ДРОГОБИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ, ІНФОРМАТИКИ ТА МЕТОДИКИ ЇХ ВИКЛАДАННЯ
У ПОЧАТКОВІЙ ШКОЛІ

**В.Ю. КОВАЛЬЧУК, Л.С. БІЛЕЦЬКА,**
**Н.І. СТАСІВ, Л.П. СИЛЮГА**

# М а т е м а т и к а

## *Частина ІІ*

## *Ч и с л о в і   м н о ж и н и*

**ДРОГОБИЧ, 2019**

**УДК 51(07)**
**К 25**

*Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (протокол № 7 від 27. 06. 2019 року)*

***Рецензенти:***

**Комарницька Леся Іванівна**, доцент кафедри математики навчально-наукового інституту фізики, математики, економіки та інноваційних технологій, кандидат фізико-математичних наук (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка);

**Білинський Ігор Васильович,** професор кафедри фізики навчально-наукового інституту фізики, математики, економіки та інноваційних технологій, доктор фізико-математичних наук (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка).

***Відповідальний за випуск:***

**Стахів Лілія Григорівна** – кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри педагогіки і методики початкової освіти факультету початкової та мистецької освіти (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка).

*Ковальчук В.Ю., Білецька Л.С., Стасів Н.І., Силюга Л.П.*

**К 25** **Математика. Частина ІІ. Числові множини :** [для студентів ЗВО] / *В.Ю. Ковальчук, Л.С. Білецька, Н.І. Стасів, Л.П. Силюга* – Дрогобич : Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, 2019. – 172 с.

Навчально-методичний посібник написано відповідно до програми курсу «Математика» для підготовки фахівців першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 013 «Початкова освіта» галузі знань 01 «Освіта/Педагогіка».

Посібник містить виклад основних теоретичних положень курсу математики, які розкриваються через конкретні приклади. Запропонована у посібнику система завдань для самостійної роботи студентів підібрана відповідно до вимог програми з математики з метою забезпечення високого рівня сформованості предметних компетентностей студентів, розвитку мислення та математичної культури майбутнього вчителя початкової школи.

Бібліографія 10 назв.

# ЗМІСТ

# ВСТУП

Поняття числа є одним з основних у математиці. З його допомогою математика та інші науки вивчають об'єктивні закономірності реального світу. Виникнення чисел у житті не є випадковістю. Важко уявити собі спілкування без використання чисел. Історія чисел захоплююча й загадкова. Людство встановило низку законів і закономірностей світу чисел, розгадало деякі таємниці буття, а тепер застосовує свої відкриття у повсякденному житті.

Виникнення поняття натурального числа – питання загальної історії культури. Поняття «число» склалося у результаті складного й довгого історичного шляху розвитку, у процесі розв'язання практичних і теоретичних завдань, що постійно ускладнювалися.

У другій половині XIX ст., коли наука про число досягла певного рівня розвитку, виникла необхідність у логічному обґрунтуванні поняття числа, у систематизації того, що з ним пов'язано. Так, постала необхідність створення науки про число і була розроблена аксіоматична теорія натурального числа.

Термін «натуральне число» вперше використав римський філософ і математик А.Боецій (пл. 475–525р.р.). Поняттям «натуральне число» в сучасному розумінні послідовно користувався видатний французький математик, філософ-просвітитель Даламбер (1717–1783 рр.).

Виникнення поняття натурального числа було одним із найважливіших моментів у процесі розвитку математики. З'явилася можливість вивчати числа незалежно від тих конкретних задач, у зв'язку з якими вони виникли. Так виникла теоретична наука про числа, яку назвали арифметикою. Арифметика (від грецького arithmos – число) – частина математики, яка вивчає найпростіші властивості чисел, насамперед натуральних і дробових, та дії над ними. Розвиток арифметики зумовив виокремлення з неї окремого розділу науки – алгебри і теорії чисел. Сьогодні властивості натуральних чисел, дії над ними вивчаються розділом математики, що має назву «теорія чисел».

# 8. Аксіоматичний та теоретико-множинний підходи до поняття цілого невід'ємного числа

## 8.1. Аксіоматична побудова математичної теорії

Кожна математична теорія вивчає деяку математичну структуру, тобто деяку множину, елементи якої можуть перебувати у певних відношеннях і володіти певними властивостями. Зміст теорії полягає в означенні певних понять і відношень та доведенні властивостей об'єктів цієї теорії й відношень у ній.

Проте зрозуміло, що неможливо дати означення усіх понять, бо кожне означення зводить одне поняття до інших, вже відомих. Так само неможливо довести всі властивості, бо доведення нових полягає у використанні уже відомих.

Тому спочатку у побудові певної теорії необхідно вибрати основні об'єкти, яким не дають чіткі наукові означення, і основні відношення між ними, сформулювати деякі їхні властивості, що приймаються у цій теорії без доведення, у вигляді тверджень, які називаються аксіомами. На цій основі кожне нове поняття уводиться з допомогою попередніх означень, а наступні властивості об'єктів і відношень між ними вже не приймаються без доведення, а формулюються у вигляді тверджень, які називаються теоремами і доводяться на основі аксіом чи відомих доведених тверджень.

Такий метод побудови математичних теорій називають **аксіоматичним.**

**Аксіоматична побудова математичної теорії** має такі етапи:

1. Визначення **основного елемента чи елементів**, які вивчаються у цій теорії. Вони неозначувані, первісні, їх ми лише тлумачимо, пояснюємо. Кожне поняття, яке не є у списку основних, має бути строго визначеним через означення.
2. Визначення **основного відношення,** тобто відношення між основними елементами.

3. Формулювання основних тверджень про властивості основних елементів і відношень між ними – **аксіом,** які приймаються без доведення.
4. Формулювання нових тверджень про властивості понять і відношень між ними – **теорем,** які строго доводяться на основі аксіом і раніше доведених теорем.

Загалом під **аксіоматичною теорією** розуміють сукупність усіх теорем, які доводяться, виходячи з системи аксіом. В аксіоматичній теорії аксіоми не доводяться (для їх доведення у цій теорії немає вихідного матеріалу), але це не означає, що їх можна довільно формулювати. Аксіоми, зазвичай, є відображенням багатовікової практичної діяльності людей, цим і зумовлюється їхня істинність. Вибір системи аксіом у певній аксіоматичній теорії є справа умовна: одне і те ж твердження теорії може бути аксіомою, якщо воно так вибране, а може виступати і в якості теореми, якщо вибір аксіом здійснений інакше. Якщо за терміном «аксіома» в повсякденному житті утвердився його первісний зміст (у перекладі з грецької «аксіома» означає «гідний визнання»), а саме зміст очевидної, безумовної істини, то в математиці при побудові аксіоматичної теорії, аксіоми умовні. Вони «гідні визнання» не самі собою, не через їх самоочевидну істинність, а тому що на їхній основі будується та чи та аксіоматична теорія. При новому виборі системи аксіом попередні аксіоми стають теоремами. Коротко кажучи, аксіоми – це те, на основі чого доводяться теореми, а теореми – це те, що доводиться з аксіом.

**Означення.** ***Системою аксіом*** *певної теорії називається сукупність тверджень про її основні поняття, що приймаються без доведення.*

Система аксіом певної теорії не є однозначною. Щоб бути основою теорії, система аксіом має задовольняти низку **вимог:**

1) **повнота:** за допомогою аксіом даної системи можна довести або заперечити будь-яке твердження, висловлене у термінах цієї системи;

2) **несуперечливість:** за допомогою аксіом цієї системи не можна довести двох тверджень, які суперечать одне одному;

3) **незалежність:** жодна з аксіом системи не має бути наслідком іншої аксіоми цієї системи, тобто випливати з неї.

Першою спробою аксіоматичної побудови математики був виклад геометрії, здійснений у III ст. до н.е. в Стародавній Греції в книзі «Начала» Евкліда (пл. 340–287 до н.е.). Протягом двох тисячоліть цей твір вважався зразком викладу математичної теорії і не втратив свого значення: на евклідовій геометрії (шкільний курс геометрії) базується класична і прикладна механіка. Він звів у систему всі нагромаджені відомості з геометрії того часу, доповнив їх результатами своїх досліджень.

З історії математики відомо, що знаний вчений М.І. Лобачевський (1792–1856) змінив одну з аксіом евклідової геометрії і обґрунтував нову теорію – неевклідову геометрію, яка на його честь називається геометрією Лобачевського.

Сучасний підхід до аксіоматичної побудови математичної теорії сформувався лише наприкінці XIX ст. завдяки працям італійського математика Дж.Пеано (1858–1932), присвяченим основам математики (арифметика натуральних чисел, математична логіка) та німецького математика Д.Гільберта (1862–1943), присвяченим основам геометрії (аксіоматична побудова евклідової геометрії).

Згідно з сучасною аксіоматичною побудовою математичної теорії треба:

1) задати деяку множину M основних об'єктів теорії;
2) задати перелік основних відношень і операцій, визначених у множині M;
3) сформулювати аксіоми про основні властивості цих відношень і операцій.

Часто при цьому ще зазначають певні елементи множини M (виділені елементи), які мають деякі особливості, що виокремлюють їх серед інших елементів. Так, наприклад, при побудові геометрії за основні, неозначувані об'єкти можна взяти поняття «точка», «пряма», «площина», а за основні відношення між ними – відношення належності. При цьому природа основних об'єктів не має ніякого значення, істотним є лише те, що вони задовольняють певну систему аксіом. Усі інші поняття геометрії уводяться у вигляді означень, які формулюють через родове поняття і видову відмінність, а їхні властивості формулюють у вигляді теорем та доводять їх.

## 8.2. Аксіоматичне означення натурального числа. Аксіоми Пеано

В основі аксіоматичного підходу до поняття цілого невід'ємного числа є система аксіом, яка була запропонована в 1891 році італійським математиком Д. Пеано. За три роки до цього німецький математик Р. Дедекінд розробив основні ідеї, покладені в основу цієї аксіоматики.

Зазначимо, що при аксіоматичній побудові множини натуральних чисел не можна вважати відомими їхні властивості. Все, що ми знаємо про цю множину, це те, що сказано в її означенні і сформульовано у вигляді аксіом; ми поки що не маємо ні системи нумерації, ні, наприклад, рівностей вигляду 2+2 = 4 або 2 · 3 = 6. Числа, які використовують у нумерації теорем або означень, розглядаємо як символи, що дають змогу відрізняти одну теорему від іншої.

За основні поняття аксіоматичної побудови множини натуральних чисел прийнято:

1) основні об'єкти – одиниця, натуральне число;

2) основні відношення – «безпосередньо слідувати за».

Система аксіом для цих основних понять і відношень складається з чотирьох аксіом – **аксіом Пеано:**

***Аксіома 1.*** *У множині N існує елемент, який безпосередньо не слідує ні за яким елементом цієї множини, який називають одиницею.*

***Аксіома 2.*** *Яким би не був елемент **a** з множини N завжди існує один і тільки один елемент **a'**, який безпосередньо слідує за елементом a, тобто*

$$(\forall \mathbf{a} \in \mathbf{N}) \quad (\exists !\, \mathbf{a}' \in \mathbf{N}).$$

***Аксіома 3.*** *Яким би не був елемент **a** з множини N, відмінний від одиниці, існує один і тільки один елемент, за яким слідує безпосередньо елемент **a**, тобто*

$$(\forall \mathbf{a} \in \mathbf{N} \wedge \mathbf{a} \neq \mathbf{1})\ (\exists !\, \mathbf{b} \in \mathbf{N})\ \mathbf{b}' = \mathbf{a}.$$

***Аксіома 4 (аксіома індукції).*** *Якщо підмножина **M** множини **N** має такі дві властивості:*

*1) містить одиницю;*

*2) якщо вона містить довільний елемент **a**, то вона містить і елемент **a'**,*

*який безпосередньо слідує за ним;*

*то ця множина **M** збігається з множиною натуральних чисел **N**, тобто*

$$(\mathbf{M} \subset \mathbf{N} \wedge \mathbf{1} \in \mathbf{M} \wedge (\forall\, \mathbf{a} \in \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{a'} \in \mathbf{M})) \Rightarrow \mathbf{M}=\mathbf{N}.$$

**Означення (аксіоматичне означення натурального числа).** *Множина N, для елементів якої встановлено відношення «безпосередньо слідувати за», яке задовольняє аксіоми Пеано 1–4, називається **множиною натуральних чисел**, а її елементи – **натуральними числами**.*

Аксіома 1 вказує, що ряд натуральних чисел починається з числа 1, тому воно є найменшим натуральним числом. Аксіома 2 вказує, що за кожним натуральним числом безпосередньо слідує єдине натуральне число. Аксіома 3 вказує, що кожне натуральне число, крім числа 1, безпосередньо слідує за єдиним натуральним числом. Аксіома 4 описує нескінченність множини N, тобто найбільшого натурального числа не існує.

**Означення.** *Якщо виконується умова a' = b, тобто число b безпосередньо слідує за числом a, то число a називається **попереднім** для числа b,.*

Систему аксіом Пеано задовольняє не лише множина натуральних чисел, тобто **натуральний ряд чисел: 1, 2, 3, 4, 5, … .** Основне поняття «одиниця» і відношення «безпосередньо слідувати за» можна визначати іншим способом. Якщо система аксіом Пеано задовольняється, то множині основних об'єктів можна дати інші тлумачення.

**Означення.** ***Моделлю системи аксіом*** *називається множина конкретних об'єктів, між якими встановлюються певні відношення, які задовольняють систему аксіом.*

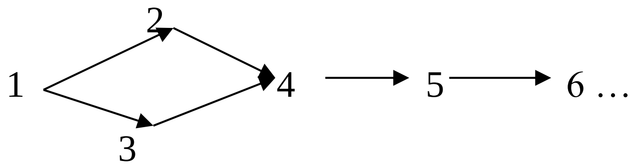
Наприклад:

1. а) «одиниця» – довільне ціле число а>1;

б) «безпосередньо слідувати за» – дорівнювати квадрату попереднього числа;

в) «натуральне число» – степінь числа а, показник якого є цілим невід'ємним степенем числа 2. Тоді моделлю системи аксіом буде ряд: $a, a^2, a^4, a^8, a^{16}, \ldots$ , де а>1.    Якщо а = 5 матимемо:  $5, 5^2, 5^4, 5^8, 5^{16}, \ldots$ .

2. Множина елементів і відношення між ними зображені на рисунку. Така множина не може бути моделлю системи аксіом, бо порушуються аксіоми 2 і 3:




В аксіоматичній теорії число **нуль** уводиться як число, що стоїть перед числом 1 у натуральному ряді чисел і позначається символом **0.** Отже, **0' = 1**. Якщо приєднати до натурального ряду **N = {1, 2, 3, …}** число **0** і отримаємо так званий **розширений натуральний ряд** $\mathbf{N_0=N\cup\{0\}}$ – множину цілих невід'ємних чисел, $\mathbf{N_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}}$**.**

## 8.3. Метод математичної індукції

Індукцією називають метод дослідження, заснований на спостереженнях і досвіді, де відбувається перехід від одиничного до загального. Математична індукція – це особливий вид індукції, логічний висновок на основі аксіоми індукції, інших аксіом і раніше встановлених тверджень.

**Принцип математичної індукції:** *Якщо твердження P(n), де n є N, істинне для n=1, і з того, що воно істинне для n=k, де k – довільне натуральне число, слідує істинність його для безпосередньо наступного числа n=k', то це твердження істинне для будь-якого натурального числа n.*

На принципі математичної індукції (переходу від n до n+1) базується метод доведення тверджень ($\forall n \in N$) P(n), який називають **методом математичної індукції** і полягає у виконанні таких **кроків**:

*1) перевіряємо істинність твердження P(n) для n=1, тобто, що твердження P(1) – істинне висловлювання;*

*2) припускаємо істинність твердження P(n) для n=k, тобто, що твердження P(k) – істинне висловлювання;*

*3) доводимо істинність твердження P(n) для n=k' = k+l, тобто, що твердження P(k+ 1) – істинне висловлювання;*

*4) робимо висновок, що твердження P(n) істинне для довільного натурального числа n.*

Наведемо приклад використання методу математичної індукції для розв'язання завдання.

***Приклад.*** *Довести, що при будь-якому натуральному числі n справедлива рівність:*

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Використаємо метод математичної індукції:

1) для n=1 твердження істинне, бо $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$.

2) припустимо, що ця рівність справедлива, для n=k, тобто

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}.$$

де k – деяке натуральне число.

3) доведемо, що ця рівність буде справедлива і для n=k+l, тобто

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Справді, перетворюючи ліву частину цієї рівності, на підставі припущення 2) отримаємо, що

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Спростивши отриманий вираз, маємо:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$
$$=\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Отже,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Таким чином, внаслідок принципу математичної індукції ця рівність справедлива для будь-якого натурального числа n.

Аксіоматичний підхід до теорії натуральних чисел не розглядається ні в початковій, ні в середній школі. Однак властивості відношення «безпосередньо слідувати за», які знайшли своє відображення в аксіомах Пеано, є предметом вивчення у початковій школі і використовуються у розв'язуванні вправ.

Уже в першому класі під час вивчення чисел першого десятка з'ясовують, як отримується кожне натуральне число. Широко використовуються поняття «слідує» й «передує». Довільне натуральне число може бути отримане прилічуванням до попереднього 1, або відлічуванням 1 від числа, яке при лічбі йде за ним. Учні вивчають у початкових класах, що за кожним числом іде наступне, і при тому тільки єдине; що перед кожним числом, відмінним від одиниці, є єдине число; що найменше натуральне число 1; що найбільшого натурального числа не існує. Учні вивчають натуральні числа поступово і загалом у них формується поняття про натуральний ряд чисел, який є нескінченним. Кожне нове число з самого початку вивчають як продовження вивченого відрізка натурального ряду чисел. Учні мають уміти назвати для певного числа його сусіди у натуральному ряді тощо.

## 8.4. Теоретико-множинний зміст натурального числа і нуля

При аксіоматичній побудові натурального ряду чисел основним було відношення безпосереднього слідування, внаслідок чого отримали впорядковану множину N – натуральний ряд чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … . Такий підхід є цілком природним абстрагуванням від процесу нумерування предметів, при якому предметам ставлять у відповідність послідовні натуральні числа (нумерують будинки на вулицях, квартири в будинках, абонементи в бібліотеці, вагони в поїзді тощо). При цьому натуральні числа характеризують лише порядок їх слідування. Тому аксіоматичну теорію натуральних чисел часто називають **теорією порядкових натуральних чисел**, бо натуральні числа вказують на їх порядок розміщення (перший, другий, третій і т.д.), тобто відповідають на запитання «котрий за порядком?» у ряді чисел.

Проте на практиці натуральні числа виступають ще і в іншій ролі – вони використовуються для лічби предметів і відповідають на запитання «скільки?». Згідно з таким підходом побудову натурального ряду чисел називають **кількісною теорією або теорією кількісних натуральних чисел.** Її основоположником був творець теорії нескінченних множин німецький математик Георг Кантор (1845–1918). У побудові кількісної теорії натуральних чисел основним є **поняття скінченної множини.**

**Означення.** ***Відрізком натурального ряду*** *$N_a$ називається множина натуральних чисел, які не перевищують числа а, тобто* $N_a = \{n \mid n \in N, n \le a\}$.

Наприклад, $N_9 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $N_3 = \{1, 2, 3\}$, $N_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

**Означення.** *Дві множини A і B називаються* ***рівнопотужними (або еквівалентними),*** *якщо існує бієктивне відображення множини A на множину B (тобто між їхніми елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність), або обидві множини є порожні.*

**Означення.** *Множину називають* ***скінченною****, якщо вона або порожня, або рівнопотужна деякому відрізку натурального ряду чисел $N_a$.*

Розглянемо класи скінченних множин. Кожен такий клас містить множини, які всі між собою рівнопотужні, при цьому повністю абстрагуємося від природи елементів цих множин і цікавимося лише їхнім кількісним складом. Кожен клас розбиття деякої множини однозначно визначається заданням будь-якого його елемента – представника цього класу. У якості такого представника вибирають відповідний відрізок натурального ряду чисел.

Ці міркування підводять нас до такого означення.

**Означення.** ***Натуральним числом*** *називається клас рівнопотужних скінченних множин.*

Якщо *a* – натуральне число, що відповідає деякому класу рівнопотужних скінченних множин, то кажуть, що кожна з цих множин має *a* елементів, тобто кожна з цих множин має потужність *a*. Якщо **множина А має потужність *a***, то це записують так: **n(A) = a.** Враховуючи ці міркування, можемо дати таке означення натурального числа.

**Означення.** ***Натуральним числом*** *називається потужність непорожньої скінченної множини.*

У кількісній теорії натуральне число розглядається як кількісна характеристика (загальна властивість) деякого класу скінченних рівнопотужних між собою множин, тобто як те спільне, незмінне (інваріант), що характеризує всі множини цього класу, незалежно від природи їх елементів, тобто **натуральне число – це спільна властивість скінченних рівнопотужних множин.** Кожному їх класу відповідає одне і тільки одне натуральне число і навпаки.

Отже, кожній скінченній множині відповідає одне і тільки одне число, яке виражає її потужність, але кожному натуральному числу відповідає не одна, а скільки завгодно скінченних рівнопотужних множин, які утворюють один клас.

**Означення.** ***Число нуль*** *– це клас, який містить усі порожні множини, тобто число 0 є кількісною характеристикою порожньої множини (множини, що не містить жодного елемента) і* **n(Ø) = 0.**

Розглядають множину $N_0$, яка є об'єднанням множини натуральних чисел та множини, що має елементом єдине число 0, тобто $\mathbf{N_0 = N \cup \{0\}}$**.** Цю множину називають **розширеним натуральним рядом чисел**. Елементи множини $N_0$ називають **цілими невід'ємними числами**.

Наприклад, числу 5 відповідають різні множини, але спільним для них усіх є тільки одне – потужність кожної з них дорівнює 5, а саме:

$A_1$ – множина сторін п'ятикутника; $A_2$ – множина вершин п'ятикутника;

$A_3$ – множина букв у слові «ручка»; $A_4$ – множина пальців руки тощо.

Коли учні вивчають число «один», у підручнику наводяться зображення одноелементних множин: одна квітка, один кубик, один м'ячик тощо; коли вивчають число «три», розглядають множини, що містять три елементи: три яблука, три грибочки тощо. Це відбувається під час вивчення всіх чисел першого десятка, але число елементів у множині кожного разу визначається шляхом переліку.

Взаємно однозначне відображення множини А на відрізок $N_a$ розуміють як нумерацію елементів множини А. Цей процес нумерації називають **рахунком або лічбою**. Треба навчити учні дотримуватися таких **правил лічби**: *першим може бути довільний елемент множини, але жоден з них не може бути пропущеним чи названим двічі.*

Під час перелічування елементи скінченної множини не лише розміщуються у певному порядку, але і встановлюється також, скільки елементів містить множина. У першому випадку натуральне число є порядковим номером деякого елемента і тому називається порядковим числом. У другому випадку ми маємо число кількісне. Ці дві ролі натуральних чисел відображаються українською мовою: порядкові натуральні числа виражаються числівниками **перший, другий, третій** і т. д., а кількісні – числівниками **один, два, три** і т. д. Тісний зв'язок порядкового і кількісного натурального числа виявляється у початковому курсі математики. Відбувається це у лічбі елементів різних множин. Аналіз суті лічби показує: для того, щоб вести рахунок, необхідно, мати достатній запас чисел.

## 8.5. Відношення порядку на множині цілих невід'ємних чисел. Дискретність множини $N_0$

Аксіоматична теорія натуральних чисел є теорією порядкових натуральних чисел. Ідея порядку закладена у відношенні «'безпосередньо слідувати за», але воно зачіпає тільки сусідні елементи. Порівняти два натуральні числа, які не є сусідніми, з допомогою цього відношення неможливо. Наприклад, про числа 5 і 9 не можна сказати, чи 5 слідує за числом 9, чи 9 слідує за числом 5. Це відбувається тому, що відношення «безносередньо слідувати за» не володіє властивістю транзитивності, а отже, не є відношенням порядку.

Оскільки **відношення «менше»** для натуральних чисел транзитивне, антирефлексивне і антисиметричне, то воно є **відношенням строгого порядку,** а множина натуральних чисел – **упорядкованою множиною.**

**Означення.** *Якщо для цих чисел $a,b \in N_0$ існує число $k \neq 0$, таке, що $a=b+k$, то кажуть, що «**a більше b**» або «**b менше a**» і записують $a>b$ або $b<a$.*

**Теорема 8.1.** *Для довільних натуральних чисел a і b виконується одне зі співвідношень: $a<b$, $a=b$, $b<a$.*

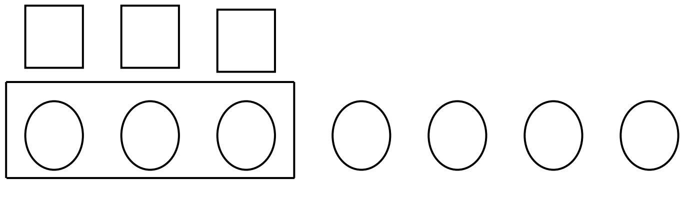
**Теорема 8.2.** *Не існує найбільшого натурального число, тобто*

$$(\forall a \in N_0)\ (\exists\ b \in N_0)\ b>a.$$

Оскільки $a'=a+1$, то для довільного натурального числа a маємо, що $a<a'$, $1<a'$. Отже, ми ще раз показали, що 1 є найменшим натуральним числом.

Встановлений зв’язок між скінченними множинами і числами дає можливість подати теоретико-множинне тлумачення **відношення між натуральними числами:** *число a менше, ніж число b ($a<b$) тоді і тільки тоді, коли відрізок натурального ряду чисел $N_a$ є власною підмножиною відрізка $N_b$.*

Наприклад, правильність нерівності $3<7$ випливає з того, що відрізок натурального ряду $N_3=\{1, 2, 3\}$ є підмножиною відрізка $N_7=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Це трактування можна проілюструвати так:



Ілюстрація вказує, як виконують порівняння чисел натурального ряду (особливо невеликих), використовуючи зв’язок чисел зі скінченними множинами: 3 – число квадратів, а 7 – число кругів, тому $3<7$, бо у другій множині можна виділити власну підмножину, яка рівнопотужна множинні квадратів, тобто множина кругів рівнопотужна відрізку $N_7$, а множина квадратів – відрізку $N_3$ і $N_3 \subset N_7$.

Нерівність 0<a, справедлива для довільного натурального числа a, пов'язана з тим, що порожня множина є підмножиною будь-якого відрізка натурального ряду чисел, тобто $\varnothing \subset N_a$.

**Означення.** *Якщо a = n(A) і b = n(B), то число* ***a менше, ніж число b****, тоді і тільки тоді, коли множина A рівнопотужна деякій власній підмножині множини B.*

**Властивості відношення «менше» для натуральних чисел** також пояснюються на основі теоретико-множинного тлумачення:

1) ***транзитивність*** – якщо a < b і b < c, то a < c.
(якщо $N_a \subset N_b$ і $N_b \subset N_c$, то $N_a \subset N_c$);
2) ***антисиметричність*** – якщо a < b, то $\overline{b < a}$.
(якщо $N_a \subset N_b$, то $\overline{N_b \subset N_a}$).

**Означення.** *Нехай A – упорядкована множина. Елементи $a \in A$ і $b \in A$ називаються* ***сусідніми****, якщо не існує такого елемента $c \in A$, що лежить між елементами a і b.*

**Означення.** *Множина A називається* ***дискретною****, якщо для кожного її елемента існує сусідній.*

Для жодного натурального числа *a* немає такого натурального числа n, що виконувалася умова a<n<a+1. Цю властивість називають **властивістю дискретності** множини натуральних чисел, а самі числа **a** і **a'** називають **сусідніми або сусідами.**

**Теорема 8.3.** *Розширений натуральний ряд є дискретною множиною.*

У початковому курсі математики порівняння чисел здійснюється різними способами. Під час вивчення чисел першого і другого десятка порівняння чисел відбувається також на основі того, що число, яке трапляється в натуральному ряді раніше, є меншим, ніж число, яке трапляється у натуральному ряді пізніше. Так 7<9, бо у рахунку 7 називають раніше, ніж 9. Цей спосіб порівняння чисел вимагає доброго знання послідовності чисел у натуральному ряді, а також неявного використання того факту, що $N_7 \subset N_9$. Цікавим є спосіб порівняння чисел, який базується на визначенні відношення «менше» через додавання: 7<9, бо 9=7+2.

У період ознайомлення з числами 1–10 порівняння чисел відбувається через використання наочності – порівнюються відповідні групи предметів. Наприклад, під час уведення запису 3<4 міркують так: візьмемо три червоні круги і чотири сині і кожен червоний круг накладемо на синій; бачимо, що синій круг залишився незакритим, отже, червоних кругів менше, ніж синіх, тому можна записати, що 3<4. На практиці порівняння чисел відбувається ще такими способами: накладанням, прикладанням, шляхом утворення пар тощо.

## 8.6. Додавання цілих невід'ємних чисел. Закони додавання. Таблиці додавання

За правилами побудови аксіоматичної теорії означення додавання натуральних чисел можна ввести, опираючись тільки на основні поняття цієї теорії.

**Аксіоматичне означення додавання натуральних чисел** складається з двох частин:

*1) додати до будь-якого натурального числа* ***a*** *одиницю, означає отримати число, що безпосередньо слідує за ним:*

$$(\forall\, a \in N) \qquad a + 1 = a'.$$

*2) додати до числа* ***a*** *число, що безпосередньо слідує за числом* ***b****, означає додати до числа* ***a*** *число* ***b*** *і взяти число, що безпосередньо слідує за сумою* ***a+b****:*

$$(\forall\, a,b \in N) \quad a+b' = (a+b)'.$$

Формули 1) і 2) у цьому означенні називаються **формулами Грассмана для додавання** (на честь німецького математика Г.Грассмана (1809–1877)).

Відшукання для цих двох чисел їх суми називається дією **додавання**. **Компоненти при додаванні такі**: **a + b = c,**

**a – перший доданок, b – другий доданок, c – сума.**

Використовуючи аксіоматичне означення додавання натуральних чисел, формул Грассмана для додавання можна скласти **таблиці додавання**

**одноцифрових чисел**. При їх складанні ми не використовуємо ні попереднього досвіду, ні попередніх знань, а тільки формули Грассмана для додавання. Складаються вони поетапно. При складанні таблиці додавання числа 1 використовується формула Грассмана для додавання 1). При складанні таблиць додавання чисел 2; 3;…; 9 використовується формула Грассмана для додавання 2).

| ***Додавання 1*** | ***Додавання 2*** |
|---|---|
| $1+1=1'=2;$ | $1+2=2+1=2'=3;$ |
| $2+1=2'=3;$ | $2+2=2+1'=(2+1)'=3'=4;$ |
| $3+1=3'=4;$ | $3+2=3+1'=(3+1)'=4'=5;$ |
| $4+1=4'=5;$ | $4+2=4+1'=(4+1)'=5'=6;$ |
| $5+1=5'=6;$ | $5+2=5+1'=(5+1)'=6'=7;$ |
| $6+1=6'=7;$ | $6+2=6+1'=(6+1)'=7'=8;$ |
| $7+1=7'=8;$ | $7+2=7+1'=(7+1)'=8'=9;$ |
| $8+1=8'=9;$ | $8+2=8+1'=(8+1)'=9'=10;$ |
| $9+1=9'=10.$ | $9+2=9+1'=(9+1)'=10'=11.$ |

Після введення **нуля** дія додавання доозначується для випадку, коли один із доданків нуль:

$$0+1 = 0' = 1,$$

$$0+a' = (0+a)' = a', \text{ тобто } \qquad 0+a = a.$$

За правилами побудови кількісної теорії означення додавання натуральних чисел можна ввести, опираючись тільки на основні поняття цієї теорії.

Нехай ми маємо деякі множини A і B такі, що:

$$A = \{a, b, c, d\} \qquad \text{і} \qquad B = \{k, l, m\}.$$

Зауважимо, що ці множини є такі, що не перетинаються, і потужності їх відповідно дорівнюють числам 4 і 3, тобто $n(A) = 4$, $n(B) = 3$, $A \cap B = \varnothing$.

Знайдемо об’єднання цих множин $A \cup B$ *(множину, яка складається з усіх тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одній із цих множин)* і його потужність:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, k, l, m\}, \qquad n(A \cup B) = 7.$$

Використавши правило суми для двох множин, що не перетинаються, отримаємо такий висновок: $4 + 3 = n(A) + n(B) = n(A \cup B) = 7$.

**Означення.** ***Сумою натуральних чисел a і b*** *називається натуральне число c, що є кількісною характеристикою множини C, яка є <u>об'єднанням скінченних множин A і B, які не перетинаються</u> і мають своїми кількісними характеристиками відповідно числа a і b, тобто*

$$\mathbf{a + b = c,\ \text{якщо}\ A \cup B = C\ \ \text{за умови}\ \ A \cap B = \varnothing,\ \ n(A) = a,\ \ n(B) = b,\ \ n(C) = c.}$$

Якщо одна з двох множин порожня, то, як відомо, об'єднанням цих двох множин буде друга з них, тобто якщо $A \cup \varnothing = A$, то $a + 0 = n(A) + n(\varnothing) = n(A \cup \varnothing) = = n(A) = a$. Звідси випливає, що $\mathbf{a + 0 = 0 + a = a}$.

Об'єднанням двох порожніх множин є порожня множина $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$, тому $0 + 0 = n(\varnothing) + n(\varnothing) = n(\varnothing \cup \varnothing) = n(\varnothing) = 0$. Звідси випливає, що $\mathbf{0 + 0 = 0.}$

**Теорема 8.4.** ***(теорема існування і єдиності суми***). *Сума будь-яких двох натуральних чисел є число натуральне і при тому єдине, тобто*

$$(\forall\, \mathbf{a, b} \in \mathbf{N}) \quad (\exists\, !\ \mathbf{c} \in \mathbf{N}) \qquad \mathbf{a + b = c.}$$

На основі означення суми натуральних чисел доводять **основні закони додавання:**

***1. Комутативний (переставний) закон:*** *Сума двох натуральних чисел не зміниться, якщо переставити доданки*:

$$(\forall\, \mathbf{a, b} \in \mathbf{N}) \qquad \mathbf{a + b = b + a.}$$

***2. Асоціативний (сполучний) закон:*** *Сума натуральних чисел не зміниться, якщо будь-які два або кілька доданків сполучити (об'єднати) і замінити їх сумою.*

$$(\forall\ \mathbf{a, b, c} \in \mathbf{N}) \qquad \mathbf{(a + b) + c = a + (b + c).}$$

***3. Закон монотонності:*** *До обох частин рівності або нерівності на множині натуральних чисел можна додати одне і те саме число:*

$$(\forall\, \mathbf{a, b, m} \in \mathbf{N}) \qquad \mathbf{a = b \Leftrightarrow a + m = b + m,}$$

$$(\forall\, \mathbf{a, b, m} \in \mathbf{N}) \qquad \mathbf{a > b \Leftrightarrow a + m > b + m,}$$

$$(\forall\, \mathbf{a, b, m} \in \mathbf{N}) \qquad \mathbf{a < b \Leftrightarrow a + m < b + m.}$$

У початковому курсі математики не всі ці закони додавання явно формулюються, але фактично використовуються всі. На конкретних прикладах учні переконуються у тому, що при додаванні двох натуральних чисел отримуємо натуральне число, до того ж єдине. Ця властивість поширюється на кількість доданків, більшу ніж два. Уже в першому класі у процесі розв'язування задач діти роблять висновок, що легше, наприклад, до числа 7 додати число 2, ніж до числа 2 додавати число 7. Це легко поясними, подавши учням задачу: В одному кутку приміщення лежало 7 ящиків, а в другому – 2 ящики. Потрібно скласти їх в один куток. Один учень швидко впорався із завданням: він переніс два ящики, поклав їх до семи. Другий же, навпаки, переніс сім ящиків у куток, де лежали два ящики. Який з цих учнів вчинив розумніше?

Вже в початкових класах учні розглядають **правила додавання числа до суми і суми до числа**, які є наслідком сполучного закону додавання, тобто

$$\mathbf{(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c).}$$

На основі цих правил учні розв'язують такі задачі:

**Задача.** *В одному кошику лежало 5 грибів, а у другому – 2. Маринка знайшла ще 3 гриби. Скільки всього грибів було у Маринки?*

І спосіб:

1) 5 + 2 = 7(гр.) лежало у двох кошиках,
2) 7 + 3 = 10(гр.) було у Маринки.

ІІ спосіб:

1) 5 + 3 = 8(гр.) стало у першому кошику,
2) 8 + 2 = 10(гр.) було у Маринки.

ІІІ спосіб:

1) 2 + 3 = 5(гр.) стало у другому кошику,
2) 5 + 5 = 10(гр.) було у Маринки.

В і д п о в і д ь: 10 грибів.

Кожен спосіб розв'язування учні записують за допомогою математичного виразу: (5 + 2) + 3 = 10; (5 + 3) + 2 = 10; 5 + (2 + 3) = 10 і роблять висновок: (5 + 2) + 3 = (5 + 3) + 2 = 5 + (2 + 3), який після розгляду ще кількох аналогічних задач узагальнюють як сполучний закон додавання.

Сполучний закон додавання є теоретичною основою додавання одноцифрового числа до двоцифрового і навпаки:

23 + 8 = 23 + (7 + 1) = (23 + 7) + 1 = 30 + 1 = 31.

Теоретичною основою додавання двоцифрових чисел є правило **додавання суми до суми**: ***(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d) = (a + d) + (b + c):***

32 + 44 = (30 + 2) + (40 + 4) = (30 + 40) + (2 + 4) = 70 + 6 = 76.

На основі цього правила учні розв'язують таку **задачу:** *У першому класі 17 дівчаток і 19 хлопчиків, а в другому — 13 дівчаток і 11 хлопчиків. Скільки учнів в обох класах?*

І спосіб:

1) 17 + 19 = 36(учн.) у першому класі,
2) 13 + 11 = 24(учн.) у першому класі,
3) 36 + 24 = 60(учн.) у двох класах.

ІІ спосіб:

1) 17 + 13 = 30(д.) у двох класах,
2) 19 + 11 = 30(хл.) у двох класах,
3) 30 + 30 = 60(учн.) у двох класах.

В і д п о в і д ь: 60 учнів.

Кожен спосіб розв'язування учні записують за допомогою математичного виразу: (17 + 19) + (13 + 11) = 60; (17 + 13) + (19 + 11) = 60 і роблять висновок: (17 + 19) + (13 + 11) = (17 + 13) + (19 + 11), який узагальнюють як правило додавання суми до суми.

Дією додавання розв'язуються **прості задачі таких типів:**

***1) задачі на знаходження суми***

***Задача.*** *У вазі було 5 червоних і 4 білих троянд. Скільки* ***всього*** *троянд було у вазі?*

***2) задачі на збільшення числа на кілька одиниць***

**Задача.** *Мотоцикліст подолав шлях за 2 години. А велосипедист витратив на цей шлях* ***на 2 години більше****. Скільки часу затратив велосипедист?*

*3) задачі на збільшення числа на кілька одиниць (непряма форма)*

**Задача.** *Мотоцикліст подолав шлях за 2 години.* ***Це на 2 години менше****, ніж витратив велосипедист. Скільки часу затратив велосипедист?*

Закони додавання широко використовуються для **обчислень значень виразів раціональними способами.** Наприклад:

$17 + 19 + 13 + 21 = 17 + 13 + 19 + 21 = (17+13) + (19+21) = 30 + 40 = 70;$
$127 + 18 + 73 = 127 + 73 + 18 = (127 + 73) + 18 = 200 + 18 = 218;$
$(32 + 48) + 52 = 32 + (48 + 52) = 32 + 100 = 132;$
$11 + (123 + 89) = (11 + 89) + 123 = 100 + 123 = 223;$
$3997 + 1586 = (3997 +3) + (1586 – 3) = 4000 + 1583 = 5583.$

## 8.7. Множення цілих невід'ємних чисел. Закони множення. Таблиці множення

За правилами побудови аксіоматичної теорії означення множення натуральних чисел можна ввести, опираючись на основні поняття цієї теорії та означення додавання.

**Аксіоматичне означення множення натуральних чисел** складається з двох частин:

1) *помножити довільне натуральне число **a** на одиницю, означає отримати те саме число **a**:*

$$(\forall a \in N) \qquad a \cdot 1 = a.$$

2) *помножити число **a** на число, що безпосередньо слідує за числом **b**, означає до добутку чисел **a** і **b** додати число **a**:*

$$(\forall a, b \in N) \qquad a \cdot b' = a \cdot b + a.$$

Формули 1) і 2) у цьому означенні називаються **формулами Грассмана для множення**. Формула 2) вказує, як помножити на число b', коли відомо, як помножити на число b.

Знаходження для двох чисел їх добутку називається дією **множення**. **Компоненти при множенні такі**: $a \cdot b = c$,

**a – перший множник, b – другий множник, c – добуток.**

За допомогою означення множення натуральних чисел, формул Грассмана для множення можна скласти **таблиці множення одноцифрових чисел**. Складаються вони поетапно. При складанні таблиці множення на число 1 використовується формула Грассмана для множення 1). При складанні таблиць множення чисел на 2; 3;…; 9 використовується формула Грассмана для множення 2).

| ***Множення на 1*** | ***Множення на 2*** |
|---|---|
| $1 \cdot 1 = 1;$ | $1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 = 2;$ |
| $2 \cdot 1 = 2;$ | $2 \cdot 2 = 2 \cdot 1' = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4;$ |
| $3 \cdot 1 = 3;$ | $3 \cdot 2 = 3 \cdot 1' = 3 \cdot 1 + 3 = 3 + 3 = 6;$ |
| $4 \cdot 1 = 4;$ | $4 \cdot 2 = 4 \cdot 1' = 4 \cdot 1 + 4 = 4 + 4 = 8;$ |
| $5 \cdot 1 = 5;$ | $5 \cdot 2 = 5 \cdot 1' = 5 \cdot 1 + 5 = 5 + 5 = 10;$ |
| $6 \cdot 1 = 6;$ | $6 \cdot 2 = 6 \cdot 1' = 6 \cdot 1 + 6 = 6 + 6 = 12;$ |
| $7 \cdot 1 = 7;$ | $7 \cdot 2 = 7 \cdot 1' = 7 \cdot 1 + 7 = 7 + 7 = 14;$ |
| $8 \cdot 1 = 8;$ | $8 \cdot 2 = 8 \cdot 1' = 8 \cdot 1 + 8 = 8 + 8 = 16;$ |
| $9 \cdot 1 = 9.$ | $9 \cdot 2 = 9 \cdot 1' = 9 \cdot 1 + 9 = 9 + 9 = 18.$ |

За правилами побудови кількісної теорії означення множення натуральних чисел можна ввести, опираючись тільки на основні поняття цієї теорії.

Існує **два підходи** до введення добутку натуральних чисел:

**1)** *через поняття декартового добутку двох множин;*

**2)** *через поняття суми рівних між собою доданків (натуральних чисел), що пов'язано з об'єднанням скінченних рівнопотужних між собою множин.*

Розглянемо кожний з цих підходів детальніше.

**1.** Нехай маємо дві множини A і B такі, що:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}, \quad n(A) = m, \qquad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}, \quad n(B) = k.$$

Знайдемо декартовий добуток цих множин $A \times B$ (*множину упорядкованих пар вигляду (a; b), де $a \in A$ і $b \in B$*) і зобразимо його у вигляді таблиці:

| B / A | $b_1$ | $b_2$ | … | $b_k$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $(a_1, b_1)$ | $(a_1, b_2)$ | … | $(a_1, b_k)$ |
| $a_2$ | $(a_2, b_1)$ | $(a_2, b_2)$ | … | $(a_2, b_k)$ |
| $\vdots$ | … | … | … | … |
| $a_m$ | $(a_m, b_1)$ | $(a_m, b_2)$ | … | $(a_m, b_k)$ |

Як бачимо, в цій таблиці є $m$ рядків, а в кожному рядку по $k$ елементів. Отже, всього у цій таблиці є $m \cdot k$ упорядкованих пар (елементів декартового добутку $A \times B$). За правилом декартового добутку для двох множин маємо:

$$\mathbf{m \cdot k = n(A) \cdot n(B) = n(A \times B).}$$

**Означення.** ***Добутком натуральних чисел m і k*** *називається натуральне число с, що є кількісною характеристикою множини С, яка є декартовим добутком множини А, що має m елементів, і множини В, що має k елементів*.

