

10. Відомо, що Марія – мати Ірини, а Ірина – мати Христини. Ким доводиться Христина Марії? Марія Христині? Христина Ірині? Побудувати граф цього відношення.

11.



На рисунку стрілки проведені від вищої дівчинки до нижчої. Яка з дівчат найвища, а яка найнижча?

12. Співвідношення ієрархії (підлеглих за старшинством) зображається графом, в якому стрілки напрямлені від молодшого (за чином, за посадою тощо) до старшого, тобто вказують, хто кому підлягає (підпорядкований). Розшифруйте граф ієрархії в армії (див. рис.), якщо відповідні букви позначають:

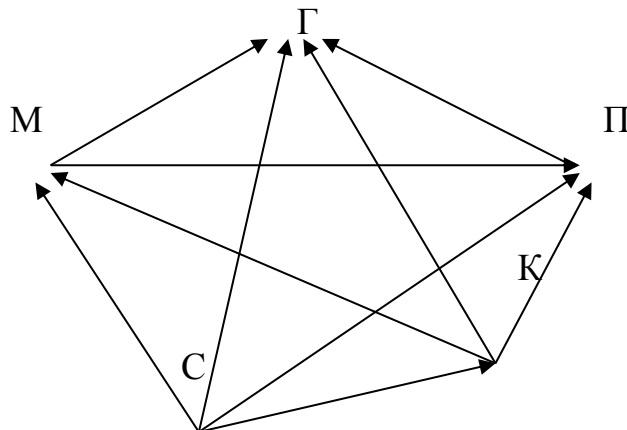
Г – генерал,

М – майор,

П – полковник,

К – капітан,

С – солдат.



13. Побудуйте граф ієрархії у школі, якщо вершинами графа є:

Д – директор,

З – завуч,

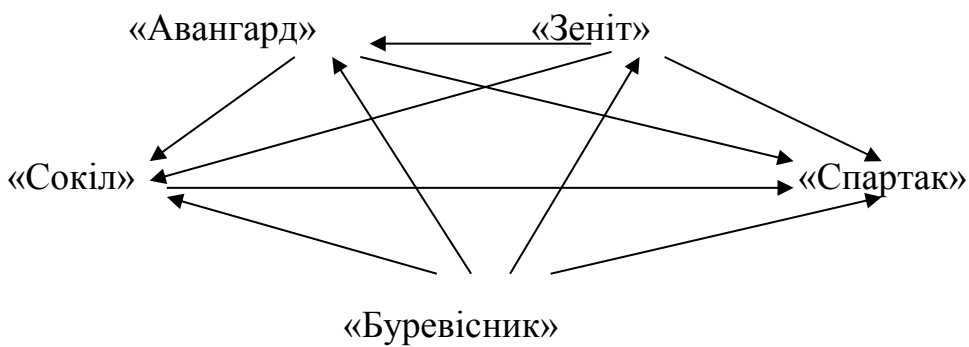
К – класний керівник,

О – організатор,

У – учитель–предметник.

14. П'ять баскетбольних команд: «Авангард», «Буревісник», «Зеніт», «Сокіл», «Спартак» – зіграли між собою по одному разу. Стрілки проведені від команди, яка виграла, до команди, що програла (див. рисунок).

Розкажи про результати гри. Яка команда не набрала жодного очка?



Методичні рекомендації щодо написання контрольної роботи

При виконанні контрольної роботи студент має:

– **знати:**

- прийоми математичного моделювання;
- класифікацію моделей за характером об'єктів та призначення;
- властивості та функції моделей;
- етапи моделювання.

– **уміти:**

- володіти прийомами математичного моделювання;
- формулювати загальну схему моделювання;
- класифікувати етапи моделювання;
- записати і пояснити послідовність побудови проміжних моделей;
- досліджувати і будувати математичні моделі розв'язування сюжетних задач та формування обчислювальних навичок;
- формулювати вимоги щодо побудованих моделей;
- записувати і обґрунтовувати знаково-символічні, схематичні та графічні моделі;
- розв'язувати задачі за загальною схемою моделювання;
- складати задачі та числові вирази за поданою моделлю;
- пояснити і довести необхідність застосування математичних моделей.

Контрольна робота містить 5 практичних завдань з цього розділу, які оцінюються **40 балами:**

1 завдання – 15 балів;

2 завдання – 10 балів;

3 завдання – 5 балів;

4 завдання – 4 бали;

5 завдання – 6 балів.

Типовий варіант контрольної роботи

РОЗДІЛ 2. Математичне моделювання як змістова лінія початкового курсу математики

Варіант – 30

1. Побудувати предметну, знакову, графічну, схематичну та структурну моделі розв'язування задачі. **(15б.)**

У магазині було 6 ящиків з виноградним соком, а ящиків з яблучним соком — на 3 більше. Скільки всього ящиків із соком було в магазині?

2. Скласти і розв'язати задачу за знаковою моделлю: **(10б.)**

	Відстань за 1 год	Час руху	Загальна відстань
Велосипедист	12км	2год	} Однакова
Турист	? км	6год	

3. Побудувати математичну модель задачі та розв'язати її. **(5б.)**

У двох корзинах лежало 15 м'ячів. Після цього як вчитель з другої корзини видав учням 4 м'ячі, то в ній залишилося 5 мячів. Скільки м'ячів було в першій корзині?

4. Побудувати предметну та графічну моделі знаходження значення виразу: $(5 + 4) - 2$. **(4б.)**

5. Використовуючи знакове моделювання, обчислити значення виразу $1264 : 2$ з повним коментарем. **(6б.)**

Навчальне видання

**Володимир Ковальчук, Любов Білецька,
Людмила Силюга, Наталя Стасів, Тетяна Салдан**

ФОРМУВАННЯ ПРИЙОМІВ МОДЕЛЮВАННЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ У ПОЧАТКОВІЙ ШКОЛІ

**Редакційно-видавничий відділ
Дрогобицького державного
педагогічного університету імені Івана Франка**

Головний редактор
Ірина Невмержицька

Технічний редактор
Наталія Кізима

Коректор
Уляна Куцик

Здано до набору 10. 11. 2021 р. Підписано до друку 23. 11. 2021 р. Формат 60x90/16. Папір офсетний. Гарнітура Times. Наклад 50 прим. Ум. друк. арк. 3,12. Зам.89.

Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5140 від 01.07.2016 р.). 82100, Дрогобич, вул. І. Франка, 24. к. 42.