**2.** Нехай маємо $k$ непорожніх скінченних рівнопотужних множин $A_1$, $A_2$, …, $A_k$, які попарно не перетинаються, і кожна з яких має потужність $m$, тобто

$$(\forall i \neq j)\ A_i \cap A_J = \varnothing, \qquad n(A_1) = n(A_2) = ... = n(A_k) = m.$$

Тоді об'єднання цих множин $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ містить таку кількість елементів:

$$m \cdot k = n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + ... + n(A_k) = m + m + \ldots + m.$$

Отже, щоб знайти добуток двох натуральних чисел $m \cdot k$, потрібно знайти потужність об'єднання $k$ скінченних рівнопотужних множин, які попарно не перетинаються, і кожна з яких має потужність $m$.

**Означення.** ***Добутком натурального числа m на натуральне число k*** *називається сума k доданків, кожен з яких дорівнює m*:

$$\mathbf{m \cdot k = \underbrace{m + m + m + \ldots + m}_{k \text{ разів}}.}$$

У початкових класах поняття про дію множення вводять на конкретних задачах.

**Задача.** *Зошит коштує 3 грн. Скільки гривень коштують 5 таких зошитів?*

Не маючи ще уявлення про дію множення, діти записують розв'язання задачі дією додавання: 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15 (грн). Учитель звертає увагу на те, що так обчислювати і записувати довго навіть при такій невеликій кількості доданків. Якщо, наприклад, купили для класу 40 таких зошитів, то запис не поміститься навіть в один рядок. Такий запис є нераціональним, тому суму однакових доданків будемо записувати скорочено так: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 5 = 15$.

Дію знаходження суми однакових доданків будемо називати **дією множення,** а результат множення чисел – **добутком**. Число, яке беремо доданком, називається **першим множником**, а число, яке показує кількість доданків, – **другим множником.** Ці числа називаються **співмножниками.**

Оскільки декартовий добуток множини А і порожньої множини Ø (або навпаки) дорівнює порожній множині Ø, тобто $A \times Ø = Ø \times A = Ø$, то справедливі такі рівності:

$$a \cdot 0 = n(A) \cdot n(Ø) = n(A \times Ø) = n(Ø) = 0,$$

$$0 \cdot a = n(Ø) \cdot n(A) = n(Ø \times A) = n(Ø) = 0.$$

Отже, $\mathbf{a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.}$

Якщо виходити з означення множення як додавання рівних доданків, то множення нуля на число матиме той самий смисл: $0 \cdot a = \underbrace{0 + 0 + \ldots + 0}_{\text{а доданків}} = 0$.

Отже, $\mathbf{0 \cdot a = 0.}$

Щодо множення будь-якого числа *а* на нуль, то цей випадок потребує спеціального означення, оскільки немає смислу говорити про «повторення числа *а* доданком 0 разів».

**Означення.** *Добуток будь-якого натурального числа на нуль дорівнює нулю, тобто* $\mathbf{a \cdot 0 = 0.}$

Доцільність такого означення пояснюється на основі переставної властивості множення на випадок, коли один із співмножників є нулем:

$$\mathbf{a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.}$$

Оскільки декартовий добуток двох порожніх множин є порожня множина, тобто $Ø \times Ø = Ø$, то $0 \cdot 0 = n(Ø) \cdot n(Ø) = n(Ø \times Ø) = n(Ø) = 0$. Звідси випливає, що

$$\mathbf{0 \cdot 0 = 0.}$$

Цікаво зауважити, що залежно від того, яке з двох наведених означень дії множення приймемо, змінюється і теорія множення. Так, якщо прийняти означення множення як додавання рівних доданків, то слід ввести додаткове **означення множення на 1**: **a · 1 = a.** Це означення таке, щоб і для випадку, коли один із співмножників 1, зберігався комутативний закон множення. Адже за загальним означенням множення $1 \cdot a = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{a\ \text{разів}} = a$,

за додатковим означенням $a \cdot 1 = a$.Отже, $\mathbf{1 \cdot a = a \cdot 1 = a}$.

Якщо дати означення добутку натуральних чисел через поняття декартового добутку множин, то рівність $a \cdot 1 = a$ можна довести, виходячи з наступного означення.

**Теорема 8.5.** *Добуток натурального числа а на 1 дорівнює тому самому числу а, тобто* $\boldsymbol{a \cdot 1 = a}$.

**Теорема 8.6.** ***(теорема існування і єдиності добутку).*** *Добуток двох довільних цілих невід'ємних чисел є цілим невід'ємним числом. Він завжди існує і визначається однозначно, тобто*

$$(\forall\, \mathbf{a, b} \in \mathbf{N_0})\ (\exists!\, \mathbf{c} \in \mathbf{N_0})\quad \mathbf{a \cdot b = c}.$$

**Основні закони множення:**

***1. Комутативний (переставний) закон:*** *Добуток двох натуральних чисел не зміниться, якщо переставити співмножники:*

$$(\forall\, \mathbf{a, b} \in \mathbf{N}) \qquad \mathbf{a \cdot b = b \cdot a}.$$

***2. Асоціативний (сполучний) закон:*** *Добуток натуральних чисел не зміниться, якщо будь-які два або кілька співмножників сполучити (об'єднати) і замінити їх добутком.*

$$(\forall\, \mathbf{a, b, c} \in \mathbf{N}) \qquad \mathbf{a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c};$$

***3. Дистрибутивний (розподільний) закон множення відносно додавання***: *Щоб помножити суму на число (або навпаки), досить помножити на це число кожен доданок і результати додати:*

**лівий** $(\forall\, \mathbf{a, b, c} \in \mathbf{N}) \quad \mathbf{(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c};$

**правий** $(\forall\, \mathbf{a, b, c} \in \mathbf{N}) \quad \mathbf{c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b}.$

***4. Закон монотонності*: *Обидві частини рівності або нерівності на множині натуральних чисел можна помножити (або поділити) на одне і те саме число:*

$$(\forall\, \mathbf{a, b, m} \in \mathbf{N}) \qquad \mathbf{a = b \Leftrightarrow a \cdot m = b \cdot m,}$$

$$(\forall\, \mathbf{a, b, m} \in \mathbf{N}) \qquad \mathbf{a > b \Leftrightarrow a \cdot m > b \cdot m,}$$

$$(\forall\, \mathbf{a, b, m} \in \mathbf{N}) \qquad \mathbf{a < b \Leftrightarrow a \cdot m < b \cdot m.}$$

***Наслідок із закону монотонності множення:*** *На множині натуральних чисел рівності та нерівності однакового знаку можна почленно перемножувати:*

| | | |
|---|---|---|
| 1) Якщо $a = b$ | 2) Якщо $a > b$ | 3) Якщо $a < b$ |
| і $c = d$, | і $c > d$, | і $c < d$, |
| то $a \cdot c = b \cdot d$. | то $a \cdot c > b \cdot d$. | то $a \cdot c < b \cdot d$. |

***Наслідки із законів множення:***

1) *щоб помножити добуток на число або, навпаки, число на добуток, досить помножити на це число тільки один із співмножників добутку і результат помножити на інший співмножник:*

$$\mathbf{(a \cdot b \cdot c) \cdot d = (a \cdot d) \cdot b \cdot c = (b \cdot d) \cdot a \cdot c = (c \cdot d) \cdot a \cdot b}$$

2) *щоб помножити добуток на добуток, досить перегрупувати співмножники так, щоб було зручно для обчислень, і виконати всі дії за порядком:*

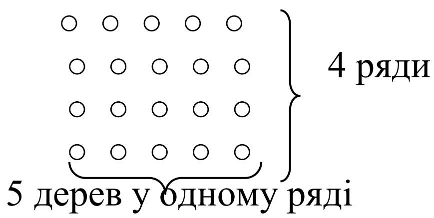
$$\mathbf{(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = (b \cdot d) \cdot (a \cdot c)}$$

3) *якщо один із співмножників збільшити (зменшити) у певну кількість разів, то і добуток їх збільшиться (зменшиться) у стільки ж разів:*

$$\mathbf{a \cdot b = c,\ \ n \in N \quad \Rightarrow \quad (a \cdot n) \cdot b = c \cdot n. \qquad a \cdot (b \cdot n) = c \cdot n.}$$

У початкових класах закони множення розглядають на конкретних задачах, а потім їх застосовують під час усних і письмових обчислень.

**Задача 1.** *Учні посадили біля школи 4 ряди дерев, по 5 дерев у кожному. Скільки всіх дерев посадили учні?*




Кількість дерев на схемі учні підраховують двома способами:

за рядками: $5 \cdot 4 = 20$ (дерев);

за стовпцями: $4 \cdot 5 = 20$ (дерев).

Учні роблять висновок: $5 \cdot 4 = 4 \cdot 5$, який узагальнюють як **переставну властивість множення** натуральних чисел.

**Задача 2.** *Щоб виростити саджанці дуба, учні посадили жолуді у 5 рядів, по 6 ямок у кожному. Скільки жолудів посадили учні, якщо у кожну ямку клали по 3 жолуді?*

I спосіб:

1) $3 \cdot 6 = 18$ (ж.) посадили учні на один рядок;
2) $18 \cdot 5 = 90$ (ж.) усього посадили учні.

II спосіб:

1) $6 \cdot 5 = 30$ (ям.) було усього;
2) $3 \cdot 30 = 90$ (ж.) усього посадили учні.

В і д п о в і д ь: 90 жолудів.

Кожен спосіб розв’язування учні записують за допомогою математичного виразу: $(3 \cdot 6) \cdot 5 = 90$; $3 \cdot (6 \cdot 5) = 90$ і роблять висновок: $(3 \cdot 6) \cdot 5 = 3 \cdot (6 \cdot 5)$, який узагальнюють як **сполучну властивість множення** натуральних чисел.

**Задача 3.** *Мама купила трьом дітям шапочки і шарфики. Скільки грошей заплатила вона за три комплекти, якщо шапочка коштує 25 грн, а шарфик – 12 грн?*

I спосіб:

1) $25 + 12 = 37$ (грн) коштує один комплект (шапочка і шарфик);
2) $37 \cdot 3 = 111$ (грн) коштує вся покупка.

II спосіб:

1) $25 \cdot 3 = 75$ (грн) коштують три шапочки;
2) $12 \cdot 3 = 36$ (грн) коштують три шарфики;
3) $75 + 36 = 111$ (грн) коштує вся покупка.

В і д п о в і д ь: 111 грн.

Кожен спосіб розв'язування учні записують за допомогою математичного виразу: $(25 + 12) \cdot 3 = 111$; $25 \cdot 3 + 12 \cdot 3 = 111$ і роблять висновок: $(25 + 12) \cdot 3 = 25 \cdot 3 + 12 \cdot 3$, який узагальнюють як **розподільну властивість множення відносно додавання** натуральних чисел.

**Задача 4** ***(геометрична ілюстрація розподільної властивості множення).*** *Обчислити периметр прямокутника, якщо довжини його сторін дорівнюють 36 см і 24 см.*

Розв'язання (двома способами).

I спосіб: $(36 + 24) \cdot 2 = 60 \cdot 2 = 120$ (см).

II спосіб: $36 \cdot 2 + 24 \cdot 2 = 72 + 48 = 120$ (см).

В і д п о в і д ь: 120 см

Дією множення розв'язуються **прості задачі таких типів:**

***прості задачі на збільшення числа у кілька разів у прямій і непрямій формі:***

***1) задачі на знаходження добутку***

***Задача.*** *Яблука лежали на трьох тарілках, **по** 7 яблук **на кожній**. Скільки яблук лежало на цих тарілках?*

***2) задачі на збільшення числа у кілька разів***

**Задача.** *Дівчинка купила 2 альбоми, а зошитів **у** 6 **разів більше**. Скільки зошитів купила дівчинка?*

***3) задачі на збільшення числа у кілька разів (непряма форма)***

**Задача.** *Дівчинка купила 2 альбоми. **Це у** 6 **разів менше**, ніж зошитів. Скільки зошитів купила дівчинка?*

Закони множення широко використовуються для **обчислень значень виразів раціональними способами.** Наприклад:

$5 \cdot 456 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 456 = (5 \cdot 2) \cdot 456 = 10 \cdot 456 = 4560;$

$77 \cdot 88 + 77 \cdot 12 = \mathbf{77} \cdot (88 + 12) = 77 \cdot 100 = 7\,700;$

$36 \cdot 48 + 14 \cdot 48 = (36 + 14) \cdot 48 = 50 \cdot 48 = 50 \cdot (24 \cdot 2) = (50 \cdot 2) \cdot 24 =$

$= 100 \cdot 24 = 2\,400;$

$(7 \cdot 3 \cdot 15) \cdot 4 = 15 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 = (15 \cdot 4) \cdot 7 \cdot 3 = 60 \cdot 7 \cdot 3 = (60 \cdot 7) \cdot 3 = 420 \cdot 3 =$

$=1260;$

*(125 · 3) · (8 · 37) = (125 · 8) · (37 · 3) = 1 000 · 111 = 111 000;*

*124 · 50 = (62 ·2) ·50 = 62 · (2 · 50) = 62 ·100 = 6200;*

*888 · 125 = (888:8) · (125 · 8) = 111 · 1000 = 111000.*

## 8.8. Віднімання цілих невід’ємних чисел та його властивості

У множині натуральних чисел **дію віднімання вводять як обернену до дії додавання.**

**Означення.** ***Відніманням натуральних чисел*** *називається дія, яка числам a і b ставить у відповідність таке натуральне число* ***c****, що виконується рівність b+ c = a.*

***Компоненти при відніманні такі:*** $\boldsymbol{a - b = c,}$

***a – зменшуване, b – від’ємник, c – різниця.***

За правилами побудови кількісної теорії означення віднімання натуральних чисел можна ввести, опираючись тільки на основні поняття цієї теорії.

Нехай ми маємо деякі множини A і B такі, що:

$$A = \{a, b, k, l, m\} \quad \text{і} \quad B = \{k, l, m\}.$$

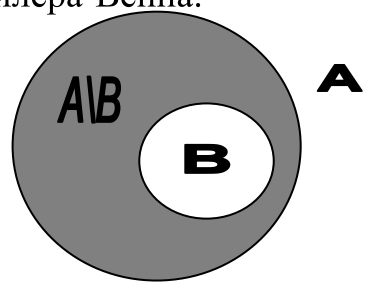
Зауважимо, що ці множини є такі, що множина B є підмножиною множини A, і потужності їх відповідно дорівнюють числам 5 і 3, тобто n(A) = 5, n(B) = 3, $B \subset A$.

Знайдемо різницю множин A і B (*множину, яка складається з усіх тих і тільки тих елементів, які належать множині A і не належать множині B*) і її потужність:

$$A \setminus B = \{a, b\}, \qquad n(A \setminus B) = 2.$$

Отримаємо такий висновок: $5 - 3 = n(A) - n(B) = n(A \setminus B) = 2.$

Правильність рівності $n(A) - n(B) = n(A \setminus B)$ легко бачити з діаграми Ейлера-Венна:




$A = B \cup (A \setminus B);$

$n(A) = n(B) + n(A \setminus B);$

$n(A) - n(B) = n(A \setminus B).$

**Означення.** ***Різницею натуральних чисел а і b*** *називається натуральне число с, що є кількісною характеристикою множини С, яка є* <u>*різницею скінченної множини А і її підмножини*</u> *і мають своїми кількісними характеристиками відповідно числа а і b, тобто*

**а – b = с, якщо А\В = С за умови В$\subset$А, n(A) = a, n(B) = b, n(C) = c.**

Оскільки різниця множини А і порожньої множини Ø дорівнює тій же ж множині А, тобто А\Ø = А, то а – 0 = n(А) – n(Ø) = n(А\Ø) = n(А) = а. **а – 0 = а.**

Оскільки різниця множини А із самою собою дорівнює порожній множині Ø, тобто А\А = Ø, то а – а = n(А) – n(А) = n(А\А) = n(Ø) = 0. Отже, **а – а = 0.**

Операція віднімання не є алгебраїчною операцією на множині $N_0$, оскільки вона не завжди виконувана. Це встановлено у такій теоремі, яка визначає умови виконуваності віднімання на множині $N_0$.

**Теорема 8.7.** *Різниця а – b на множині цілих невід'ємних чисел існує тоді і тільки тоді, коли а$\geq$b. Якщо різниця існує, то вона єдина.*

**Теорема 8.8.** *Різниця двох цілих невід'ємних чисел а і b не перевищує зменшуваного, тобто а – b ≤ а.*

Має місце **дистрибутивний (розподільний) закон множення відносно віднімання:** *Щоб помножити різницю на число (або навпаки), досить помножити на це число зменшуване і від'ємник і результати відняти:*

**лівий ($\forall$ a, b, c$\in$N) (a – b) · c = a · c –b · c;**

**правий ($\forall$ a, b, c $\in$N) c · (a – b ) = c · a – c · b.**

Вже у початкових класах учні розглядають **правила віднімання числа від суми, суми від числа, числа від різниці, різниці від числа або суми від суми:**

*1. Щоб* ***відняти число від суми чисел****, досить відняти його від одного з доданків:* ***(a + b) – c = (a – c) + b = (b – c) + a;***

*2. Щоб* ***відняти від числа суму чисел****, досить відняти від цього числа послідовно кожен доданок один за другим:* $\boldsymbol{a - (b + c) = (a - c) - b = (a - b) - c}$;

*3. Щоб* ***від різниці двох чисел відняти третє число****, досить від зменшуваного відняти суму двох інших чисел:* $\boldsymbol{(a - b) - c = a - (b + c)}$;

*4. Щоб* ***відняти від числа а різницю чисел b і с****, досить до даного числа а додати від'ємник с і від отриманого результату відняти зменшуване b; при a>b можна від числа а відняти зменшуване b і до отриманого результату додати від'ємник с:* $\boldsymbol{a - (b - c) = (a + c) - b = (a - b) + c}$;

*5. Щоб відняти суму від суми, досить відняти перші доданки і другі доданки даних сум і отримані різниці додати:*

$$\boldsymbol{(a + b) - (c + d) = (a - c) + (b - d) = (a - d) + (b - c).}$$

*6. Щоб* ***додати до числа а різницю b-c,*** *досить додати до числа а зменшуване b і від отриманого результату відняти число с, або від даного числа відняти число с і до отриманого результату додати число b:*

$$\boldsymbol{a + (b - c) = (a + b) - c = (a - c) + b.}$$

Ці правила є теоретичною основою віднімання одноцифрового числа від двоцифрового і віднімання двоцифрових та багатоцифрових чисел:

$34 - 9 = 34 - (4 + 5) = (34 - 4) - 5 = 30 - 5 = 25;$
$75 - 52 = (70 + 5) - (50 + 2) = (70 - 50) + (5 - 2) = 20 + 3 = 23;$
$487 - 256 = (400 + 80 + 7) - (200 + 50 + 6) = (400 - 200) + (80 - 50) + (7 - 6) =$
$= 200 + 30 + 1 = 231.$

На основі правил віднімання учні розв’язують такі задачі*:*

**Задача.** *На одній тарілці 7 груш, а на другій – 3. Мама взяла 2 груші. Скільки груш залишилося?*

І спосіб:

1) 7 + 3 = 10(гр.) на двох тарілках,
2) 10 – 2 = 8(гр.) залишилося.

ІІ спосіб:

1) 7 – 2 = 5(гр.) залишилося на першій тарілці,
2) 5 + 3 = 8(гр.)залишилося.

ІІІ спосіб:

1) $3 - 2 = 1$ (гр.) залишилося на другій тарілці,
2) $7 + 1 = 8$(гр.)залишилося.

В і д п о в і д ь*:* 8 груш.

Кожен спосіб розв'язування учні записують за допомогою математичного виразу: $(7 + 3) - 2 = 8$; $(7 - 2) + 3 = 8$; $7 + (3 - 2) = 8$ і роблять висновок: $(7 + 3) - 2 = (7 - 2) + 3 = 7 + (3 - 2) = 8$, який узагальнюють як правило ***віднімання числа від суми***: $(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$.

**Задача** . *У пеналі лежало 10 кольорових олівців. Катруся взяла 4 червоні олівці і 3 сині. Скільки олівців залишилось у пеналі?*

І спосіб:

1) $4 + 3 = 7$(ол.) взяла Катруся,
2) $10 - 7 = 3$(ол.) залишилося у пеналі.

ІІ спосіб:

1) $10 - 4 = 6$(ол.) залишилося у пеналі після того як Катруся взяла 4 червоні олівці,
2) $6 - 3 = 3$(ол.) залишилося у пеналі.

ІІІ спосіб:

1) $10 - 3 = 7$ (ол.) залишилося у пеналі після того як Катруся взяла 3 сині олівці,
2) $7 - 4 = 3$(ол.) залишилося у пеналі.

В і д п о в і д ь: 3 олівці.

Кожен спосіб розв'язування учні записують за допомогою математичного виразу: $10 - (4 + 3) = 3$; $(10 - 4) - 3 = 3$; $(10 - 3) - 4 = 3$ і роблять висновок: $10 - (4 + 3) = (10 - 4) - 3 = (10 - 3) - 4 = 3$, який узагальнюють як **правило віднімання суми від числа**: $\mathbf{a - (b + c) = (a - c) - b = (a - b) - c}$.

**Задача**. *У пеналі лежало 10 червоних і 15 синіх олівців. Катруся взяла 4 червоні олівці і 3 сині. Скільки олівців залишилось у пеналі?*

І спосіб:

1) $10 + 15 = 25$(ол.) лежало у пеналі,
2) $4 + 3 = 7$(ол.) взяла Катруся,
3) $25 - 7 = 18$(ол.) залишилось у пеналі.

ІІ спосіб:

1) $10 - 4 = 6$(ол.) червоних залишилось у пеналі,

2) 15 – 3 = 12(ол.) синіх залишилось у пеналі,
3) 6 + 12 = 18(ол.) залишилось у пеналі.

В і д п о в і д ь: 18 олівців.

Кожен спосіб розв'язування учні записують за допомогою математичного виразу: (10 + 15) – (4 + 3) = 18; (10 – 4) + (15 – 3) = 18 і роблять висновок: (10 + 15) – (4 + 3) = (10 – 4) + (15 – 3) = 18, який узагальнюють як **правило віднімання суми від суми: (a + b) - (c + d) = (a – c) + (b – d).**

**Основна властивість різниці:** *якщо зменшуване і від'ємник одночасно збільшити або зменшити на одне і те ж число, то різниця не зміниться:*

**a – b = (a + m) – (b + m) = a + m – b – m = a – b;**

**a – b = (a – m) – (b – m) = a – m – b + m = a – b.**

На цій властивості заснований **прийом обчислення – одночасне заокруглення зменшуваного і від'ємника.** Наприклад:

21 006 – 5 006 = (21 000 + 6) – (5 000 + 6) = 21 000 – 5 000 = 16 000;

3 323 – 1 123 = (3323– 123) – (1123 – 123) = 3 200 – 1 000 = 2 200.

Дією віднімання розв'язуються **прості задачі таких типів:**

***1. задачі на знаходження різниці***

***Задача.*** *У вазі було 9 троянд. 5 троянд забрали з вази. Скільки троянд* ***залишилося*** *у вазі?*

***2. задачі на зменшення числа на кілька одиниць***

***Задача.*** *Велосипедист проїхав шлях за 4 години. А мотоцикліст затратив* ***на 2 години менше****. Скільки часу затратив мотоцикліст?*

***3. задачі на зменшення числа на кілька одиниць (непряма форма)***

***Задача.*** *Велосипедист подолав шлях за 4 години.* ***Це на 2 години більше****, ніж мотоцикліст. Скільки часу затратив мотоцикліст?*

***4. задачі на різницеве порівняння чисел***

***Задача.*** *Мотоцикліст проїхав шлях за 2 години, а велосипедист за 4 години.* ***На скільки більше*** *часу затратив велосипедист, ніж мотоцикліст?*

***Задача.*** *Мотоцикліст проїхав шлях за 2 години, а велосипедист за 4 години.* ***На скільки менше*** *часу затратив мотоцикліст, ніж велосипедист?*

Властивості віднімання широко використовуються для **обчислень значень виразів раціональними способами.** Наприклад:

*(59 + 158) – 58  = (158 – 58) +  59 = 100 + 59 = 159;*
*324 – (55 +124) = (324 – 124) – 55 = 200 – 55 =145;*
*(145 – 20) – 25 = 145 – (20 +25) = 145 – 45 = 100;*
*165 – (88 – 23) = (165 + 23) – 88 = 188 – 88 = 100;*
*(135 + 321) – (21 + 35) = (135 – 35) + (321 – 21) = 100 + 300 = 400;*
*326 + (77 – 26) = (326 – 26) + 77 = 300 + 77 = 377.*

## 8.9. Ділення цілих невід’ємних чисел та його властивості

Подібно до введення віднімання як операції, оберненої до дії додавання, ділення вводиться як операція, обернена до дії множення.

**Означення.** ***Діленням натурального числа а на натуральне число b*** *називається дія, яка полягає у знаходженні такого натурального числа с, щоб виконувалась рівність:  а = b · с.*

***Компоненти при діленні такі:***        ***а : b = с,***

***а – ділене,***      ***b – дільник,***      ***с – частка.***

**Теорема 8.9.** *Для існування частки* $\frac{a}{b}$ *(*$a\neq 0,\ b\neq 0$*) необхідно (але не достатньо), щоб виконувалась умова* $a\geq b$*.  Якщо частка існує, то вона єдина.*

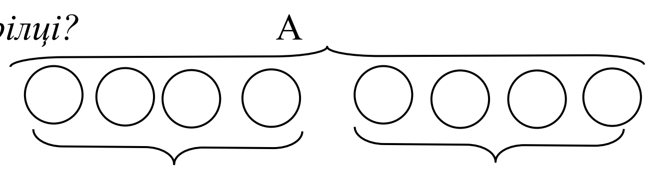
Легко показати, що умова $a\geq b$ не є достатньою  для існування частки $\frac{a}{b}$.

Нехай, наприклад, а=3, b=2; покажемо, що не існує такого натурального числа с, що 2·с = 3. Справді, якщо таке с існує, то 3 = 2·с,  2·с >1·с,  1·с  = с, тобто 3>с. Отже, може бути лише с=1 або с=2, але 2·1=2, 2·2=4.

Практично дія ділення використовується під час розв’язування двох основних **типів задач**:

***1. Задачі на поділ на рівні частини***

**Задача.** *Дівчинка розклала 8 груш на дві тарілки* ***порівну****. Скільки груш на кожній тарілці?*



$A_1$ $A_2$

$n(A) = 8$; $A = A_1 \cup A_2$; $n(A_1) = n(A_2)$ – ?

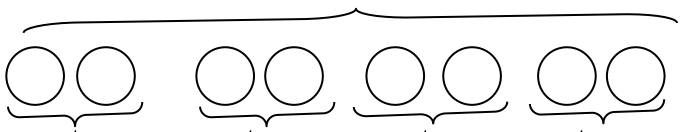
Р о з в ’ я з а н н я: 8 : 2 = 4(гр.).

В і д п о в і д ь: 4 груші.

***2. Задачі на вміщення***

**Задача.** *Дівчинка розклала 8 груш на тарілки,* ***по 2 груші на кожну****. Скільки тарілок із грушами?*

A



$A_1$ $A_2$ $A_3$ $A_4$ .

$n(A) = 8$; $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = n(A_4) = 2$, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

Р о з в ’ я з а н н я: 8 : 2 = 4(т.).

В і д п о в і д ь: 4 тарілки.

***Теоретико-множинний зміст задач першого виду***: скінченну множину А треба розбити на задане число скінченних рівнопотужних між собою підміножин, які попарно не перетинаються, і визначити потужність цих підмножин.

***Теоретико-множинний зміст задач другого виду:*** у скінченній множині А виділяють скінченні рівнопотужні між собою підмножини, які попарно не перетинаються, заданої потужності, і визначити кількість таких підмножин.

Із означення $a \cdot 1 = a$ випливає, що:

*а) частка від ділення натурального числа а на 1 дорівнює числу а, тобто*

$$\mathbf{a : 1 = a;}$$

*б) частка від ділення натурального числа а самого на себе дорівнює 1, тобто*

$$\mathbf{a : a = 1.}$$

Поширюючи означення ділення на випадок, коли ділене нуль, маємо

**0 : а = 0**, оскільки $0 = 0 \cdot a = 0$.

Дія а : 0 неможлива, оскільки немає такого числа с, щоб виконувалась умова $a = c \cdot 0$, коли $a \neq 0$ (ліва частина $a \neq 0$, а права — $c \cdot 0 = 0$).

Дія 0 : 0 невизначена, оскільки будь-яке число *с* задовольняє умову $0=c\cdot 0$.

На основі означення дії ділення та властивостей множення натуральних чисел неважко встановити **правила ділення суми, різниці, добутку й частки на число та ділення числа на добуток і на частку.**

***1. Розподільний закон ділення відносно суми.*** *Щоб поділити суму на число, досить поділити на це число кожний доданок і добуті результати додати:*

$$(a + b) : c = a : c + b : c.$$

Цю властивість можна поширити на будь-яке число доданків:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) : b = a_1 : b + a_2 : b + \ldots + a_n : b.$$

***2. Розподільний закон ділення відносно різниці***. *Щоб поділити різницю на число, досить поділити на це число зменшуване і від'ємник і від першого результату відняти другий*:

$$(a - b) : c = a : c - b : c.$$

Цю властивість можна поширити на будь-яке число елементів різниці:

$$(a_1 - a_2 - \ldots - a_n) : b = a_1 : b - a_2 : b - \ldots - a_n : b.$$

***3. Ділення добутку на число***. *Щоб поділити добуток на число, досить поділити на це число один із співмножників і результат помножити на другий співмножник:* $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = (b : c) \cdot a.$

***4. Ділення числа на добуток***. *Щоб поділити деяке число на добуток, досить поділити це число на один із співмножників добутку і знайдену частку поділити на другий співмножник:* $a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b.$

**5.** ***Ділення частки на число***. *Щоб поділити частку на число, досить поділити на це число ділене, а знайдений результат поділити на дільник, або помножити дільник на це число, а потім ділене поділити на одержаний добуток:*

$$(a : b) : c = (a : c) : b = a : (b \cdot c).$$

**6.** ***Ділення числа на частку.*** Щоб поділити деяке число а на частку від ділення двох чисел, досить поділити це число на ділене і результат помножити на дільник: $a : (b : c) = (a : b) \cdot c = (a \cdot c) : b.$

Мають місце такі **властивості частки**:

1) $(a \cdot b) : (b \cdot c) = a : c$;
2) $(a : c) : (b : c) = a : b$;
3) $(a : b) \cdot (c : d) = (a \cdot c) : (b \cdot d)$;
4) $(a : b) : (c : d) = (a \cdot d) : (b \cdot c)$.

Теоретико-множинний зміст властивостей та правил ділення можна наочно розкрити на конкретних задачах.

**Задача.** *Діти виготовили на ялинку до Новорічного свята 12 зірочок і 18 сніжинок. Вони подарували їх малятам трьох груп дитячого садка порівну. Скільки іграшок отримали малята кожної групи?*

Розв'язання.

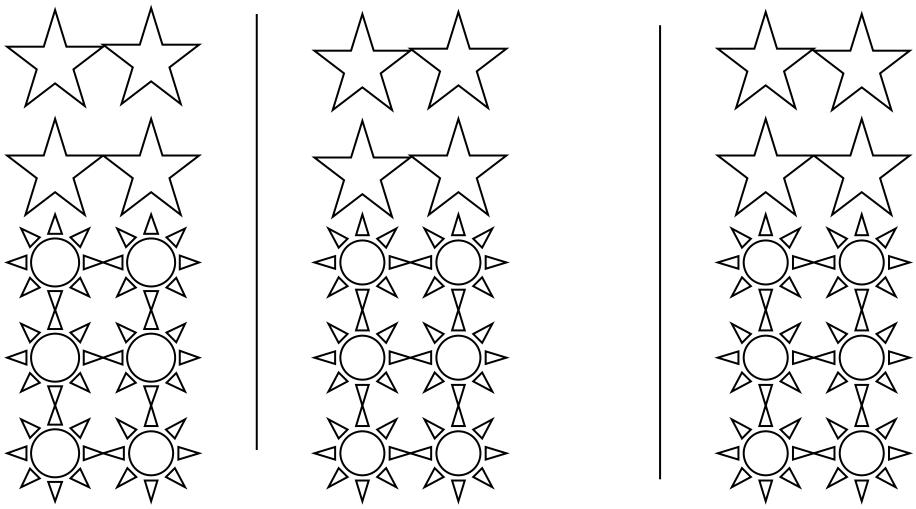
I с п о с і б: (12 + 18) : 3 = 30 : 3 = 10 (ігр.)

Спочатку дізналися, скільки всіх іграшок виготовили діти, а потім скільки всіх іграшок одержала кожна група.

II с п о с і б: 12 : 3 + 18 : 3 = 4 + 6 = 10 (ігр.)

Спочатку дізналися, скільки зірочок одержала кожна група, потім, скільки сніжинок, а потім, скільки зірочок і сніжинок разом.

В і д п о в і д ь: 10 іграшок.



Висновок: (12 + 18) : 3 = 12 : 3 + 18 : 3, тобто $(a + b) : c = a : c + b : c$.

**Задача.** *Перша друкарка за 8 годин друкує 32 сторінки. Друга друкарка за цей самий час друкує 40 сторінок. Яка друкарка друкує за 1 годину більше сторінок і на скільки більше?*

Розв'язання (двома способами).

І с п о с і б: (40 – 32) : 8 = 8 : 8 = 1 (ст.).

ІІ с п о с і б: 40 : 8 – 32 : 8 = 5 – 4 = 1 (ст.).

В і д п о в і д ь: на 1сторінку більше.

Висновок: (40 – 32) : 8 = 40 : 8 – 32 : 8, тобто $(a – b) : c = a : c – b : c$.

Дією віднімання розв’язуються **прості задачі таких типів:**

Дією ділення розв’язуються **прості задачі таких типів:**

***1) задачі на поділ на рівні частини***

***Задача.*** *Вчителька роздала 20 зошитів п’яти учням* ***порівну****. Скільки зошитів отримав кожен учень?*

***2) задачі на вміщення***

***Задача.*** *Вчителька роздала 20 зошитів учням,* ***по*** *5 зошитів* ***кожному****. Скільки учнів отримали зошити?*

***3) задачі на зменшення числа у кілька разів***

***Задача.*** *Дівчинка купила 12 зошитів, а альбомів* ***у*** *6* ***разів менше****. Скільки альбомів купила дівчинка?*

***4) задачі на зменшення числа у кілька разів у непрямій формі***

***Задача.*** *Дівчинка купила 12 зошитів.* ***Це у*** *6* ***разів більше****, ніж альбомів. Скільки альбомів купила дівчинка?*

***5) задачі на кратне порівняння чисел***

***Задача.*** *Дівчинка купила 12 зошитів і 2 альбоми.* ***У скільки разів більше*** *зошитів, ніж альбомів купила дівчинка?*

***Задача.*** *Дівчинка купила 12 зошитів і 2 альбоми.* ***У скільки разів менше*** *альбомів, ніж зошитів купила дівчинка?*

Ці властивості ділення широко використовуються для **обчислень значень виразів раціональними способами.** Наприклад:

$(36 + 66) : 6 = 36 : 6 + 66 : 6 = 6 + 11 = 17;$
$78 : 3 = (60 + 18) : 3 = 60 : 3 + 18 : 3 = 20 + 6 = 26;$
$(36 – 18) : 6 = 36 : 6 – 18 : 6 = 6 – 3 = 3;$
$42 : 3 = (60 – 18) : 3 = 60 : 3 – 18 : 3 = 20 – 6 = 14;$
$(72 \cdot 24) : 12 = (72 : 12) \cdot 24 = 6 \cdot 24 = 144;$
$(72 \cdot 24) : 12 = (24 : 12) \cdot 72 = 2 \cdot 72 = 144;$

$126 : 18 = 126 : (2 \cdot 9) = (126 : 2) : 9 = 63 : 9 = 7;$
$(180 : 5) : 18 = (180 : 18) : 5 = 10 : 5 = 2;$
$(180 : 5) : 4 = 180 : (5 \cdot 4) = 180 : 20 = 9;$
$405 : (81 : 2) = (405 \cdot 2) : 81 = 810 : 81 = 10;$
$420 : (42 : 2) = (420 : 42) \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20;$
$(140 \cdot 12) : (12 \cdot 14) = 140 : 14 = 10;$
$(140 : 12) : (14 : 12) = 140 : 14 = 10;$
$(12 : 18) \cdot (3 : 2) = (12 \cdot 3) : (18 \cdot 2) = 36 : 36 = 1;$
$(3 : 2) : (4 : 8) = (3 \cdot 8) : (2 \cdot 4) = 24 : 8 = 3.$

Розглянемо узагальнення операції ділення на множині цілих невід'ємних чисел – **ділення з остачею**, яке завжди є виконуваним за умови, що дільник відмінний від нуля.

**Теорема 8.10**. *Якщо $a \geq b$ і $a$ не ділиться на $b$, то існують натуральні числа $g$ і $r$ такі, що $a = b \cdot g + r$, причому $0 \leq r < b$. Пара чисел $(g; r)$ однозначно визначається парою чисел$(a; b)$.*

Якщо $a \geq b$ і a не ділиться націло на b, тобто $\mathbf{a = b \cdot g + r,\ 0 \leq r < b}$, то кажуть, що **число a ділиться на число b з остачею**. Це записують так:

$$a : b = g\ (ост.\ r).$$

*Число a називають **діленим**, b - **дільником**, g - **неповною часткою**, r - **остачею**.*

Остача є меншою за дільник. Іноді остача може дорівнювати 0, у цьому випадку ми виконуємо звичайне ділення націло: якщо $a=b \cdot g$, то можна записати, що $a = b \cdot g + 0$, тобто $r=0$.

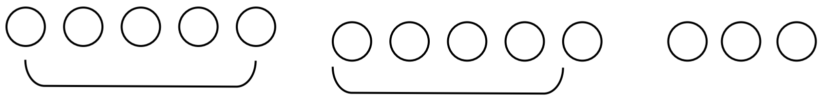
При діленні на одне й те ж число в остачі отримаємо число, яке вказує, на скільки ділене при діленні з остачею більше за ділене при діленні без остачі, а в частці отримаємо те ж саме число, що й при діленні без остачі.

Наприклад:

1) для $a=48$, $b=10$ маємо $48=10 \cdot 4+8$, отже при діленні 48 на 10 отримаємо неповну частку $g=4$ і остачу $r=8$, причому $8<10$;
2) для $a=72$, $b=8$ отримаємо $72=8 \cdot 9$, тобто частка дорівнює 9, а остача – нулю.

**Ділення з остачею можна виконати завжди за умови, що дільник не дорівнює нулю – це випливає з теореми про існування частки та остачі.**

Наприклад, 13 : 5 = 2(ост. 3), тобто $13 = 5 \cdot 2 + 3$. Це можна пояснити так:



При діленні з остачею часткою є число, яке є результатом ділення без остачі найближчого, але меншого за ділене, числа на певний дільник, а остачею є різниця між діленим і цим числом.

Розглянемо ***теоретико-множинний зміст ділення з остачею.*** Нехай скінченну множину A можна розбити на підмножини $A_1, A_2, \ldots, A_g$, R так, що множини $A_1, A_2, \ldots, A_g$, рівнопотужні, а множина R містить менше елементів, ніж кожна з множин $A_1, A_2, \ldots, A_g$. Тоді, якщо $n(A) = a$, $n(A_1) = n(A_2) = \ldots = n(A_g) = b$, $n(R) = r$, то виконується рівністю $a = b \cdot g + r$, де $0 \le r < b$. Це означає, що число g – це кількість рівнопотужних множин є неповною часткою від ділення a на b, тобто число елементів у кожній з цих рівнопотужних підмножин, а число r – це кількість елементів у підмножині R – остачею у цьому діленні.

Ділення з остачею перевіряють так: **ділене повинно дорівнювати сумі добутку дільника й частки та остачі.**

Щоб перевірити ділення з остачею, треба:

1) помножити дільник на частку;
2) додати до отриманого добутку остачу;
3) порівняти результат із діленим (якщо ці числа рівні, то ділення з остачею виконано правильно).

Для **розв’язування рівнянь з натуральними числами та нулем** слід знати компоненти дій і правила їх відшукання (залежності між компонентами та результатами арифметичних дій):

| |
|---|
| ***Додавання:*** |
| ***перший доданок,*** ***другий доданок,*** ***сума.*** |
| $x + b = c;$ $b + x = c;$ |
| $x = c - b;$ $x = c - b.$ |
| ***Щоб знайти невідомий доданок, треба від суми відняти відомий доданок.*** |
| ***Віднімання:*** |
| ***зменшуване,*** ***від’ємник,*** ***різниця.*** |
| $x - b = c,$ $b - x = c,$ |
| $x = b + c,$ $x = b - c.$ |
| ***Щоб знайти невідоме зменшуване, треба до різниці додати від’ємник.*** |
| ***Щоб знайти невідомий від’ємник, треба від зменшуваного відняти різницю.*** |
| ***Множення:*** |
| ***перший множник,*** ***другий множник,*** ***добуток.*** |
| $x \cdot b = c,$ $b \cdot x = c,$ |
| $x = c : b,$ $x = c : b,$ |
| ***Щоб знайти невідомий множник, треба добуток поділити на відомий множник.*** |
| ***Ділення:*** |
| ***ділене,*** ***дільник,*** ***частка.*** |
| $x : b = c,$ $a : x = c,$ |
| $x = c \cdot b,$ $x = a : c,$ |
| ***Щоб знайти невідоме ділене, треба частку помножити на дільник.*** |
| ***Щоб знайти невідомий дільник, треба ділене поділити на частку.*** |

## Питання для самоконтролю

1. Історія виникнення натурального числа. Аксіоматичний метод у математиці.
2. Вимоги до системи аксіом. Система аксіом Пеано. Моделі аксіом Пеано.
3. Аксіоматичне означення натурального числа.
4. Аксіома індукції. Принцип математичної індукції.
5. Аксіоматичне означення додавання натуральних чисел. Формули Грассмана. Таблиці додавання.
6. Теорема про існування і єдиність суми натуральних чисел. Закони додавання натуральних чисел.
7. Різниця натуральних чисел у аксіоматичній теорії.
8. Теореми про існування і єдиність різниці натуральних чисел. Властивості віднімання натуральних чисел. Нуль як число. Розширений натуральний ряд чисел.
9. Аксіоматичне означення множення натуральних чисел. Формули Грассмана. Таблиці множення.
10. Теорема про існування і єдиність добутку натуральних чисел. Закони множення натуральних чисел.
11. Ділення натуральних чисел у аксіоматичній теорії. Властивості ділення натуральних чисел. Ділення з остачею.
12. Відношення порядку на множині Ńо. Дискретність множини натуральних чисел. Поняття про скінченну множину. Відрізок натурального ряду.
13. Теоретико-множинний зміст кількісного натурального числа. Теоретико-множинний зміст відношення «менше» на множині цілих невід'ємних чисел.
14. Теоретико-множинне трактування додавання цілих невід'ємних чисел. Закони додавання.
15. Теоретико-множинне трактування віднімання цілих невід'ємних чисел. Теорема про існування і єдиність різниці натуральних чисел.

16. Теоретико-множинне трактування множення цілих невід'ємних чисел. Теорема про існування і єдиність добутку натуральних чисел.
17. Закони множення натуральних чисел.
18. Теоретико-множинне трактування ділення на множині цілих невід'ємних чисел. Властивості ділення натуральних чисел.
19. Теоретико-множинне трактування ділення з остачею на множині цілих невід'ємних чисел.
20. Правила відшукання компонентів арифметичних дій.

## ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

**1.** Назвіть член послідовності $x_n$, який:

а) слідує безпосередньо за $x_{10}$, $x_к$, $x_{л+4}$, $x_{к-3}$, $x_{2к;}$

б) за яким безпосередньо слідує $x_{50}$, $x_к$, $x_{л+1}$, $x_{к-4}$, $x_{2к+3.}$

**2.** Знайти шість перших членів, k-ий, (k+1)-ий члени послідовності, заданих формулами:

*1)* $c_n = n^2 - 3n + 4$; *3)* $y_n = \dfrac{2^{n+1}}{n+1}$;

*2)* $c_n = 2n^2 + 5n - 1$; *4)* $y_n = \dfrac{5^{n+1}}{2n+4}$.

**3.** Послідовність $x_n$ задана формулою $x_n = 5n - 2$. Знайти член послідовності з номером, рівним 5; 10; k; к+1; k-2.

**4.** Послідовність $c_n$ задана формулою $c_n = 5n + 3$. Знайти номер члена послідовності, рівного 93; 393.

**5.** Чи є число 5 членом послідовності $x_n$, заданої формулою загального члена $x_n=2n^2–9n–30$? Вкажіть його номер.

**6.** Вкажіть номер члена послідовності $y_n$, де $y_n = –3n – 40$, починаючи з якого всі члени послідовності будуть більшими, ніж 10.

**7.** Членами нескінченної послідовності $x_n$ є натуральні числа, які при діленні на 4 дають в остачі 3. Знайти $x_2$, $x_6$, $x_{10}$, $x_k$. Який номер має член послідовності, що дорівнює 63?

**8.** Підберіть формулу n-го члена послідовності:

1) 2, 4, 6, 8, …. ;

2) 1, 3, 5, 7, … ;

3) 5, 10, 15, 20, 25, … ;

4) 1, 4, 9, 16, … ;

5) 1/4, 1/10, 1/28, 1/82, … ;

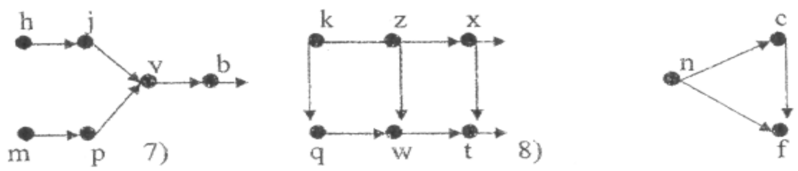
6) 1/3, 2/9, 3/27, 4/81, 5/243, …;

7) 1, -2, 3, -4, 5, -6, … ;

8) 2, -4, 8, -16, … .

**9.** Що таке модель системи аксіом Пеано? Скільки їх? Наведіть приклади і контрприклади.

**10.** Які аксіоми Пеано порушуються на множинах, що зображено на рисунку? Встановити, які з множин, наведених на рисунку, є моделями системи аксіом Пеано:




**11.** «Одиниця» – даний відрізок довжиною а, «безпосередньо слідувати за» – дорівнювати половині попереднього відрізка, елемент множини – відрізок, довжина якого дорівнює $\frac{a}{2^n}$, де $n \in N_0$. Записати цю множину. Чи є вона прикладом системи, яка задовольняє аксіоми Пеано?

**12.** Чи є моделлю системи аксіом Пеано такі множини? Як визначено відношення «безпосередньо слідувати за»:

1) $A = \{0; 1; 2; \dots\}$,

2) $Д = \{2; 3; 4; \dots\}$,

3) $B = \{1; 2; 3; \dots\}$,

4) $E = \{x \mid n \in N, x = 6n\}$,

**15.** Довести методом математичної індукції правильність твердження для довільного натурального n:

*1)* $1+5+9+\dots+(4n-3) = n(2n-1)$;

*2)* $1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$;

*3)* $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

*4)* $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$;

*5)* $2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}$

*6)* $1\cdot 4 + 2\cdot 7 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$;

*7)* $1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 3^2 + \dots + n\cdot 2^n = 2 + (n-1)\cdot 2^{n+1}$;

8) $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

**16.** Яку властивість суми зручно використовувати при складанні таблиці додавання натуральних одноцифрових чисел? Скласти таблицю додавання на 5, використовуючи аксіоми додавання.

**17.** Яку властивість добутку зручно використовувати при складанні таблиці множення натуральних одноцифрових чисел? Скласти таблицю множення на 6, використовуючи аксіоми множення.

**18.** Використовуючи закони додавання, обчислити найзручнішим способом:

| | |
|---|---|
| 1) 109+36+191+64+27, | 5) 273+1227+154+446, |
| 2) (30+7)+(10+3), | 6) 871+2475+89+325, |
| 3) (16+9)+21, | 7) 171+(29+34), |
| 4) 3997+1586; | 8) 299+2348. |

**19.** Використовуючи правила віднімання, обчислити найзручнішим способом:

| | | |
|---|---|---|
| (15-8)+(5-2), | 44-(10+14), | 570 049-4 548-4 452, |
| (47-14)-(6-3), | 63-(28-7), | (98 765-399)+235, |
| (12-2)·(4-2), | (15+17)-5, | (2096+539)-2535, |
| 56-(37-14), | (2033+544)-1502, | 65438-(5800+438), |
| 6321-(1812+321), | 4567-699, | 7824-799. |

**20.** Використовуючи закони множення, обчислити найзручнішим способом:

| | | |
|---|---|---|
| (7·3·15) 4; | 78·62-67·62; | (125·3)·(8·37); |
| 25·(18·4); | 77·48+23·48; | 750·120; |
| (30·7) · (10·3); | 15·25·50·4; | 8·49·125; |
| 2003·1997; | 289·302; | 65·55, |
| 655·125-155·125; | 733·335+300·335-33·335; | 1504·21-44. |

**21.** Використовуючи правила ділення, обчислити найзручнішим способом:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (36+64):10; | (36+66):6; | (37·36):12; | (48·23):24; |
| (243+81):9; | 256:(16·4); | (154+42):7; | 144:(12·4); |
| (474-141):3; | 405:(81:2); | (121-44):11; | 369:(41:3); |
| (72·42):8; | (290:5):29; | (63·26):9; | (140:5):14; |
| (256+444):14; | (888+2488):8; | 823:50+177:50; | 125+375:25. |

**22.** Знайдіть n(A), n(B) і n($A \cup B$), якщо:

а) A={x; y; z}, B={t, r, s, g}; б) A={x, y, z}, B={t, r, y, p};

в) F={x, y, z}; B=ø; г) A={a, f }, B={a; d; f};

д) A={a, b}, B={b; a; f}, е) A=ø, B={a, b}.

**23.** Поясніть з теоретико-множинних позицій рівності:

а) 2+3=5; б) 2+5=7;

в) 4+0=4; г) 0+7=7;

д) 3+4=7; е) 6+2=8.

**24.** Як зміниться сума, якщо:

а) один з доданків збільшити на 3,

б) кожний з доданків збільшити на 3,

в) один доданок зменшити на 3, а другий збільшити на 3,

г) один з доданків збільшити на 3, а другий зменшити на 3,

д) один з доданків зменшити на 3,

е) кожний з доданків зменшити на 3,

є) один з доданків збільшити втричі,

ж) кожний з доданків збільшити втричі?

Істинність даних тверджень довести у загальному випадку.

**25.** Поясніть, чому нижче наведені задачі розв’язуються додаванням. Подайте наочну ілюстрацію кожної із умов:

а) Дмитрик зірвав 8 слив, Ніна – 4. Скільки слив зірвали Дмитрик і Ніна разом?

б) Декілька дівчаток брали участь у танці. Три із них були в білих спідничках і три – в синіх. Скільки дівчаток брало участь в танці?

в) З коробки взяли 6 червоних олівців і 4 синіх. Скільки олівців взяли з коробки?

г) Петрику залишилось полити 2 грядки, а Михайлику 3 грядки. Скільки грядок залишилось полити хлопчикам?

д) У Миколки було 5 марок, а у Петрика – на 3 марки більше. Скільки марок було у Петрика?

е) У парку 8 голубих ялинок. Їх на 3 менше, ніж беріз. Скільки беріз у парку?

**26.** Наведіть приклади простих задач, які розв'язуються додаванням.

**27.** Складіть всі можливі типи задач, у яких виконувалися б дії:

а) 8+7; б) 3+4.

**28.** Знайдіть n(A), n(B) і $n(B'_A)$, якщо:

а) A={a, b, c, e}, B={c; e},

б) A={a, b}, B=A,

в) A={a, b}, B=Ø.

**29.** Поясніть з теоретико-множинних позицій рівності:

а) 9–4=5; б) 6-2=4;

в) 4–0=4; г) 7–0=7;

д) 3–3=0; е) 6–6=0.

**30.** Як зміниться різниця, якщо:

а) зменшуване збільшити на 3,

б) зменшуване зменшити на 3,

в) відємник зменшити на 3,

г) від'ємник збільшити на 3,

д) кожен з компонентів зменшити на 3,

е) кожний з компонентів збільшити на 3,

є) зменшуване збільшити на 3, а від'ємник зменшити на 3,

ж) зменшуване зменшити на 3, а від'ємник збільшити на 3.

Істинність даних тверджень довести у загальному випадку.

**31.** Поясніть, чому нижче наведені задачі розв'язуються відніманням:

а) На станцію прибуло 7 вагонів з вугіллям. Три вагони розвантажили. Скільки вагонів залишилось розвантажити?

б) На нашій вулиці будують дев'ятиповерховий будинок. 5 поверхів вже побудували. Скільки поверхів ще залишилося добудувати?

в) У зоопарку 6 ведмедів, а верблюдів на 2 менше. Скільки верблюдів у зоопарку?

г) На столі 10 чашок, їх на 2 більше, ніж ложок. Скільки ложок на столі?

д) На верхній полиці шафи лежать 7 книг, а на нижній - 4. На скільки книг більше на верхній полиці, ніж на нижній?

е) У Іванка 5 кульок, а у Іринки - 3. На скільки кульок менше у Іринки, ніж у Іванка?

**32.** Навести приклади простих сюжетних задач, які розв'язуються відніманням.

**33.** Скласти всі можливі типи задач, у яких виконувались би дії:

13–4; 10–4.

**34.** Знайдіть n(A), n(B) і n(A×B), якщо:

а) A={a, b}, B={c; d; f},

б) A={a, b}, B={b; d},

в) A={a, b}, B=Ø.

**35.** Поясніть з теоретико-множинних позицій рівності:

| | |
|---|---|
| а) 9·4=36; | б) 6·2=12; |
| в) 4·0=0; | г) 7·0=0; |
| д) 0·3=0; | е) 0·6=0. |

**36.** Як зміниться добуток, якщо:

а) перший множник збільшити на 3,

б) перший множник зменшити на 3,

в) другий множник зменшити на 3,

г) другий множник збільшити на 3,

д) кожен з множників зменшити у 3 рази,

е) кожен з множників збільшити у 3 рази,

є) перший множник збільшити у 3 рази, а другий множник зменшити у 3 рази,

ж) перший множник зменшити на 3, а другий множник збільшити у 3 рази.

Істинність цих тверджень довести у загальному випадку.

**37.** Поясніть, чому наведені задачі розв'язуються дією множення:

а) На кожне дитяче пальто потрібно пришити по 4 ґудзики. Скільки ґудзиків потрібно пришити на 7 таких пальт?

б) Скільки кролів розмістили школярі в 6 клітках, якщо в кожну клітку помістили по 2 кролі?

в) Учениця прочитала в першого дня 9 сторінок книги, а другого – у 2 рази більше, ніж першого. Скільки сторінок книги прочитала учениця другого дня?

г) Для уроку трудового навчання дівчинка принесла 6 аркушів червоного паперу. Це у 2 рази менше, ніж зеленого паперу. Скільки аркушів зеленого паперу принесла дівчинка?

**38**. Наведіть приклади простих задач, які розв'язуються дією множення.

**39**. Скласти всі можливі типи задач, у яких виконувалися б дії:

$6 \cdot 3$; $8 \cdot 5$; $4 \cdot 3$; $5 \cdot 7$.

**40.** Використовуючи теоретико-множинне означення частки чисел, покажіть (двома способами), що:

а) $12 : 3 = 4$; б) $8 : 4 = 2$;

$6 : 1 = 6$; $3 : 1 = 3$;

$4 : 4 = 1$; $5 : 5 = 1$.

**41.** Поясніть, чому нижче подані задачі розв'язуються дією ділення:

а) 12 редисок зв'язали в пучки, по 6 редисок у кожний. Скільки вийшло пучків?

б) 10 зошитів роздали 5 учням порівну. Скільки зошитів одержав кожен учень?

в) У Миколки 12 кролів, а у Володі – в 4 рази менше, ніж у Миколки. Скільки кролів у Володі?

г) У коробці лежало 8 кольорових олівців, їх у 2 рази більше, ніж простих. Скільки простих олівців лежало у коробці?

д) Для прикрашання ялинки учень вирізав 14 зірочок і 7 прапорців. У скільки разів менше прапорців вирізав учень, ніж зірочок?

е) На ділянці ростуть 3 яблуні і 9 груш. У скільки разів більше груш росте на ділянці, ніж яблунь?

**42.** Наведіть приклади простих задач, під час розв'язання яких розкривається теоретико-множинний зміст частки.

**43.** Складіть умови задач, які розв’язувалися б виразами:

10:5;  12:4;  10: 2;  6:3;  15:3.

**44**. Поясніть теоретико-множинний зміст ділення із остачею (залишком). Як розглядають цю дію у початкових класах?

**45**. Скільки різних остач при діленні на 4? Яка остача найбільша? Навести приклади і записати.

**46**. Поділити кожне з чисел від 20 до 31 на 5. Які остачі отримаємо? Скільки різних остач при діленні на 5?

**47**. Придумайте і запишіть три приклади на ділення з дільником 8, щоб при розв’язуванні першого прикладу остача дорівнювала 0, при розв’язуванні другого – 3, третього – 7.

**48.** Вказати неповну частку і остачу при діленні:

1) 25 на 38,  2) 165245 на 876.

**49.** Знайти число, при діленні якого на 15421 отримуємо неповну частку 246 і остачу 6723.

**50.** Знайти неповну частку і дільник, якщо ділене і остача відповідно дорівнюють:

1) 100 і 6,  2) 148 і 37.

**51**. Обчисліть значення числових виразів:

1) $171\,342 : 57 - 15 \cdot (7\,000 - 6\,988) : 36$;

2) $27 \cdot 81\,098 - 61\,098 : (1\,301 - 18 \cdot 39)$;

3) $(101 \cdot 101 - 652\,864 : 808) : 303 \cdot 205$;

4) $(345\,465 : 853 + 200\,007 : 639) - 109 \cdot 29$;

5) $(18 \cdot 93 - (1\,927 - 1\,873) \cdot 31) : 56 + 10$.

**52.** На основі залежності між компонентами і результатами арифметичних дій розв’язати рівняння:

1) $24\,960 : (3360 - (300 \cdot (200 - 6x)) : 115) = 8$;

2) $450 - ((18\,000 - (112\,500 : 25 - x) \cdot 6) : 90) = 338$;

3) $282 - (72 \cdot (1\,548 - (x \cdot 13 + 62))) : 4\,548 = 270$;

4) $(((750 + x : 28) \cdot 24 - 21156) \cdot 12 + 38) \cdot 101 = 192\,910$;

5) $((56 \cdot (66 + x) + 12\,600) : 40 - 70) \cdot 24 = 21\,000$.

**53**. Розв’яжіть задачі, записавши їх умови у вигляді рівняння:

а) Петро задумав число, додав до нього 116, а потім від результату відняв 89.

Отримав число 342. Яке число задумав Петро?

б) Василь задумав число, відняв від нього 17, а потім від отриманої різниці відняв 145. Отримав число 213. Яке число задумав Василь?

в) Іван задумав число, помножив його на 13, потім додав 116 і одержаний результат зменшив у 25 разів. Отримав число 23. Яке число задумав Іван?

# 9. Системи числення

## 9.1. Позиційні й непозиційні системи числення

Під час вивчення множини натуральних чисел та інших числових множин, особливо під час вивчення операцій над числами, винятково важливу роль відіграє спосіб запису чисел або спосіб нумерації.

Як ми рахуємо вголос? Один, два, три, ..., дев'ять, десять, одинадцять... Десять ми записуємо двома цифрами, але не кажемо «один-нуль», а вживаємо нове слово. Нове слово нам потрібно писати для чисел 100, 1000, 1000 000... Нагадуванням про сиву давнину служить слово «сорок»; у ньому немає жодних ознак «десятка», дарма, що й тридцять (три-десять), п’ятдесят, сімдесят містять у собі інформацію про кількість десятків. А вираз «сорок сорок», що зробився сьогодні просто позначенням великої кількості? Виходить, наші пращури рахували по десять до сорока, а потім сорок! У французькій мові збереглися сліди лічби на двадцятки, в англійській – на дюжини... До винайдення нуля для запису чисел, як тепер для називання, застосовувалися нові й нові знаки.

**Означення.** ***Системою числення (або нумерацією)*** *називається сукупність правил і знаків або слів, за допомогою яких можна зобразити письмово або назвати будь-яке натуральне число.*

**Означення.** *Натуральне число, зображене у певній системі числення, називається* ***системним числом****.*

У кожній системі числення системні числа записують за допомогою певних знаків (символів) – **цифр**.

Щоб визначити число, недостатньо знати тип і алфавіт системи числення. Для цього необхідно ще додати правила, які дають змогу за значеннями цифр встановити значення числа.

Розрізняють **п о з и ц і й н і  і  н е п о з и ц і й н і** системи числення.

**Означення.** *Систему числення називають* ***непозиційною,*** *якщо кожний знак (цифра) служать для позначення того самого числа, незалежно від його місця (позиції).*

Сьогодні непозиційні системи числення становлять інтерес лише з точки зору історії розвитку нумерації.

Прикладом непозиційної системи числення може бути **римська система**, яка має такі вузлові числа і знаки:

I - один, V - п’ять, X - десять, L - п’ятдесят,

C - сто, D - п’ятсот, M - тисяча.

У римській системі числення в основі є символи I (один палець) для числа 1, V (розкрита долоня, п’ятірня) для числа 5, X (дві складені долоні) для 10. Для позначення чисел 100, 500 і 1000 у римській системі числення стали застосовувати перші букви відповідних латинських слів (Centum – сто, Demimille – половина тисячі, Mille – тисяча), а для позначення числа 50– знак L.

Кожна римська цифра означає вказане число незалежно від місця, яке займає. Для скорочення записів у цій системі вживаються наступні ***правила:***

*– якщо цифра, що відповідає меншому числу, стоїть після цифри, що відповідає більшому числу, то для запису числа це менше число потрібно додати до більшого.* Наприклад, число 1386 записується так:

MCCCLXXXVI= 1000 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 10 + 10 + 5 + 1 = 1386.

*– якщо цифра, що відповідає меншому числу, стоїть перед цифрою, що відповідає більшому числу, то для запису числа це менше число потрібно відняти від більшого.* Так, замість IIII пишеться IV, замість VIIII пишуть IX тощо.

Наприклад, запис MCMLXXIX означає

1979 = 1000 + 1000 – 100 + 50 + 10 + 10 + 10 – 1.

Непозиційними були також алфавітні системи: давньогрецька, старослов’янська.

Основні недоліки непозиційних систем полягають у тому, що запис навіть невеликих чисел неекономічний і громіздкий, техніка обчислень дуже складна.

**Означення.** *Система числення називається **позиційною**, якщо значення кожного знаку залежить від місця (позиції), на якому він стоїть у записі числа.*

Для позиційних систем числення характерні наочність зображення чисел і відносна простота виконання операцій.

У позиційній системі для запису числа використовується обмежена кількість знаків – цифр, яка визначає назву системи числення і називається її основою.

**Означення.** ***Основою системи числення*** *називається число, яке означає, у скільки разів одиниця наступного розрядку більша за одиницю попереднього*.

Позиційні системи числення також мають свою класифікацію за основами системи числення: двійкова, п’ятіркова, вісімкова, шістнадцяткова і т.д. Двійкова система числення складається з чисел 1 і 0 і використовується для обчислення арифметичних операцій в мікропроцесорах, на основі яких зараз побудована майже вся побутова техніка і персональні комп’ютери. Десяткова система числення використовується людьми для виконання арифметичних операцій, складається з діапазону чисел від 0 до 9. Шістнадцяткова система числення використовується у обчислювальній техніці для запису адрес комірок пам’яті, складається з чисел від 0 до 15, але після 9 числа записані як великі латинські літери A, B, C, D, E, F.

Перша позиційна система числення виникла понад 2000 років до нашої ери у стародавньому Вавилоні. Це була шістдесяткова позиційна нумерація.

Прикладом позиційної системи числення може бути загальновживана **десяткова система**. Так, у записі числа 243 434 цифра 3 в першому випадку означає число тридцять, у другому — три тисячі; аналогічно цифра 4 служить тут для запису чисел чотири, чотириста, сорок тисяч.

Саме позиційний принцип дає змогу за допомогою невеликої кількості цифр зображати будь-яке як завгодно велике натуральне число.

У десятковій системі нумерації за основу лічби прийнято число ***десять.*** Як відомо, перші десять одиниць (один, два, три, чотири, п’ять, шість, сім, вісім, дев’ять, десять) називаються ***одиницями першого розряду***. Десять одиниць 1-го розряду становлять одну одиницю 2-го розряду – **десяток**; десять одиниць 2-го розряду – **сотню**; десять одиниць 3-го розряду, тобто десять сотень, становлять одну одиницю 4-го розряду – **тисячу** і т. д.

*Кожні три послідовні розряди, починаючи з першого, утворюють* ***клас.*** Три розряди, що утворюють клас, називаються **одиницями, десятками й сотнями цього класу.** З цих основних назв утворюються назви інших чисел. Щоб прочитати багатоцифрове число у десятковій системі числення, його запис розбивають на класи і розряди справа наліво по три розряди в кожному класі.

Наприклад, дванадцять – два і десять; тридцять п'ять – три десятки і п'ять; двадцять три тисячі п'ятсот шістдесят вісім –два десятки тисяч, три тисячі, п'ять сотень, шість десятків і вісім одиниць. Замість назви «чотиридцять» вживається назва «сорок»; замість «дев'ятьдесят» дев'яносто (назва «дев'ятдесять» вживається як діалектизм – у західних областях України).

## 9.2. Запис цілих невід'ємних чисел у позиційних системах числення з різними основами

Виходячи з позиційного принципу десяткової нумерації, кожне натуральне число можна подати у вигляді суми добутків «цифр» числа на відповідні степені числа 10. Наприклад, $5324 = 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 4$.

Якщо перейти до загальної форми запису, позначивши цифри через a з індексами, які дорівнюють показникам відповідних степенів десяти, то будь-яке натуральне число a може бути зображене у вигляді суми:

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0, \quad \text{або} \quad a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0},$$

де $0 \le a_i < 10$, $a_i \in N_0$, $\forall i \in N$, $a_n \neq 0$. Таке зображення називається **десятковим записом натурального числа a.**

Очевидно, найменшою основою числення може бути число 2. У цій системі числення є лише дві цифри: 0 і 1. Число «два» записується як 10 (одна двійка $1 \cdot 2 + 0$), число «три» – 11 (одна двійка і одна одиниця $1 \cdot 2 + 1$), число «чотири» – 100 (одна двійка в квадраті $1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 0$), число «п'ять» – 101 (одна двійка в квадраті і одна одиниця $1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$) і т. д.

Для того щоб видно було, в якій недесятковій системі числення записане число, будемо внизу записувати основу числення. Основу 10, як і раніше, не писатимемо. Наприклад, $11_2$ означає число 3, записане у двійковій системі і читається «один один у двійковій системі числення».

Якщо g = 3, то система числення матиме цифри: 0, 1, 2. Число «три» запишеться як $10_3$ ($1 \cdot 3 + 0$), «чотири» – $11_3$ (одна трійка і одиниця $1 \cdot 3 + 1$); «шість» – $20_3$ (дві трійки $2 \cdot 3 + 0$); «дев'ять» $100_3$ (одна трійка в квадраті $1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 0$) і т. д.

Якщо g = 12, то система числення матиме дванадцять цифр, десять цифр десяткової нумерації і ще дві цифри: «десять» і «одинадцять». Щоб не вводити для них спеціальних знаків, будемо зображати їх, як у десятковій системі, двома цифрами, але брати їх у дужки: (10) ніби одноцифрове число десять і (11) – одинадцять, інколи дужок можна не використовувати. Число «дванадцять» запишеться як одна одиниця другого розряду (дюжина) – $10_{12}$, «п'ятнадцять» – $13_{12}$ (одна дюжина і три одиниці $1 \cdot 12 + 3$), «сто сорок чотири» – $100_{12}$ (одна дюжина в квадраті $1 \cdot 12^2 + 0 \cdot 12 + 0$).

Система числення, основа якої дорівнює g, має g цифр: 0; 1; 2;...; g-1. При всіх основах числення одиниця першого розряду позначається як 1, одиниця другого розряду (основа числення) – як 10; одиниця третього розряду – як 100 і т. д., одиниця m-го розряду – як $10^{m-1}$.

Числа 1, g, $g^2$, ..., $g^{n-1}$, $g^n$ називаються ***розрядними одиницями*** відповідно 1-го, 2-го, 3-го, ..., n-го, (n + 1)-го розряду.

**Теорема 9.1** *Будь-яке натуральне число* $N_{(g)}=\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_{0(g)}}$ *можна зобразити в довільній позиційній системі числення у вигляді суми розрядних доданків*

$$a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot g^2 + a_1 \cdot g + a_0,$$

*до того ж єдиним способом.*

Наприклад, число $4021_5$ є чотирицифровим числом п'ятіркової системи (читається «4, 0, 2, 1 у п'ятірковій системі числення»), яке може бути представлене у вигляді суми розрядних доданків так : $4 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = 4 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5 + 1$.

## 9.3. Перехід від запису числа в одній позиційній системі числення до запису в іншій

У сучасному світі важко обійтися однією системою числення. Здається, звична для нас десяткова система дуже зручна, і в ній нам легко оперувати числами, але ЕОМ, якими ми користуємось, працюють лише з двійковою системою числення. Тому постійно виконується перевід з однієї системи в іншу. Нам доводиться стикатися з цим переведенням ледь не кожен день, але ми цього не бачимо, бо все робить сама ЕОМ. Залежно від того, переведення відбувається вручну, чи програмно, обирається конкретний алгоритм, який дасть можливість найбільш легко виконати переведення. При переведенні допускається також використання проміжних систем числення. Це може значно полегшити завдання переводу.

Покажемо, як практично можна переходити від однієї позиційної системи числення до іншої.

**а) Перехід від десяткової системи до іншої**

Якщо це число менше від основи системи числення, до якої треба перейти, то його так і записують. Наприклад, у вісімковій системі числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 записують так само, як і в десятковій — це одноцифрові числа. Число 9 записують вже як $11_8$, тобто одна вісімка і одна одиниця; 10 записують як $12_8$, тобто одна вісімка і 2 одиниці; число 17 записують як $21_8$, тобто 2 вісімки і 1 одиниця. Якщо дано багатоцифрові числа, то усно важко виконати такий перехід.

**<u>Правило 1.</u>** ***Щоб натуральне число, записане в десятковій системі, подати в позиційній системі при основі g, треба поділити це число на основу g; частку знову поділити на g і т. д., аж поки остання частка не буде меншою за g. Одержані при цьому послідовні остачі будуть цифрами цього числа, записаного при основі g: перша остача — цифрою одиниць, друга остача — цифрою одиниць другого розряду (g), третя остача — цифрою одиниць третього розряду ($g^2$) і т. д., остання частка — цифрою найвищого в цьому числі розряду.***

**Приклад.** Записати число 869 у системі числення з основою g=4. **Розв’язання.** Виконаємо послідовні ділення за правилом 1. Запишемо це так:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
-869 & \underline{|\,4\quad} & & & & & & & \\
\underline{868} & 217 & \underline{|\,4\quad} & & & & & & \\
1 & -\underline{216} & 54 & \underline{|\,4\quad} & & & & & \\
\text{Iр.} & 1 & -\underline{52} & 13 & \underline{|\,4\quad} & & & & \\
 & \text{IIр.} & 2 & -\underline{2} & 3 & & & & \\
 & & \text{IIIр.} & 1 & & & & &
\end{array}
$$

IVр. Vр. Отже, $869 = 31211_4$.

**б) Перехід від недесяткової системи числення до десяткової**

*<u>I-ий спосіб</u>*

**<u>Правило 2.</u>** ***Для того щоб будь-яке число $N_{(g)}$ де $g\neq 10$, записати в десятковій системі числення, досить зобразити його у вигляді суми розрядних одиниць, усно виразити всі цифри і основу g в десятковій системі і виконати обчислення.***

**Приклад.** *Записати число $31211_{(4)}$ у десятковій системі числення, тобто 31211(4) = x.*

**Розв’язання**. Запишемо $31211_{(4)}$ у вигляді суми розрядних одиниць у десятковій системі числення і виконаємо обчислення:

$31211_4=3\cdot 4^4+1\cdot 4^3+2\cdot 4^2+1\cdot 4+1=3\cdot 265+1\cdot 64+2\cdot 16+1\cdot 4+1=768+64+32+4+1=869.$

Отже, $31211_4 = 869$.

*<u>II-ий спосіб</u>*

**<u>Правило 3.</u>** ***Для того щоб будь-яке число $N_g$ де $g\neq 10$, записати в десятковій системі числення, потрібно виконати послідовне множення одиниць вищого розряду на основу системи числення, щоразу додаючи до отриманого добутку наступну цифру даного числа.***

**Приклад.** *Записати число $31211_4$ у десятковій системі числення, тобто $31211_4=x$.*

**Розв'язання.** *31211₍₄₎*

×4
12 + 1 = 13
×
+ 2 = 54
×
2 + 1 = 217
×
8 + 1 = 869.

Отже, $31211_4$=869.

Як показав наведений приклад, другий спосіб доцільно використовувати тоді, коли здійснюємо перехід у десяткову систему числення багатоцифрових системних чисел.

**в) Перехід від недесяткової до іншої недесяткової системи числення.**

__**Правило 4.**__ ***Для того щоб будь-яке число $N_g$, де $g \neq 10$, записати в недесятковій системі числення при основі $k \neq 10$, потрібно від основи g перейти до основи 10 і далі від основи 10 до основи k, тобто послідовно застосовувати два попередні випадки.***

**Приклад.** *Записати число $31211_4$ у вісімковій системі числення.*

**Розв'язання**. Здійснюємо два переходи:

1) $31211_4$=869 (з попереднього прикладу).

2) Переходимо від десяткової системи до системи з основою 8.

```
  869 | 8
- 864 | 108 | 8
    5   104   13 | 8
 Ір.      4    8   1
      ІІр.     5   IVр.
              ІІІр.
```

Отже, 869 = $1545_8$. Таким чином, $31211_4$ = $1545_8$.

**Порівняння системних чисел можна здійснити такими способами:**

*1. Два системних числа* ***рівні*** *тоді і тільки тоді, коли всі цифри їх відповідних розрядів однакові:*

Отже, якщо $N_1 = \overline{a_m a_{m-1} ... a_1 a_{0(g)}}; N_2 = \overline{b_m b_{m-1} ... b_1 b_{0(g)}}$ , то $N_1=N_2$ тоді, коли $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, ..., $a_n=b_n$.

Наприклад, 534261 = 534261; $2134_{(5)} = 2134_{(5)}$.

2. *Із двох системних чисел, записаних* <u>*різною*</u> *кількістю цифр,* ***більшим*** *є те, в якому більше цифр, тобто яке має одиниці більш високого розряду:*

Отже, якщо $N_1 = \overline{a_m a_{m-1} ... a_1 a_{0(g)}}; N_2 = \overline{b_n b_{n-1} ... b_1 b_{0(g)}}$,

то $N_1>N_2$ тоді, коли $m > n$.

Наприклад, 5341 > 968; $2134_{(5)} > 431_{(5)}$.

3. *Із двох системних чисел з* <u>*однаковою*</u> *кількістю цифр* ***більшим*** *є те, у якому цифра найвищого розряду має більше одиниць, а якщо цифри найвищого розряду однакові, то більшим є число, в якому цифра, що стоїть за ним, має більше одиниць, і т.д.*

Отже, якщо $N_1 = \overline{a_m a_{m-1} ... a_1 a_{0(g)}}$ і $N_2 = \overline{b_m b_{m-1} ... b_1 b_{0(g)}}$, то $N_1>N_2$ при $a_m>b_m$; якщо $a_m=b_m$, то $N_1>N_2$ при $a_{m-1}>b_{m-1}$, і т.д.

Наприклад, 876 > 398, бо 8 > 3.

$843_{(6)} > 835_{(6)}$, бо $4_{(6)} > 3_{(6)}$.

## 9.4. Арифметичні дії над системними числами

Арифметичні операції над числами, записаними у десятковій системі числення, виконуються за відомими правилами додавання, віднімання, множення «стовпцем» і ділення – «кутом». За цими самими правилами виконуються операції і над системними числами, записаними у будь-якій недесятковій позиційній системі числення.

Зауважимо, що для того щоб виконати дії над числами, записаними в різних системах числення, слід подати ці числа в одній системі.

### 1. Додавання

При додаванні багатоцифрових системних чисел зручно підписувати їх так, щоб відповідні розряди були записані один під одним, і починати додавати не з вищих розрядів, як при усному додаванні порівняно невеликих чисел, а з нижчих розрядів.

**Правило.** Щоб додати два натуральних числа, записаних при будь-якій основі числення, треба виконати додавання відповідних розрядних одиниць, починаючи від найнижчого розряду до вищих; якщо при додаванні одиниць певного розряду дістанемо число, яке більше або дорівнює основі числення g, то в цьому розряді запишемо надвишок над g (або нуль), а число наступного вищого розряду збільшимо на одиницю.

Для того щоб швидко виконувати додавання багатоцифрових чисел, треба добре знати табличне додавання, тобто додавання одноцифрових чисел системи числення. З цією метою можна скласти ***таблицю додавання***. Для десяткової системи числення таку таблицю складають у першому класі.

**Приклад.** Знайти суму чисел $34102_{(5)}$ і $4244_{(5)}$.

**Розв'язання.**

$$\begin{array}{r} 34102_{(5)} \\ +\ \underline{4244_{(5)}} \\ 43401_{(5)}. \end{array}$$

*Пояснення.* До 2 додати 4, вийде 6, але число 6 у п'ятірковій системі записується як $11_5$, тому пишемо 1 і 1 памятаємо. 0 додати 4, буде 4, і ще 1, буде 5, тому записуємо 0 і 1 памятаємо у наступному розряді. Тому 1 плюс 2 та ще плюс 1 буде 4. Далі аналогічно утворюються ще у наступних розрядах цифри 3 і 4.

## 2. Віднімання

При відніманні багатоцифрових системних чисел зручно підписувати їх так, щоб відповідні розряди були записані один під другим, і починати віднімати не з вищих розрядів, як при усному відніманні порівняно невеликих чисел, а з нижчих розрядів.

**Приклад.** *Знайти різницю чисел $543001_{(6)}$ і $24312_{(6)}$.*

**Розв'язання.**

$$\begin{array}{r} 543001_{(6)} \\ -\ \underline{24312_{(6)}} \\ 524245_{(6)} \end{array}$$

*Пояснення:* від 1 відняти 2 не можна, але одиниць другого і третього розрядів у зменшуваному немає. Беремо одну одиницю четвертого розряду. Вона має 6 одиниць третього розряду. В цьому розряді залишаємо 5 одиниць, а одну роздробляємо в одиниці другого розряду. Залишаємо 5 одиниць в другому розряді, а одну розробляємо в одиниці першого розряду, разом матимемо 7 одиниць першого розряду: 7 - 2 = 5 і т. д.

Виконаємо ***перевірку дії віднімання*** двома способами на основі залежності між компонентами і результатами дій:

а) додаванням до різниці від'ємника:

$$\begin{array}{r} 44212_{(6)} \\ +\ 5435_{(6)} \\ \hline 54051_{(6)} \end{array}$$

б) відніманням від зменшуваного різниці:

$$\begin{array}{r} 54051_{(6)} \\ -\ 44212_{(6)} \\ \hline 5435_{(6)} \end{array}$$

## 3. Множення

Відоме з початкових класів правило множення чисел у десятковій системі можна поширити на числа будь-якої системи числення:

*Для того щоб помножити одне системне число на інше, записане при цій же основі, треба виконати множення першого числа на одноцифрові числа кожного розряду другого числа і результати додати.*

Запис зручно вести стовпчиком, підписуючи одержані розряди під відповідними розрядами. Утвориться певна «драбинка», оскільки (як видно з наведених викладок) щоразу відбувається множення числа $N_1$ на числа дедалі вищих, наступних розрядів числа $N_2$.

Розглянемо спочатку табличне множення, тобто множення одноцифрових чисел. Таблицю множення для десяткової системи (g = 10) вивчають у 2 класі.

**Приклад.** Знайти добуток чисел $4203_{(5)}$ і $24_{(5)}$.

**Розв'язання.**

$$\begin{array}{r} 4203_{(5)} \\ \times\ \ 24_{(5)} \\ \hline 32322_{(5)} \\ +\ 13411\phantom{0}_{(5)} \\ \hline 221432_{(5)} \end{array}$$

*1-й спосіб.* Користуючись таблицею множення в системі основою 5, о т р и м а є м о : $3 \cdot 4 = 22_{(5)}$; 2 одиниці пишемо, а 2 одиниці другого розряду додаємо до одиниць другого розряду (п'ятірок). $0 \cdot 4 + 2 = 2$ (пишемо у другому розряді). $2 \cdot 4 = 13_{(5)}$, 3 одиниці третього розряду пишемо, а 1 четвертого розряду додаємо до одиниць четвертого розряду: $4 \cdot 4 + 1 = 31_{(5)} + + 1_{(5)} = 32_{(5)}$, записуємо у четвертому і п'ятому розрядах і т. д.

*2-й спосіб.* Множимо в десятковій системі і кожен добуток усно виражаємо в п'ятірковій системі: $3 \cdot 4 = 12 = 22_{(5)}$; $(12 = 2 \cdot 5 + 2)$ і т. д.

Для дії множення системних чисел у будь-якій позиційній системі числення справджуються комутативний, асоціативний і дистрибутивні закони множення відносно додавання і віднімання:

1) $a_{(g)} \cdot b_{(g)} = b_{(g)} \cdot a_{(g)}$,

2) $(a_{(g)} \cdot b_{(g)}) \cdot c_{(g)} = a_{(g)} \cdot (b_{(g)} \cdot c_{(g)})$,

$a_{(g)} \cdot (b_{(g)} \cdot c_{(g)}) = (a_{(g)} \cdot b_{(g)}) \cdot c_{(g)}$,

3) $(a_{(g)} + b_{(g)}) \cdot c_{(g)} = a_{(g)} \cdot c_{(g)} + b_{(g)} \cdot c_{(g)}$,

$a_{(g)} \cdot (b_{(g)} + c_{(g)}) = a_{(g)} \cdot b_{(g)} + a_{(g)} \cdot c_{(g)}$,

4) $(a_{(g)} - b_{(g)}) \cdot c_{(g)} = a_{(g)} \cdot c_{(g)} - b_{(g)} \cdot c_{(g)}$,

$a_{(g)} \cdot (b_{(g)} - c_{(g)}) = a_{(g)} \cdot b_{(g)} - a_{(g)} \cdot c_{(g)}$.

***Використовуючи операцію множення, можна здійснити*** перехід від однієї недесяткової системи числення до іншої.

**Правило.** Для того щоб будь-яке число $N_{(g)}$, де $g \neq 10$, записати в недесятковій системі числення при основі $k \neq 10$, потрібно, записавши число $N_{(g)}$ у вигляді суми розрядних одиниць, усно виразити всі цифри і стару основу в новій системі і виконати обчислення в новій системі.

**Приклад.** $31211_{(4)} = x_{(8)}$.

**Розв'язання**. $31211_{(4)} = 3 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 1 =$

$= 3_{(8)} \cdot 400_{(8)} + 1_{(8)} \cdot 100_{(8)} + 2_{(8)} \cdot 20_{(8)} + 1 \cdot 4_{(8)} + 1_{(8)} = 1400_{(8)} + 100_{(8)} + 40_{(8)} + 4_{(8)} + 1_{(8)} = 1545_{(8)}$.

Отже, $31211_{(4)} = 1545_{(8)}$.

Тут основа 4 менша, ніж 8, тому всі цифри при основі 8 залишилися такими ж, як і при основі 4. Степеневі основи 4 простіше перетворювати у вісімкову систему так: $4^4 = (4^2)^2 = (16)^2 = (20_{(8)})^2 = 400_{(8)}$,

$$4^3 = 4^2 \cdot 4 = 20_{(8)} \cdot 4_{(8)} = 100_{(8)}.$$

**Приклад.** $36412_{(7)} = x_{(5)}$.

**Розв'язання.** Тут 7>5. У п'ятірковій системі цифр 7 і 6 немає, тому, записавши дане число у вигляді суми розрядних одиниць, числа 7 і 6 виразимо у
п'ятірковій системі $7 = 12_{(5)}$, $6 = 11_{(5)}$:

$$36412_{(7)} = 3 \cdot 7^4 + 6 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7 + 2 = 3_{(5)} \cdot 12^4_{(5)} + 11_{(5)} \cdot 12^3_{(5)} + 4_{(5)} \cdot 12^2_{(5)} +$$

$$+ 1_{(5)} \cdot 12_{(5)} + 2_{(5)} = 3_{(5)} \cdot 34101_{(5)} + 11_{(5)} \cdot 2333_{(5)} + 4_{(5)} \cdot 144_{(5)} + 12_{(5)} +$$

$$+ 2_{(5)} = 212303_{(5)} + 31213_{(5)} + 1241_{(5)} + 14_{(5)} = 300331_{(5)}$$

Отже, $36412_{(7)} = 300331_{(5)}$.

## 4. Ділення

**Приклад.** *Знайти частку чисел $221432_{(5)}$ і $24_{(5)}$.*

**Розв'язання**

$$\begin{array}{l|l}
\phantom{-}221432_{(5)} & 24_{(5)} \\ \cline{2-2}
-\underline{211_{(5)}} & 4203_{(5)} \\
\phantom{-0}104_{(5)} & \\
\phantom{0}-\underline{103_{(5)}} & \\
\phantom{-000}132_{(5)} & \\
\phantom{00}-\underline{132_{(5)}} & \\
\phantom{-00000}0 &
\end{array}$$

*Пояснення*: тут двоцифрове число, утворене найвищими розрядами діленого, менше від дільника ($22_{(5)} < 24_{(5)}$), тому в діленому відділяємо трицифрове число $221_{(5)}$. Це стільки одиниць четвертого розряду в діленому. Ділимо їх на $24_{(5)}$. Оскільки $22_{(5)}$ менше, ніж $24_{(5)}$, всього на 2 одиниці, то, напевне, при діленні $221_{(5)}$ на $24_{(5)}$ в частці дістанемо 4 – найбільше одноцифрове число при основі g=5. Перевіряємо множенням $24_{(5)} \cdot 4_{(5)} = 211_{(5)}$. Віднімаємо $211_{(5)}$ від $221_{(5)}$, дістаємо остачу $10_{(5)}$, меншу від дільника. Отже, перша цифра частки 4 знайдена правильно. У частці дістали одиниці четвертого розряду, тобто частка становить чотирицифрове число.

Остачу $10_{(5)}$ одиниць четвертого розряду роздроблюємо в одиниці третього розряду, дописавши до них 4 одиниці, що стоять у 3-му розряді діленого.

$104_{(5)}$ одиниці третього розряду ділимо на $24_{(5)}$, дістаємо 2 одиниці третього розряду в частці і 1 в остачі. Остачу роздроблюємо в одиниці другого розряду, дописавши до них 3 одиниці другого розряду діленого, дістаємо $13_{(5)} < 24_{(5)}$, отже в частці одиниць другого розряду не буде, на їх місці ставимо 0.

$13_{(5)}$ одиниць другого розряду роздроблюємо в одиниці першого розряду і дописуємо до них 2 одиниці першого розряду діленого. $132_{(5)}$ ділимо на $24_{(5)}$, дістаємо в частці 3 і в остачі 0.

Якщо, виконуючи ділення системних чисел, дістанемо остачу, то ділення відбуватиметься з остачею. Ділення без остачі і з остачею можна узагальнити такою теоремою.

**Теорема 9.2.** ***(про існування і єдиність частки і остачі).*** *Які б не були позиційні числа $a_{(g)}$ і $b_{(g)}$, існує, і причому єдина пара позиційних чисел $q_{(g)}$ (частка) і $r_{(g)}$ (остача) таких, що:*

$$a_{(g)} = b_{(g)}q_{(g)} + r_{(g)} \wedge 0 \le r_{(g)} < b_{(g)}.$$

**Приклад.** Знайти неповну частку і остачу від ділення $7453_{(8)}$ на $36_{(8)}$.

**Розв'язання.**

$$\begin{array}{rl} -\,7453_{(8)} & \underline{|\;36_{(8)}\;} \\ \underline{74_{(8)}}\;\; & |\;201_{(8)} \\ -\,53_{(8)} & \\ \underline{36_{(8)}} & \\ 15_{(8)} & \end{array}$$

Отже, ми отримали неповну частку $201_{(8)}$ і остачу $15_{(8)}$. Можемо записати так: $7453_{(8)} = 36_{(8)} \cdot 201_{(8)} + 15_{(8)}$.

Правильність виконання дії ділення можна перевірити двома способами на основі залежності між компонентами і результатами дій: множенням частки на дільник і діленням діленого на частку.

Перевіримо, наприклад, правильність рівності $221432_{(5)} : 24_{(5)} = 4203_{(5)}$.

а) $\begin{array}{r} \times\,4203_{(5)} \\ \underline{24_{(5)}} \end{array}$

б) $\begin{array}{rl} -\,221432_{(5)} & \underline{|\;4203_{(5)}} \\ \underline{13411_{(5)}} & |\;24_{(5)} \end{array}$

$$\begin{array}{r} 32322_{(5)} \\ +\ 13411_{(5)} \\ \hline 221432_{(5)} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 32322_{(5)} \\ -\ 32322_{(5)} \\ \hline 0 \end{array}$$

Використовуючи дію ділення, можна здійснити перехід від однієї не десяткової системи числення до іншої безпосередньо, тобто, не переходячи до десяткової системи, як було показано. Для цього треба виразити нову основу в старій системі числення і здійснити послідовне ділення цього числа і його часток на основу. Утворені при цьому послідовні остачі і остання частка, виражені в новій системі, будуть цифрами числа, записаного в новій системі.

**Приклад.** *Записати число 364124$_{(7)}$ у п'ятірковій системі числення.*

**Розв'язання.** Виразимо нову основу в старій системі і будемо послідовно ділити це число на основу, щоб дізнатися, скільки в ньому всього одиниць другого розряду, остача дасть одиниці першого розряду в новій системі; одержане число одиниць другого розряду ділимо на основу, щоб дізнатися, скільки в даному числі всього одиниць третього розряду, і т.д. У цьому випадку, оскільки 5<7, то в системі з основою 7 воно записується так само.

$36412_{(7)} : 5_{(7)} = 5343_{(7)}$: 36412 − 34 = 2; 24 − 21 = 3; 31 − 26 = 2; 22 − 21 = 1

$5343_{(7)} : 5_{(7)} = 1050_{(7)}$: 5 − 5; 34 − 34 = 3

$1050_{(7)} : 5_{(7)} = 135_{(7)}$: 5 − 5; 25 − 21 = 4; 40 − 34 = 3

$135_{(7)} : 5_{(7)} = 21_{(7)}$: 3; 5 − 5; 5 − 5 = 0

$21_{(7)} : 5_{(7)} = 3_{(7)}$: 21 − 21 = 0

I р. II р. III р. IV р. V р. VI р.

Тут усі остачі менші за основу 5, тому вони і будуть являти собою відповідні цифри цього числа і в системі з основою g = 5.

Отже, $36412_{(7)} = 300331_{(5)}$.

Операцію ділення можна використовувати і для здійснення **переходу з недесяткової системи числення у десяткову.** Це можна здійснити послідовним діленням цього числа на число 10, записане при основі g (теоретичне обґрунтування аналогічне до обґрунтування способу переходу від десяткової системи до недесяткової).

**Приклад.** $31211_{(4)} = x$.

**Розв'язання.**

$10 = 22_{(4)}$

$31211_{(4)}$ | $22_{(4)}$

$-\ 22$ $\quad 1112_{(4)}$ | $22_{(4)}$

$32$ $\quad -\ 110$ $\quad 20_{(4)} = 8$ – III р.

$-\ 22$ $\quad 12_{(4)} = 6$ – II р.

$101$

$-\ 22$

$131$

$-\ 110$

$21_{(4)} = 9$ – I р.

Отже, $31211_{(4)} = 869$.

**Порядок виконання дій**. У математиці є правила або закони, формули, які доводять, і є такі, які прийнято як означення або й зовсім як умовні погодження. До таких умовних погоджень належать правила про порядок дій. Як відомо, дії додавання і віднімання називають діями першого ступеня, а множення і ділення – другого ступеня. Якщо у прикладі є дії різного ступеня, то треба спочатку виконувати дії вищого ступеня – множення і ділення, а потім нижчого – додавання і віднімання. Дії одного ступеня виконують в тій послідовності, в якій вони записані. Якщо вираз містить дужки, то спочатку виконують дії в дужках, а потім поза дужками.

**Приклад.** *Знайти значення виразу* $356_{(7)} \cdot 25_{(7)} + (63511_{(7)} - 2405_{(7)})$.

**Розв'язання.**

| | | |
|---|---|---|
| 1) $356_{(7)}$ | 2) $63511_{(7)}$ | 3) $13262_{(7)}$ |
| $\times\ 25_{(7)}$ | $-\ 2405_{(7)}$ | $+\ 61103_{(7)}$ |
| $+\ 2512_{(7)}$ | $61103_{(7)}$ | $104365_{(7)}$. |

$\underline{\ \ 1045_{(7)}}$

$13262_{(7)}$

Отже, $356_{(7)} \cdot 25_{(7)} + (63511_{(7)} - 2405_{(7)}) = 104365_{(7)}$.

## Питання для самоконтролю

1. Короткі історичні відомості про виникнення систем числення.
2. Поняття системи числення. Позиційні системи числення.
3. Поняття системи числення. Непозиційні системи числення.
4. Запис і назва числа в десятковій системі числення.
5. Запис і назва числа в позиційній системі числення з основою g.
6. Правила переходу з недесяткової системи числення у десяткову.
7. Правила переходу з десяткової системи числення у недесяткову.
8. Правила переходу з однієї недесяткової системи числення до іншої.
9. Порівняння системних чисел.
10. Додавання системних чисел у позиційних системах з різними основами.
11. Віднімання системних чисел у позиційних системах з різними основами.
12. Різні способи перевірки додавання і віднімання.
13. Множення системних чисел у позиційних системах з різними основами.
14. Ділення системних чисел у позиційних системах з різними основами.
15. Перевірка множення і ділення. Порядок дій.
16. Вивчення десяткової системи числення у початкових класах.

# ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

**1.** Записати натуральне число, у якому:

а) 5 десятків і 9 одиниць; г) у десятків і 7 одиниць;

б) 10 десятків; д) m десятків і n одиниць;

в) 8 десятків і x одиниць; е) 60 одиниць.

**2.** Записати у вигляді суми розрядних одиниць такі числа:

44, 235, 1080, 3200, 404201, 12354.

**3.** Замінити дані суми записом числа:

а) $8 \cdot 10 + 4$; г) $1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^2 + 7$;

б) $6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 1$; д) $2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2$;

в) $3 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10 + 5$; е) $10^5 + 10^4 + 10^2 + 9$.

**4.** Добуток цифр двоцифрового числа у 2 рази більший за суму його цифр. Якщо від шуканого числа відняти 27, то одержимо число, записане тими ж цифрами, але у зворотному порядку. Знайти це число.

**5.** Якщо невідоме двоцифрове число поділити на число, записане тими ж цифрами, але у зворотному порядку, то одержимо неповну частку 4 і остачу 3. Якщо ж шукане число поділити на суму його цифр, то у частці буде 8, а в остачі 7. Знайти це число.

**6.** Зобразити числа 123, $345_{(6)}$, $1080_{(9)}$, $400_{(5)}$, $3203_{(4)}$, $6003_{(7)}$ у вигляді суми розрядних одиниць.

**7.** Виходячи із запису числа, назвати це число і систему, в якій воно записане:

а) $5 \cdot 10+3$; б) $2 \cdot 8^4+7 \cdot 8^2+4 \cdot 8$; в) $4 \cdot 7^2+6 \cdot 7+4$;

г) $1 \cdot 2^5+1 \cdot 2^3+1$; д) $2 \cdot 3^4+1 \cdot 3^3+2 \cdot 3+1$; е) $4 \cdot 5^3+3 \cdot 5^2$.

**8.** Записати у сімковій системі числення число:

а) 5; б) 7; в) 84; г) 1129.

**9.** Записати в десятковій системі числення числа:

а) $13423_{(5)}$ б) $2011_{(3)}$, в) $25(11)3_{(12)}$, г) $2401_{(6)}$.

**10.** Записати у шестірковій системі числення числа:

а) $134_{(6)}$, б) $100101_{(2)}$, в) $3402_{(5)}$, г) $80245_{(9)}$.

**11.** Вказати серед поданих рівностей істинні:

а) $2403_{(5)} = 1345_{(6)}$, б) $58 = 112_{(7)}$,

в) $1660_{(9)} = 1001011000_{(2)}$ г) $101111011_{(2)} = 759$

**12.** Записати у двійковій системі числення числа:

а) $13423_{(8)}$ б) $2011_{(8)}$, в) $25113_{(8)}$, г) $2401_{(8)}$.

**13.** Порівняти числа $234_{(5)}$ і $125_{(6)}$ у десятковій системі числення.

**14.** Поставити знаки «>«, «<«, «=« так, щоб отримати істинні висловлювання:

а) $124_{(5)}$ $214_{(5)}$, б) $1101001_{(2)}$ $1011001_{(2)}$,

в) $(11)9785_{(12)}$ $(10)456708_{(12)}$, г) $324$ $324_{(5)}$,

д) $576_{(8)}$ $576_{(9)}$ е) $111_{(6)}$ $412_{(8)}$.

**15.** Записати множину натуральних значень $x_{(5)}$, що задовольняють нерівності:

а) $x_{(5)}<13_{(5)}$; б) $x_{(5)}\leq 44_{(5)}$; в) $11_{(5)}\leq x_{(5)}\leq 20_{(5)}$; г) $31_{(5)}<x_{(5)}<40_{(5)}$.

**16.** Виконати операцію додавання:

а) $357_{(8)} + 62_{(8)}$, г) $1(10)355_{(12)} + 37(10)4_{(12)}$,

б) $23_{(6)} + 54321_{(6)}$, д) $32141_{(5)} + 34444_{(5)}$,

в) $121_{(7)} + 456_{(7)}$, е) $457_{(9)} + 778_{(9)}$.

**17.** Записати значення виразу:

а) $111_{(4)} + 353_{(6)}$ у трійковій системі числення;

б) $823(10)_{(11)} + 246_{(7)}$ в десятковій системі числення;

в) $421_{(5)} + 131_{(4)}$ у сімковій системі числення;

г) $325 + 1408$ у п’ятірковій системі числення.

**18.** Знайти значення виразу, використовуючи закони додавання:

а) $10100_{(2)} + 1011_{(2)} + 101010_{(2)}$,

б) $(23417_{(8)} + 63176_{(8)}) + 3642_{(8)}$,

в) $3245_{(8)} + (1533_{(8)} + 4615_{(8)})$,

г) $479 + 1596 + 1521 + 8404$.

**19.** Виконати операцію віднімання та здійснити перевірку:

а) $1458 – 761$; в) $1(11)355_{(12)} – 37(10)4_{(12)}$;

б) $343001_{(6)} – 24213_{(6)}$; г) $34344_{(5)} – 32441_{(5)}$;

д) $4412_{(7)} - 314_{(7)}$; е) $1020_{(8)} - 534_{(8)}$.

**20.** Записати значення виразу:

а) $(12)469(12)_{(13)} + 90(10)_{(13)} - (11)587_{(13)}$ у дванадцятковій системі числення;

б) $9811(10)7_{(11)} - 799_{(11)} - (10)459_{(11)}$ у п'ятірковій системі числення;

в) $4413_{(6)} - 3234_{(6)} + 134_{(6)}$ у вісімковій системі числення;

г) $3246 - 1259 + 2003$ у двійковій системі числення.

**21.** Виконати операцію множення:

а) $4203_{(5)} \cdot 24_{(5)}$, в) $(10)98_{(12)} \cdot 2(11)_{(12)}$,

б) $357_{(8)} \cdot 62_{(8)}$, г) $(12)59_{(13)} \cdot 781_{(13)}$.

**22.** Обчислити результат найбільш зручним способом і подати його у десятковій системі числення:

а) $13223_{(5)} - 22_{(5)} \cdot 43_{(5)}$, г) $41_{(7)} \cdot 430_{(7)} - 430_{(7)} \cdot 21_{(7)}$;

б) $3245_{(6)} \cdot 201_{(6)} + 542_{(6)} \cdot 201_{(6)}$, д) $3245_{(6)} \cdot 201_{(6)} - 542_{(6)} \cdot 201_{(6)}$.

в) $41_{(7)} \cdot 460_{(7)} - 460_{(7)} \cdot 21_{(7)}$;

**23.** Знайти значення виразу:

а) $21_{(3)} \cdot 12_{(3)} + 11_{(3)}$; г) $132_{(8)} \cdot 47_{(8)} + 2451_{(8)}$;

б) $26_{(8)} \cdot 35_{(8)} + 121_{(3)} \cdot 22_{(8)}$; д) $17_{(8)} \cdot 71_{(8)} + 24_{(5)}$;

в) $76_{(8)} \cdot 64_{(8)} - 57_{(8)} \cdot 37_{(8)}$; е) $54321_{(9)} \cdot 23_{(9)} + 357_{(9)} \cdot 62_{(9)} - 145_{(9)} \cdot 3_{(9)}$.

**24.** Розв'язати рівняння і зробити перевірку:

а) $x_{(9)} - 543_{(9)} \cdot 32_{(9)} = 272_{(9)} \cdot 88_{(9)}$,

б) $245_{(8)} + x_{(8)} = 134_{(8)} \cdot 11_{(8)} + 72_{(8)} \cdot 11_{(8)}$,

в) $x_{(14)} : 2(11)_{(14)} = 1(10)_{(14)} \cdot (13)(12)(11)_{(14)}$,

г) $543_{(6)} - x_{(6)} : 25_{(6)} = 54_{(6)}$.

**25.** Виконати операцію ділення та здійснити перевірку:

а) $221432_{(5)} : 24_{(5)}$, д) $(13)(12)69_{(14)} : 4(10)6_{(14)}$,

б) $322221_{(5)} : 4_{(5)}$, е) $51(10)3406_{(11)} : 548_{(11)}$,

в) $323514_{(7)} : 3_{(7)}$, є) $51324_{(6)} : 2_{(6)}$,

г) $321452_{(8)} : 7_{(8)}$, ж) $32010_{(4)} : 2_{(4)}$.

**26.** Розв’язати рівняння і зробити перевірку:

а) $543_{(6)} - x_{(6)} : 25_{(6)} = 54_{(6)}$ в) $621_{(8)} \cdot x_{(8)} + 431_{(8)} = 1252_{(8)}$

б) $x_{(5)} \cdot 24_{(5)} - 114_{(5)} = 2310_{(5)}$ г) $134_{(8)} \cdot 11_{(8)} + 72_{(8)} \cdot 11_{(8)} = x \cdot 11_{(8)}$,

д) $23213_{(5)} : 32_{(5)} - x_{(5)} + 423_{(5)} = 113_{(5)} \cdot 3_{(5)}$.

**27.** Знайти значення виразу:

а) $1515_{(8)} : 15_{(8)} - 31_{(8)}$ у п’ятірковій системі числення;

б) $23213_{(5)} : 32_{(5)} - 113_{(5)} \cdot 3_{(5)}$ у сімковій системі числення;

в) $(563_{(8)} + 217_{(8)}) \cdot 15_{(8)} + (2365_{(8)} - 636_{(8)}) : 17_{(8)}$ у десятковій системі числення;

г) $356_{(7)} \cdot 25_{(7)} + 63511_{(7)} - 150335_{(7)} : 23_{(7)}$ у дванадцятковій системі числення.

**28.** Використовуючи порядок дій, знайти значення виразу:

а) $(11011101_{(2)} : 1101_{(2)} + 111_{(2)}) \cdot 1010_{(2)}$

б) $(563_{(8)} + 217_{(8)}) \cdot 15_{(8)} + (2365_{(8)} - 636_{(8)}) : 17_{(8)}$;

в) $221102_{(3)} : 2_{(3)} + 21210_{(3)} \cdot 2211_{(3)} - 212110_{(3)}$;

г) $471222_{(8)} : 27_{(8)} + 745_{(8)} - 422_{(8)} + (2112_{(8)} - 653_{(8)} \cdot 2_{(8)})$;

д) $111_{(6)} \cdot 10_{(6)} + 101101_{(6)} : 101_{(6)}$.

**29.** Використовуючи ділення, записати:

а) $70532_{(8)}$ у п’ятірковій системі числення;

б) $160345_{(7)}$ у дев’ятірковій системі числення;

в) $20403_{(6)}$ у трійковій системі числення;

г) $34201_{(5)}$ у сімковій системі числення.

# 10. Подільність натуральних чисел

## 10.1. Відношення подільності на множині натуральних чисел та його властивості

Розглянемо на множині натуральних чисел дію ділення. Із попередніх розділів відомо, що ця дія є не завжди виконуваною на множині $N$, бо її результат не завжди існує серед натуральних чисел.

**Означення.** *Кажуть, що* ***натуральне число а ділиться на натуральне число b,*** *якщо у множині натуральних чисел існує їхня частка, тобто таке натуральне число q, що* $b \cdot q = a$.

Якщо $a$ ділиться на $b$, то пишемо скорочено так: $\boldsymbol{a \,\vdots\, b}$ і читаємо ***«а ділиться на b», «b є дільником а», «а є кратним для b».***

Із означення випливає, що подільність числа $a$ на число $b$ є бінарним відношенням, визначеним на множині натуральних чисел. Його називають ***відношенням подільності на множині натуральних чисел.***

Встановимо деякі ***властивості*** цього відношення.

**1. Теорема 10.1.** *(рефлексивність відношення подільності):*

*Кожне натуральне число ділиться само на себе, тобто*

$$(\forall a \in N) \quad a \,\vdots\, a.$$

**2. Теорема 10.2.** *(антисиметричність відношення подільності):*

*Якщо натуральне число а ділиться на інше натуральне число b, то число b не ділиться на число а, тобто* $(\forall a, b \in N)\ a \neq b \wedge a \,\vdots\, b \Rightarrow \overline{b \,\vdots\, a}$.

**3. Теорема 10.3.** *(транзитивність відношення подільності):*

*Якщо натуральне число а ділиться на натуральне число b і число b ділиться на натуральне число с, то число а ділиться на с, тобто*

$$(\forall a, b, c \in N) \quad a \,\vdots\, b \wedge b \,\vdots\, c \Rightarrow a \,\vdots\, c.$$

**4.** *Відношення подільності на множині натуральних чисел є* ***відношенням нестрогого порядку на множині N.***

**5.** *Кожне натуральне число а ділиться на число 1.*

## 10.2. Теореми про подільність суми, різниці і добутку натуральних чисел

На практиці виникає питання: як, не проводячи обчислень, визначити, чи ділиться сума, різниця або добуток натуральних чисел на це натуральне число чи ні? Встановимо кілька тверджень про подільність суми, різниці і добутку натуральних чисел.

**Подільність суми**

**Теорема 10.4.** (*достатня ознака подільності суми*).

*Якщо кожен з доданків $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ділиться на деяке натуральне число $b$, то і їх сума ділиться на число $b$, тобто*

$$(a_1 \vdots b)\wedge(a_2 \vdots b)\wedge\ldots\wedge(a_n \vdots b) \Rightarrow (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\vdots b, \text{де } \ a_i \in N \wedge b \in N.$$

Наприклад, $(42 + 18) \vdots 3$, бо $42 \vdots 3$ і $18 \vdots 3$.

**Теорема 10.5.** *Якщо один з двох доданків ділиться на число, то для того щоб сума ділилася на це число, необхідно і досить, щоб другий доданок ділився на це число.*

Наприклад, $(45 + 38) \not\vdots 5$, бо $45 \vdots 5$, але $38 \not\vdots 5$.

Зазначимо, що обернене твердження до теореми 2.1 не є правильним. Існують випадки, коли доданки не діляться на число, а їхня сума ділиться на це число. Наприклад, $12 \not\vdots 5$ і $23 \not\vdots 5$, але їх сума $(12 + 23) \vdots 5$. Цього не можна пояснити жодною з попередніх теорем. Відповідь на це питання дає така теорема.

**Теорема 10.6.** (*достатня і необхідна ознака подільності суми*).

*Для того щоб сума натуральних чисел $a$ і $b$ ділилася на задане число $n$, необхідно і досить, щоб на це число $n$ ділилась сума остач від ділення кожного доданка $a$ і $b$ на число $n$.*

На основі цієї теореми вже можна пояснити попередній приклад:

$12 : 5 = 2$ (ост. 2); $23 : 5 = 4$ (ост. 3), $r_1 + r_2 = 2 + 3 = 5 \vdots 5$.

Отже, $(12 + 23) \vdots 5$.

**Подільність різниці**

**Теорема 10.7.** *(достатня ознака подільності різниці*).

*Якщо зменшуване і від'ємник діляться на натуральне число, то і різниця їх теж ділиться на це число, тобто*

$$(a_1 \vdots n)\wedge(a_2 \vdots n)\wedge(a_1 > a_2) \Rightarrow (a_1 - a_2)\vdots n.$$

Наприклад, (28 – 14) $\vdots$ 7, бо 28 $\vdots$ 7 і 14 $\vdots$ 7.

Обернене твердження є неправильним, бо кожне з чисел може не ділитися на задане число, але їхня різниця поділиться на задане число. Це пояснює така теорема.

**Теорема 10.8.** *(достатня і необхідна умова подільності різниці).*

*Для того щоб різниця натуральних чисел a і b поділилась на задане число n, необхідно і досить, щоб остачі від ділення зменшуваного і від'ємника на це число n були рівні між собою.*

Наприклад, (43 – 23) $\vdots$ 5, бо 43 : 5 = 8(ост. 3) і 23 : 5 = 4 (ост. 3), $r_1 = r_2$ =3.

**Подільність добутку.**

**Теорема 10.9.** *(достатня ознака подільності добутку).*

*Якщо хоча б один із співмножників ділиться на деяке число, то й добуток їх ділиться на це число, тобто*

Наприклад, (129 · 20) $\vdots$ 5, бо 20 $\vdots$ 5.

Обернене твердження є неправильним, бо кожне з чисел добутку може не ділитися на задане число, але добуток поділиться на задане число. Більш загальною теоремою про подільність добутку є наступна теорема.

**Теорема 10.10.** ***(достатня і необхідна ознака подільності добутку).***

*Для того щоб добуток натуральних чисел a і b ділився на задане число n, необхідно і досить, щоб на це число ділився добуток остач від ділення кожного множника на це число.*

Наприклад, (12·15) $\vdots$ 10, бо 12:10 = 1(ост. 2), 15 : 10 = 1(ост. 5), $r_1 \cdot r_2$=2 · 5=10 $\vdots$ 10.

Теореми про подільність суми, різниці і добутку натуральних чисел широко використовують у розв'язуванні вправ.

**Приклад.** *Довести, що* $(215^2 - 95^2) \vdots 12$.

Р о з в ' я з а н н я. $215^2 - 95^2$ = (215 - 95)(215 + 95) = 120 · 310. Оскільки вираз перетворився у добуток, одним з множників якого є число 120, що ділиться на 12, то за достатньою ознакою подільності добутку весь вираз ділиться на 12.

**Приклад.** Довести, що різниця тризначного числа і числа, записаного тими ж цифрами, але у зворотному порядку, ділиться на 9.

Р о з в ’ я з а н н я. Запишемо тризначне число у загальному випадку $\overline{xyz}$. Воно має $x$ сотень, $y$ десятків і $z$ одиниць, тобто $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Тоді $\overline{zyx} = 100z + 10y + x$ є числом, записаним тими ж цифрами, але у зворотному порядку. Знайдемо їхню різницю:

$\overline{xyz} - \overline{zyx} = 100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 100x + 10y + z - 100z - 10y - x =$

$= 99x - 99z = 99 \cdot (x - z).$

Різниця тотожними перетвореннями перетворилася у добуток, одним із співмножників якого є число 99, тому за достатньою ознакою подільності добутку весь вираз ділиться на 9.

**Приклад.** *Довести методом математичної індукції, що*

$$(\forall n \in N)(6^{n+2} + 7^{2n+1}) \vdots 43.$$

Р о з в ’ я з а н н я. Використаємо метод математичної індукції:

*1)* перевіримо істинність твердження при $n = 1$:

$$6^{1+2} + 7^{2+1} = 6^3 + 7^3 = 216 + 343 = 559 \vdots 43.$$

*2)* припустимо істинність твердження при $n = k$: $(6^{k+2} + 7^{2k+1}) \vdots 43$.

*3)* доведемо істинність твердження при $n = k+1$: $(6^{(k+1)+2} + 7^{2(k+1)+1}) \vdots 43$.

Спростимо цей вираз: $6^{(k+1)+2} + 7^{2(k+1)+1} = 6^{k+2+1} + 7^{2k+1+2} = 6^{k+2} \cdot 6 + 7^{2k+1} \cdot 7^2 =$

$6 \cdot 6^{k+2} + 49 \cdot 7^{2k+1} = 6 \cdot 6^{k+2} + (6 + 43) \cdot 7^{2k+1} = 6 \cdot 6^{k+2} + 6 \cdot 7^{2k+1} + 43 \cdot 7^{2k+1} = 6 \cdot ($

$6^{k+2} + 7^{2k+1}) + 43 \cdot 7^{2k+1}$ Вираз у дужках ділиться на 43 за припущенням. За достатньою ознакою подільності добутку весь добуток (перший доданок виразу) також ділиться на 43. Другий доданок виразу є теж добутком і має множником число 43, тому він за тією ж теоремою ділиться на 43. За достатньою ознакою подільності суми, якщо кожен доданок ділиться на 43, то і вся сума, тобто весь вираз, теж ділиться на 43.

Отже, методом математичної індукції ми довели, що твердження істинне для довільного натурального числа *n*.

## 10.3. Ознаки подільності та їх застосування

**Означення.** ***Ознака подільності*** *– це твердження, яке зводить питання про подільність будь-якого натурального числа на задане число т до питання про подільність на т деякого меншого натурально числа.*

*Встановимо низку ознак подільності у десятковій системі числення.*

**Теорема 10.11. (***Ознака подільності на 2).*

*Для подільності натурального числа на 2, необхідно і досить, щоб остання цифра у його записі була парною або нулем.*

Наприклад, $14\underline{8} \vdots 2$, бо остання цифра у записі числа є парною;

$101 \not\vdots 2$, бо остання цифра у записі числа не є парною.

**Теорема 10.12.** *(Ознака подільності на 5).*

*Для подільності натурального числа на 5, необхідно і досить, щоб його остання цифра була 0 або 5.*

Наприклад, $18\underline{5} \vdots 5$, бо остання цифра у записі числа 5;

$62\underline{7} \not\vdots 5$, бо остання цифра у записі числа 7.

**Теорема 10.13.** *(Ознаки подільності на 4 і на 25).*

*Для подільності натурального числа на 4 (на 25), необхідно і досить, щоб число, утворене двома його останніми цифрами, ділилось на 4 (на 25).*

Наприклад, $6\underline{24} \vdots 4$, бо $24 \vdots 4$; $5\underline{14} \not\vdots 4$, бо $14 \not\vdots 4$;

$6\underline{25} \vdots 25$, бо $25 \vdots 25$; $4\underline{70} \not\vdots 25$, бо $70 \not\vdots 25$.

**Теорема 10.14.** *(Ознаки подільності на 8 і на 125).*

*Для подільності натурального числа на 8 (на 125), необхідно і досить, щоб число, утворене трьома його останніми цифрами, ділилось на 8 (на 125).*

Наприклад, $1\underline{400} \vdots 8$, бо $400 \vdots 8$; $4\underline{165} \not\vdots 8$, бо $165 \not\vdots 8$;

$6\underline{750} \vdots 125$, бо $750 \vdots 125$; $2\underline{118} \not\vdots 125$, бо $118 \not\vdots 125$.

**Теорема 10.15.** *(Ознаки подільності на 3 і на 9).*

*Для подільності натурального числа на 3 (на 9), необхідно і досить, щоб сума його цифр ділилась на 3 (на 9).*

Наприклад, $165 \vdots 3$, бо $1 + 6 + 5 = 12 \vdots 3$;

$251 \not\vdots 3$, бо $2 + 5 + 1 = 8 \not\vdots 3$;

$198 \vdots 9$, бо $1 + 9 + 8 = 18 \vdots 9$;

$751 \not\vdots 9$, бо $7 + 5 + 1 = 13 \not\vdots 9$.

Зазначимо, що насправді ми довели більше, ніж сформульовано в теоремі. Остання рівність показує, що число і сума його цифр дають при діленні на 3 (на 9) однакові остачі, отже, остача від ділення числа на 3 (на 9) дорівнює остачі від ділення на 3 (на 9) суми його цифр.

Наприклад, знайдемо остачу від ділення числа 2 453 728 на 9. Сума цифр числа дорівнює 2 + 4 + 5 + 3 + 7 + 2 + 8 = 31, 3 + 1 = 4, отже, шукана остача є 4.

**Теорема 10.16.** *(Ознака подільності на 11).*

*Для подільності натурального числа на 11, необхідно і досить, щоб різниця між сумами його цифр, що стоять на парних і непарних місцях (або навпаки), ділилась на 11.*

Наприклад, $320584 \vdots 11$, бо $(3 + 0 + 8) – (2 + 5 + 4) = 11 – 11 = 0 \vdots 11$;

$65104 \not\vdots 11$, бо $(6 + 1 + 4) – (5 + 0) = 11 – 5 = 6 \not\vdots 11$.

Ознаки подільності застосовують для розв’язування різноманітних прикладів.

**Приклад.** *Визначити, не виконуючи обчислень, чи ділиться значення виразу $28 \cdot 37 + 2854 – 135$ на 5.*

Р о з в ’ я з а н н я. За ознакою подільності на *5*, число ділиться на *5*, якщо воно у своєму записі закінчується цифрою *5* або *0*.

Використаємо теорему про подільність добутку: добуток *28 · 37* не ділиться на *5*, бо число *28* при діленні на *5* дає остачу *3*, а число *37* – остачу *2*, добуток цих остач дорівнює *6*.

Число 2854 не ділиться на 5 і дає остачу 4.

За теоремою про подільність суми: сума остач при діленні доданків на 5 дорівнює 6 + 4 = 10, вона ділиться на 5, тобто її остача при діленні на 5 дорівнює 0. Число 135 ділиться на 5, тобто остача дорівнює 0.

За теоремою про подільність різниці: якщо остачі при діленні зменшуваного і від’ємника рівні між собою, то різниця ділиться на число 5.

В і д п о в і д ь. Значення виразу $28 \cdot 37 + 2854 – 135$ ділиться на 5.

Всі наведені ознаки подільності випливають з найбільш загальної ознаки подільності, яка називається **ознакою подільності Паскаля.**

**Теорема 10.17.** **(***Ознака подільності Паскаля).*

*Натуральне число a, задане у системі числення з основою g, ділиться на натуральне число b тоді і тільки тоді, коли на нього ділиться сума добутків цифр запису числа a на остачі при діленні на b відповідних степенів основи.*

Розглянемо деякі **ознаки подільності у довільних позиційних системах числення з основою g:**

1. Як і у доведенні ознак подільності на 2 і на 5 у десятковій системі числення, отримаємо, що коли число c є дільником основи системи числення g, то для подільності числа у системі числення з основою g на число c необхідно і досить, щоб його остання цифра ділилась на число c. Наприклад, такою буде ознака подільності на 2, 3, 4, 6 у дванадцятковій системі. З цієї точки зору дванадцяткова система числення має деякі переваги перед десятковою (основа 12 має більше дільників, ніж 10).

2. Як і у доведенні ознак подільності на 3 і на 9 у десятковій системі числення, отримаємо, що коли число c є дільником числа g–1, то для подільності числа g на c необхідно і досить, щоб сума його цифр ділилась на c. Такою буде, наприклад, ознака подільності на 7 у вісімковій системі числення, ознака подільності на 2, 3, 6 у сімковій системі тощо.

3. Як і у доведенні ознаки подільності на 11 у десятковій системі числення, отримаємо, що коли число c є дільником числа g+1, то для подільності числа g на c необхідно і досить, щоб на c ділилась різниця між сумами його цифр, що стоять на парних і непарних місцях. Такою буде, наприклад, ознака подільності на 2, 3, 6 у п'ятірковій системі числення, ознака подільності на 3 і 9 у вісімковій системі числення, ознака подільності на 3 у двійковій системі тощо.

## 10.4. Прості і складені числа та їх властивості

Розглянемо питання про можливе число дільників натурального числа.

**Означення.** *Натуральне число d називається* ***дільником натурального числа a****, якщо існує таке натуральне число q, що виконується рівність:* $a=dq$.

Всяке натуральне число *a* має лише скінченне число дільників, бо всі його дільники не перевищують самого числа *a*. Ці дільники утворюють множину дільників числа *a.* Серед натуральних чисел особливе місце займає число 1, оскільки це число має лише один дільник — саме число 1. Всяке число $a > 1$ має принаймні два дільники — воно завжди ділиться на 1 і на самого себе.

**Означення.** *Натуральне число називається* ***простим,*** *якщо воно має тільки два дільники.*

**Означення.** *Натуральне число, більше 1, називається* ***простим,*** *якщо воно ділиться тільки на 1 і на себе.*

Наприклад, число 29 є простим, бо його множина дільників містить два елементи – числа 1 і 29. Простими також є числа: 7, 11, 37, … .

**Означення.** *Натуральне число називається* ***складеним,*** *якщо воно має більше ніж два дільники.*

**Означення.** *Натуральне число а називається* ***складеним,*** *якщо у нього є ще принаймні один дільник, відмінний від 1 і а.*

Наприклад, число 9 є складеним, бо його множина дільників містить три елементи – числа 1, 3 і 9. Складеними також є числа: 27, 81, 30, … .

Отже, можна так ***класифікувати множину натуральних чисел*** за кількістю їхніх дільників:

*1) прості числа (мають тільки два дільники);*

*2) складені числа (мають більше ніж два дільники);*

*3) ні просте, ні складене число (число 1, яке має лише один дільник).*

На основі цієї класифікації множини натуральних чисел ми отримали три непорожні її підмножини, які попарно не перетинаються, тобто *кожне натуральне число є або простим, або складеним, або одиницею.*

Якщо розглянути множину цілих невід'ємних чисел $N_0$, то слід зауважити, що число нуль ділиться на будь-яке відмінне від нуля число, отже, *нуль має безліч дільників*.

**Теорема 10.18.** *(про існування простого дільника у довільного натурального числа, відмінного від 1): Якщо натуральне число відмінне від 1, то воно має хоча б один простий дільник.*

**Теорема 10.19.** *Найменший простий дільник складеного числа а не перевищує* $\sqrt{a}$.

Ця теорема дозволяє легше перевіряти практично, чи є число *а* простим, бо натуральне число *а* буде простим, якщо воно не має жодного дільника серед простих чисел, менших $\sqrt{a}$. Тому часто теорему 10.19 називають ***критерієм розпізнавання простих чисел.***

**Приклад.** Чи є серед чисел 137 і 209 просте число?

Р о з в ' я з а н н я.

а) Використовуючи твердження теореми 10.19, треба шукати дільники числа 137 серед простих чисел, які менші ніж його корінь квадратний. Оскільки $\sqrt{137} \approx 12$, то випишемо всі прості числа, які менші *12*: 2, 3, 5, 7, 11.

Використовуючи відповідні ознаки подільності, перевіримо, чи є котресь із них дільником числа 137: $137 \not\vdots\, 2$, $137 \not\vdots\, 3$, $137 \not\vdots\, 5$, $137 \not\vdots\, 7$, $137 \not\vdots\, 11$.
Оскільки серед цих простих чисел дільників числа 137 нема,то число 137 – просте

б) Аналогічно знаходимо, що $\sqrt{209} \approx 14$, тому перевіримо, чи є серед простих чисел, менших ніж 14, дільники числа 209: $209 \not\vdots\, 2$, $209 \not\vdots\, 3$, $209 \not\vdots\, 5$, $209 \not\vdots\, 7$, $209 \,\vdots\, 11$. Оскільки число 209 ділиться на 11, то число 209 – складене.

В і д п о в і д ь: число 137 – просте, число 209 – складене.

Поняття простого числа було відоме ще древнім грекам. Зокрема грецький математик і астроном Ератосфен (3 ст. до н.е.) придумав і описав спосіб знаходження всіх простих чисел, що не перевищують даного натурального числа *n*. Цей спосіб відомий під назвою ***решета Ератосфена***. Таку назву цей спосіб отримав через те, що у ті часи писали загостреною паличкою на дощечках, вкритих шаром воску. Числа Ератосфен не закреслював, а проколював, внаслідок чого дощечка ставала схожою на решето, на якому залишилися «непросіяними» прості числа. Через асоціації із ситом цей метод і дістав назву решета Ератосфена.

*Цей метод полягає у наступному.*

Виписуємо всі натуральні числа від *2* до *n*: $2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots, n$ (число 1 не є простим, тому його не пишемо). Для конкретного випадку візьмемо число $n = 50$. З цього ряду чисел викреслюватимемо всі складені числа.

Перше число 2 ділиться лише на 1 і на себе, отже, воно є простим. Викреслимо всі числа, кратні 2; 3; 5; 7 крім цих чисел. Наступне перше невикреслене число після 7 є число 11. Але воно вже є більшим ніж $\sqrt{50}$, тому за теоремою 10.19. викреслювання слід припинити, бо серед чисел, що залишились невикресленими, є вже лише прості числа, а складених нема.

Отже, простими числами першої півсотні є:

***2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.***

Таким чином, у загальному випадку, після того, як викреслено всі кратні для простих чисел, менших за *p,* всі невикреслені числа, менші за $p^2$, є простими. Отже, якщо $p^2 > n$, то складання таблиці закінчено.

Для великих натуральних чисел цей метод розпізнавання простих чисел є надто трудомістким, тому користуватися ним вже недоцільно. У таких випадках користуються складеними ***таблицями простих чисел.***

Існує ще дуже багато нерозв'язаних питань, що стосуються простих чисел. Ця галузь математики і тепер інтенсивно розвивається.

Описані теоретичні відомості стверджують лише про існування простих чисел, але нічого не говориться про те, чи скінченна множина простих чисел, чи нескінченна, тобто чи існує серед простих чисел найбільше число і всі більші за нього числа вже будуть складеними. Відповідь на це запитання дає теорема Евкліда, яка встановлена у книзі «Начала» (Евклід, книга IX). Це була єдина проблема теорії простих чисел, яку вдалося розв'язати античним математикам.

**Теорема 10.20 (Евкліда).** *Множина простих чисел нескінченна.*

## 10.5. Дільники. Спільні дільники. Найбільший спільний дільник

Нехай маємо два натуральні числа $a$ і $b$.

**Означенн.** *Число b називається **дільником** числа a, якщо* $a \vdots b$*, тобто існує таке натуральне число q, що виконується рівність* $a = b\,q$**.**

Натуральне число може мати кілька дільників. Вони утворюють множину дільників цього числа. Множину дільників натурального числа $a$ позначають Д($a$). Наприклад, Д (12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}, Д (29) = {1, 29}, Д (1) = {1}.

***Дільники мають такі властивості***:

1. Число 1 є дільником будь-якого натурального числа.
2. Число 0 не є дільником жодного числа.
3. Будь-яке натуральне число є дільником самого себе.
4. Якщо число $b$ є дільником числа $a$, то $b \le a$.
5. Множина дільників натурального числа є скінченною.
6. Якщо число $b$ є дільником числа $a$, а число $a$ є дільником натурального числа $c$, то число $b$ є дільником числа $c$.

**Означення.** *Нехай* $a_1, a_2, ..., a_k \in N$*. Всяке натуральне число, на яке ділиться кожне з цих чисел, називається їх **спільним дільником** і позначається СД* $(a_1, a_2, ..., a_k)$*.*

**Означення.** *Нехай* $a_1, a_2, ..., a_k \in N$*. Найбільше число із спільних дільників цих чисел називається їх **найбільшим спільним дільником** і позначається НСД* $(a_1, a_2, ..., a_k)$*.*

Існування НСД випливає з таких міркувань:

1. Множина спільних дільників будь-яких цих чисел непорожня, оскільки вона завжди містить число 1.

2. Кожен спільний дільник цих чисел не перевищує найменшого з цих чисел. Тому в множині спільних дільників цих чисел є найбільше число – це і є їх НСД.

3. Множина спільних дільників натуральних чисел є скінченна як переріз скінченних множин дільників цих чисел.

4. НСД будь-яких натуральних чисел завжди існує і є єдиним.

5. НСД чисел $a$ і $b$ не перевищує меншого з цих чисел, тобто якщо $a < b$, то $НСД\ (a, b) \leq a$.

Із означень 1 – 3 випливає ***правило знаходження НСД $(a_1, a_2, ..., a_k)$:***

1. Знайти множини дільників кожного з чисел $a_1, a_2, ..., a_k$.
2. Знайти множину СД $(a_1, a_2, ..., a_k)$ як переріз множин дільників кожного з чисел $a_1, a_2, ..., a_k$.
3. З множини СД $(a_1, a_2, ..., a_k)$ вибирати найбільший елемент. Він і буде НСД $(a_1, a_2, ..., a_k)$.

**Приклад.** Знайти НСД (16; 44).

Р о з в ’ я з а н н я. За наведеним правилом знайдемо множини дільників кожного з чисел 16 і 44: Д(16) = {1; 2; 4; 8; 16}, Д(44) = {1; 2; 4; 11; 22; 44}.

Множина спільних дільників цих чисел знаходиться як переріз множин дільників кожного з них: СД (16; 44) = Д (16) $\cap$ Д (44) = {1; 2; 4}.

Виберемо з множини спільних дільників найбільший елемент – 4. Він і буде найбільшим спільним дільником чисел 16 і 44, тобто НСД (16; 44) = 4.

**Означення.** *Числа $a_1, a_2, ..., a_k$ називаються* ***взаємно простими,*** *якщо НСД $(a_1, a_2, ..., a_k) = 1$.*

Наприклад, взаємно простими є числа 3 і 5; 9 і 11; 4 і 25. Бачимо, що взаємно простими числами можуть бути різні числа: два прості числа; просте і складене числа; два складені числа.

**Означення.** *Числа $a_1, a_2, ..., a_k$ називаються* ***попарно взаємно простими****, якщо $(\forall\ i \neq j)$ НСД $(a_i, a_j) = 1$.*

Очевидно, попарно взаємно прості числа є також взаємно простими, але обернене твердження, взагалі кажучи, неправильне. Так, наприклад, числа 6; 35; 11 є взаємно простими, бо НСД (6; 11; 35) = 1, і попарно взаємно простими, оскільки НСД (6; 35) = 1, НСД (6; 11) = l, НСД (35; 11) = 1.

Числа 8; 12; 15 – взаємно прості: НСД (8; 12; 15) = 1, але вони не є попарно взаємно простими, бо, наприклад, НСД (8; 12) = 4.

## 10.6. Кратні. Спільні кратні. Найменше спільне кратне

Нехай маємо два натуральні числа $a$ і $b$.

**Означення.** ***Число a є кратним для числа b****, якщо $a \vdots b$, тобто існує таке натуральне число $q$, що виконується рівність $a = bq$***.**

Кожне натуральне число має кілька кратних йому чисел, вони утворюють множину кратних для даного числа. Множину кратних для натурального числа $a$ позначають К ($a$). Наприклад,

К (12) = {12, 24, 36, 48, 60, 72, …}, К (25) = {25, 50, 75, 100, 125, 150, …}.

***Кратні мають такі властивості***:

1. Будь-яке натуральне число є кратним для числа 1.
2. Число 0 є кратним для будь-якого числа.
3. Будь-яке натуральне число є кратним самому собі.
4. Якщо число $b$ є кратним для числа $a$, то $b \geq a$.
5. Множина кратних цього натурального числа є нескінченною.
6. Якщо число $b$ є кратним для числа $a$, а число $a$ є кратним для натурального числа $c$, то число $b$ є кратним для числа $c$.

**Означення.** *Нехай $a_1, a_2, ..., a_k \in N$. Всяке натуральне число, яке кратне для кожного з даних чисел, називається їх* ***спільним кратним*** *і позначається СК($a_1, a_2, ..., a_k$).*

**Означення.** *Нехай $a_1, a_2, ..., a_k \in N$. Найменше число із спільних кратних для даних чисел називається їх* ***найменшим спільним кратним*** *і позначається НСК ($a_1, a_2, ..., a_k$).*

Існування НСК випливає з таких міркувань:

1. Множина спільних кратних будь-яких даних чисел $a_1, a_2, ..., a_k$ непорожня, оскільки вона містить добуток цих чисел $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k$.

2. За принципом найменшого числа у множині, у множині спільних кратних чисел для даних чисел завжди існує найменше число — це і є їх НСК.

3. Множина спільних кратних натуральних чисел є нескінченна як переріз нескінченних множин кратних для даних чисел.

4. НСК будь-яких натуральних чисел завжди існує і є єдиним.

5. НСК чисел $a$ і $b$ не менше більшого з цих чисел, тобто якщо $a > b$, то *НСК (a, b)* $\geq a$.

Із означень 1 – 3 випливає ***правило знаходження НСК*** $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$***:***

1. Знайти множини кратних кожного з чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$.
2. Знайти множину СК $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ як переріз множин кратних кожного з чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$.
3. З множини СК $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ вибрати найменший елемент. Він і буде НСК$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

**Приклад.** Знайти НСК (6; 5).

Р о з в' я з а н н я. За наведеним правилом знайдемо множини кратних для кожного з чисел 6 і 5. Випишемо множини кратних для цих чисел:

К (6) = {6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; 60; 66; 72; 78; 84; 90; 96; 102; 108; 114; 120; 126; 132; 138; 144; 150; 156; 162; 168; 174; 180; 186; 192; ...},

К (5) = {5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55; 60; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 100; 105; 110; 115; 120; 125; 130; 135; 140; 145; 150; 160; 165; 170; 175; ...}.

Множина спільних кратних цих чисел знаходиться як переріз множин кратних для кожного з них: СК(6; 5) = К(6) $\cap$ К(5) = {30; 60; 90; 120; 150; 180; ...}.

Виберемо з множини спільних кратних найменший елемент – 30. Він і буде найменшим спільним кратним для чисел 6 і 5, НСК (6; 5) = 30.

## 10.7. Властивості НСД і НСК натуральних чисел

**Теорема 10.21**. *Кожне спільне кратне чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *ділиться на їх найменше спільне кратне.*

**Теорема 10.22.** *Якщо* $a \vdots b$*, то НСД (a, b) = b, НСК (a, b) = a.*

**Теорема 10.23**. *Будь-який спільний дільник чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *є дільником їх найбільшого спільного дільника*.

**Теорема 10.24.** (зв'язок між НСД і НСК двох чисел).

*НСК двох чисел дорівнює добутку цих чисел, поділеному на їх НСД, тобто:*

$$НСК\,(a,\ \mathrm{b}) = \frac{ab}{НСД(a, \mathrm{b})}.$$

**Наслідок.** *НСК двох чисел дорівнює їхньому добутку тоді і тільки тоді, коли ці числа є взаємно простими, тобто*

$$НСК\ (a,\ b) = ab \quad \Leftrightarrow \quad НСД\ (a,\ b) = 1.$$

**Теорема 10.25.** *Для того щоб число d було НСД чисел a і b, необхідно і досить, щоб числа* $\frac{a}{d}$ і $\frac{b}{d}$ *були взаємно простими, тобто*

$$НСД\ (a,\ b) = d \quad \Leftrightarrow \quad НСД\ (\frac{a}{d}; \frac{b}{d}) = 1.$$

**Теорема 10.26**. *Спільний дільник двох чисел a і b можна виносити як за знак НСД, так і за знак НСК, тобто*

$$НСД\ (ac,\ bc) = НСД\ (a, b)\cdot c;\ НСК\ (ac,\ bc) = НСК\ (a,\ b)\cdot c.$$

***Теорема 10.27*** (основна властивість взаємно простих чисел).
*Якщо НСД (a, c) = 1 і ab* $\vdots$ *c, то b* $\vdots$ *c.*

**Теорема 10.28.** *Нехай* $a \in N$ *і p – просте число. Якщо a не ділиться на натуральне число p, то НСД (a, p) = 1.*

**Теорема 10.29.** *Якщо добуток кількох чисел ділиться на просте число p, то принаймні одне з цих чисел ділиться на p*.

**Приклад.** Знайти числа a і b, якщо НСД(a; b)=7, а їх добуток дорівнює 294.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки НСД (a; b) = 7, то за означенням найбільшого спільного дільника двох чисел отримаємо, що

$$a = 7p,\ p \in N, \quad b = 7q,\ q \in N, \quad НСД\ (p; q) = 1.$$

За умовою задачі добуток шуканих чисел 294, тому підставивши вирази, отримаємо $a \cdot b = 294 \Rightarrow 7p \cdot 7q = 294 \Rightarrow pq = 6$.

Можливі такі варіанти: $p = 1,\quad q = 6,\qquad a = 7,\quad b = 42;$
$p = 2,\quad q = 3,\qquad a = 14,\quad b = 21;$
$p = 3,\quad q = 2,\qquad a = 21,\quad b = 14;$
$p = 6,\quad q = 1,\qquad a = 42,\quad b = 7.$

В і д п о в і д ь*:* 7 і 42; 14 і 21.

## 10.8. Ознаки подільності на складене число

**Теорема 10.30.** *Якщо НСД(a,b) = 1, то для подільності числа c на добуток ab необхідно і досить, щоб c* $\vdots$ *a і c* $\vdots$ *b.*

***Ознака подільності на 12.*** *Для подільності натурального числа на 12 необхідно і досить, щоб воно ділилося на 3 і 4.*

Так, дві останні цифри у записі числа 7 321 428 утворюють число 28 і сума його цифр ділиться на 3, отже, це число ділиться і на 4, і на 3, а тому і на 12.

***Ознака подільності на 18.*** *Для подільності натурального числа на 18 необхідно і досить, щоб воно ділилось на 2 і 9.*

Так, число 13 214 250 має у своєму записі останню цифру 0 і сума його цифр ділиться на 9, отже, воно ділиться і на 2, і на 9, а тому і на 18.

Отже, щоб сформулювати ознаку подільності на складене число, треба використати зображення цього складеного числа у вигляді добутку двох чи більше чисел, але лише таких, що є взаємно простими. Наприклад, щоб правильно сформулювати ознаку подільності на 18, слід використати зображення 18=2 · 9, а не 18=3 · 6, бо у другому випадку числа 3 і 6 не є взаємно простими.

## 10.9. Канонічний розклад числа. Основна теорема арифметики

Важливим питанням, пов'язаним з подільністю натуральних чисел та простими числами, є питання розкладу натуральних чисел на прості множники. Відповідь на нього дає така теорема.

**Теорема 10.31. (*основна теорема арифметики).***

*Кожне натуральне число, відмінне від 1, можна зобразити у вигляді добутку простих співмножників. Цей розклад є єдиним, якщо не враховувати порядок розміщення цих співмножників.*

**Означення.** *Зображення натурального числа a у вигляді добутку*

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} \quad ,$$

*де* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *– різні прості числа (співмножники розкладу натурального числа а),* $\alpha_i$ *– кратність множника* $p_i$ *(вказує, скільки разів множник* $p_i$ *входить у розклад). Цей розклад називають* ***канонічним розкладом числа а.***

Наприклад, $50 = 2 \cdot 5^2$, тобто канонічний розклад числа 50 містить тільки два прості множники – 2 і 5, кратність множника 2 дорівнює 1, а кратність множника 5 дорівнює 2.

Канонічний розклад кожного числа є єдиним, бо, скажімо, $50 = 2 \cdot 25$ не є канонічним розкладом числа 50, оскільки число 25 не є простим.

Практично, щоб знайти канонічний розклад числа, поступають по-різному. У нескладних випадках це можна зробити усно і відразу записати розклад числа, наприклад: $33 = 3 \cdot 11$, $24 = 2^3 \cdot 3$, $100 = 2^2 \cdot 5^2$, $375 = 5^3 \cdot 3$. Просте число є канонічним розкладом самого себе, наприклад: 19 = 19.

У загальному випадку знаходження канонічного розкладу будь-якого натурального числа здійснюють послідовним діленням заданого числа і отриманих часток $a_1, a_2, \ldots$ (дивись доведення теореми) на прості дільники. При цьому ділення для зручності починають з ділення на найменший простий дільник.

Знайдемо, наприклад, канонічний розклад числа 14 520. Записують це здебільшого за допомогою такої схеми:

$$\begin{array}{r|l}
14\,520 & 2 \\
7\,260 & 2 \\
3\,630 & 2 \\
1\,815 & 3 \\
605 & 5 \\
121 & 11 \\
11 & 11 \\
1 &
\end{array}$$

Отже, ми знайшли канонічний розклад числа 14 520: $14\,520 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2$.

У процесі розв'язування багатьох практичних завдань використовують поняття канонічного розкладу натурального числа.

**Приклад.** Знайти значення $\sqrt{39204}$.

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо канонічний розклад числа 39 204: $39\,204 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 11^2$.

Тепер використаємо канонічний розклад числа і отримаємо:

$$\sqrt{39204} = \sqrt{2^2 \cdot 3^4 \cdot 11^2} = 2 \cdot 3^2 \cdot 11 = 2 \cdot 9 \cdot 11 = 198.$$

В і д п о в і д ь: 198.

## 10.10. Способи відшукання НСД і НСК чисел

Є такі способи відшукання НСД і НСК натуральних чисел:

***1) підбір НСД і НСК чисел на основі їх означень.***

Ним користуються у найпростіших випадках відшукання НСД і НСК. Наприклад, НСД (21; 35) = 7, бо 7 є найбільшим з чисел, на які діляться одночасно числа 21 і 35. НСК (21; 35) = 105, бо 105 є найменшим з чисел, яке ділиться і на 21, і на 35.

***2) знаходження НСД і НСК чисел за допомогою їх канонічного розкладу.***

Нехай маємо канонічні розклади даних чисел:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \quad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}, \quad \dots, \quad l = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_k^{\lambda_k},$$

(деякі з показників степенів у цих канонічних розкладах можуть дорівнювати нулю). Позначимо через $\mu_i$ - найменше з чисел $\alpha_i, \beta_i, \dots, \lambda_i$, а через $\nu_i$ — найбільше з чисел $\alpha_i, \beta_i, \dots, \lambda_i$, тобто:

$\mu_1 = min\ \{\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1\}$, $\quad \nu_1 = max\ \{\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1\}$;

$\mu_2 = min\ \{\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2\}$, $\quad \nu_2 = max\ \{\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2\}$;

………………………………………………………………………… ;

$\mu_k = min\ \{\alpha_k, \beta_k, \dots, \lambda_k\}$, $\quad \nu_k = max\ \{\alpha_k, \beta_k, \dots, \lambda_k\}$.

**Теорема 10.32.** *При введених позначеннях справджуються формули:*

$$\text{НСД } (a, b, \dots, l) = p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \dots p_k^{\mu_k}, \qquad (1)$$

$$\text{НСК } (a, b, \dots, l) = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_k^{\nu_k}. \qquad (2)$$

**Наслідок.** *Якщо числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ попарно взаємно прості, то НСК $(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 a_2 \dots a_n$.*

Справді, якщо дані числа попарно взаємно прості, тобто при $i \neq j$ *НСД* $(a_i, a_j) = 1$ , то з формули (1) випливає, що кожне просте число може входити до канонічного розкладу лише одного з цих чисел. А тоді з формули (2) випливає, що

НСК ($a_1$, $a_2$, ..., $a_n$,) = $a_1\, a_2 \ldots a_n$.

Використання цієї теореми до розв'язання вправ можна сформулювати простіше у вигляді таких двох правил.

***Правило 1.*** *Для того, щоб знайти НСД двох чисел a і b за допомогою їх канонічних розкладів, потрібно знайти добуток усіх спільних простих множників з канонічних розкладів чисел a і b, причому у менших кратностях.*

***Правило 2.*** *Для того, щоб знайти НСК двох чисел a і b за допомогою їх канонічних розкладів, потрібно знайти добуток усіх простих множників, які входять хоча б до одного з канонічних розкладів чисел a і b, причому у більших кратностях.*

**Приклад.** *Знайти НСД і НСК чисел 240, 504, 490, використовуючи їх канонічні розклади.*

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо спочатку канонічні розклади цих чисел:

$$\begin{array}{r|l} 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 504 & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 490 & 2 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Отже, $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$, $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, $490 = 2 \cdot 5 \cdot 7^2$.

Як бачимо, найменшими кратностями для простих чисел 2, 3, 5, 7 є відповідно 1, 0, 0, 0, а найбільшими — 4, 2, 1, 2. Тому за теоремою 10.32 отримаємо: НСД (240, 504, 490) = $2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 2$,

НСК (240, 504, 490) = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^2 = 35\,280$.

В і д п о в і д ь: НСД (240, 504, 490) = 2; НСК (240, 504, 490) = 35 280.

***3) знаходження НСД чисел за допомогою алгоритму Евкліда та знаходження НСК чисел за формулою зв'язку між НСД і НСК чисел.***

Якщо задані числа досить великі, то знаходження їх НСД і НСК за допомогою означення чи канонічного розкладу є досить трудомістким завданням, оскільки розклад великих чисел на прості співмножники пов'язаний з громіздкими обчисленнями. *Тому розглянемо інший метод відшукання НСД двох чисел – алгоритм Евкліда, який не потребує попереднього розкладу чисел на співмножники.*

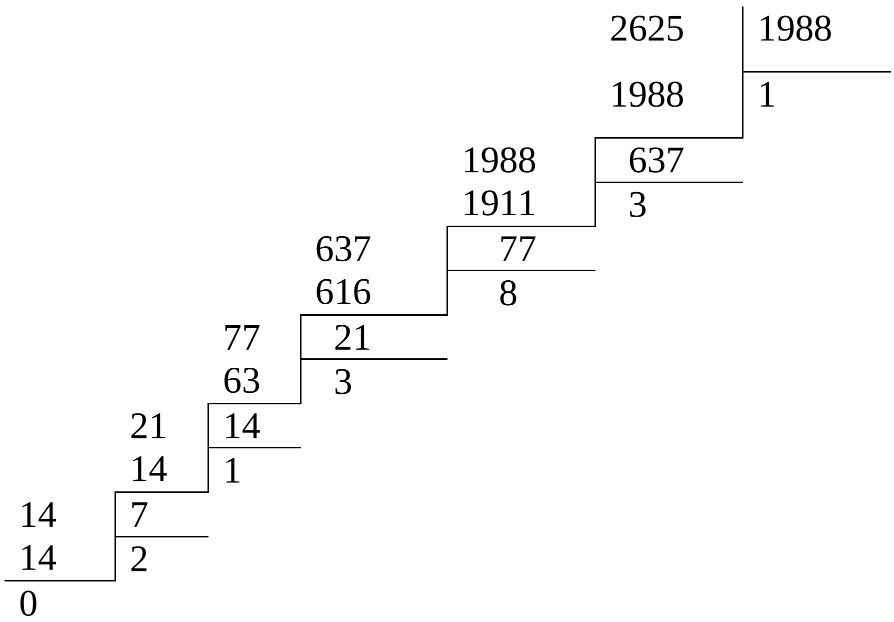
**Теорема 10.33.** *НСД двох чисел дорівнює останній відмінній від нуля остачі в алгоритмі Евкліда для цих чисел.*

Знайшовши за алгоритмом Евкліда НСД двох чисел, НСК цих чисел можемо знайти за теоремою 10.24 про зв'язок між НСД і НСК двох чисел:

$$НСК\ (a;\ b) = \frac{a \cdot b}{НСД(a;b)}.$$

**Приклад.** Знайти НСД і НСК чисел 2 625 і 1 988.

Р о з в ' я з а н ня. Для знаходження НСД цих чисел застосуємо алгоритм Евкліда. Його зручно описати за допомогою такої схеми:




Отже, ми отримали такі рівності:

$$\begin{aligned} 2\,625 &= 1\,988 \cdot 1 + 637, \\ 1\,988 &= 637 \cdot 3 + 77, \\ 637 &= 77 \cdot 8 + 21, \\ 77 &= 21 \cdot 3 + 14, \\ 21 &= 14 \cdot 1 + 7, \\ 14 &= 7 \cdot 2. \end{aligned}$$

Остання відмінна від нуля остача дорівнює 7 і тому *НСД (2625, 1988) = 7.*

Для відшукання НСК цих чисел використаємо теорему 10.24:

$$\textit{НСК (2625, 1988)} = \frac{2625\cdot 1988}{\textit{НСД}(2625;1988)} = \frac{2625\ \cdot\ 1988}{7} = 745\ 500\,.$$

В і д п о в і д ь*:* НСД (2625, 1988) = 7,  НСК (2625, 1988) = 745 500.

## 10.11. Вивчення подільності натуральних чисел у початковому курсі математики

Усі теоретичні відомості, описані у цьому розділі, у початковому курсі математики дослівно не вивчаються, але його основи закладаються саме на уроках математики у початкових класах. Згідно з програмою математики у 1–4 класах учні вивчають ділення натуральних чисел та його властивості, ділення з остачею, трапляються задачі і вправи, які потребують знань окремих теоретичних відомостей цього розділу, але лише на інтуїтивному рівні. Учитель змушений пояснювати ці важливі поняття та їхні властивості на доступному рівні для учнів початкових класів, не використовуючи відповідної термінології. А це вимагає міцно сформованих теоретичних положень розділу «Подільність натуральних чисел» у самого вчителя.

Наведемо приклади таких задач.

**Задача 1.** Записати найбільше чотиризначне число, кратне 5, таке, щоб усі цифри його були різними.

Р о з в ’ я з а н н я. Оскільки шукане число повинно бути найбільшим і всі цифри його різними, то перша цифра буде найбільшою – 9, друга – 8, третя – 7, а четверта – не 6, а 5, бо число має ділитися на 5. Зобразимо шукане чотиризначне число моделлю:

$$\underbrace{\quad 9\quad}\qquad\underbrace{\quad 8\quad}\quad\underbrace{\quad 7\quad}\qquad\underbrace{\quad 5\quad}$$

В і д п о в і д ь: 9875.

**Задача 2.** У ложах нижнього ярусу театру 120 місць, а у ложах середнього ярусу – 88 місць. Скільки лож у кожному ярусі, якщо число місць у кожній ложі однакове і найбільше з можливих?

Р о з в ’ я з а н н я.

1. Скільки місць у одній ложі?

НСД (120; 88) = 8(м.)

2. Скільки лож у нижньому ярусі?

120 : 8 = 15(л.)

3. Скільки лож у середньому ярусі?

88 : 8 = 11 (л.)

В і д п о в і д ь: 15 лож; 11 лож.

**Задача 3.** Кожна з двох лінійок розділена на рівні частини: ціна поділки першої лінійки – 12 мм, а другої – 21 мм. Лінійки приклали одну до одної так, що їх початки сумістились. На якій відстані і які найближчі поділки цих лінійок сумістяться?

Р о з в ’ я з а н н я. Щоб найближчі поділки цих лінійок сумістились, то вони повинні показувати число, яке ділиться і на 12, і на 21, причому найменше з усіх можливих, тобто НСК (12; 21). Підбором знайдемо таке число: НСК (12; 21) = 84 (мм). Оскільки 84 : 12 = 7, 84 : 21 = 4, то сумістяться з першої лінійки сьома поділка, а з другої – четверта.

Відповідь*:* 84 мм; сьома і четверта поділки першої і другої лінійок.

## Питання для самоконтролю

1. Відношення подільності на множині N та її властивості.
2. Теореми про подільність суми натуральних чисел.
3. Теореми про подільність різниці натуральних чисел.
4. Теореми про подільність добутку натуральних чисел.
5. Ознаки подільності на 2; 3; 4; 5; 8; 9; 10; 11; 25; 125.
6. Ознака подільності Паскаля.
7. Ознаки подільності у довільних позиційних системах числення.
8. Прості і складені числа. Властивості простих чисел. Теорема Евкліда.
9. Решето Ератосфена. Таблиця простих чисел. Числа-близнюки.
10. Дільники, спільні дільники, НСД чисел.

11. Властивості дільників. Взаємно прості числа.
12. Ознаки подільності на складені числа.
13. Кратні, спільні кратні, НСК чисел. Властивості кратних.
14. Властивості НСД і НСК натуральних чисел. Зв'язок між НСД і НСК двох чисел.
15. Канонічний розклад числа. Основна теорема арифметики.
16. Алгоритм Евкліда. Відшукання НСД і НСК чисел за допомогою алгоритму Евкліда.
17. Відшукання НСД і НСК чисел за допомогою їх канонічного розкладу.

## ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

**1.** Користуючись ознаками подільності, встановити, чи є:

а) число 3 дільником чисел 40, 91, 2 241;

б) число 9 дільником чисел 1 083, 164, 2 007.

**2.** Назвати найбільше й найменше чотирицифрові натуральні числа, які діляться на:

а) 2, 3, 10, 8; б) 4, 5, 9, 25.

**3.** Дано числа 1 100, 124, 4 360, 1 256. Не виконуючи обчислень, встановити, які з них діляться на 9; 3; 2; 5; 11; 4.

**4.** Не виконуючи обчислень, встановити, які з виразів діляться на 5:

а) 60 + 145, г) 148 – 133, є) $239 \cdot 140$,

б) 65 + 141, д) 360 – 155, ж) $221 \cdot 136$,

в) 321 + 134, е) 125 – 36, з) $189 \cdot 45$.

**5.** Чи правильно, що:

а) $(18 + 52) \vdots 7$, б) $(45 - 21) \vdots 4$, в) $(3 \cdot 4) \vdots 6$.

**6**. Серед наступних висловлювань вказати істинні:

а) $(124 + 226 - 138) \vdots 5$, б) $(850 - 346 - 242) \vdots 4$, в) $(154 \cdot 220 \cdot 453) \vdots 3$.

**7.** Відомо, що число *a* ділиться на 17. Чи ділиться на 17 число:

а) a + 17, в) 5a – 34, д) a – 51,

б) 3a + 40, г) 4a · 20, е) 4(a +3) + 5?

**8.** Довести, що:

а) $(85^3 - 85^2) \vdots 84$, б) $(64^3 - 64^2) \vdots 63$,

$(37^9 + 37^{10}) \vdots 38$, $(49^8 - 49^7) \vdots 48$.

**9.** Довести, що добуток двох послідовних натуральних чисел ділиться на 2.

**10.** Довести, що добуток трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3.

**11.** Чи ділиться на 4 сума двох послідовних непарних чисел?

**12.** Чи ділиться різниця квадратів двох послідовних парних чисел на 4?

**13.** Використовуючи метод математичної індукції, довести, що для будь-якого натурального числа істинні твердження:

а) $(4^n - 1) \vdots 3$; ж) $(8^n + 6) \vdots 7$;

б) $(3^{2n+1} + 1) \vdots 4$; з) $(2 \cdot 8^n + 5) \vdots 7$;

в) $(n^3 - 7n + 9) \vdots 7$; и) $(n^3 + 5n + 6) \vdots 3$.

**14.** Знайти серед даних чисел прості, не користуючись таблицею простих чисел:

а) 287, 363, 1 117, 987; 187, 463;

б) 201, 87, 139, 389, 113, 223.

Відповідь перевірити за таблицею простих чисел першої тисячі.

**15.** Розкласти на прості множники числа:

а) 144, 1430, 3765, 847, 4961, 989, 476, 1994, 84700, 456, 426, 996, 3780.

б) 168, 972, 2526, 3969, 5096, 5445, 30030, 861, 5100, 232, 144, 1760.

**16.** Знайти значення кореня квадратного з числа, використовуючи його канонічний розклад:

а) 10816; 8281, б) 131769; 2025.

**17.** Скоротити дроби, використовуючи канонічний розклад чисельника і знаменника:

а) $\frac{350}{378}, \frac{48}{144}, \frac{21120}{30720}$; б) $\frac{112}{700}, \frac{7650}{12870}, \frac{22000}{144000}$.

**18.** Вказати множину дільників чисел:

а) 32, 25, 51, 71, 225, 243, 400;

б) 19,   48,   57,   45,   132,   154,   1500.

**19.** Знайти множини дільників, спільних дільників і НСД чисел:

а) 25 і 90;                    б) 44 і 120.

**20.** Серед наступних пар чисел знайти взаємно прості:

а) 25 і 15,      б) 25 і 13,      в) 17 і 97,      г) 135 і 32.

**21.** Які з чисел 134, 255, 11 321, 459 є кратними для числа 9?

**22.** Записати формулу чисел, кратних для числа:

а) 2,      б) 4,      в) 6,      г) 28.

**23.** Знайти множини кратних, спільних кратних і НСК чисел:

а) 15 і 25;                    б) 27 і 36.

**24.** Чи є число 195 спільним кратним чисел:

а) 39 і 5,                    б) 65 і 4?

**25.** Знайти НСК (315, 385), якщо НСД (315, 385) = 35.

**26.** Знайти НСК (47, 105), якщо НСД (47, 105) = 1.

**27.** Учень знайшов, що НСК (136, 225) = 2 040, якщо НСД (136, 225) = = 17. Як перевірити правильність одержаних результатів?

**28.** НСД двох чисел дорівнює 27, а їх НСК – 324. Знайти ці числа, якщо одне з них становить 0,75 другого.

**29.** Знайти числа a і b, якщо:

а) НСД (a, b) = 5,      НСК (a, b) = 125,

б) НСД (a, b) = 7,      a · b = 294,

в) НСД (a, b) = 12,     a + b = 192.

**30.** Довжина кола переднього колеса екіпажа 2 м 25 см, заднього – 3 м 25 см. Знайти найменшу відстань, яку повинен проїхати екіпаж, щоб переднє й заднє колесо зробили по цілому числу обертів? Скільки обертів зробило переднє й заднє колесо окремо?

**31.** Для участі у параді спортсмени вишикувались в ряди по 6 чоловік, а потім перешикувались в ряди по 4 чоловіки. Скільки спортсменів брали участь у параді, якщо їх було не менше 90 і не більше 100?

**32.** Три кіоски відправили однакову кількість зошитів. Для I-го кіоску відправили пачками по 150 штук у пачці, для II-го – по 100 штук у пачці, для III-го – по 200 штук у пачці. Скільки зошитів відправили кожному кіоску, якщо число всіх зошитів менше 2 000?

**33.** Скільки яблук у кошику, якщо при розкладанні купками по 2, по 4, по 3, по 5, по 6 одне зайве, а при розкладі по 7 нема зайвого?

**34.** Сформулювати ознаки подільності на:14; 20; 24; 36; 45; 48; 60; 80.

**35.** Дані числа 1100, 124, 4360, 1256. Не виконуючи обчислень, встановити, які з них діляться на 12; 15.

**36.** Користуючись ознаками подільності, встановити, чи є число 15 дільником чисел 40, 90, 115, 135, 155.

**37.** Серед наступних висловлювань вказати істинні:

а) $(124+226-138)\vdots 6$,

б) $(145-111+325)\vdots 15$,

в) $(810\times 1236\times 305)\vdots 12$.

**38.** Знайти НСД (a, b) і НСК (a, b), якщо:

а) $a = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11$, $b = 2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2$,

б) $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2$, $b = 2^3 \cdot 5^4 \cdot 7$,

в) $a = 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13$, $b = 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 13^2$,

г) $a = 2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7$, $b = 2^2 \cdot 3^7 \cdot 5^4 \cdot 7^2$.

**39.** Застосувавши канонічний розклад чисел, знайти НСК і НСД чисел:

а) 288 і 3 600, б) 48 і 365,

в) 60, 252 і 264, г) 240, 490 і 504.

**40.** Використавши алгоритм Евкліда, знайти НСД і НСК чисел:

а) 37 864 і 4 753, б) 580 035 і 83 020.

**41.** Скоротити дроби (двома способами):

а) $\frac{588}{1960}$, $\frac{10013}{15283}$, б) $\frac{21120}{30720}$, $\frac{30295}{36354}$.

**42.** Звести дроби до спільного знаменника:

а) $\frac{1}{72}$ і $\frac{1}{108}$, б) $\frac{3}{192}$ і $\frac{7}{1620}$.

**54.** За алгоритмом Евкліда знайти НСД ТА НСК чисел:

а) $a = 476$; $в = 1258$; $c = 21114$;

б) $a = 3445$; $в = 4225$; $c = 5915$;

в) $a = 572$; $в = 5746$; $c = 1118$.

# 11. Множина раціональних чисел

## 11.1. Поняття дробу. Правильні і неправильні дроби. Мішані дроби. Виділення цілої частини дробу

**Означення.** ***Звичайний дріб*** *– це число вигляду* $\frac{m}{n}$*, де m і n* $\in$ *N. Число m називається* ***чисельником*** *дробу, а число n –* ***знаменником.***

Наприклад, звичайними дробами є числа $\frac{12}{17}, \frac{15}{8}, \frac{4}{1}, \frac{1}{10}$.

Запис $\frac{m}{n}$ означає дію ділення, тобто m : n. Якщо n = 1, то у цьому випадку дріб має вигляд $\frac{m}{1}$, але частіше пишуть просто m. Це означає, що кожне натуральне число можна зобразити у вигляді звичайного дробу із знаменником 1, наприклад, $5 = \frac{5}{1}$.

Серед звичайних дробів розрізняють **правильні і неправильні дроби**.

***Означення***. *Дріб* $\frac{m}{n}$ *називається правильним, якщо його чисельник менший, ніж знаменник (m < n), і неправильним, якщо його чисельник більший, ніж знаменник, або дорівнює йому (m* $\geq$ *n).*

Кожний неправильний дріб можна зобразити у вигляді суми натурального числа і правильного дробу (або у вигляді тільки натурального числа, якщо дріб $\frac{m}{n}$ такий, що число m кратне числу n, тобто m $\vdots$ n). Це перетворення неправильного дробу називається виділенням цілої частини дробу.

**Приклад.** Зобразити неправильні дроби $\frac{28}{5}$; $\frac{43}{13}$; $\frac{14}{7}$ у вигляді суми натурального числа і правильного дробу або у вигляді тільки натурального числа.

Р о з в ’ я з а н н я:

$$\frac{28}{5} = \frac{25+3}{5} = \frac{25}{5} + \frac{3}{5} = 5 + \frac{3}{5};$$
$$\frac{43}{13} = \frac{39+4}{13} = \frac{39}{13} + \frac{4}{13} = 3 + \frac{4}{13};$$
$$\frac{14}{7} = 2.$$

Прийнято суму натурального числа і правильного дробу записувати без знака додавання, тобто замість $4+\frac{3}{5}$ пишуть $4\frac{3}{5}$. Число, що записане у такому вигляді, називається ***мішаним числом.*** Воно складається з ***двох частин: цілої і дробової.*** Так, для числа $4\frac{3}{5}$ ціла частина дорівнює $4$, а дробова - $\frac{3}{5}$. Кожен неправильний дріб можна записати у вигляді мішаного числа (або у вигляді натурального числа) і, навпаки, кожне мішане число або натуральне число можна записати у вигляді неправильного дробу. Наприклад,

$$4\frac{1}{3}=4+\frac{1}{3}=\frac{4\cdot 3+1}{3}=\frac{13}{3}; \qquad 3=\frac{3}{1}.$$

## 11.2. Рівність дробів. Основна властивість дробів. Скорочення дробів

**Означення.** *Два дроби* $\frac{a}{b}$ *і* $\frac{c}{d}$ *називаються* ***рівносильними****, якщо виконується умова:* $a\cdot d = b\cdot c$.

Рівносильні дроби позначають так: $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$.

Наприклад, рівносильними є такі дроби: $\frac{3}{5}\sim\frac{9}{15}$, бо $3\cdot 15 = 5\cdot 9$;

$\frac{12}{7}\sim\frac{24}{14}$, бо $12\cdot 14 = 7\cdot 24$, $\frac{114}{15}\sim\frac{38}{5}$, бо $5\cdot 114 = 15\cdot 38$.

Замість поняття «рівносильні дроби» часто вживають «рівні дроби», тобто рівносильні дроби є рівні, і навпаки. Записують рівні дроби так: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

З означення рівносильності (рівності) дробів випливає, що рівними будуть дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{a\cdot m}{b\cdot m}$, бо $a\cdot(b\cdot m)=b\cdot(a\cdot m)$ (сполучний і переставний закони множення натуральних чисел).

Отже, $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}$, тобто, ***якщо чисельник і знаменник звичайного дробу помножити або поділити на одне і те ж натуральне число, то отримаємо звичайний дріб, що дорівнює даному.*** Ця властивість називається ***основною властивістю дробу.***

На основі основної властивості дробу деколи можна замінити даний дріб іншим, що дорівнює даному, але з меншим чисельником і меншим знаменником. Таку заміну називають ***скороченням дробу.*** Наприклад, $\frac{45}{60}=\frac{15}{20}$ (чисельник і знаменник дробу поділили на одне і те ж число 3); отриманий дріб знову можна скоротити, поділивши чисельник і знаменник дробу на 5, тобто $\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$.

У загальному випадку скоротити дріб можливо за умови, якщо чисельник і знаменник дробу не є взаємно простими числами (тобто їх НСД не дорівнює 1); якщо ж чисельник і знаменник дробу є взаємно простими числами (тобто їх НСД дорівнює 1), то дріб називається ***нескоротним.*** Наприклад, $\frac{4}{9}$ – нескоротний дріб, бо числа 4 і 9 є взаємно простими; $\frac{14}{35}$ – скоротний дріб, бо числа 14 і 35 не є взаємно простими; поділивши чисельник і знаменник цього дробу на 7, отримаємо нескоротний дріб, що дорівнює даному дробу.

Основна мета скорочення дробу – заміна даного дробу рівним йому нескоротним дробом.

**Правило 1.** *Для того щоб скоротити скоротний дріб і отримати рівносильний йому, але вже нескоротний дріб, треба:*

1) *знайти найбільший спільний дільник (НСД) чисельника і знаменника дробу (методом підбору за означенням, за канонічним розкладом чи алгоритмом Евкліда),*
2) *поділити на нього чисельник і знаменник даного дробу,*
3) *знайдені частки записати на відповідних місцях чисельника і знаменника.*

Утворений звичайний дріб є нескоротний.

Скорочувати звичайні дроби можна, не шукаючи НСД чисельника і знаменника, а використовуючи їх канонічні розклади.

**Правило 2.** *Для того щоб скоротити скоротний дріб і отримати рівносильний йому, але вже нескоротний дріб, треба:*

1) *знайти канонічні розклади чисельника і знаменника даного дробу,*
2) *знайдені розклади записати на відповідних місцях чисельника і знаменника.*

3) *використавши властивості степеня з натуральним показником, скоротити утворений дріб.*

Утворений звичайний дріб є нескоротний.

Наприклад, скоротимо дріб $\frac{350}{378}$. Спочатку знайдемо канонічні розклади цих чисел:

$$\begin{array}{r|l} 350 & 2 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 378 & 2 \\ 189 & 3 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Отже, $350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$; $378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$. Тоді, $\frac{350}{378} = \frac{2 \cdot 5^2 \cdot 7}{2 \cdot 3^3 \cdot 7} = \frac{5^2}{3^3} = \frac{25}{27}$.

**Приклад.** Скоротити дроби $\frac{18}{63}$; $\frac{480}{900}$; $\frac{1452}{2640}$.

Р о з в ' я з а н н я. Для того щоб скоротити ці дроби, потрібно знайти НСД чисельника і знаменника цих дробів відповідно, обираючи для цього найбільш раціональний спосіб.

НСД(18; 63) можна знайти методом підбору: обидва ці числа діляться на 9, тому отримаємо $\frac{18}{63} = \frac{2}{7}$.

НСД(480; 900) легко знайти за допомогою канонічного розкладу цих чисел: $480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$, $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, НСД (480; 900) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Отже, обидва ці числа діляться на 60, тому отримаємо $\frac{480}{900} = \frac{8}{15}$.

НСД(1452; 2640) знайдемо за алгоритмом Евкліда:

$$\begin{array}{r|l} 2640 & 1452 \\ -1452 & 1 \\ \hline 1188 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1452 & 1188 \\ -1188 & 1 \\ \hline 264 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1188 & 264 \\ -1056 & 4 \\ \hline 132 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 264 & 132 \\ -264 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

НСД (1452; 2640) = 132.

Отже, обидва ці числа діляться на 132, тому отримаємо $\frac{1452}{2640} = \frac{11}{20}$.

## 11.3. Зведення звичайних дробів до спільного знаменника

Нехай дано два дроби $\frac{2}{3}$ і $\frac{15}{8}$. Вони мають різні знаменники: 3 і 8. Але, використавши основну властивість дробу, можна замінити ці дроби іншими, рівними їм, причому такими, що в отриманих дробів будуть знаменники вже рівними. Таке перетворення дробів називається **зведенням дробів до спільного знаменника**. Помноживши чисельник і знаменник дробу $\frac{2}{3}$ на 8, отримаємо $\frac{2\cdot 8}{3\cdot 8}=\frac{16}{24}$; помноживши чисельник і знаменник дробу $\frac{15}{8}$ на 3, отримаємо $\frac{15\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{45}{24}$Отже, дроби $\frac{2}{3}$ і $\frac{15}{8}$ зведено до спільного знаменника 24: $\frac{2}{3}=\frac{16}{24}$; $\frac{15}{8}=\frac{45}{24}$.

Зауважимо, що це не єдиний розв'язок поставленого завдання. Наприклад, дроби можна було звести до спільного знаменника 48: $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 16}{3\cdot 16}=\frac{32}{48}$; $\frac{15}{8}=\frac{15\cdot 6}{8\cdot 6}=\frac{90}{48}$, до спільного знаменника *72:* $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 24}{3\cdot 24}=\frac{48}{72}$; $\frac{15}{8}=\frac{15\cdot 9}{8\cdot 9}=\frac{135}{72}$, і взагалі, до будь-якого знаменника, що ділиться одночасно на 3 і на 8, тобто, що є спільним кратним чисел 3 і 8.

Отже, звести дроби до спільного знаменника можна багатьма способами, але зазвичай намагаються звести дроби до **найменшого спільного знаменника,** який дорівнює найменшому спільному кратному знаменників даних дробів (його можна буде знайти найбільш раціональним способом: методом підбору за означенням, за канонічним розкладом).

***Щоб звести дроби до найменшого спільного знаменника, треба:***

1) *знайти НСК знаменників цих дробів;*
2) *обчислити додаткові множники, поділивши НСК на кожен зі знаменників;*
3) *помножити чисельник і знаменник кожного дробу на відповідний додатковий множник.*

**Приклад.** Звести до спільного знаменника дроби $\frac{7}{24}$ і $\frac{11}{30}$.

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо найменше спільне кратне чисел 24 і 30: НСК (24;30)= = 120. Знайдемо додаткові множники: 120 : 24 = 5, 120 : 30 = 4, тому, щоб звести дріб $\frac{7}{24}$ до знаменника 120, треба його чисельник і знаменник помножити на 5:

$$\frac{7}{24}=\frac{7\cdot 5}{24\cdot 5}=\frac{35}{120}$$

Щоб звести дріб $\frac{11}{30}$ до знаменника 120, треба його чисельник і знаменник помножити на 4: $\frac{11}{30}=\frac{11\cdot 4}{30\cdot 4}=\frac{44}{120}$.

## 11.4. Арифметичні дії над звичайними дробами

Над звичайними дробами виконуються всі арифметичні дії.

**Означення.** ***Сумою*** *дробів* $\frac{m}{n}$ *і* $\frac{p}{q}$ *називається дріб* $\frac{mq+np}{nq}$*, тобто*

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}.$$

Операція відшукання суми називається **додаванням.**

Практично **додавання** звичайних дробів виконується так:

а) якщо **знаменники звичайних дробів <u>рівні</u>,** то чисельники цих дробів додають, а знаменник залишають той самий, тобто $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$;

б) якщо **знаменники звичайних дробів <u>різні</u>,** то спочатку дроби зводять до спільного знаменника, а потім додають за правилом а).

**Приклад.** Додати дроби $\frac{7}{24}$ і $\frac{11}{30}$.

Р о з в ' я з а н н я. $\frac{7}{24}+\frac{11}{30}=\frac{7^{/5}}{24}+\frac{11^{/4}}{30}=\frac{35}{120}+\frac{44}{120}=\frac{35+44}{120}=\frac{79}{120}$.

**Означення.** ***Різницею*** *дробів* $\frac{m}{n}$ *і* $\frac{p}{q}$ *називається дріб* $\frac{mq-np}{nq}$*, тобто*

$$\frac{m}{n}-\frac{p}{q}=\frac{mq-np}{nq}.$$

Операція відшукання різниці називається **відніманням.**

Операція віднімання визначається як обернена для операції додавання. Практично **віднімання** звичайних дробів виконують так:

а) якщо **знаменники звичайних дробів <u>рівні</u>**, то чисельники цих дробів віднімають, а знаменник залишають той самий, тобто $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$;

б) якщо **знаменники звичайних дробів <u>різні,</u>** то спочатку дроби зводять до спільного знаменника, а потім віднімають за правилом а).

**Приклад.** Відняти дроби $\frac{11}{30}$ і $\frac{7}{24}$.

Р о з в ’ я з а н н я. $\frac{11}{30}-\frac{7}{24}=\frac{11^{/4}}{30}-\frac{7^{/5}}{24}=\frac{44}{120}-\frac{35}{120}=\frac{44-35}{120}=\frac{9}{120}=\frac{3}{40}$.

**Означення.** ***Добутком*** *дробів* $\frac{m}{n}$ *і* $\frac{p}{q}$ *називається дріб* $\frac{mp}{nq}$*, тобто*

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}.$$

Операція відшукання добутку називається **множенням.**

Практично **множення** звичайних дробів виконують за правилом: перемножують окремо чисельники, окремо знаменники, і результати записують на відповідних місцях чисельника і знаменника.

**Приклад.** Помножити дроби $\frac{3}{7}$ і $\frac{2}{11}$.

Р о з в ’ я з а н н я. $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{11}=\frac{3\cdot 2}{7\cdot 11}=\frac{6}{77}$.

**Означення.** ***Часткою*** *дробів* $\frac{m}{n}$ *і* $\frac{p}{q}$ *називається дріб* $\frac{mq}{np}$*, тобто*

$$\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{mq}{np}.$$

Операція відшукання частки називається **діленням.** Операція ділення визначається як обернена для операції множення. Практично **ділення** звичайних дробів виконують за правилом: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$, тобто ділене – перший дріб $\frac{a}{b}$, множать на дріб $\frac{d}{c}$, обернений до дільника – другого дробу $\frac{c}{d}$.

**Приклад.** Поділити дроби $\frac{2}{3}$ і $\frac{7}{17}$.

Р о з в ’ я з а н н я. $\frac{2}{3}:\frac{7}{10}=\frac{2}{3}\cdot\frac{10}{7}=\frac{2\cdot10}{3\cdot7}=\frac{20}{21}$.

**Зауваження:**

– якщо дроби неправильні, то при додаванні чи відніманні доцільно виділяти цілі частини дробів і виконувати зазначену дію між цілою і дробовою частинами окремо;

– щоб помножити або поділити мішані числа, то спочатку їх треба перетворити у неправильні і виконати потрібну дію;

– при множенні і діленні дробів проводять скорочення дробу, якщо це можливо;

– при отриманні суми і різниці дробів теж, де можливо, можна провести скорочення дробу;

– можна додавати і множити аналогічно відразу більше двох дробів.

**Приклад.** Знайти значення числового виразу $\frac{4}{9}\cdot\frac{12}{5}+\frac{7}{8}:\frac{5}{6}-\frac{11}{30}$.

Р о з в ’ я з а н н я.

I). $\frac{4}{9}\cdot\frac{12}{5}=\frac{4\cdot12}{9\cdot5}=\frac{4\cdot4}{3\cdot5}=\frac{16}{15}$. II). $\frac{7}{8}:\frac{5}{6}=\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{5}=\frac{7\cdot6}{8\cdot5}=\frac{7\cdot3}{4\cdot5}=\frac{21}{20}$.

III). $\frac{16}{15}+\frac{21}{20}-\frac{11}{30}=\frac{16^{\backslash 4}}{15}+\frac{21^{\backslash 3}}{20}-\frac{11^{\backslash 2}}{30}=\frac{64}{60}+\frac{63}{60}-\frac{22}{60}=\frac{64+63-22}{60}=\frac{105}{60}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$.

Отже, $\frac{4}{9}\cdot\frac{12}{5}+\frac{7}{8}:\frac{5}{6}-\frac{11}{30}=1\frac{3}{4}$.

## 11.5. Множина додатних раціональних чисел

Натуральні числа 1, 2, 3, 4, 5, … називають також додатними цілими числами, а їх множину називають ***множиною цілих додатних чисел і позначають Z₊.*** Додатні цілі числа і дроби разом утворюють ***множину додатних раціональних чисел і позначають Q₊.***

На множині додатних раціональних чисел розглянемо ***відношення «бути рівним».*** Воно володіє такими ***властивостями:***

1) ***рефлексивність*** (кожне додатне раціональне число дорівнює самому собі, тобто a=a);

***2) симетричність*** (якщо a = b, то b = a);

***3) транзитивність*** (якщо a = b і b = c, то a = c).

Тому воно є ***відношенням еквівалентності***. А отже, це відношення задає розбиття усієї множини додатних раціональних чисел на класи еквівалентності (у кожному з них будуть рівні між собою дроби). Кожен із цих класів еквівалентності називають ***додатним раціональним числом.***

Нехай $a \in Q_+$, тобто $a$ – деякий клас рівних дробів; тоді кожний з цих дробів називаємо представником цього класу, або дробом, що зображує раціональне число $a$. Так, наприклад, якщо $a = \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, ...-\right\}$, то кожен з цих дробів зображує число $a$; серед цих дробів варто відмітити дріб $\frac{2}{3}$, оскільки він єдиний з них є нескоротним.

*Для довільного додатного раціонального числа існує один і тільки один нескоротний дріб, що зображує це число, для цілих чисел – це дріб зі знаменником 1.*

**Означення.** ***Раціональним числом*** *називається множина всіх рівносильних між собою дробів.*

**Означення.** ***Раціональним числом*** *називається число, яке можна зобразити у вигляді* $\frac{m}{n}$, *де m і n – взаємнопрості натуральні числа.*

На множині додатних раціональних чисел справедливі такі закони:

***Закони додавання:***

***1) переставний (комутативний)*** $(\forall a, b \in Q_+) a + b = b + a$;

2) ***сполучний (асоціативний)*** $(\forall a, b, c \in Q_+)(a + b) + c = a + (b + c)$;

3) ***монотонність додавання*** $(\forall a, b, c \in Q_+) a < b \Rightarrow a + c < b + c$.

***Закони множення:***

***1) переставний (комутативний)*** $(\forall a, b \in Q_+) a \cdot b = b \cdot a$;

***2) сполучний (асоціативний)*** $(\forall a, b, c \in Q_+)(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

***3) розподільний (дистрибутивний) відносно додавання***

$$(\forall a, b, c \in Q_+)(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c;$$

***4) монотонність множення*** $(\forall a, b, c \in Q_+) a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ .

Множина додатних раціональних чисел володіє ще такою властивістю: *між будь-якими двома раціональними числами, які як завгодно близько розміщені, завжди знайдеться додатне раціональне число, яке відмінне від них.*

Наприклад, між раціональними числами $\frac{1}{3}$ і $\frac{1}{4}$ є раціональне число $\frac{7}{24}$.

Його легко віднайти, наприклад, так: $\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{\frac{4+3}{12}}{2}=\frac{\frac{7}{12}}{2}=\frac{7}{24}$. Але це число не є єдиним. Аналогічно можна знайти скільки завгодно раціональних чисел між раціональними числами $\frac{1}{3}$ і $\frac{1}{4}$.

Мають місце такі властивості множини додатних раціональних чисел.

**Теорема 11.1.** *Множина додатних раціональних чисел* ***$Q_+$ є щільною****, тобто між будь-якими двома різними числами a і b $\in Q_+$ міститься безліч чисел цієї ж множини.*

**Теорема 11.2.** *Множина додатних раціональних чисел $Q_+$* ***зчисленна****.*

Ця властивість вказує, що множина $Q_+$ має ту саму потужність, що і множина натуральних чисел, тобто всі додатні раціональні числа можна пронумерувати за допомогою натуральних чисел (встановити взаємно-однозначну (бієктивну) відповідність між множиною натуральних чисел і множиною додатних раціональних чисел). Але пам'ятаймо, що множина $Q_+$ додатних

раціональних чисел містить множину $N$ натуральних чисел.

### Відношення порядку на множині додатних раціональних чисел

Розглянемо на множині додатних раціональних чисел інше відношення - ***відношення «менше» (або «більше»).*** Воно володіє такими властивостями: *антирефлексивність, антисиметричність, транзитивність,* отже, є ***відношенням строгого порядку (лінійного).*** А тому це відношення упорядковує множину $Q_+$: *її елементи можна розмістити у порядку зростання (чи спадання).*

Порівнювати два дроби можна такими способами:

*1) якщо два дроби мають <u>рівні знаменники</u>, то меншим є той дріб, у якого меншим є чисельник:* $\frac{p}{n} < \frac{q}{n} \Leftrightarrow p < q$,

*2) якщо два дроби мають <u>різні знаменники</u>, то спочатку їх треба звести до спільного знаменника і порівняти чисельники;*

*3) якщо чисельники двох дробів рівні, а знаменники різні, то той дріб більший, у якого знаменник менший:* $\frac{p}{n} < \frac{p}{k} \Leftrightarrow n > k$,

*4) щоб порівняти два дроби, порівнюють значення добутків чисельників і знаменників:* $\frac{p}{n} < \frac{q}{k} \Leftrightarrow pk < nq$,

*5) можна порівнювати дроби за їх різницею:*

– якщо різниця двох дробів додатна, то зменшуване більше від'ємника, тобто якщо $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} > 0$, то $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$;

– якщо різниця двох дробів від'ємна, то зменшуване менше від'ємника, тобто якщо $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} < 0$, то $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$;

– якщо різниця двох дробів дорівнює нулеві, то ці дроби рівні між собою, тобто якщо $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = 0$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

**Приклад.** *Порівняти дроби* $\frac{2}{3}$ *і* $\frac{3}{5}$.

Р о з в я з а н н я. Це можна зробити різними способами:

а) зведемо їх до спільного знаменника: $\frac{2}{3} \sim \frac{10}{15}$, $\frac{3}{5} \sim \frac{9}{15}$. Оскільки $10 > 9$, то $\frac{10}{15} > \frac{9}{15}$, а отже, $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$.

б) $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$, бо $2 \cdot 5 > 3 \cdot 3$.

в) знайдемо знак різниці цих дробів: $\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{10}{15} - \frac{9}{15} = \frac{1}{15} > 0$. Оскільки різниця дробів більша від нуля, то це означає, що зменшуване більше від від'ємника, тобто $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$.

## 11.6. Десяткові дроби. Порівняння десяткових дробів

У вигляді ***десяткового дробу*** можна записати довільний правильний дріб, знаменник якого дорівнює 10, 100, 1000 і т.д., тобто $10^n$, де $n \in N$.

Наприклад, $\frac{3}{10} = 0{,}3$; $\frac{48}{100} = 0{,}48$; $\frac{21}{1000} = 0{,}021$.

Так само можна записати мішане число або неправильний дріб зі знаменником $10^n$, де $n \in N$ (перетворивши його спочатку у мішане число).

Наприклад, $2\frac{3}{10} = 2{,}3$; $\frac{317}{100} = 3\frac{17}{100} = 3{,}17$.

У цих випадках цілу частину мішаного дробу відокремлюють ***комою*** від чисельника дробової частини.

Отже, ***десятковий дріб – це інша форма запису дробу зі знаменником $10^n$.***

Розглянемо десятковий дріб 7,234:

$$7{,}234 = 7\frac{234}{1000} = 7 + \frac{200+30+4}{1000} = 7 + \frac{200}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{4}{1000} = 7 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000}.$$

У десятковому дробі *7,234* міститься 7 одиниць, 2 десятих, 3 сотих, 4 тисячних. Взагалі, у десяткового дробу після коми може бути скільки завгодно розрядів: десяті, соті, тисячні, десятитисячні і т.д.

Дріб *7, 234* можна записати так:

$7{,}234 = 7\frac{234}{1000} = 7\frac{2340}{10000} = 7\frac{23400}{100000}$, але $7\frac{2340}{10000} = 7{,}2340$, а $7\frac{23400}{100000} = 7{,}23400$.

Отже, 7,234 = 7,2340 = 7,23400.

*Якщо до десяткового дробу дописати справа нуль або декілька нулів, то отримаємо дріб, що дорівнює даному.*

*Якщо десятковий дріб закінчується одним або декількома нулями, то ці нулі можна відкинути – отримаємо рівний йому дріб.*

Наприклад, *18,1428000=18,1428;* *0,000005000=0,000005;* *2,12=2,12000.*

***Десятковий дріб можна замінити звичайним.*** Треба діяти за означенням:

$$0{,}43 = \frac{43}{100}, \qquad 0{,}275 = \frac{275}{1000} = \frac{11}{40}, \qquad 1{,}15 = 1\frac{15}{100} = 1\frac{3}{20} = \frac{23}{20}.$$

Розглянемо питання ***порівняння десяткових дробів.*** Це можна зробити так:

1) потрібно підписати дроби один під другим так, щоб кома стояла під комою, тобто щоб відповідні розряди стояли один під другим; після цього досить порівняти відповідні цифри, ідучи від вищих розрядів до нижчих; більшим буде той з двох дробів, у якого перша з нерівних цифр більша.

Так, щоб порівняти числа 23,7318 і 23,7239578 запишемо:

23,7318

23,7239578

звідки видно, що перший дріб більше другого, бо у першого дробу 3 сотих, а у другого – дві соті;

2) спочатку вирівнюють у дробів число десяткових знаків після коми, відкидають коми і порівнюють отримані натуральні числа.

Так, щоб порівняти числа *23,7318* і *23,7239578,* потрібно отримати сім знаків після коми (як у другого дробу), тобто *23,7318* = *23,7318000*, а *23,7318000* > *23,7239578* , бо *237318000* > *237239578.*

## 11.7. Арифметичні дії над десятковими дробами

Над десятковими дробами виконують усі арифметичні дії.

1. Щоб виконати **додавання** десяткових дробів, треба записати їх один під одним так, щоб однакові розряди були один під одним, кома під комою, і додати так, як додають натуральні числа. В отриманому результаті поставити кому під комою.

Наприклад, додамо дроби 12,7 і 3,442. Перший дріб містить одну цифру після коми, а другий – три. Щоб виконати додавання, перетворимо перший дріб так, щоб після коми було три цифри: 12,7=12,700, тоді

$$\begin{array}{r} 12{,}700 \\ +\;\; 3{,}442 \\ \hline 16{,}142 \end{array}$$

2. Віднімання десяткових дробів виконується аналогічно до додавання.

Наприклад, знайдемо різницю чисел 13,1 і 0,37.

$$\begin{array}{r} 13{,}10 \\ -\ 0{,}37 \\ \hline 12{,}73. \end{array}$$

3. Щоб виконати **множення** десяткових дробів, достатньо перемножити задані числа, не зважаючи на коми (як натуральні числа), а потім у добутку справа відокремити комою стільки цифр, скільки їх стоїть після коми в обох множниках разом.

Наприклад, помножимо 2,7 на 1,3. Маємо 27 · 13 = 351. Комою відокремимо справа наліво дві цифри (сума цифр у двох множників після коми дорівнює двом). У результаті отримуємо 2,7 · 1,3 = 3,51.

Якщо у добутку отримуємо менше цифр, ніж потрібно відокремити комою, то спереду пишуть потрібну кількість нулів, наприклад:

$$\begin{array}{r} 3{,}43 \\ \times\ 0{,}0002 \\ \hline 0{,}000686 \end{array}$$

Розглянемо множення десяткового дробу на 10, 100, 1000 і т.д.

Нехай треба помножити дріб 12,733 на 10. Маємо 12733 · 10 = 127330. Відокремивши справа комою три цифри, отримаємо 12,733 · 10 = 127,330. Але 127,330 = 127,33. Це означає, що 12,733 · 10 = 127,33, тобто, множення десяткового дробу на 10 зводиться до перенесення коми на одну цифру праворуч.

Отже, *щоб помножити десятковий дріб на $10^n$, треба в цьому дробі перенести кому на n цифр вправо (дописавши в разі потреби до дробу справа потрібну кількість нулів).*

Наприклад, 1,47 · 10000 = 14700, 12,3 · 100 = 1230.

4. ***Ділення** десяткового дробу на натуральне число виконується так само, як ділення натурального числа на натуральне, а кому в частці ставлять після того, як закінчено ділення цілої частини.*

Нехай потрібно поділити 22,1 на 13:

$$\begin{array}{r|l} 22{,}1 & 13 \\ -\underline{13\phantom{,1}} & 1{,}7 \\ -91 & \\ \underline{91} & \\ 0 & \end{array}$$

*Якщо ціла частина діленого менша від дільника, то у частці отримуємо нуль цілих, наприклад:*

$$\begin{array}{r|l} 0{,}221 & 13 \\ -\underline{13} & 0{,}017 \\ -91 & \\ \underline{91} & \\ 0 & \end{array}$$

Розглянемо тепер ділення десяткового дробу на десятковий дріб. Нехай потрібно поділити 2,576 на 1,12. Для цього і у діленому, і у дільнику перенесемо кому вправо на стільки цифр, скільки їх є після коми у дільнику (у даному прикладі на дві). Інакше кажучи, помножимо ділене і дільник на 100 – від цього частка не зміниться. Тоді треба поділити дріб 257,6 на натуральне число 112, тобто задача звелась до вже розглянутого випадку:

$$\begin{array}{r|l} 2{,}576 & 1{,}12 \\ 257{,}6 & 112 \\ -\underline{224\phantom{,6}} & 2{,}3 \\ -336 & \\ \underline{336} & \\ 0 & \end{array}$$

Щоб поділити десятковий дріб на інший десятковий дріб, потрібно і в діленому, і в дільнику перенести кому вправо на стільки цифр, щоб дільник став натуральним числом, і виконати ділення.

Щоб поділити десятковий дріб на $10^n$, треба в цьому дробі перенести кому на n цифр вліво (при цьому в разі потреби зліва дописують потрібну кількість нулів).

Наприклад, 12,45 : 1000 = 1,245; 27,344 : 10000 = 0,0027344.

Як і для натуральних чисел, **ділення не завжди можна виконати для десяткових дробів.**

Поділимо, наприклад, число 2,8 на 0,09:

$$\begin{array}{r|l} 2{,}8 & 0{,}09 \\ -\,280 & \quad 9 \\ \underline{27}\phantom{0} & 31{,}11\ldots \\ -\,10 & \\ \underline{9} & \\ -\,10 & \\ \underline{9} & \\ 1\ldots & \end{array}$$

У результаті отримуємо десятковий дріб, який після коми має безліч цифр**.** У таких випадках, щоб виконати ділення десяткових дробів, потрібно перетворити десяткові дроби у звичайні дроби і знайти результат:

$$2{,}8 : 0{,}09 = 2\frac{8}{10} : \frac{9}{100} = \frac{28}{10} : \frac{9}{100} = \frac{28}{10} \cdot \frac{100}{9} = \frac{28 \cdot 100}{10 \cdot 9} = \frac{28 \cdot 10}{9} = \frac{280}{9} = 31\frac{1}{9}.$$

Може виявитися так, що одні дроби можуть бути записані у вигляді звичайних дробів, а інші – у вигляді десяткових чи мішаних чисел.

Щоб виконати дії над такими числами, можна поступати по-різному:

– перетворити десяткові дроби у звичайні і застосувати правила дій над звичайними дробами;

– перетворити звичайні дроби і мішані числа у десяткові дроби (якщо це можливо) і застосувати правила дій над десятковими дробами.

**Приклад.** Знайти значення виразу:

$$2{,}4 : (4{,}35 : (10{,}021 - (0{,}14 \cdot 1{,}05 + 0{,}013) - 4{,}061)) + 6{,}8.$$

1) $\begin{array}{r} \times\ 0{,}14 \\ \underline{1{,}05} \\ 70 \\ \underline{14\phantom{0}} \\ 0{,}1470 \end{array} = 0{,}147$

2) $\begin{array}{r} +\ 0{,}147 \\ \underline{0{,}013} \\ 0{,}160 \end{array} = 0{,}16$

3) $\begin{array}{r} -\ 10{,}021 \\ \underline{0{,}16} \\ 9{,}861 \end{array}$

4) $\begin{array}{r} -\ 9{,}861 \\ \underline{4{,}061} \\ 5{,}800 \end{array} = 5{,}8$

5) $\begin{array}{r|l} 4{,}35 & 5{,}8 \\ -\,43{,}5 & 58 \\ \underline{406}\phantom{0} & 0{,}75 \\ -\,290 & \\ \underline{290} & \\ 0 & \end{array}$

6) $\begin{array}{r|l} 2{,}4 & 0{,}75 \\ -\,240 & 75 \\ \underline{225}\phantom{0} & 3{,}2 \\ -\,150 & \\ \underline{150} & \\ 0 & \end{array}$

7) 3,2 + 6,8 = 10,0 =10.

## 11.8. Перетворення звичайних дробів у десяткові. Нескінченні десяткові періодичні дроби

Розглянемо обернене питання: можливість заміни звичайного дробу десятковим.

1. Для того, щоб звичайний дріб зі знаменником, що є степенем числа 10, замінити десятковим дробом, треба лише перейти до іншої форми запису звичайного дробу. Наприклад,

$$\frac{3}{10}=0{,}3,\quad \frac{43}{100}=0{,}43,\quad \frac{243}{1000}=0{,}243,\quad \frac{3}{100000}=0{,}00003,\quad 2\frac{5}{10000}=2{,}0005.$$

2. Для того, щоб зобразити у вигляді десяткового дробу звичайний дріб, знаменник якого є дільником деякого степеня числа 10, потрібно на основі основної властивості звичайного дробу помножити чисельник і знаменник цього дробу на таке число, щоб у знаменнику отримати степінь числа 10.

Наприклад, 4 є дільником числа 100, тому, щоб дріб $\frac{3}{4}$ зобразити у вигляді десяткового дробу, помножимо його чисельник і знаменник на 25:

$$\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{75}{100}=0{,}75;$$

125 – дільник числа 1000, тому, щоб дріб $\frac{196}{125}$ зобразити у вигляді десяткового дробу, помножимо його чисельник і знаменник на 8:

$$\frac{196}{125}=\frac{196\cdot 8}{125\cdot 8}=\frac{1568}{1000}=1{,}568.$$

3. У загальному випадку, для того щоб звичайний дріб зобразити у вигляді десяткового, потрібно поділити у стовпчик чисельник на знаменник. Наприклад, зобразимо у вигляді десяткового дріб $\frac{23}{80}$ $\frac{23}{80}=0{,}2875$.

Виконаємо таке ж перетворення для дробу $\frac{15}{22}=0{,}68181\ldots$ .

Це – десятковий дріб, який відрізняється від описаних десяткових дробів тим, що він після коми містить нескінченно багато десяткових знаків (цифр).

**Означення.** *Десятковий дріб, який після коми містить нескінченно багато десяткових знаків (цифр),* називається ***нескінченним десятковим дробом.***

Випишемо послідовно остачі, які отримуються під час виконання операції ділення числа *15 на 22*:     *18, 4, 18, 4, 18, 4, 18, … .*

Група остач, які періодично повторюються, приводить відповідно до групи цифр у запису числа, які теж періодично повторюються:  *8, 1, 8, 1, 8, 1, … .*

У нашому прикладі отримуємо: $\frac{15}{22}$ *= 0,681818181… .*

**Означення.** *Група цифр (мінімальна), яка послідовно повторюється після коми у записі десяткового дробу, називається* ***періодом.***

**Означення.** *Нескінченний десятковий дріб, що має період у своєму запису, називається* ***періодичним дробом.***

Для лаконічності запису прийнято період записувати лише один раз у круглих дужках. Наприклад, отриманий дріб можна записати так:

*0,681818181… = 0,6(81).*

**Означення.** *Якщо період починається відразу після коми, то дріб називається* ***чистим періодичним дробом.***

**Означення.** *Якщо між комою і періодом є інші десяткові знаки, то дріб називається* ***мішаним періодичним дробом.***

**Означення.** *Група цифр, яка стоїть між комою і періодом, називається* ***доперіодною частиною.***

Наприклад, *2,(38) = 2,3838…* – чистий періодичний дріб;

*0,5(142) = 0,5142142142…* – мішаний періодичний дріб.

Отже, перетворюючи звичайний дріб $\frac{15}{22}$ у десятковий, ми отримали нескінченний десятковий мішаний періодичний дріб.

Так, кожен звичайний дріб можна записати у вигляді десяткового дробу, але одного разу ми отримаємо скінченний десятковий дріб, а іншого – нескінченний. Постає запитання: від чого це залежить і чи можна за виглядом звичайного дробу відразу сказати, скінченний чи нескінченний десятковий дріб ми отримаємо. Відповідь на це запитання містить таке твердження.

**Теорема 11.3.** *Довільний звичайний дріб можна зобразити у вигляді десяткового дробу.*

*Нескоротний звичайний дріб можна зобразити у вигляді **скінченного десяткового дробу**, тоді і тільки тоді, коли канонічний розклад знаменника дробу містить лише множники 2 або 5.*

*Якщо ж звичайний дріб – нескоротний і канонічний розклад знаменника не містить чисел 2 і 5, або містить, крім 2 і 5, інші прості множники, то такий звичайний дріб можна записати у вигляді **нескінченного десяткового дробу.***

**Приклад.** Які зі звичайних дробів можна записати у вигляді скінченного десяткового дробу, а які – у вигляді нескінченного: $\frac{1}{16};\frac{3}{40};\frac{5}{28};\frac{23}{150};\frac{19}{55};\frac{2}{625};\frac{7}{320}$.

Р о з в ' я з а н н я. Щоб дати відповідь на це запитання, скористаємось твердженням попередньої теореми, тому знайдемо канонічні розклади знаменників цих дробів:

$$16 = 2^4;\quad 40 = 2^3\cdot 5;\quad 28 = 2^2\cdot 7;\quad 150 = 2\cdot 3\cdot 5^2;\quad 55 = 5\cdot 11;\quad 625 = 5^4;\quad 320 = 2^6\cdot 5.$$

Множники 2 і 5 містять канонічні розклади чисел *16, 40, 625 і 320*, тому у вигляді скінченних десяткових дробів можна записати лише ті звичайні дроби, що мають знаменники *16, 40, 625 і 320,* а решта – у вигляді нескінченних десяткових дробів.

**Теорема 11.4.** *Якщо знаменник нескоротного дробу $\frac{m}{n}$ не містить множників 2 і 5, то цей дріб перетворюється у **чистий періодичний десятковий дріб,** при чому число цифр у періоді дорівнює найменшому натуральному числу $\tau > 0$, для якого число $10^{\tau}$ - 1 ділиться націло на число n.*

**Теорема 11.5.** *Якщо знаменник нескоротного дробу $\frac{m}{n}$ містить, крім множників 2 і 5, інші прості множники, то цей дріб перетворюється у **мішаний періодичний десятковий дріб**, при чому число цифр у періоді дорівнює найменшому натуральному числу $\tau > 0$, для якого число $10^{\tau}$ - 1 ділиться націло на число, що дорівнює добутку всіх простих множників* *канонічного розкладу знаменника n, крім чисел 2 і 5; а число цифр між комою і періодом дорівнює більшому з чисел, які є кратностями множників 2 і 5 у канонічному розкладі знаменника дробу.*

**Приклад.** У які періодичні дроби перетворюються звичайні дроби $\frac{2}{21}, \frac{8}{11}, \frac{26}{111}, \frac{57}{110}, \frac{11}{90}, \frac{29}{660}$? Вказати довжину їх періодів.

Р о з в ’ я з а н н я. Знайдемо канонічні розклади знаменників цих дробів:

$$21=3\cdot 7, \quad 11=11, \quad 111=3\cdot 37, \quad 110=11\cdot 2\cdot 5, \quad 90=2\cdot 3^2\cdot 5, \quad 660=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 11.$$

Бачимо, що не містять множників 2 і 5 числа *21, 11, 111,* а числа *110, 90, 660* містять у канонічному розкладі, крім чисел 2 і 5, ще й інші числа.

Тому за відповідною теоремою дроби $\frac{2}{21}, \frac{8}{11}, \frac{26}{111}$ перетворюються у чисті періодичні дроби, при чому довжини періодів цих дробів дорівнюють відповідно числам: 6 (бо $(10^6-1)\vdots 21$), 2 (бо $(10^2-1)\vdots 11$), 3 (бо $(10^3-1)\vdots 111$).

Справді, $\frac{2}{21}=0,(095238)$, $\frac{8}{11}=0,(72)$, $\frac{26}{111}=0,(234)$.

Дроби $\frac{57}{110}, \frac{11}{90}, \frac{29}{660}$ перетворюються у мішані періодичні дроби, а довжини їх періодів дорівнюють відповідно числам 2, бо $(10^2-1)\vdots 11$; 1, бо $(10^1-1)\vdots 9$), 2 (бо $(10^2-1)\vdots 33$). Число цифр між комою і періодом у цих дробів дорівнює відповідно 1, 1, 2.

Отже, $\frac{57}{110}=0,5(18)$, $\frac{11}{90}=0,1(2)$, $\frac{29}{660}=0,04(39)$.

Скінченний десятковий дріб може бути записаний у вигляді нескінченного десяткового дробу, бо його значення не зміниться, якщо справа дописати довільну кількість нулів: *2,73 = 2,7300000… = 2,73(0)* – нескінченний десятковий мішаний періодичний дріб.

**Перетворення нескінченного десяткового періодичного дробу у звичайний дріб**

<u>**Правило.**</u> *Щоб перетворити* ***нескінченний десятковий*** ***<u>чистий</u>*** ***періодичний дріб*** *у звичайний дріб, потрібно, у чисельнику записати період цього дробу, а у знаменнику – стільки цифр-дев'яток, скільки цифр у періоді.*

Наприклад, 0,4 = $\frac{4}{9}$, 0,(01) = $\frac{1}{99}$, 0,(481) = $\frac{481}{999}$, 0,(1542) = $\frac{1542}{9999}$,

2,(3) = 2 + 0,(3) = $2+\frac{3}{9}=2+\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}$,

21,(273) = $21\frac{273}{999}$=$21\frac{91}{333}$.

<u>**Правило.**</u> *Щоб перетворити* ***нескінченний десятковий*** ***<u>мішаний</u>*** ***періодичний дріб*** *у звичайний дріб, потрібно, у чисельнику записати різницю між числом, записаним цифрами, що стоять після коми, і числом, записаним цифрами до початку періоду, а в знаменнику – стільки цифр – дев'яток, скільки цифр у періоді, і стільки цифр – нулів, скільки цифр у доперіодній частині.*

Наприклад, 10,7(61) = $10\frac{761-7}{990}=10\frac{754}{990}=10\frac{377}{495}$,

41,214(5) = $41\frac{2145-214}{9000}$ = $41\frac{1931}{9000}$.

Зауважимо особливість довільних нескінченних десяткових дробів з дев'яткою у періоді: 3,254(9) = $3\frac{2549-254}{9000}$ = $3\frac{2295}{9000}$ = $3\frac{255}{1000}$ = 3,255 = 3,255(0).

## 11.9. Поняття відсотка. Три типи задач на відсотки

З поняттям десяткового дробу тісно пов'язано поняття процента. Серед десяткових дробів особливо часто на практиці використовується дріб 0,01 (сота частина від цілого), який і називається ***відсотком (процентом)*** і позначається ***1%.*** Отже, за означенням:

$$\boldsymbol{1\% = 0{,}01, \quad 1\% = \frac{1}{100} \qquad p\% = \frac{p}{100}.}$$

На основі цього співвідношення легко перетворювати відсотки у десяткові дроби:

2% = 0,02, 45% = 0,45, 120% = 1,2, 350% = 3,5 і, навпаки, десяткові дроби у відсотки:

0,25 = 25%,  0,7 = 70%,  0,327 = 32,7%,  12 = 1200%.

Проценти були введені, коли ще не існувало уявлень про десяткові дроби. Щоб здійснювати розрахунки позик, визначали приріст капіталу з розрахунку на 100 грошових одиниць. Цей приріст називали числом процентів. Звідси походить слово «процент» (від латинського *«pro centum»* - у перекладі «на сто», «від ста»). Зараз поняття процента (відсотка) знаходить застосування у найрізноманітніших сферах життя людини - у практичних, господарських і статистичних розрахунках, у фінансових звітах, у багатьох галузях науки – економіці, хімії і т.д.

Є ***три типи задач на відсотки***:

***1) знаходження p відсотків від числа a:***

$$\boldsymbol{a \quad - \quad 100\%;}$$
$$\boldsymbol{b \quad - \quad p\%.}$$
$$\boldsymbol{b = p\ \%\ \text{від}\ a} = \frac{a}{100\%} \cdot p\%;$$

***щоб знайти p% від числа a, потрібно, це число a поділити на 100% і помножити на число відсотків p%.***

**Задача.** Робітник повинен виготовити за зміну 80 деталей. Після закінчення робочого дня виявилось, що він виконав 125% свого завдання. Скільки деталей виготовив робітник?

Р о з в ' я з а н н я. І спосіб: 125% від 80 = $\frac{80}{100\%} \cdot 125\% = 100$ (д.)

ІІ спосіб:

1) 125% = 1, 25
2) 1,25 · 80 = 100 (д.)

В і д п о в і д ь: 100 деталей.

***2) знаходження числа a за відомими його p відсотками, що дорівнюють числу b***

$$\boldsymbol{b \quad - \quad p\%;}$$
$$\boldsymbol{a \quad - \quad 100\%.}$$
$$\boldsymbol{a} = \frac{b}{p\%} \cdot 100\%;$$

***щоб знайти число a за відомими його p%, що дорівнюють числу b, потрібно число b поділити на p% і помножити на 100%.***

**Задача.** Робітник виготовив 100 деталей. Це є 125% від його плану. Яким був план?

Р о з в ’ я з а н н я. $\frac{100}{125\%}\cdot 100\% = 80\,(\text{д.})$

В і д п о в і д ь: 80 деталей.

***2) знаходження процентного (відсоткового) відношення двох чисел a і b:***

$$a \quad - \quad p\ \%;$$

$$b \quad - \quad 100\ \%.$$

$$p\ \% = \frac{a}{b}\cdot 100\%;$$

***щоб знайти процентне відношення двох чисел a і b, потрібно число a поділити на число b і помножити на 100%.***

**Задача.** Робітник повинен виготовити 80 деталей, а він виготовив 100 деталей. Скільки відсотків плану він виконав?

Р о з в ’ я з а н н я. $\frac{100}{80}\cdot 100\% = 125\%$

В і д п о в і д ь: 125 %.

Часто потрібно розв’язати складнішу задачу на відсотки. У такому випадку її розбивають на прості задачі, які є одним із трьох типів задач на відсотки. Наведемо приклади таких задач та їх розв’язання.

**Задача.** *Змішали розчини соляної кислоти із трьох ємкостей: 2 л 45% -ого розчину, 3 л – 60%-ого розчину і 5 л – 25%-ого розчину. Якої концентрації буде отриманий розчин?*

Р о з в ’ я з а н н я.

1) 0,45·2 = 0,9(л) солі у першому розчині;
2) 0,6·3 = 1,8(л) солі у другому розчині;
3) 0,25·5 = 1,25(л) солі у третьому розчині;
4) 2+3+5= 10(л) загальний об’єм отриманого розчину;
5) 0,9+1,8+1,25=3,95(л) солі у отриманому розчині;
6) 3,95:10·100%=39,5(%) – концентрація отриманого розчину.

В і д п о в і д ь: 39,5 %.

## 11.10. Вивчення дробів у початковому курсі математики

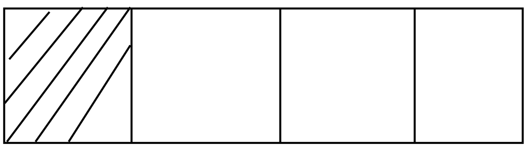
У молодших школярів необхідно створити конкретні уявлення про процес утворення частин від цілого предмета чи сукупності предметів. Із цією метою вже в 3 класі дітей ознайомлюють із частинами, їх записом, вчать знаходити частину числа та число за відомою його частиною. У 4 класі продовжують працювати над засвоєнням частини числа, учнів ознайомлюють із дробами та їх записом, вчать порівнювати частини, знаходити кілька частин від числа, дріб від числа, розв'язувати складені задачі, що включають знаходження дробу від числа.

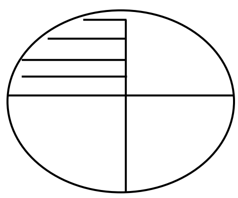
У курсі математики початкових класів учнів ознайомлюють з поняттям дробу, проводячи бесіду: числа $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}$ називають ***дробовими числами***. Число $\frac{5}{6}$ — дріб, 5 – чисельник дробу, 6 – знаменник дробу. Число під рискою дробу – ***знаменник дробу*** – показує, на скільки рівних частин поділено ціле. Число над рискою дробу – ***чисельник дробу*** – показує, скільки взято рівних частин цілого.

Поява дробів виду $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ і т. д. зумовлена потребою поділити ціле на частини. Проте основним джерелом виникнення дробів вважають процес вимірювання величин. Результат вимірювання не завжди можна було виразити натуральним числом. Доводилося враховувати й частини міри. Є всі підстави припускати, що спочатку існували лише двійкові дроби: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ і т. д. ($4 = 2 \cdot 2$, $8=2 \cdot 2 \cdot 2$, $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ — звідси назва).

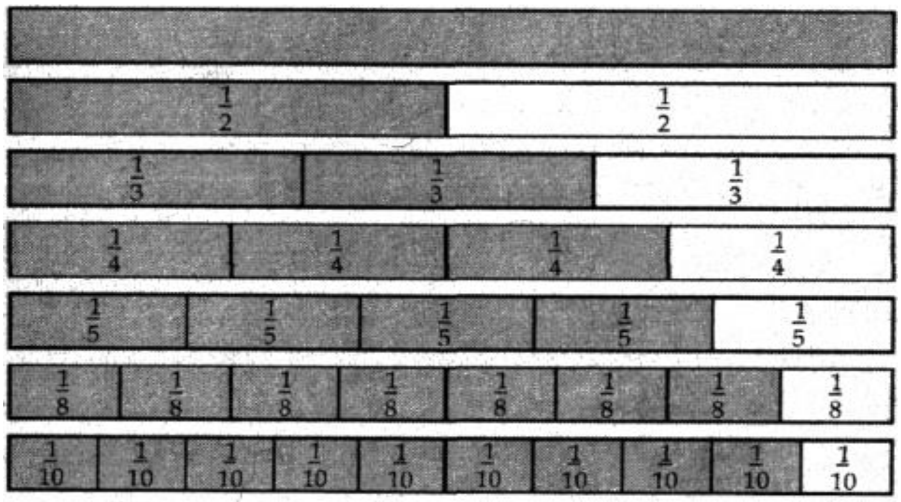
Були поширені також дроби виду: половина — $\frac{1}{2}$, чверть — $\frac{1}{4}$, півчверть — $\frac{1}{18}$, півпівчверть — $\frac{1}{16}$, третина — $\frac{1}{3}$, півтретини — $\frac{2}{3}$.

Наприклад, **дріб $\frac{1}{4}$ учні розуміють так, що потрібно поділити на чотири рівні частини і взяти таких частин одну.** Найчастіше це пояснюють за допомогою ілюстрацій:





**Порівнюють дроби** тільки з опорою на унаочнення (див. мал.).




На малюнку 7 однакових прямокутників. Перший — цілий, другий — поділений на 2 рівні частини, третій — на 3 рівні частини, четвертий — на 4, п'ятий — на 5, шостий — на 8 і сьомий — на 10 рівних частин. У цілому прямокутнику міститься дві половини, три третіх частини, чотири четвертих, п'ять п'ятих, вісім восьмих або десять десятих частин. Скільки четвертих частин у половині? Користуючись малюнками, порівняй частини:

$\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8}$ і $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{3}$ і $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$ і $\frac{1}{5}$.

Користуючись малюнком, учні з'ясовують, наприклад, скільки четвертих частин у половині, скільки восьмих частин у цілому. Наочно бачать, що $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} > \frac{1}{8}$; $\frac{1}{8} > \frac{1}{10}$ і т.д.

Дії над дробами учні початкових класів не вивчають.

У початковому курсі математики вивчають **два типи задач на дроби:**

- на знаходження дробу від числа,
- на знаходження числа за його дробом.

При цьому використовують такі правила:

**Щоб знайти дріб від числа, треба число поділити на знаменник дробу і помножити на чисельник дробу.**

Наприклад: $\frac{3}{5}$ від $20 = 20 : 5 \cdot 3 = 12$.

**Щоб знайти число за його дробом, треба число поділити на чисельник дробу і помножити на знаменник дробу.**

Наприклад: $\frac{3}{5}$ від числа становить 12. Тоді дане число = 12 : 3 · 5 = 20.

\

## Питання для самоконтролю

1. Поняття дробу. Правильні і неправильні дроби.
2. Мішане число. Перетворення мішаного числа у неправильний дріб і навпаки.
3. Рівносильні дроби. Основна властивість дробу .
4. Скорочення дробу. Нескоротний дріб.
5. Зведення дробів до спільного знаменника.
6. Арифметичні операції над звичайними дробами.
7. Множина додатних раціональних чисел.
8. Відношення «бути рівним « на множині Q+ і його властивості.
9. Порівняння звичайних і десяткових дробів.
10. Скінченний десятковий дріб.
11. Арифметичні операції над десятковими дробами.
12. Нескінченні періодичні десяткові дроби.
13. Умова перетворення звичайного дробу у скінченний десятковий.
14. Умова перетворення звичайного дробу у нескінченний десятковий чистий періодичний дріб.
15. Умова перетворення звичайного дробу у нескінченний десятковий мішаний періодичний дріб.
16. Запис нескінченного десяткового періодичного дробу у вигляді звичайного дробу.
17. Поняття відсотка. Типи задач на відсотки.

# ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

**1**. Утворити всі можливі правильні і неправильні дроби з чисел:

а) 3, 7, 15; б) 1, 4, 7, 12.

**2**. Чи рівносильні дроби:

а) $\frac{3}{5}$ і $\frac{6}{10}$; $\frac{4}{5}$ і $\frac{7}{11}$; б) $\frac{36}{21}$ і $\frac{12}{7}$; $\frac{2}{9}$ і $\frac{17}{20}$.

**3.** Записати по три дроби, рівносильні до даних:

а) $\frac{2}{5}$; $\frac{6}{48}$; б) $\frac{5}{6}$; $\frac{10}{120}$.

**4.** Перетворити кожен з дробів у рівносильний нескоротний дріб:

а) $\frac{105}{180}$; $\frac{37}{999}$; $\frac{2016}{3888}$; б) $\frac{234}{999}$; $\frac{118}{413}$; $\frac{162}{2538}$;

в) $\frac{288}{756}$; $\frac{1415}{1981}$; $\frac{15}{225}$; г) $\frac{336}{714}$; $\frac{9379}{2573}$; $\frac{648}{964}$.

**5.** Звести дроби до найменшого спільного знаменника:

а) $\frac{8}{63},\frac{11}{15},\frac{5}{12}$; б) $\frac{55}{126},\frac{40}{231},\frac{91}{132}$;

в) $\frac{12}{91},\frac{88}{105},\frac{65}{84}$; г) $\frac{80}{36},\frac{1}{180},\frac{52}{63}$.

**6.** Порівняти дроби:

а) $\frac{3}{8}$ і $\frac{4}{11}$; б) $\frac{4}{81}$ і $\frac{5}{54}$;

в) $\frac{3}{129}$ і $\frac{3}{122}$; г) $\frac{8}{381}$ і $\frac{8}{349}$;

д) $\frac{3}{29}$ і $\frac{4}{22}$; е) $\frac{4}{581}$ і $\frac{3}{249}$.

**7.** Виконати дії:

а) $10\frac{17}{80}+2\frac{19}{48}+1\frac{5}{32}+\frac{1}{96}$; б) $\frac{5}{44}+5\frac{1}{3}+4\frac{2}{11}+\frac{5}{66}+\frac{13}{44}$;

в) $(20-19\frac{3}{4})+(17\frac{3}{4}-17)+(2\frac{1}{2}-\frac{17}{24})$; г) $2\frac{1}{2}-(\frac{3}{5}+\frac{7}{10}+\frac{2}{15})$ ;

д) $(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5})\cdot(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12})\cdot 1\frac{9}{91}$; е) $(\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}+1\frac{10}{17}\cdot\frac{3}{5}-\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{17})\cdot 5\frac{1}{3}$;

є) $(12\frac{1}{2}+4\frac{1}{6}):(7\frac{1}{2}-4\frac{1}{6})$; ж) $(\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{25}+\frac{7}{30}):\frac{9}{25}$;

з) $((\frac{7}{15}-\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{25})\cdot\frac{5}{12}+\frac{7}{24}):\frac{11}{15}$;

и) $\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{12}-(\frac{5}{18}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}):\frac{2}{15}+(\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{18}+\frac{7}{8}\cdot\frac{4}{15}):\frac{5}{12}$.

**8.** Знайти значення виразу:

1). $\dfrac{12\frac{4}{5}\cdot 3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3}\cdot 2\frac{4}{7}}$;

2) $\dfrac{(1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}+3\frac{3}{4})\cdot 3\frac{3}{5}}{14-15\frac{1}{2}:2\frac{1}{5}}$;

3) $(20\frac{8}{15}\cdot 7\frac{1}{2}-54\frac{3}{5}\cdot 2\frac{1}{2}):(3\frac{13}{21}\cdot 8\frac{2}{5}-29\frac{2}{5})-\frac{5}{6}\cdot 1\frac{1}{5}$.

**9**. Розв’язати рівняння, використовуючи залежності між компонентами:

а) $1\frac{3}{5}+(2\frac{7}{12}-((\frac{3}{4}-x)+1))=2\frac{14}{15}$;

б) $2\frac{1}{18}-(1\frac{1}{27}-(x-\frac{1}{9}))+3\frac{5}{54}=5$.

**10.** Чисельник дробу на 3 більший від знаменника. Якщо чисельник цього дробу зменшити на 1, а знаменник збільшити у 2 рази, то отриманий дріб буде на 1 менший від початкового. Знайти початковий дріб.

**11**. Знаменник дробу на 3 більший, ніж чисельник. Якщо чисельник збільшити на 5, а знаменник залишити без зміни, то одержаний дріб буде на 1 більший від початкового. Знайти початковий дріб.

**12.** Розв’язати рівняння:

а) $0{,}2x+1=2{,}4$

б) $0{,}2x-4{,}2=0{,}8-0{,}3x$

в) $1-0{,}07x=0{,}4$

г) $\frac{x}{0{,}5}+0{,}6=1{,}6$

д) $0{,}72:0{,}9x=10$

е) $2:5{,}2=x:1{,}3$.

**13.** Знайти значення виразу:

1) $1{,}35:2{,}7+6{,}02-5{,}9+0{,}4:2{,}5\cdot(4{,}2-1{,}075)$;

2) $(2{,}318+0{,}4793)\cdot 2{,}83+(7{,}152-0{,}47)\cdot 6{,}24$;

3) $(1{,}6:1{,}28)+(1{,}5:0{,}24)+1{,}1:0{,}08$;

4) $(1{,}14+0{,}76):(1{,}14-0{,}76)+0{,}54:0{,}012$;

5) $1:2{,}5+1{,}44:3{,}6+3{,}6:1{,}44\cdot(0{,}1-0{,}02)$.

**14.** Знайти значення виразу зі звичайними і десятковими дробами:

1) $24{,}57:3{,}5+(3{,}35-2\frac{13}{15}+\frac{5}{8})\cdot(225:12{,}5-3\frac{14}{19}\cdot 2)$;

2) $(17\frac{1}{18}\cdot 3{,}6-0{,}476:14):(0{,}009\cdot 8700-120:4\frac{2}{7})+0{,}306:0{,}3$;

3) $((4{,}625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}):2\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}:1{,}25:6\frac{3}{4}):1\frac{53}{68}$;

4) $\left(2\frac{3}{20}-0,645:0,3\right)\cdot\left(4:6\frac{1}{4}-0,2+\frac{1}{7}\cdot 1,96\right)$;

5) $\dfrac{\left(1\frac{1}{5}:\left(\frac{17}{40}+0,6-0,005\right)\right)\cdot 1,7}{\frac{5}{6}+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}+\dfrac{4,75+7\frac{1}{2}}{33:4\frac{5}{7}}:0,25$.

**15.**Зобразити звичайні дроби у вигляді десяткового:

1) $\frac{81}{100}$; $\frac{24}{125}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{55}$;

1) $\frac{27}{10000}$; $\frac{17}{20}$ ; $\frac{7}{11}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{5}{9}$.

**16.**Записати десяткові дроби у вигляді нескоротних звичайних дробів:

а) $0,15$; $0,125$; $0,1375$; $1,37544$;

б) $3,24$; $0,625$; $0,2454$; $2,2750625$.

**17.** Перетворити чисті періодичні десяткові дроби у звичайні:

а) $0,(31)$; $0,(243)$; $3,(2799)$; $0,(471)$;

б) $2,(75)$; $2,(4314)$; $0,(231426)$.

**18.**Перетворити мішані періодичні десяткові дроби у звичайні:

а) $2,17(24)$; $3,4(25)$; $0,34(9)$; $0,1(237)$;

б) $0,27(15)$; $0,2(36)$; $5,212(7)$; $0,1(9)$.

**19.** Знайти: 1% від числа 800; 26% від числа 10;

7% від числа 300; 156% від числа 62.

**20.** Площа поля 420га. житом засіяли 16% поля. скільки гектарів засіяли житом?

**21**.Довжина прямокутника дорівнює 80см, його ширина становить 80% довжини. знайдіть периметр і площу прямокутника.

**22.** Ширина прямокутника дорівнює 40см, його довжина становить 135% ширини. знайдіть периметр і площу прямокутника.

**23.** Руда містить 60% заліза. скільки треба взяти руди, щоб отримати 72т заліза?

**24.** Вага сушених слив становить 15% ваги свіжих слив. Скільки треба взяти свіжих, щоб отримати 36кг сушених слив?

**25.** Під час сушіння яблука втрачають 84% своєї ваги. Скільки треба взяти свіжих яблук, щоб одержати 24 кг сушених?

**26.** У саду росли яблуні і вишні, причому яблуні становили 41% всіх дерев. вишень було на 54 дерева більше, ніж яблунь. скільки дерев було в саду? скільки серед них було вишень?

**27.** За два дні було відремонтовано кабель. за перший день відремонтували 68% кабелю, а за другий – на 115,2м менше, ніж за перший. скільки всього метрів кабелю було відремонтовано за два дні? скільки метрів кабелю відремонтували за перший день?

**28.** Банк сплачує своїм вкладникам 8% річних. скільки грошей треба покласти в банк, щоб через рік отримати прибуток 60 гривень?

**29.** Знайдіть відсоток вмісту солі в розчині, якщо в 400 г розчину міститься 34г солі.

**30.** Знайдіть відсоток вмісту олова в руді, якщо в 80т цієї руди міститься 6,08 т олова?

**31.** Вартість деякого товару знизилась з 175 грн. до 140 грн. на скільки відсотків знизилась ціна?

**32.** Вартість костюма була 180 грн. спочатку його вартість підвищили на 20%, а потім знизили на 10%. якою стала вартість костюма після цих змін? на скільки відсотків змінилась початкова ціна?

**33.** Вартість шафи була 160 грн. спочатку її вартість знизили на 10%, а потім підвищили на 25%. якою стала вартість шафи після цих змін? на скільки відсотків змінилась початкова ціна?

**34.** Хлопчик купив дві книжки. одна з них була на 50% дорожча за другу. на скільки відсотків друга книжка дешевша за першу?

**35.** Яке з двох чисел більше, якщо:

1) 5% від першого числа дор. 20, а 8% від другого – 24;
2) 26% від першого числа дор. 130, а 9% від другого числа дор. 45% від першого?

# 12. Множина дійсних чисел

## 12.1. Необхідність розширення множини раціональних чисел

Відомо, що числові системи можна утворити по-різному: аксіоматично або конструктивно. Зокрема, відома множина цілих невід’ємних чисел $Z_0$ введена аксіоматично на основі аксіом Пеано, а множина раціональних чисел Q – конструктивно, тобто як розширення множини цілих чисел.

Необхідність розширення однієї числової множини до іншої зумовлюється потребами як теорії, так і практики. Арифметика оперує додатними цілими і дробовими числами. Шкільний курс алгебри починається з введення цілих від’ємних чисел, тобто з розширення множини натуральних чисел N до множини цілих чисел Z. Це розширення здійснюється для того, щоб отримати числову систему, в якій рівняння вигляду $a + x = b$ завжди мало б розв’язок. Далі множина цілих чисел Z розширюється до множини раціональних чисел Q, щоб отримати числову систему, в якій би завжди розв’язувалося рівняння вигляду $a \cdot x = b$ (при $\boldsymbol{a} \neq 0$).

Проте для розв’язання багатьох задач, у тому числі й елементарних, раціональних чисел також не досить. Їх недостатньо, наприклад, для розв’язування усіх квадратних рівнянь вигляду $x^2 = a$, де $a > 0$.

Справедливим є наступне твердження.

**Теорема 12.1**. *Серед цілих і дробових чисел немає такого числа, квадрат якого дорівнював би точно 2.*

Можна довести, що серед цілих і дробових чисел не існує таких, квадрати яких дорівнювали б числам 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11 і т.д. Взагалі справджується така теорема.

**Теорема 12.2.** *Не існує раціонального числа, яке б виражало значення кореня n-го степеня ($n \in N$) з будь-якого простого числа p.*

На основі цієї теореми легко навести приклади чисел, які не є раціональними: $\sqrt{5}, \sqrt{11}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[6]{20}$ і т.д.

Раціональних чисел не досить також для розв'язання такого завдання, як вимірювання величин. Наприклад, існують відрізки, довжини яких не можна виразити, користуючись лише раціональними числами. Такі відрізки називають **неспіввимірними з одиничним відрізком**. Їх існування випливає з такої теореми.

**Теорема 12.3**: *Діагональ квадрата неспіввимірна з його стороною.*

Взагалі відрізків, неспіввимірних з одиницею довжини, існує нескінченна множина. Справді, поділивши діагональ квадрата чи сторону квадрата на будь-яке число рівних частин або збільшивши ці відрізки у скільки завгодно разів, дістанемо неспіввимірні відрізки.

**Приклад.** Довжини відрізків при одній і тій же одиниці вимірювання виражаються числами 3; 2,1; $2\frac{7}{8}$; $\sqrt{5}$; 0,12(3). Які з цих відрізків співвимірні і які неспіввимірні з цією одиницею вимірювання?

Розв'язання. З цією одиницею вимірювання співвимірними є відрізки, довжини яких виражаються раціональними числами, а такими з поданих чисел є числа: 3; 2,1; $2\frac{7}{8}$; 0,12(3). Неспіввимірним з цією одиницею вимірювання є відрізок, довжина якого виражається числом, яке не є раціональним, тобто числом $\sqrt{5}$.

## 12.2. Ірраціональні числа. Тотожні перетворення над ірраціональними числами та виразами

Числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$, $\sqrt[3]{20}, \sqrt[5]{19}$ і т.д. не є раціональними, вони виходять за рамки вивченого нами про числові системи, і тому теорія чисел потребує розширення.

Таке розширення множини $Q_+$ ми здійснюємо за рахунок чисел нової природи, так званих **ірраціональних чисел** (лат. «irratio» – «нерозумний», «той, що не сприймається розумом»).

У попередньому розділі ми вивчали множину раціональних чисел. У загальному випадку – це нескінченні десяткові періодичні дроби.

Наприклад,

$4 = 4,000... = 4,(0)$;

$2,85 = 2,85000... = 2,85(0)$;

$\frac{1}{3} = 0,333... = 0,(3)$;

$\frac{15}{22} = 0,68181... = 0,6(81)$.

Отже, всі раціональні числа можуть бути зображеними нескінченними десятковими дробами, але періодичними. Нескінчений десятковий неперіодичний дріб зображує числа, які не належать до раціональних.

***Означення.*** *Нескінченний десятковий неперіодичний дріб називається* ***ірраціональним числом****.*

Наприклад, ірраціональними числами є числа $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{11}$, $\pi = 3,14159...$, е = 2,7182818284590... і т.д.

Нескінченні десяткові неперіодичні дроби можна отримати внаслідок десяткового вимірювання відрізків, тобто ці числа зображують довжину відрізків. Оскільки довжина відрізка – це число додатне для всіх відрізків, кінцеві точки яких не суміщаються, то так означене ірраціональне число називається **додатним ірраціональним числом.**

Отже, додатні ірраціональні числа отримуємо внаслідок вимірювання довжини відрізка, неспіввимірного з одиницею вимірювання, у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу. Ірраціональні числа можна отримати також при вимірюванні інших величин, наприклад, площ або об'ємів. Вони утворюють нескінченну **множину додатних ірраціональних чисел, яку позначають $I_+$.**

Над ірраціональними числами можна виконувати різні дії: додавати, віднімати, множити, ділити (на дільник, відмінний від 0), підносити до степеня і добувати корінь певного степеня. При цьому треба пам'ятати відомості зі шкільного курсу алгебри (визначення і властивості арифметичного кореня, корінь непарного степеня з від'ємного числа, степінь з раціональним показником та його властивості тощо).

Розглянемо деякі перетворення ірраціональних чисел і виразів:

1) винесення множника за знак кореня:

$$\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}.$$

2) внесення множника під знак кореня:

$$0{,}3\sqrt{10} = \sqrt{0{,}09} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{0{,}09 \cdot 10} = \sqrt{0{,}9}.$$

3) звільнення дробу від ірраціональності у знаменнику:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{8}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{8(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} = 4(\sqrt{5} + \sqrt{3}),$$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2} + 1} = \frac{3}{\sqrt[3]{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{3(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)}{(\sqrt[3]{2})^3 + 1^3} = \frac{3(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)}{2 + 1} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1.$$

Якщо ірраціональне число міститься у знаменнику дробу, то можна звільнитися від ірраціональності у знаменнику, тобто такий дріб можна замінити тотожним йому дробом, знаменник якого вже не містить ірраціональності. Для цього досить помножити чисельник і знаменник дробу на одне і те ж відповідно підібране число чи вираз. При цьому використовується основна властивість дробу і формули скороченого множення.

Названі перетворення можна виконувати і над виразами із змінними. Наприклад:

1) $\boldsymbol{a}\sqrt{2} \cdot \boldsymbol{x}\sqrt{3} = \boldsymbol{ax}\sqrt{2 \cdot 3} = \boldsymbol{ax}\sqrt{6}$;

2) $\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^6 \cdot x}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^7}} = \sqrt[12]{x^7} = x^{\frac{7}{12}}$;

3) $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a} - \sqrt{\boldsymbol{x}}} = \dfrac{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a} + \sqrt{\boldsymbol{x}})}{(\boldsymbol{a} - \sqrt{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{a} + \sqrt{\boldsymbol{x}})} = \dfrac{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a} + \sqrt{\boldsymbol{x}})}{\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{x}}$.

**Зауваження**. Виносячи за знак кореня змінну, слід пам’ятати, що рівність $\sqrt{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{a}\sqrt{\boldsymbol{c}}$ правильна лише при невід’ємних значеннях змінних а і с. Якщо а<0 і $\boldsymbol{c} \ge 0$, то $\sqrt{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{c}} = -\boldsymbol{a}\sqrt{\boldsymbol{c}}$. При будь-яких дійсних значеннях а і невід’ємних значеннях с правильна тотожність $\sqrt{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{c}} = |\boldsymbol{a}|\sqrt{\boldsymbol{c}}$.

Розглянемо приклади деяких типових завдань.

**Приклад.** Знайти значення виразу $\left(2\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)^2-20\sqrt{6}$.

**Розв’язання.**

$$\left(2\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)^2-20\sqrt{6} = \left(2\sqrt{3}\right)^2+2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{2}+\left(5\sqrt{2}\right)^2-20\sqrt{6}=$$

$$=12+20\sqrt{6}+50-20\sqrt{6}=62.$$

**Приклад .** Обчислити: $(6{,}25)^{0,5}\cdot(\frac{1}{16})^{0,25}-(-4)^{-1}\cdot(0{,}343)^0$.

Р о з в ’ я з а н н я.

$$(6{,}25)^{0,5}\cdot(\frac{1}{16})^{0,25}-(-4)^{-1}\cdot(0{,}343)^0=\sqrt{\frac{25}{4}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{16}}-\frac{1}{-4}\cdot 1=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{6}{4}=1{,}5.$$

**Приклад.** Спростити вираз: $\dfrac{\boldsymbol{x}-1}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{0,5}+1}:\dfrac{\boldsymbol{x}^{0,5}+1}{\boldsymbol{x}^{1,5}-1}+\dfrac{2}{\boldsymbol{x}^{-0,5}}$.

Р о з в ’ я з а н н я.

$$\frac{\boldsymbol{x}-1}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{0,5}+1}:\frac{\boldsymbol{x}^{0,5}+1}{\boldsymbol{x}^{1,5}-1}+\frac{2}{\boldsymbol{x}^{-0,5}}=\frac{\boldsymbol{x}-1}{\boldsymbol{x}+\sqrt{\boldsymbol{x}}+1}\cdot\frac{\left(\sqrt{\boldsymbol{x}}\right)^3-1}{\sqrt{\boldsymbol{x}}+1}+2\sqrt{\boldsymbol{x}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\boldsymbol{x}}-1\right)\left(\sqrt{\boldsymbol{x}}+1\right)}{\boldsymbol{x}+\sqrt{\boldsymbol{x}}+1}\cdot\frac{\left(\sqrt{\boldsymbol{x}}-1\right)\left(\boldsymbol{x}+\sqrt{\boldsymbol{x}}+1\right)}{\sqrt{\boldsymbol{x}}+1}+2\sqrt{\boldsymbol{x}}=$$

$$=\left(\sqrt{\boldsymbol{x}}-1\right)^2+2\sqrt{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}-2\sqrt{\boldsymbol{x}}+1+2\sqrt{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}+1.$$

**Приклад.** Спростити вираз при x < 3: $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{2-x}+x-3$.

Р о з в ’ я з а н н я.

$$\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{2-x}+x-3=\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{2-x}+x-3=|x-3|+\sqrt{2-x}+x-3=-(x-3)$$
$$+\sqrt{2-x}+x-3=\sqrt{2-x}.$$

## 12.3. Запис та порівняння додатних дійсних чисел

**Означення.** *Об’єднання множини додатних раціональних чисел $Q_+$ і множини додатних ірраціональних чисел $I_+$ називається **множиною додатних дійсних чисел $R_+$.***

$$Q_+\subset R_+,\qquad \mathrm{I}_+\subset \mathrm{R}_+,\quad \mathrm{Q}_+\cup I_+=R_+.$$

Оскільки множини $Q_+$ і $I_+$ нескінченні, то і множина $R_+$ як їх об'єднання теж нескінченна. Якщо до множини $R_+$ приєднати число 0, то дістанемо ***множину невід'ємних дійсних чисел***.

**Означення.** *Множина всіх нескінченних десяткових дробів, які відмінні від 0, 000..., називається множиною додатних дійсних чисел $R_+$.*

Введемо поняття «рівні», «менше», «більше» для довільних двох додатних дійсних чисел.

Нехай дано два додатних дійсних числа $x$ і $y$:

$$x = m, m_1 \dots m_k \dots, \qquad y = n,n_1 \dots n_k \dots .$$

**Означення.** *Два додатні дійсні числа називаються* ***рівними,*** *якщо в їхніх зображеннях за допомогою нескінченних неперіодичних десяткових дробів збігаються як цілі частини, так і всі десяткові знаки вправо від коми.*

Отже, $x = y$, тоді і тільки тоді, коли $m = n$, $m_1 = n_1$, ..., $m_{k-1} = n_{k-1}$, $m_k = n_k$ *і т.д.*

**Означення.** *З двох додатних дійсних чисел* ***більше*** *те, в якого ціла частина більша. Якщо ж цілі частини дорівнюють одна одній, то більшим буде те число, в якого більший перший десятковий знак після коми. Якщо ж і перші десяткові знаки однакові, то більшим буде те число, в якого більший другий десятковий знак і т.д.*

Отже, $x < y$, тоді і тільки тоді, коли $m < n$ або, якщо знайдеться таке натуральне число $k$, що $m = n$, $m_1 = n_1$, ..., $m_{k-1} = n_{k-1}$, *але* $m_k < n_k$.

**Приклад.** Порівняти два додатні дійсні числа:

$$x = 5{,}342061\underline{7}2\dots \quad і \quad y = 5{,}342061\underline{8}9\dots .$$

Р о з в ' я з а н н я. У цих числах однакові цілі частини, однакові і перші шість десяткових знаків. Сьомий десятковий знак числа $x$ менший від сьомого десяткового знаку числа $y$, тому $x < y$ або $y > x$.

За наведеними правилами можна порівнювати між собою також додатні дійсні і раціональні числа, при цьому раціональне число слід також зобразити нескінченним десятковим дробом.

**Приклад.** *Порівняти числа*

$$x = 5{,}34206172\ldots \quad і \quad y = 5{,}343.$$

Р о з в ' я з а н н я. Число $x$ є додатним дійсним числом, а число $y$ є раціональним числом. Порівнюємо їх поцифрово: $5 = 5$, $3 = 3$, $4 = 4$, $2 < 3$, а тому $x < y$.

## 12.4. Наближені значення та округлення чисел

Для кожного додатного дійсного числа $x$ можна вказати його так звані ***наближенні значення***.

***Наближене значення з недостачею*** з точністю до $\frac{1}{10^{\kappa}}$ для числа $x$ отримується, якщо залишити цілу частину числа $x$ і перші $k$ цифр після коми, а всі решта його цифр відкинути. Його позначають $\boldsymbol{x_k}$.

Якщо до числа $x$ додати $\frac{1}{10^{\kappa}}$, то отримаємо для числа $x$ ***наближене значення з надлишком*** з точністю до $\frac{1}{10^{\kappa}}$. Його позначають $\boldsymbol{x'_k}$.

Тобто, якщо задано додатне дійсне число $\boldsymbol{x = x, x_1x_2x_3 \ldots x_kx_{k+1} \ldots}$, то його наближене значення з недостачею з точністю до $\frac{1}{10^{\kappa}}$ дорівнює числу $\boldsymbol{x_k = x, x_1x_2x_3 \ldots x_k}$, а його наближене значення з надлишком з точністю до $\frac{1}{10^{\kappa}}$ дорівнює числу $\boldsymbol{x'_k = x, x_1x_2x_3 \ldots .(x_k+1)}$.

Десяткові наближення з недостачею і надлишком для додатних дійсних чисел розрізняються з відповідною точністю: ***до одиниць*** $\boldsymbol{(10^0)}$***; десятих*** $\boldsymbol{(10^{-1})}$***; сотих*** $\boldsymbol{(10^{-2})}$***; тисячних*** $\boldsymbol{(10^{-3})}$***; десятитисячних*** $\boldsymbol{(10^{-4})}$ ***і т.д.***

Розглянемо наближені значення дійсного числа $\sqrt{2}$ з недостачею і надлишком з різною точністю. Маємо:

$$1 < \sqrt{2} < 2$$
$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$
$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$
$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$$

..........................................

Числа 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142 є десятковим наближенням числа $\sqrt{2}$ з недостачею з точністю відповідно до 1, до 0,1, до 0,01, до 0,001, до 0,0001. Числа 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143 є десятковим наближенням числа $\sqrt{2}$ з надлишком відповідно з цією ж точністю.

Для числа $\sqrt{2}$ використовують зображення у вигляді нескінченного десяткового неперіодичного дробу: $\sqrt{2}$ = 1, 4142... .

**Приклад**. Знайти наближені значення додатного дійсного числа x = 4,7123456... з точністю до тисячних.

Р о з в' я з а н н я. Маємо число *x = 4,7123456...* . Його наближеними значеннями з точністю до $\frac{1}{10^3}$ є:

$$x_3 = 4{,}712, \qquad x'_3 = 4{,}713.$$

***Зауваження.*** *Очевидно, що для довільного додатного дійсного числа x для довільного натурального числа k справджується нерівність:*

$$x_k \leq x < x'_k,$$

*тобто для додатного дійсного числа x наближене значення з надлишком завжди більше від наближеного значення з недостачею для певної точності обчислень.* Наприклад, для числа *x = 5,623147…* і його наближених значень з точністю до $10^{-2}$ виконується співвідношення: $5{,}62 \leq 5{,}623147\ldots \leq 5{,}63$.

***Округлення*** додатного дійсного числа до певного розряду $10^{-к}$ здійснюють за таким ***правилом:*** *записують для цього числа наближене значення з недостачею з точністю до* $10^{-к}$ *; якщо перша наступна за цим розрядом цифра числа менша 5, то останню цифру наближеного значення не змінюють, а якщо перша наступна цифра числа більша або дорівнює 5, то останню цифру наближеного значення збільшують на 1.*

Використовують у записах округлень знак «≈».

**Приклад.** Здійснити округлення додатного дійсного числа x = 2,05624... до: одиниць, десятих, сотих, тисячних, десятитисячних.

Р о з в ' я з а н н я. У результаті використання правила округлення для числа *x = 2,05624...* отримаємо:

при округленні до одиниць х ≈ 2;

при округленні до десятих х ≈ 2,1;

при округленні до сотих х ≈ 2,06;

при округленні до тисячних х ≈ 2,056;

при округленні до десятитисячних х ≈ 2,0562.

## 12.5. Арифметичні дії у множині додатних дійсних чисел

Нехай задано два додатні дійсні числа $x$ і $y$:

$$x = x,\ x_1x_2x_3 \ldots x_k \ldots, \qquad y = y,\ y_1y_2y_3 \ldots y_k \ldots,$$

$x_k$ і $y_k$ – відповідно їх наближені значення з недостачею з точністю до $10^{-k}$, а $x_k'$ і $y_k'$ – відповідно їх наближені значення з надлишком з точністю до $10^{-k}$, тобто справедливі нерівності:

$$x_k \leq x < x_k', \qquad y_k \leq y < y_k'.$$

**Означення.** ***Сумою*** *додатних дійсних чисел x і y називається таке число z, яке для будь–якого натурального числа k задовольняє нерівність:*

$$\boldsymbol{x_k + y_k \leq z < x_k' + y_k'}.$$

Можна довести, що:

1) таке число $z$ існує і до того ж тільки одне;
2) додавання в множині $R_+$ комутативне;
3) додавання в множині $R_+$ асоціативне;
4) якщо у множині $R_+$ $x < y$, то для $a \in R_+$: $x + a < y + a;$
5) які б не були числа $x$ і $y$ з множини $R_+$, завжди $x \neq x + y$.

**Приклад**. *Знайти $x + y$ з точністю до $10^{-5}$, якщо*

*$x = 0,\ 4538414\ldots,$ $\qquad$ $y = 0,\ 7382512\ldots$ .*

Р о з в ' я з а н н я. Спочатку запишемо наближені значення для чисел $x$ і $y$ з точністю до $10^{-6}$ , тобто наближені значення для чисел $x$ і $y$ беремо з шістьма знаками після коми (на один знак більше, ніж треба за умовою) і, почленно додавши ці нерівності, отримаємо:

$$0{,}453841 \le \quad x \quad < 0{,}453842$$
$$\underline{0{,}738251 \le \quad y \quad < 0{,}738252}$$
$$0{,}453841 + 0{,}738251 \le x + y < 0{,}453842 + 0{,}738252$$
$$1{,}192092 \le x + y < 0{,}192094$$
$$x + y \approx 1{,}19209$$

В і д п о в і д ь: $x + y \approx 1{,}19209$

**Зауваження.** Сума двох ірраціональних чисел може бути числом як ірраціональним, так і раціональним. Наприклад, сума таких двох ірраціональних чисел $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ – ірраціональне число; а сума таких двох ірраціональних чисел $\sqrt{2} + (3 - \sqrt{2}) = 3$ – раціональне число.

**Означення.** ***Різницею*** *додатних дійсних чисел x і y (x > y) називають таке число z з $R_+$, що x = y + z.*

Віднімання – обернена операція до додавання, тобто x – y = x + (– y), (x + y) – y = x і (x – y) + y = x.

**Приклад.** Знайти y – x з точністю до $10^{-5}$, якщо

*y = 0, 7382512…, x = 0, 4538414….*

Р о з в ’ я з а н н я. Спочатку запишемо наближені значення для чисел *y* і *x* з точністю до $10^{-6}$, тобто наближені значення для чисел *y* і *x* беремо з шістьма знаками після коми (на один знак більше, ніж треба за умовою):

$$0{,}738251 \le \quad y \quad < 0{,}738252$$
$$0{,}453841 \le \quad x \quad < 0{,}453842$$

Оскільки y – x = y + (– x), то помноживши другу нерівність на число –1 і використавши властивості нерівностей, почленно додамо і отримаємо:

$$0{,}738251 \le \quad y \quad < 0{,}738252$$
$$\underline{-0{,}453842 \le \quad -x \quad < -0{,}453841}$$
$$0{,}738251 - 0{,}453842 \le y - x < 0{,}738252 - 0{,}453841$$
$$0{,}284409 \le y - x < 0{,}284411$$
$$y - x \approx 0{,}28441$$

В і д п о в і д ь: $y - x \approx 0{,}28441$.

**Означення.** ***Добутком*** *двох додатних дійсних чисел x і y називається таке дійсне число z, яке для будь–якого натурального k задовольняє нерівність:*

$$\boldsymbol{x_k \cdot y_k \le z \le x_k' \cdot y_k'}.$$

Можна довести, що:

1) таке число z існує і тільки єдине;
2) операція множення у множині $R_+$ комутативна;
1) операція множення у множині $R_+$ асоціативна;
2) операція множення у множині $R_+$ дистрибутивна відносно додавання;
3) число 1 – нейтральний елемент для множення, тобто $a \cdot 1 = a$.

**Приклад.** *Знайти $x \cdot y$ з точністю до $10^{-2}$, якщо*

$$x = 1{,}3721\ldots, \qquad y = 2{,}5348\ldots .$$

Р о з в ’ я з а н н я. Спочатку запишемо наближені значення для чисел $x$ і $y$ з точністю до $10^{-3}$ , тобто наближені значення для чисел $x$ і $y$ беремо з трьома знаками після коми (на один знак більше, ніж треба за умовою) і, почленно помноживши ці нерівності, отримаємо:

$$\begin{array}{c} 1{,}372 \le x \le 1{,}373 \\ 2{,}534 \le y \le 2{,}535 \\ \hline 1{,}372 \cdot 2{,}534 \le x \cdot y \le 1{,}373 \cdot 2{,}535 \\ 3{,}476648 \le x \cdot y \le 3{,}480555 \\ x \cdot y \approx 3,48 \end{array}$$

*Відповідь:* $x \cdot y \approx 3,48$.

**Означення.** ***Часткою*** *додатних дійсних чисел x і y (x > y) називають таке число z з $R_+$, що $x = y \cdot z$.*

**Приклад.** *Знайти $x : y$ з точністю до $10^{-2}$, якщо*

$$x = 3{,}47641\ldots, \qquad y = 2{,}53422\ldots.$$

Р о з в ’ я з а н н я. Спочатку запишемо наближені значення для чисел x і y з точністю до $10^{-3}$ :

$$3{,}476 \le x \le 3{,}477$$

$$2{,}534 \le y \le 2{,}535.$$

За властивістю нерівностей знайдемо значення виразу $\frac{1}{y}$:

$$\frac{1}{2{,}534} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2{,}535}$$

$$\frac{1}{2{,}535} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2{,}534}.$$

Тепер знайдемо наближені значення добутку чисел x і $\frac{1}{y}$:

$$3{,}476 \leq x \leq 3{,}477$$

$$\frac{1}{2{,}535} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2{,}534}$$

$$\frac{1}{2{,}535} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2{,}534}$$

$$\frac{3{,}476}{2{,}535} \leq x \cdot \frac{1}{y} \leq \frac{3{,}477}{2{,}534}$$

$$1{,}371 \leq x : y \leq 1{,}372$$

$$x : y \approx 1{,}37$$

В і д п о в і д ь: $x : y \approx 1{,}37$.

## 12.6. Від'ємні дійсні числа. Множина дійсних чисел

Множину додатних дійсних чисел утворюють числа, що у практиці трапляються при вимірюванні певних фізичних величин: довжини, площі, об'єму, маси тощо. Але всі величини можуть змінюватися: або збільшуватись, або зменшуватись, а їхня зміна значень не завжди може виражатися числом з множини $R_+$.

Нехай якась величина мала початкове значення $x$, а потім набула значення $y$, до того ж $x$ *і* $y$ належать множині $R_+$. Тоді, якщо $x < y$, то зміна значення величини визначається різницею $y - x > 0$, тобто числом з $R_+$. Якщо ж значення величини зменшувалось, тобто $x > y$, то $y - x < 0$, і тому цю зміну величини не можна виразити числом у множині $R_+$, а можна лише в розширенні множини додатних дійсних чисел. Це здійснюється приєднанням до множини $R_+$ числа 0 і від'ємних дійсних чисел.

**Означення.** ***Від'ємним дійсним числом*** *назвемо число вигляду* $-x$, *де* $x \in R_+$, *а їх множину позначимо* $R_-$.

За цим означенням $(\forall a \in R_+)$ існує число – *а,* тобто між елементами множин $R_+$ і $R_-$ встановлюється взаємно однозначна відповідність: числу $a \in R_+$ відповідає єдине число $-a \in R_-$ і навпаки.

**Означення.** *Об'єднання множин $R_+$ , $R_-$ , {0} називається* ***множиною дійсних чисел*** *і позначається* ***R:***

$$\boldsymbol{R = R_+ \cup R_- \cup \{0\}}.$$

Ці множини попарно не перетинаються.

Тепер, якщо значення величини змінилося з х на у і х > у, то різницю у – х < 0 можна виразити дійсним числом.

Кожному дійсному числу відповідає єдина точка координатної прямої. І навпаки, кожна точка координатної прямої відповідає єдиному дійсному числу (потрібно знайти відстань від цієї точки до початку відліку і поставити перед знайденим числом знак «+» чи «–» залежно від того, справа чи зліва від початку відліку знаходиться задана точка). Множина дійсних чисел називається ***числовою прямою***. Геометричною моделлю множини дійсних чисел є ***координатна (числова) пряма.***

**Означення.** *Числа х і* ***– х*** *називаються* ***протилежними.***

Наприклад, числа 2,45 і – 2,45 є протилежними. Вважають, що –(–х) = х. Число 0 протилежне самому собі. Точки на координатній прямій, які відповідають протилежним дійсним числам, є симетричними відносно початку координат.

У множині дійсних чисел R виконуються такі ж операції, що й у множині $R_+$, з врахуванням відповідних правил.

**Правила додавання:**

1. *При додаванні двох дійсних чисел одного і того ж знаку отримується число того ж знаку, модуль якого дорівнює сумі модулів доданків.*

Наприклад, 5 + 7 = 12; – 4 + (– 8) = – 12.

2. *При додаванні чисел різного знаку отримується число, знак якого співпадає зі знаком доданка, який має більший модуль, а модуль дорівнює різниці більшого і меншого модулів доданків.*

Наприклад, – 9 + 6 = 3;  2 + (– 7) = – 5.

3. *Сума протилежних чисел дорівнює нулю, а додавання з нулем не змінює числа.*

Наприклад, – 5 + 5 = 0;  4 + 0 = 4;  – 6 + 0 = – 6; 0 + 3 = 3;  0 + (–7) = –7.

Аналогічно до властивостей додавання у множинах Q, $R_+$, операція додавання у множині R є комутативною і асоціативною.

***Віднімання*** в множині R визначається як обернена операція до додавання, тому оскільки $b + (–b) = 0$, то $a – b = a + (–b)$.

**Правила множення:**

1) *При множенні двох дійсних чисел одного і того ж знаку отримується додатне число, модуль якого дорівнює добутку модулів множників.*

Наприклад, 8 · 2 = 16; (–8) · (–2) = 16.

2*) При множенні чисел різного знаку отримується від'ємне число, модуль якого дорівнює добутку модулів множників.*

Наприклад, –8 · 2 = –16; 8 · (–2) = –16.

3) *Добуток взаємно обернених чисел дорівнює одиниці, а у множенні числа з нулем отримуємо нуль .*

Наприклад, $\frac{1}{5} \cdot 5 = 1$;  4 · 0 = 0;  – 6 · 0 = 0;  0 · 3 = 0;  0 · (–7) = 0.

4) *У множенні числа з одиницею отримуємо те саме число.*

Наприклад, $\frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}$;  – 4 · 1 = – 4;  6 · 1 = 6;  1 · 3 = 3;  1 · (–7) = –7.

Аналогічно до властивостей множення в множинах Q, $R_+$, операція множення в множині R є комутативною, асоціативною і дистрибутивною відносно додавання.

***Ділення*** в множині R на довільне число, крім 0, визначається як обернена операція до множення $x{:}y = z \;\Leftrightarrow\; x = y \cdot z,\;\; y \neq 0$, тому оскільки

$$b \cdot \frac{1}{b} = 1, \text{ то } a : b = a \cdot \frac{1}{b}.$$

***Властивості арифметичних дій над дійсними числами:***

1) $a + b = b + a;$
2) $(a + b) + c = a + (b + c);$
3) $a + 0 = a;$
4) $a + (-a) = 0;$
5) $a \cdot b = b \cdot a;$
6) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$
7) $a \cdot 1 = a;$
8) $a \cdot \frac{1}{a} = 1, a \neq 0;$
9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

**Приклад.** Яким є знак добутку 27 додатних і 32 від'ємних чисел?

Р о з в ' я з а н н я. 32 від'ємні числа у добутку утворять додатне число, бо їхня кількість є парною. Добуток довільної кількості додатних чисел є числом додатним. Отже, добуток усіх цих чисел є числом додатним.

В і д п о в і д ь: знаком «+».

**Приклад.** Знайти добуток усіх цілих чисел від – 7 до 10.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки серед чисел від –7 до 10 є число 0, то їх добуток дорівнює 0.

В і д п о в і д ь: 0.

**Приклад.** Знайти суму усіх цілих чисел від – 8 до 10.

Р о з в ' я з а н н я. Серед чисел від – 8 до 10 є пари протилежних чисел, а їхня сума дорівнює 0. Сума чисел, які залишились без пари, дорівнює: 9 + 10 =19.

В і д п о в і д ь: 19.

Якщо ввести у множині R відношення «більше», то воно антирефлексивне, антисиметричне і транзитивне, є відношенням строгого лінійного порядку.

**Теорема 12.4.** *Між упорядкованою множиною точок числової прямої і множини дійсних чисел встановлено взаємно однозначну відповідність, в якій відповідні елементи перебувають в однакових відношеннях порядку*.

**Теорема 12.5.** *Множина R незчисленна (її елементи не можна пронумерувати). Ця множина має потужність континууму.*

Потужність контитууму більше потужності зчисленної множини. Потужність множини R є більша, ніж потіжність множини Q.

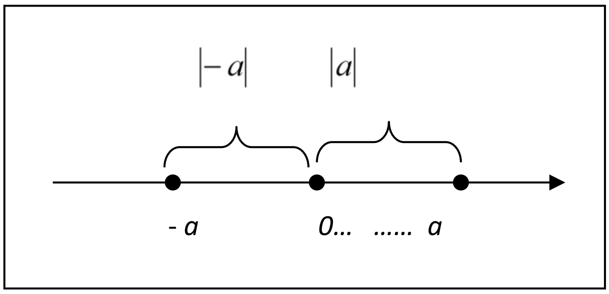
Множина R є найширшою з усіх відомих нам числових множин, але і вона є недостатньою для розв'язування окремих задач теорії і практики.

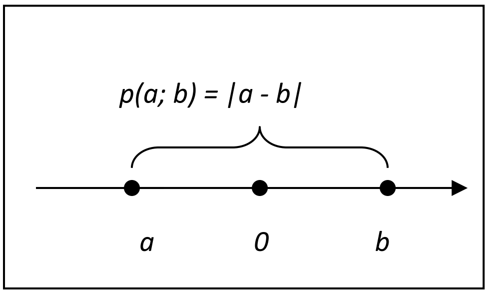
**Означення.** ***Модулем (абсолютною величиною) дійсного числа а називається це ж число, якщо а ≥ 0, або протилежне число – а, якщо а < 0.*** Модуль числа а позначається $|a|$. Отже,

$$|a| = \begin{cases} a, & якщо \quad a \geq 0, \\ -a, & якщо \quad a < 0. \end{cases}$$

Наприклад, $|4| = 4, \quad |-8| = 8, \ |0| = 0, \quad |\pi - 3| = \pi - 3, \quad |3 - \pi| = \pi - 3$.

Геометрично модуль числа $|a|$ означає відстань на координатній прямій від точки А(*a*) до точки О(*0*) – початку координат.




***Властивості модулів:***

**1.** $|a| \geq 0$. **2.** $|a| = |-a|$.

**3.** $|ab| = |a| \cdot |b|$. **4.** $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, b ≠ 0.

**5.** $|a|^2 = a^2$. **6.** $\sqrt{a^2} = |a|$.

## 12.8. Величини та їх вимірювання

***Величини*** – це особливі властивості реальних об'єктів чи явищ. Наприклад, властивість предметів мати протяжність називається довжиною. Це ж слово ми вживаємо, коли говоримо про протяжність конкретних об'єктів. Тому, про довжини конкретних об'єктів говорять, що це ***величини одного роду***. Взагалі ***однорідні величини*** виражають одну і ту ж властивість об'єктів деякої множини. ***Різнорідні величини*** виражають різні властивості об'єктів. Так, довжина і площа – різнорідні величини.

## Довжина відрізка та її вимірювання

**Означення.** ***Довжиною відрізка*** *називається додатна величина, яка визначена для кожного відрізка так, що*

1) рівні відрізки мають рівні довжини;

2) якщо відрізок складається із скінченого числа відрізків, то його довжина дорівнює сумі довжин цих відрізків.

Розглянемо **процес вимірювання д*овжин відрізків***.

- Із множини відрізків вибирають який-небудь відрізок ***e*** і приймають його за одиницю довжини. На відрізку ***a*** від одного з його кінців відкладають послідовного відрізки, рівні ***e*** , до тих пір, поки це можливо.
- Якщо відрізки, рівні ***e*** , відклались ***n*** разів і кінець останнього співпав з кінцем відрізка ***a***, то кажуть, що значення довжини відрізка ***a*** є натуральним числом і пишуть: $\boldsymbol{a = n \cdot e}$.
- Якщо ж відрізки, рівні ***e,*** відклались n разів і залишилась ще остача, менша від ***e,*** то на ній відкладають відрізки, рівні $\boldsymbol{e_1} = \frac{1}{10}\boldsymbol{e}$. Якщо вони відклались точно $n_1$ разів, то тоді $\boldsymbol{a = n, n_1 \cdot e}$ і значення довжини відрізка ***a*** є скінченим десятковим дробом.
- Якщо ж відрізок $\boldsymbol{e_1}$ відклався $n_1$ і залишалася ще остача, менша $\boldsymbol{e_1}$, то на ній відкладають відрізки, рівні $\boldsymbol{e_2} = \frac{1}{100}\boldsymbol{e}$. Якщо вони відклались точно $n_2$ разів, то тоді $\boldsymbol{a = n,\ n_1 n_2 \cdot e}$ і значення довжини відрізка ***a*** є скінченим десятковим дробом.
- Якщо представити цей процес нескінченним, то отримаємо, що значення довжини відрізка ***a*** є нескінченний десятковий дріб.

Отже, ***при вибраній одиниці вимірювання е довжина довільного відрізка виражається додатнім дійсним числом.*** Правильним є і обернене твердження: якщо дано додатне дійсне число $\boldsymbol{n, n_1 n_2} \dots$ , то, взявши його наближення з певною точністю і провівши побудови, виражені в записі цього числа, отримаємо відрізок, числове значення якого є дріб $\boldsymbol{n, n_1 n_2} \dots$ .

Таким чином, ми довели одну з основних властивостей довжин відрізків: при вибраній одиниці вимірювання довжина довільного відрізка виражається додатним дійсним чином, і для кожного додатного дійсного числа є відрізок, довжина якого виражається цим числом.

Розглянемо **властивості довжини відрізка**:

1. Якщо два відрізки рівні, то числові значення їх довжин також рівні, і, навпаки, якщо числові значення довжин відрізків рівні, то рівні і ці відрізки.

$$a = b \Leftrightarrow m_e(a) = m_e(b).$$

2. Якщо цей відрізок є сумою декількох відрізків, то числове значення його довжини дорівнює сумі числових значень довжин відрізків доданків, і, навпаки, якщо числове значення довжин відрізка дорівнює сумі числових значень декількох відрізків, то і сам відрізок дорівнює сумі цих відрізків.

$$c = a + b \Leftrightarrow m_e(c) = m_e(a) + m_e(b).$$

3. Якщо довжини відрізків a і b такі, що $b = x \cdot a$, де x – додатне дійсне число, і довжина відрізка a виміряна за допомогою одиниці вимірювання e, то, щоб знайти числове значення довжини відрізка b при одиниці вимірювання e, достатньо число x помножити на числове значення довжини a при одиниці e.

$$b = x \cdot a \Leftrightarrow m_e(b) = x \cdot m_e(a) .$$

4. При зміні одиниці довжини числове значення довжини збільшується (зменшується) у стільки разів, у скільки нова одиниця менша (більша), ніж початкова.

Важливо відмітити, що при десятковому вимірюванні двох рівних відрізків однією і тією ж одиницею довжини завжди отримуємо однакові не скінченні десяткові дроби. Справді, при десятковому вимірюванні двох рівних відрізків з певною точністю весь час матимемо в обох випадках те саме наближене значення з недостачею. Записуючи послідовно десяткові знаки цих наближених значень один за одним, дістанемо однакові нескінченні десяткові дроби.

Справедливе і протилежне твердження: якщо два відрізки не рівні, то знайдені при їхньому десятковому вимірюванні тим самим одиничним відрізком нескінченні десяткові дроби не дорівнюють одне одному, тобто вони відрізнятимуться якимись десятковими знаками.

За правилами додавання додатних дійсних чисел можна довести, що довжини відрізків мають **властивість адитивності:** якщо т. В лежить між т. А і т. С, то АС = АВ + ВС.

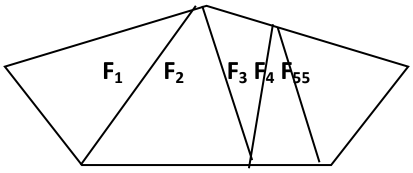
У початковому курсі математики довжини відрізків вимірюють, будують відрізки даної довжини, порівнюють довжини відрізків, виконують над ними дії. Порівнюючи довжини відрізків, виконуючи додавання, віднімання і інші дії, неявно використовують теоретичні положення, розглянуті вище.

Наприклад, виконуючи завдання «Накреслити два відрізки: один довжиною 1 дм, а другий на 1 см довший» учні неявно використовують те, що для кожного додатного числа є відрізок, довжина якого виражається цим числом (тому кожний учень може накреслити «свій» відрізок), але всі вони рівні між собою. Другий відрізок, на 1 см довший, ніж перший, можна побудувати по-різному. Наприклад, на промені ОА відкладемо ОВ = 1 дм, а потім ВА = 1см. А можна знайти суму ОА=1 дм + 1 см = (10 + 1) см = 11 см і побудувати ОА = 11см. 1 дм 1 см


Основне завдання теорії вимірювання відрізків полягає в тому, що треба довести існування і єдиність довжини для кожного відрізка. Це можна зробити на основі теорії додатних дійсних чисел (або на основі аксіом Архімеда і Кантора).

## Вимірювання площ фігур

Поняття про площу фігури має кожна людина. Це побутове уявлення про площу фігури використовується при її визначенні в геометрії, де говорять про площу геометричної фігури. Ми будемо говорити лише про площі замкнутих плоских фігур. Така фігура може бути складена з інших фігур (трикутників):

Наприклад, 

фігура F складена з фігур $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$, $F_5$. Говорять, що фігура F складена з фігур $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$, $F_5$ і при цьому мають на увазі, що фігура F є їх об'єднанням, а будь-які дві фігури з них не мають спільних точок.

**Означення.** ***Площею фігури*** *називається невід'ємна величина, визначена для кожної фігури так, що:*

1) *рівні фігури мають рівні площі;*
2) *якщо фігура складена із скінченого числа фігур, то її площа дорівнює сумі їх площ;*
3) *існує квадрат, стороною якого є одиниця довжини, з площею, що дорівнює одиниці.*

Це означення аналогічне до означення довжини відрізка.

Площу фігури F позначають ***S (F).***

Щоб виміряти площу фігури, треба мати одиницю вимірювання площі. Згідно з означенням площі фігури, за одиницю площі приймають площу квадрата з стороною ***e,*** площа його дорівнює $e^2$ .

Вимірювання площі полягає у порівнянні площі даної фігури з площею квадрата $e^2$. Результатом порівняння є додатне дійсне число ***x,*** тобто $S(F) = x\cdot e^2$. Число ***x*** називається ***числовим значенням площі*** фігури F.

Одним із простих методів вимірювання площ фігур є вимірювання її ***за допомогою палетки*** – сітки квадратів зі стороною 1 см, нанесених на прозору плівку. Наклавши палетку на фігуру, площу якої треба знайти, визначають:

- *число квадратів на палетці, які повністю лежать усередині цієї фігури;*
- *число квадратів на палетці, через які проходить контур фігури.*

Якщо, наприклад, виявилося, що число всіх цілих квадратів дорівнює 26, а число нецілих квадратів – 18, то число квадратів, через які проходить контур фігури, тобто число 18, ділять навпіл і додають цю половину до числа квадратів, що повністю лежать всередині фігури. В результаті отримують числове значення площі даної фігури: S = 26 + 18 : 2 = 26 + 9 = 35 (см$^2$). Отже, площа цієї фігури дорівнює 35 см$^2$.

Метод вимірювання площі фігури ***за допомогою палетки*** має обмежене використання, його можна використовувати лише для невеликих площ, він є громіздким і визначає площу фігури з невеликою точністю.

Тому в математиці з моменту її виникнення йшов пошук додаткових методів вимірювання площ фігур шляхом вимірювання довжин сторін, висот і інших розмірів фігур і використання потрібних формул площ різних фігур.

Із визначення площі і суті її вимірювання випливають ***правила порівняння площ і дій над ними.***

1. *Якщо фігури рівні, то рівні числові значення їх площ (при одній одиниці вимірювання площі).*

$F_1 = F_2 \Leftrightarrow S(F_1) = S(F_2)$.

2. *Якщо фігура F складена з фігур $F_1, F_2, \ldots, F_n$, то числове значення площі фігури F дорівнює сумі числових значень площ цих фігур (при одній одиниці вимірювання площі).*

$F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_к \Leftrightarrow S(F) = S(F_1) + S(F_2) + \ldots + S(F_к)$.

3. *При зміні одиниці вимірювання площі числове значення площі збільшується (зменшується) у стільки разів, у скільки нова одиниця менша (більша) від старої.*

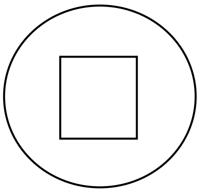
**Означення.** *Фігури $F_1$ і $F_2$ називаються **рівновеликими**, якщо їх площі є рівними .*

З цього означення випливає, що ***рівні фігури завжди рівновеликі, але рівновеликі фігури не завжди є рівними.*** Наприклад, квадрат зі стороною 4 см і прямокутник зі сторонами 2 см і 8 см є рівновеликими фігурами (їх площі дорівнюють 16 см$^2$), але вони не є рівними фігурами.

Якщо на множині геометричних фігур розглянути ***відношення «бути рівновеликими фігурами»***, то воно володіє властивостями: рефлексивне, симетричне, транзитивне, тобто воно є відношенням еквівалентності, і розбиває множину усіх геометричних фігур на класи еквівалентності: у одному класі є всі рівновеликі між собою фігури (різні за формою, але з однаковою площею).

У початкових класах відбувається початкове ознайомлення учнів з поняттям площі фігури. Початкові уявлення про площу фігури формуються на основі порівняння фігур шляхом прикладання чи накладання.

Наприклад,



оскільки квадрат поміщається всередині круга,
то його площа менша від площі круга.

Учні початкових класів ознайомлюються з вимірюванням площі фігури за допомогою палетки. Числове значення площі прямокутника учні початкових класів знаходять спочатку безпосереднім підраховуванням числа одиничних квадратів, а потім – за допомогою множення числових значень довжин сторін прямокутника: $\boldsymbol{S_{прям} = a \cdot b}$.

**Маса тіл та її вимірювання**

Поняття маси тісно пов’язане з поняттям ваги – сили, з якою тіло притягується до Землі. Тому вага тіла залежить не лише від самого тіла.

Наприклад, вага різна на різних широтах: на полюсі тіло важить на 0,5% більше, ніж на екваторі. Але при своїй мінливості вага має особливості: відношення ваг двох тіл у будь-яких умовах залишаться незмінним.

При вимірюванні ваги одного тіла шляхом порівняння її з вагою іншого тіла виявляється нова властивість тіл, яка називається масою. Маса тіла не змінюється при зміні розташування тіла.

Із математичної точки зору, ***маса*** *– це така додатна величина, яка має властивості:*

*1) маса однакова у тіл, що врівноважують один одного на терезах;*

*2) маса декількох тіл, разом узятих, дорівнює сумі їх мас.*

Для числових значень маси справедливі всі твердження, сформульовані для довжин. ***Основна одиниця маси – кілограм (кг).*** З неї утворюються інші одиниці маси – ***грам (г), тонна (т), центнер (ц).***

***Приклад.*** Перетворити у грами величини: 4 кг 30 г, 5 т, 11 т 8 ц 2 кг.

Р о з в ' я з а н н я.

4 кг 30 г = 4000 г + 30 г = (4000 + 30) г = 4030 г;

5 т = 5000 кг = 5000 · 1000 г = 5000000 г;

11т 8ц 2кг = 11000кг + 800кг + 2кг = (11000 + 800 + 2) кг = 11802кг = 11802000 г.

## Проміжки часу та їх вимірювання

Поняття часу більш складне, ніж поняття довжини, площі і маси. У математиці час розглядають як скалярну величину, тому що проміжки часу мають властивості, подібні до властивостей довжини, площі і маси.

Проміжки часу теж вимірюють. Так проміжок часу, взятий за одиницю вимірювання, може бути використаний лише один раз. Тому за одиницю часу можна приймати процес, що регулярно повторюється. Такою одиницею у Міжнародній системі одиниць названа ***секунда (с)***. Поряд із секундою використовується – ***хвилина (хв), година (год), доба, місяць, рік.***

Такі одиниці, як рік і доба, були взяті з природи, а година, хвилина, секунда – придумані людиною. **Рік** – це час обертання Землі навколо Сонця. **Доба** – це час обертання Землі навколо своєї осі. Рік складається приблизно з $365\frac{1}{4}$ доби. Але рік життя людей складається з цілого числа – 365 діб. Тому до кожного четвертого року додають 1 добу. Цей рік має 366 діб і називається високосним.

Календар з таким чергуванням років ввів у 46 р. до н.е. римський імператор Юлій Цезар з метою впорядкування існуючого в той час дуже заплутаного календаря. Тому новий календар називається юліанським. Згідно з ним Новий рік починається з 1 січня і має 12 місяців. Збереглась в ньому і така міра часу, як тиждень, придумана ще вавілонськими вченими. У давній Русі тиждень називався «семдицей», а неділя – днем недільним (немає діл). Назви наступних днів вказують на те, який він за порядком після неділі.

Місяць не дуже чітко визначена одиниця часу, він може складатись з 31, 30 і 28 днів. Але існує ця одиниця з давніх часів і пов'язана з рухом Місяця навколо Землі. Одне обертання навколо Землі Місяць робить за 29,5 доби і за рік здійснює близько 12 обертів. Ці дані і послужили основою для створення давніх календарів, а результатом їх вдосконалення є сучасний календар.

Юліанський календар прийнятий християнською церквою, поширився серед всіх європейських народів і проіснував більше 16 століть. Але поступово люди почали розуміти, що результати вимірювання часу за календарем не збігаються з результатами вимірювання за Сонцем.

Наприклад, 21 березня – день весняного рівнодення в ХУІ ст. випав на 11 березня за календарем. Ця різниця (10 днів) накопичувалась поступово, з року в рік, оскільки рік за юліанським календарем на 11 хв 14 с більший, ніж сонячний, і за 400 років набігло близько 3,5 доби. Щоб надалі не виникало розбіжностей, в новому, прийнятому в 1582 р. григоріанському календарі, (названому на честь глави католицької церкви папи Григорія XIII) було зменшено число високосних років. За юліанським календарем високосними були роки, число яких ділилося на 4. За григоріанським календарем – з їх числа виключались ті, які були «столітніми» і не ділились на 400: наприклад, 1600 рік – високосний, а 1700, 1800, 1900 – ні; 2000 – високосний, а 2100, 2200, 2300 – ні. Цей календар був прийнятий в Європейських країнах.

Григоріанський календар прийнятий не всіма державами. Наприклад, Єгипет і інші країни Сходу користуються іншим – місячним. Рік за ним має 12 місячних місяців і коротший від сонячного на 11 днів. Якщо зараз 2005 рік, то в Ірані ще 1425 рік. У давній Русі рік починався в березні, з початком польових робіт. Із введенням християнства на Русі був прийнятий юліанський календар і початок літочислення від «Створення світу», до того ж його християнська церква приурочила до 5508 р. до «Різдва Христового», а початком року вважала 1 вересня. Такий відлік років був до ХУІІІ ст. Наказом Петра І держава перейшла на інше літочислення: початком року стало 1 січня, а роки почали відлічувати від «Різдва Христового». У зв’язку з цим указом 7208 рік став 1700 роком. Відлік років від «Різдва Христового» прийнятий більшістю держав і називається нашою ерою.

Сучасний поділ діб на 24 години був уведений в Древньому Єгипті. Хвилина і секунда з’явилися у Древньому Вавилоні; а на те, що в 1 год = 60 хв;

1 хв = 60 с, вплинула 60-кова система числення, створена вавілонськими вченими.

Проміжки часу можна *порівнювати; додавати; віднімати, множити на додатне дійсне число.*

**Приклад.** Порівняти проміжки часу:

9 р. 5 міс. і 95 міс.,  20 хв 4 с і 1205 с,  3 год 4 хв і 200 хв,  $\frac{1}{6}$ год і 600 с.

Р о з в ' я з а н н я.

9 р. 5 міс. > 95 міс.,  20 хв 4 с і 1205 с,  3 год 4 хв і 200 хв,  $\frac{1}{6}$ год і 600 с,

113 міс. > 95 міс.,  1204 с < 1205 с,  184 хв < 200 хв,  10 хв = 10 с.

**Приклад.** Обчислити:

30 хв 45 с + 20 хв 58 с,  30 хв 45 с – 20 хв 58 с,  3 хв 13 с · 5 ,  30 хв 45 с : 9.

Р о з в ' я з а н н я.

$$\begin{array}{r} 30 \text{ хв } 45 \text{ с} \\ -\ 20 \text{ хв } 58 \text{ с} \\ \hline 50 \text{ хв } 103 \text{ с} \\ 51 \text{ хв } 43 \text{ с} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30 \text{ хв } 45 \text{ с} \\ -\ 20 \text{ хв } 58 \text{ с} \\ \hline 29 \text{ хв } 105 \text{ с} \\ -\ 20 \text{ хв } 58 \text{ с} \\ \hline 9 \text{ хв } 47 \text{ с} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \text{ хв } 13 \text{ с} \\ \times \qquad 5 \\ \hline 15 \text{ хв } 65 \text{ с} \\ 16 \text{ хв } 5 \text{ с} \end{array}$$

30 хв 45 с : 9 = (1800 с + 45 с) : 9 = 1845 с : 9 = 205 с = 3 хв 25 с

## Питання для самоконтролю

1. Необхідність розширення множини раціональних чисел.
2. Вимірювання довжини відрізка, неспіввимірного з одиничним відрізком.
3. Ірраціональні числа. Тотожні перетворення над ірраціональними числами та виразами.
4. Запис та порівняння додатних дійсних чисел. Наближені значення та округлення чисел.
5. Додавання і віднімання додатних дійсних чисел. Множення і ділення додатних дійсних чисел.
6. Від'ємні дійсні числа. Множина дійсних чисел. Модуль дійсного числа та його властивості.
7. Величини та їх властивості.

8. Довжина відрізка та її вимірювання.
9. Площа геометричної фігури та її вимірювання.
10. Маса тіла та її вимірювання.
11. Проміжки часу та їх вимірювання.
12. .Поняття величини та її вимірювання у початковому курсі математики.

## ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

**1.** Визначити, які з наступних нескінченних десяткових дробів є раціональними числами, а які – ірраціональними: 2,323232…, 3,52(375), 1,(35), 1,212012001…, 15,41741174117…, 0,219999…, 0,13151618… .

**2.** Між даними числами поставити один із трьох знаків: <, =, > :

1) 3,23479… і 3,23497…; 2) 5,3831… і 5,4827…;

3) 10,25… і $\frac{41}{4}$ ; 4) 0,3333… і $\frac{1}{3}$ ;

5) 12,0010… і 12,0001; 6) 4,01110… і 4,100101 … .

**3**. Винести множник з-під знака кореня:

1. **1)** $\sqrt{27};\ \sqrt{18};\ \sqrt[3]{16};\ \sqrt[4]{32};\ \sqrt[3]{81}.$
2. 2) $\sqrt{125};\ \sqrt{80};\ \sqrt[3]{54};\ \sqrt[3]{625};\ \sqrt[4]{48}.$

**4**. Внести множник під знак кореня:

$2\sqrt{2};\ 5\sqrt[3]{2};\ 3\sqrt[4]{2};\ x\sqrt{x};\ x^2\sqrt[3]{x}.$ $4\sqrt{3};\ 3\sqrt[3]{4};\ 2\sqrt[4]{7};\ y\sqrt[3]{y};\ x^2\sqrt[4]{x^2}.$

**5.** Спростити вирази:

**6.** $\sqrt{(-41)^2};\ \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$; $\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}+\sqrt{\left(5\sqrt{2}-7\right)^2}.$

**7.** Виконати дії:

1) $(\sqrt{12}+\sqrt{75})\cdot\sqrt{3}$; 2) $(\sqrt{18}+\sqrt{50})\cdot\sqrt{2}$;

3) $(2-\sqrt{3})\cdot(4+2\sqrt{3})$; 4) $(4+3\sqrt{7})\cdot(3\sqrt{7}-4)$;

5) $(2\sqrt{3}+1)\cdot(2\sqrt{3}-1)$; 6) $(6-3\sqrt{2})\cdot(2-\sqrt{2})$;

7) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2+2\sqrt{10}$; 8) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-2\sqrt{6}$;

9) $(2\sqrt{18}+3\sqrt{8})+(3\sqrt{32}-\sqrt{50})$; 10) $(2\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18})+(\sqrt{72}-\sqrt{80})$;

11) $5\sqrt{8}-2\sqrt{50}+5$; 12) $8\sqrt{2\frac{3}{4}}+\sqrt{44}-12\sqrt{\frac{11}{9}}$;

13) $(\sqrt{8}+\sqrt{12}):5(\sqrt{2}+\sqrt{3})$;

14) $4\sqrt{7\frac{1}{2}}-\frac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{3}-\sqrt{10}}$;

15) $\frac{1}{11-2\sqrt{30}}-\frac{1}{11+2\sqrt{30}}$;

16) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}$.

**8.** Позбутися ірраціональності у знаменнику:

1) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$; $\frac{\boldsymbol{a}}{5-\sqrt{7}}$; $\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$;

2) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$; $\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$; $\frac{\boldsymbol{c}}{2+\sqrt{15}}$; $\frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$.

**9.** Обчислити:

1) $\dfrac{89+8^{-\frac{2}{3}}\cdot 25^{-\frac{1}{2}}-2^{-1}}{64^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}$;

2) $97\cdot 25^{-1}+\dfrac{25^{-\frac{1}{2}}\cdot 5^{-1}\cdot 125^{\frac{1}{3}}-9^{\frac{1}{2}}\cdot 27^{-\frac{1}{3}}}{(\frac{1}{64})^{\frac{-1}{3}}\cdot 81^{-\frac{1}{2}}-216^{-\frac{1}{3}}}$;

3) $(2^{10}\cdot 3^{6}-9^{2}\cdot 16^{2}):24^{3}$;

4) $(\frac{1}{10})^{-1}:(\frac{2}{5})^{2}:(0{,}4)^{-1}\cdot 0{,}2^{2}$.

**10.** Спростити вираз:

1) $\left(\frac{\sqrt{\boldsymbol{n}}}{\sqrt{\boldsymbol{m}}-\sqrt{\boldsymbol{n}}}-\frac{\sqrt{\boldsymbol{n}}-\sqrt{\boldsymbol{m}}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\right):\frac{\sqrt{\boldsymbol{m}}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$;

2) $\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}-\sqrt{\boldsymbol{a}}}:\left(\frac{\sqrt{\boldsymbol{b}}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}-\sqrt{\boldsymbol{a}}}-\frac{\sqrt{\boldsymbol{b}}+\sqrt{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}}\right)$;

3) $\left(\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}}+1}{\sqrt{\boldsymbol{a}}-1}-\frac{4\sqrt{\boldsymbol{a}}}{\boldsymbol{a}-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}}-1}{\boldsymbol{a}+\sqrt{\boldsymbol{a}}}$;

4) $\left(\frac{\sqrt{\boldsymbol{m}}-2}{\sqrt{\boldsymbol{m}}+2}+\frac{8\sqrt{\boldsymbol{m}}}{\boldsymbol{m}-4}\right)\cdot\frac{\sqrt{\boldsymbol{m}}+2}{\boldsymbol{m}-2\sqrt{\boldsymbol{m}}}$.

**11.** Розв’язати ірраціональні рівняння:

1) $\sqrt{\boldsymbol{x}+8}=4$;

2) $\sqrt{x-5}=3$;

3) $\sqrt[3]{\boldsymbol{x}-44}=9$;

4) $\sqrt[3]{\boldsymbol{x}-2}=-9$;

5) $\sqrt{4\boldsymbol{x}^{2}+5\boldsymbol{x}-2}=2$;

6) $\sqrt{23+3\boldsymbol{x}-5\boldsymbol{x}^{2}}=3$;

7) $\sqrt{-\boldsymbol{x}-4}=\boldsymbol{x}+4$;

8) $\sqrt{-2-x}=x+2$;

9) $\sqrt{\boldsymbol{x}^{2}-16}=\boldsymbol{x}^{2}-22$;

10) $\sqrt{\boldsymbol{x}^{2}+9}=\boldsymbol{x}^{2}-11$;

11) $\sqrt{2\boldsymbol{x}-5}=\sqrt{4\boldsymbol{x}+7}$;

12) $\sqrt{18x-7}=\sqrt{11x+21}$;

13) $\sqrt{3-\boldsymbol{x}}\cdot\sqrt{1-3\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}+5$;

14) $\sqrt{2-\boldsymbol{x}}\cdot\sqrt{1-2\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}+4$;

15) $\sqrt{\boldsymbol{x}-2}+\sqrt{1-\boldsymbol{x}}=2$;

16) $\sqrt{\boldsymbol{x}-3}+\sqrt{2-\boldsymbol{x}}=5$;

17) $\sqrt{\boldsymbol{x}-2+2\sqrt{\boldsymbol{x}+6}}=4$;

18) $\sqrt{\boldsymbol{x}-1+\sqrt{\boldsymbol{x}+2}}=3$;

19) $(x^2-4)\sqrt{2x-8}=0$; 20) $(9-x^2)\sqrt{3x+18}=0$;

21) $\sqrt{1-2x}+11=\sqrt{16+x(x-8)}$; 22) $\sqrt{1-3x}+5=\sqrt{4+x(x-4)}$;

23) $\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{4x-3}$; 24) $\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1}$.

**12.** Знайти перші три десяткові знаки суми і різниці чисел x та y, якщо:

1) x = 1,7025681… ; y = 0,8001447…; 2) x = 2,14256..., y=1,02184...;

3) x = $\dfrac{4}{19}$ ; y = 0,14(23); 4) x = 4,5(63); y = $2\dfrac{7}{18}$;

5) x = $\sqrt{6}$; y = 1,24; 6) x = $\sqrt{14}$; y = 0,25.

**13.** Знайти добуток і частку чисел x та y з точністю до сотих, якщо:

1) x = 1,5(123); y = 0,25478…; 2) x = 1,256…; y = 0,458…

3) x = $5\dfrac{1}{3}$; y = $\sqrt{0{,}9}$; 4) x = 1,45; y = $\sqrt{0{,}3}$;

5) x = $\sqrt{12}$; y = $\sqrt{0{,}4}$; 6) x = 4,(15); y = $\dfrac{5}{6}$.

**14.** Обчислити результат з точністю до 0,001:

1) $4{,}723+\dfrac{3}{11}$; 2) $8{,}706-\dfrac{8}{13}$;

3) $\dfrac{8{,}11}{8{,}3-7{,}33}$; 4) $\dfrac{7{,}12}{7{,}4-4{,}82}$.

**15.** Знайти числа, протилежні числам:

– 23; 24; – 3; 0; – 1; $4\dfrac{1}{5}$; – $\sqrt[3]{5}$; – 4,564.

– 8; 3; 290; – 99; $\sqrt{34}$; – $\dfrac{23}{24}$; 0,213; –3.

**16.** Порівняти числа:

1) – 8 і – 7,9; 2) $-\dfrac{4}{7}$ і $-\dfrac{4}{11}$;

3) – 1,23 і 0,1; 4) 0,6 і – 235.

**17.** Розмістити дійсні числа у порядку зростання:

– 2,1; – 7; $-\dfrac{4}{7}$; 0; – $\sqrt{2}$; 4; $\dfrac{11}{5}$; $\sqrt{11}$; 2,(3); $\sqrt{25}$; 2,1423687...

**18.** Виконати дії:

1) 2,5 – 4,9 + (– 3,7) – (– 5,8); 2) – 2 · (– 4) + (– 3) · 5;

3) $(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}):(-2)-16\dfrac{1}{4}:(-4)$; 4) $5:(-(-\dfrac{1}{12}):(-\dfrac{1}{4})+\dfrac{1}{6}:(-2))+1\dfrac{1}{3}$;

5) 3 · (– 2) + (– 3) · (– 4) – (– 5) · 7; 6) 2,3 · (– 1,8) – 1,4 · (– 0,8) · (– 1,5);

7) $(-4{,}5 + 3{,}8) \cdot (2{,}01 - 3{,}81)$; 8) $(2{,}8 - 3{,}9) \cdot (-4{,}3 - 2{,}6)$;

9) $(-18 + 23 - 16 + 9) \cdot (-18)$; 10) $-4{,}5 \cdot 0{,}1 + (-3{,}7) \cdot (-2{,}1)$.

**19.** Знайти значення виразу:

1) $|-8| - |-5|$; 2) $-|240| : (-|80|)$;
3) $-|-10| \cdot |15|$; 4) $|-710| + |-290|$;
5) $|1{,}34 + (-4{,}71)|$; 6) $|6{,}35| + |1 - 4{,}96|$;
7) $|1{,}3 \cdot (-4{,}1)|$; 6) $-|-6{,}8| : |1 - 0{,}96|$.

**20.** Назвати значення числа x, для якого:
1) $|x| = 9$; 2) $|x| = 20$;
3) $|x| = 0$; 4) $|x| = -3$.

**21.** Позначити на координатній прямій числа, модулі яких дорівнюють:

1) 3; –8; 0. 2) – 4; 10; 0,5.

**22.** Позначити на координатній прямій усі дійсні числа x, які задовольняють наступні умови:

1) $|x| < 9$; $|x| > 2$; $|x| < 0$; $|x| > -4$; $|x| > 0$.
2) $|x| < -2$; $|x| > -9$; $|x| \geq 0$; $|x| > 1$; $|x| \leq 5$.

**23.** Спростити вираз:

1) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{7})^2}$.

**24.** Визначити, якій числовій множині належить значення виразу:

1) $(2\sqrt{7})^2 - 3\sqrt{2{,}25 \cdot 900}$; 2) $(3\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{6{,}25 \cdot 400}$;

3) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$; 4) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}}$;

5) $\sqrt{(8-\sqrt{7})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$; 6) $\sqrt{(6-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$.

**25.** Виразити у:

сантиметрах: 8 см 79 мм; 4 м 5 мм; 12 м 3 дм; 7 дм 11 мм;

хвилинах: 8 хв 12 с; 2 год 5 хв; 4 год 10 с; 308 с; 1 год 20 хв;

тоннах: 125 кг 300 г; 10 ц 50 г; 45 кг 500 г; 1 ц 20 кг; 6000 кг;

літрах: 4000 м$^3$; 15000 дм$^3$; 2 л 100 м$^3$; 200000 м$^3$; 125000 дм$^3$.

гектарах: 1 га; 10 га 4 а; 500 а; 12000 м$^2$; 40000 дм$^2$; 8 км$^2$;

метрах: 5 км 600 см; 80000 мм; 90 м 50 см; 400000 дм; 1000 см;

годинах: 2 доби 14 год; 10 діб 20 год; 420 хв; 1000 с; 40 хв 10 с.

**26.** Порівняти величини:

1) 56 хв і $\frac{7}{10}$ год; 2) 1,5 см і $\frac{3}{20}$ дм ;

3) $\frac{5}{6}$ мм і 0,102 см; 4) 11 год 45 хв і $1\frac{7}{8}$ доби;

5) 4 ц 20 кг і 89 кг 500 г; 6) 4 т 550 кг і 12 ц 60 кг;

7) 4008,56 $м^2$ і 5 а; 8) 5 га 11 а і 511 а.

**27.** Виконати дії з іменованими числами:

1) 6 т – 4 т 40 кг; 2) 12 ц : 30 кг;

3) 6 ц 72 кг : 42; 4) 16 т + 4 т : 10;

5) 12 км 80 м – 5 км 250 м; 6) 4 грн 8 к. · 3;

7) 5 год 15 хв · 4; 8) 6 м 20 мм – 4 м 5 дм;

9) 2 га : 100; 10) 7 год 50 с – 420 хв.

**28.** Розв’язати задачі і пояснити, які дії над величинами виконувались у процесі їх розв’язування:

1) На обробку трьох деталей витратили $\frac{4}{3}$ год. На першу деталь було витрачено 0,25 год, на другу $\frac{2}{3}$ год. Скільки часу витратили на обробку третьої деталі?

2) Книжка дешевша, ніж альбом, на 2,35 грн. Скільки коштують два таких альбоми, якщо книжка коштує 4,6 грн ?

3) На нафтобазі було 12680 т бензину. Першого дня відправили з бази 834 т бензину, другого – у 2 рази менше, ніж першого, а третього дня – на 229 т більше, ніж другого. Скільки бензину залишилось на базі?

4) З дерев’яного бруса, що має форму прямокутного паралелепіпеда, довжина якого 24 см, ширина у 3 рази менша від довжини, а висота 11 см, вирізали куб з ребром 6 см. Знайти об’єм частини, що залишилась.

**29.** Довжина прямокутника 35 см, а його ширина 0,3 м. Знайти площу прямокутника в квадратних дециметрах.

**30.** Скільки годин провів у школі учень, що закінчив третій клас, за умови, що у навчальному році 210 навчальних днів, щодня 4 уроки по 45 хвилин?

**31.** Скільки секунд прожила людина, що досягла 20-річного віку?

**32.** Площа прямокутника 160 $см^2$, а ширина – 10 см. Довжину цього прямокутника зменшили на 4 см. На скільки зміниться площа зменшеного прямокутника?

**33.** За 4 год токар зробив 48 деталей. За скільки годин він виготовить 84 деталі, якщо виготовлятиме щогодини на 2 деталі більше?

**34.** Маса порожньої банки 500 г. Вона вміщує 3 кг соку. Яка маса чотирьох таких банок із соком?

**35.** Пішохід і велосипедист вирушили назустріч один одному з двох міст, відстань між якими 72 км. Вони зустрілися, коли пішохід пройшов четверту частину всієї відстані. У скільки разів більшою є відстань, яку подолав велосипедист, ніж пішохід?

**36.** Восьмиметрову колоду розрізали на 4 рівні частини, а дев'ятиметрову – на 3 рівні частини. Частини якої колоди довші?

**37.** У двох баках була однакова кількість води. Коли з першого взяли третину води, а з другого – 180 л, то в обох баках залишилась однакова кількість води. Скільки води було в обох баках разом?

**38.** У сувої було 90 м тканини. Від нього першого разу відрізали тканини на 4 костюми, по 2 м 70 см на кожний, а другого разу відрізали на 3 костюми, по 2 м 85 см на кожний. Скільки тканини залишилося в сувої?

**39.** Із 100 г вовни виходить 36 г чистого волокна. Скільки метрів тканини вийде з 1 т вовни, якщо з 1 кг чистого волокна виходить 3 м тканини?

**40.** Два шофери перевезли з поля 37 т 5 ц картоплі. Перший шофер зробив 4 рейси, а другий – 5. Скільки картоплі перевіз кожний шофер, коли відомо, що перший шофер за один рейс перевозив на 1 т 5 ц картоплі більше, ніж другий?

**41.** У двох вагонах було 70800 кг цукру. Коли з першого вагона вивантажили 10 т цукру, а з другого – 8 т 300 кг, то в обох вагонах залишилося цукру порівну. Скільки цукру було в кожному вагоні спочатку?

**42.** Господарка розрахувала, що коли вона купить 5 кг картоплі, то в неї залишиться 1 грн, а коли купить 8 кг, то залишиться тільки 64 к. Скільки господарка заплатить за 8 кг картоплі?

**43.** З куска дроту завдовжки 14 дм треба зігнути такий прямокутник, щоб його площа дорівнювала 6 дм$^2$. Визначити розміри прямокутника.

**44.** Для радіофікування будівлі придбали 1 км кабелю в мотках. 12 мотків кабелю, по 65 м у кожному, витратили на внутрішню проводку, а $\frac{2}{5}$ остачі пішло на зовнішню проводку. Скільки кабелю пішло на зовнішню проводку?

**45.** Загальна маса вантажу поїзда, що складався з 24 великих і 20 малих вагонів, становить 1426 т. Знайти вантажність великих і малих вагонів, знаючи, що в один великий вагон завантажували стільки, скільки в 3 малі вагони.

**46.** На пошиття 139 костюмів одержали 12 однакових сувоїв тканини. На кожний костюм витрачали 2 м 80 см цієї тканини. Скільки метрів було в кожному сувої, якщо після пошиття костюмів залишилося 80 см тканини?

**47.** Скільки хліба видає автомат за годину, якщо кожні 3 с він видає 1 хлібину?

**48.** У школі навчається 500 учнів. Якщо припустити, що кожен зіпсує один аркуш паперу, то якої висоти вийде стос із цих аркушів (товщина 10 аркушів – 2 мм)?

**49.** Щорічно на Львівщині за парти сідає близько 20800 учнів. Якщо кожен учень зекономить один аркуш паперу, то скільки вийде зошитів з цього паперу, коли в одному зошиті 12 аркушів?

**50.** Для жителів міста встановлена добова норма витрати води 40 л. Фактично за 4 дні витрати були такими: перший день – на 10 л менше норми, другий день – на 15 л більше норми, третій – на 5 л понад норму. Чи не порушився бюджет витрачання води?

## Методичні рекомендації щодо написання контрольних робіт. Типові варіанти контрольних робіт

## Типовий варіант контрольної роботи № 8

Для виконання контрольної роботи «Аксіоматичний та теоретико-множинний підходи до поняття цілого невід'ємного числа» студент має:

**знати:** теоретичні основи аксіоматичного і теоретико-множинного методів у математиці; систему аксіом Пеано; аксіоматичні і теоретико-множинні означення арифметичних дій на множині натуральних чисел; принцип математичної індукції; закони арифметичних дій; типи простих сюжетних задач з арифметичними діями;

**уміти:** доводити твердження методом математичної індукції; давати аксіоматичне і теоретико-множинне тлумачення арифметичних дій та основних відношень у множині цілих невід'ємних чисел; використовувати закони та властивості арифметичних дій для обчислень значень виразів зручним способом; розв'язувати рівняння з однією змінною на основі залежності між компонентами та результатами дій; обґрунтовувати вибір дії над величиною у задачі.

## Аксіоматичний та теоретико-множинний підходи до поняття цілого невід'ємного числа

**Варіант – 1**

1. Чи є моделлю системи аксіом Пеано множина $\{3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \ldots\}$?
2. Довести методом математичної індукції істинність рівності для довільного натурального числа n:

$$1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

3. На основі аксіоматичної теорії знайти:

   а) $4 + 4$, б) $7 \cdot 5$.

4. Використовуючи теоретико-множинне трактування арифметичних дій на множині цілих невід'ємних чисел, показати, що:

   а) $7 - 2 = 5$, б) $8 : 2 = 4$.

5. Обчислити раціональним способом і обґрунтувати:

$3200 : (8 \cdot 25)$; $27569 + 2584 + 4431 + 416$;

$994 - 84$; $(45 + 59) \cdot 2$.

6. Розв'язати сюжетну задачу різними способами: У класі 3 ряди парт по 5 парт у кожному ряду. За кожною партою сидить по 2 учні. Скільки всього учнів у класі? Визначити, яка властивість арифметичних дій використовується при розв'язуванні задачі.

7. Розв'язати рівняння на основі залежності між компонентами та результатами дій: $411 - ((630\,000 - 105 \cdot (6\,250 : x - 26) \cdot 180) : 3\,150) = 355$.

## Типовий варіант контрольної роботи № *9*

Для виконання контрольної роботи з розділу «Системи числення» студент має:

**знати:** поняття про систему числення; правила переходу від однієї системи числення до іншої; теоретичні основи виконання дій у позиційних системах числення.

**уміти:** записувати цілі невід'ємні числа у системах числення з різними основами; характеризувати число у десятковій системі числення; порівнювати системні числа; виконувати арифметичні дії над системними числами.

## Системи числення

**Варіант – 1**

1. Назвати класи і розряди у записі числа 78910056.
2. Знайти двоцифрове число, в якому одиниць у 5 разів більше, ніж десятків. Якщо цифри цього числа переставити, то отримане число буде більше від шуканого на 36.
3. При якому значенні x правильна рівність: $53042_{(7)} = x_{(12)}$?
4. Знайти значення виразу: $5654_{(7)} - 150335_{(7)} : 23_{(7)} + 124_{(7)} \cdot 66_{(7)}$.

5. В якій системі числення правильна рівність: $306_{(x)} + 124_{(x)} = 220$?
   Одержаний результат перевірити.
6. Розв’язати рівняння: $(x_{(7)} - 35_{(7)} \cdot 46_{(7)}) + 465_{(7)} = 654_{(7)}$.
   Зробити перевірку.
7. Знайти добуток найбільшого трицифрового і найменшого двоцифрового чисел у дев’ятірковій системі числення.

## Типовий варіант контрольної роботи № 10

При виконанні контрольної роботи «Подільність на множині натуральних чисел» студент має:

**знати**: теоретичні основи властивостей відношення подільності на множині N; ознаки подільності суми, різниці, добутку на прості і складені числа; алгоритми знаходження НСД і НСК двох і більше натуральних чисел двома способами (способом розкладу на прості множники і за допомогою алгоритму Евкліда);

**уміти:** застосовувати ознаки подільності та метод математичної індукції до дослідження виразів на подільність; використовувати основну теорему арифметики для розкладу числа на добуток простих чисел; відшукувати і порівнювати різні способи знаходження НСД і НСК чисел; розв’язувати задачі з використанням властивостей дільників і кратних.

## Подільність на множині N

**Варіант-1**

1. Довести методом математичної індукції, що
   $(\forall n \in N) \quad (2n^3 - 3n^2 + n) ⋮ 6$.
2. Чи ділиться значення виразу 623580+56241-256987 на 18?
3. Які з чисел 253, 357, 401 прості?
4. Обчислити: $\sqrt{6589489}$.
5. Знайти НСД та НСК чисел 24700 і 33250 за алгоритмом Евкліда.

6. Знайти НСД та НСК чисел 246 і 846 за канонічним розкладом.
7. Знайти числа a і b, якщо НСД(a, b)=5, НСК(a, b)=175.
8. Туристи пройшли першого дня 36 км, другого – 32 км і третього – 24 км, причому щодня вони були в дорозі ціле число годин. Скільки годин вони затратили на весь шлях, якщо їх швидкість була постійною і найбільшою з можливих?

## Типовий варіант контрольної роботи №11

Для виконання контрольної роботи «Множина раціональних чисел» студент має:

**знати**: властивості раціональних чисел; теоретичні основи виконання арифметичних дій над звичайними та десятковими дробами; алгоритми переведення періодичних дробів у звичайні; поняття відсотка.

**уміти:** застосовувати основні властивості арифметичних дій у множині раціональних чисел, обґрунтовувати вибір дії задачах з відсотками; здійснювати перетворення звичайних, десяткових та періодичних дробів; розв'язувати задачі із відсотками.

## Множина раціональних чисел

**Варіант - 1**

1. Скоротити дріб $\frac{313131}{757575}$.
2. Який з дробів $\frac{9}{50}$, $\frac{3}{5}$ і $\frac{7}{9}$ найбільший?
3. Перетворити звичайні дроби $\frac{43}{55}$, $\frac{17}{32}$, $\frac{5}{13}$ у десяткові.
4. Знайти значення виразу: $\dfrac{12\frac{4}{5}\cdot 3\frac{3}{4}-4,(36)\cdot 4\frac{1}{8}}{11,(6)\cdot 2\frac{4}{7}}+0,(7)\cdot 1\frac{2}{7}$.
5. Знаменник нескоротного дробу на 2 більший від чисельника. Якщо в оберненому дробі до даного зменшити чисельник на 3 і відняти від

одержаного дробу початковий, то отримаємо дріб $\frac{1}{15}$. Знайти початковий дріб.

6. Довжина прямокутника 80см, а його ширина становить 80% довжини. Знайти відсоткове відношення периметра цього прямокутника до його площі.

## Типовий варіант контрольної роботи № 12

Для виконання контрольної роботи «Множина дійсних чисел» студент повинен:

з**нати:** теоретичні основи виконання дій у множині ірраціональних чисел; тотожних перетворень ірраціональних виразів; розв’язування ірраціональних рівнянь; знаходження наближених значень дійсних чисел та їх округлень; виконання арифметичних дій над дійсними числами; вимірювання основних величин та їх використання у початковому курсі математики;

**уміти:** застосовувати основні властивості множин ірраціональних та дійсних чисел до тотожних перетворень, розв’язування ірраціональних рівнянь та текстових задач; обґрунтовувати вибір дії над величиною у задачі; знаходити квадратний корінь з натурального або раціонального чисел; виконувати арифметичні дії над наближеними значеннями дійсних чисел; здійснювати перетворення іменованих чисел.

## Множина дійсних чисел

**Варіант – 1**

1. Знайти значення виразу:

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{3}+4\sqrt{15}\right)\cdot 2\sqrt{3}.$$

2. Спростити вираз:

$$\left(\frac{\boldsymbol{a}^{0,5}+2}{\boldsymbol{a}+2\cdot\boldsymbol{a}^{0,5}}-\frac{\boldsymbol{a}^{0,5}-2}{\boldsymbol{a}-1}\right):\frac{\boldsymbol{a}^{0,5}}{\boldsymbol{a}^{0,5}+1}$$

3. Звільнитися від ірраціональності у знаменнику дробу:

а) $\frac{8}{\sqrt{15}+\sqrt{3}}$; б) $\frac{3}{\sqrt[3]{\tilde{o}+\acute{o}}}$.

4. Використавши алгоритм добування квадратного кореня з натурального числа, обчислити $\sqrt{50176}$.

5. Знайти $\boldsymbol{a + b}$, $\boldsymbol{a \cdot b}$ з точністю до 0,01, якщо

$$a = 0,(21) \quad \text{і} \quad b = \sqrt{3}.$$

6. У двох мішках було 74,8 кг цукру. Якщо з першого мішка пересипати у другий 6,3 кг, то в обох мішках цукру стане порівну. Скільки цукру було в кожному мішку?

7. Записати правильні рівності, вставляючи пропущені числа:

| | |
|---|---|
| 7 м 2 дм = … см | 20215 м = … км … дм … м |
| 8 ц 200 г = … кг | 48035 к. = … грн … к |

## Список використаної літератури


1. Боровик В.Н. Математика / В.Н. Боровик, Л.Н. Вивальнюк, В.Н. Костарчук, Ю.В. Костарчук, З.Г. Шефтель. – К. : Вища школа, 1980. – 400 с.

2. Вивальнюк Л.Н. Математика / Л.Н. Вивальнюк. – К. : Вища школа, 1980. – 397 с.

3. Затула Н.І. Математика : навчальний посібник [для педвузів] / Н.І. Затула, А.М. Зуб, Г.І. Коберник, А.Ф. Нещадим. – К. : Кондор, 2006. – 560 с.

4. Математика : навчальний посібник [для педвузів] / 2006. – 560 с.

5. Коберник Г.І. Математика. Практикум. Ч. 1. / Г.І. Коберник, Г.М. Чирва. – Умань : ФОП Жовтий О.О., 2013. – 193 с.

6. Кухар В.М. та інші. Математика: Множини. Логіка. Цілі числа : практикум / В.М. Кухар. – К. : Вища школа, 1989. – 333 с.

7. Кухар В.М. Теоретичн основи початкового курсу математики / В.М. Кухар, Б.М. Білий. – К. : Вища школа, 1987. – 320 с.

8. Остапйовська Т.П. Методичні рекомендації з самостійної роботи. Змістовий модуль «Подільність чисел» і «Розширене поняття про число» : методичні рекомендації / Т.П. Остапйовська, І.І. Остапйовська, Ф.В. Старко. – Луцьк : Вежа-Друк, 2013. – 48 с.

9. Приймак О. Розширення поняття про число : метод. рекомендації [для студентів з математики] / О. Приймак, Л. Кочкарьова, О. Крайчук. – Рівне : РДГУ, 2001. – 40 с.

10. Сілков В.В. Математика. Курс лекцій. Ч.ІІ. Методичні вказівки до вивчення курсу математики. Для студентів спец. № 8.01.01.02 «Початкова освіта», № 8.01.01.01 «Дошкільна освіта, початкова освіта» / В.В. Сіков. – Рівне : РДГУ, 2008. – 104 с.

Навчальне видання

**В.Ю. КОВАЛЬЧУК, Л.С. БІЛЕЦЬКА,**
**Н.І. СТАСІВ, Л.П. СИЛЮГА**

# М а т е м а т и к а

## *Частина II*

## *Числові множини*

*Редакційно-видавничий відділ*
*Дрогобицького державного педагогічного університету*
*імені Івана Франка*

**Головний редактор**
*Ірина Невмержицька*
**Редактор**
*Ольга Крупа*
**Технічний редактор**
*Наталя Кізима*
**Коректор**
*Оксана Бульбах*

Здано до набору 10.07.2019 р. Підписано до друку 24.07.2019 р. Формат 60х90/16. Папір офсетний. Гарнітура Times. Наклад 100 прим. Ум. друк. арк. 10,75. Зам. 90.

Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 2140 від 1. 07. 2016 р.) 82100, Дрогобич, вул. І.Франка, 24, к.42.