**Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка**

Роман Пелещак, Олеся Даньків

ТЕОРІЯ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ

**Методичні матеріали
до самостійної роботи**

Для студентів галузі знань 0403 “Системні науки та кібернетика” спеціальності 8.04030201 “Інформатика”

**Дрогобич
2012**

УДК 621.396.6
П 36

Теорія розпізнавання образів. Методичні матеріали до самостійної роботи / Р. Пелещак, О. Даньків. – Дрогобич: Редакційно-видавничий відділ ДДПУ ім. І. Франка, 2012. – 106 с.

Методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів написані відповідно до програми навчальної дисципліни “Теорія розпізнавання образів” для підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня “Магістр” галузі знань 0403 “Системні науки та кібернетика” спеціальності 8.04030201 “Інформатика”, затвердженої вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. Тут є: програма навчальної дисципліни, методичні поради до вивчення її окремих розділів, запитання для самоконтролю, приклади розв’язування задач, зразки контрольних робіт, задачі для самостійного розв’язування.

Посібник дає змогу організувати індивідуальну самостійну роботу студента з урахуванням рівня його творчих можливостей та навчальних досягнень.

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка як методичні вказівки з організації самостійної роботи студентів (протокол № 4 від 19 квітня 2012 р.)

Відповідальний за випуск: завідувач кафедри інформатики та обчислювальної математики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, доцент, кандидат фізико-математичних наук Лазурчак Ігор Іванович.

Рецензенти:

- доцент кафедри обчислювальної математики та програмування Національного університету “Львівська політехніка”, кандидат фізико-математичних наук **Петрович Роман Йосипович**;
- доцент кафедри математики і методики викладання математики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, кандидат фізико-математичних наук **Галь Юрій Михайлович**.

З М І С Т

П Е Р Е Д М О В А

Останнім часом важко назвати галузь науки чи сферу виробничої діяльності, де б не використовувалися системи розпізнавання. Ці інтелектуальні системи стають дедалі важливішою складовою більшості автоматизованих систем керування великими підприємствами. Реалізація методів розпізнавання необхідна в автоматизованих системах штучного інтелекту, призначених для розв’язування задач діагностики, моніторингу, прогнозування, навчання. Такі методи теорії розпізнавання, як кластерний аналіз, виявлення закономірностей в експериментальних даних, прогнозування різноманітних процесів та явищ, широко використовуються у наукових дослідженнях.

Як наука теорія розпізнавання образів почала формуватися наприкінці 50-их років минулого століття. Спочатку це була змістовна постановка задачі побудови машини, яка б могла класифікувати різні об’єкти, як це робить жива істота, наділена природним інтелектом. Виникли три напрями досліджень: 1) побудова алгоритмів розпізнавання на основі фізіологічної моделі сприйняття, постановка математичних задач; 2) дослідження впливу задачі навчання розпізнаванню на апарат математичної статистики; 3) розвиток конструктивних ідей побудови алгоритмів. Виникло дві протилежні думки про задачу розпізнавання. Перша полягала в тому, що потрібно знайти такий опис об’єктів, використовуючи апріорні дані про них, щоб принцип класифікації був очевидним. Друга бачила головну проблему в пошуку правила класифікації серед заданої множини вирішальних правил. Так виникло запитання: чи єдині принципи побудови адекватного опису образів різної природи? Якщо так, то теорія розпізнавання образів – це виявлення цих принципів. Якщо ні, то теорія розпізнавання образів – це задача мінімізації середнього ризику в спеціальному класі вирішальних правил. Більшість учених дотримується другого погляду. Конструктивні методи мінімізації середнього ризику розроблені в теорії статистичних рішень і мають асимптотичний характер.

При реформуванні освіти навчальні заклади розв’язують важливі завдання для поліпшення професійної підготовки фахівців, зокрема, підвищують якість викладання навчальних дисциплін, що є базовими при формуванні конкурентно-спроможних спеціалістів. При підготовці фахівців галузі знань 0403 “Системні науки та кібернетика” спеціальності 8.04030201 “Інформатика” однією з таких дисциплін є “Теорія розпізнавання образів”.

Поглиблене вивчення “Теорії розпізнавання образів” неможливе без ґрунтовної самостійної роботи студентів над навчальним матеріалом, спрямування зусиль на розвиток навичок до самостійної роботи, виховання творчої активності та ініціативи.

Одним з шляхів реалізації таких завдань є забезпечення студентів навчально-методичною літературою з організації самостійної роботи. При написанні посібника “Теорія розпізнавання образів. Методичні матеріали до самостійної роботи” автори опиралися на ідею високої дидактичної цінності самостійної роботи при вивченні цієї навчальної дисципліни.

Методичні вказівки укладено відповідно до програми навчальної дисципліни “Теорія розпізнавання образів” для підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня “Магістр” галузі знань 0403 “Системні науки та кібернетика” спеціальності 8.04030201 “Інформатика”, затвердженої вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка та вимог положення про кредитно-модульну систему організації навчального процесу у Дрогобицькому державному педагогічному університеті імені Івана Франка.

У посібнику подано навчальну програму, вимоги до знань та вмінь, яких повинні набути студенти, методичні рекомендації до вивчення теоретичних питань. Для самоконтролю якості засвоєного навчального матеріалу підібрано тестові завдання та контрольні роботи. Також увійшли методичні поради до розв’язування задач, приклади розв’язування задач та задачі для самостійного розв’язування.

1. Програма навчальної дисципліни “Теорія розпізнавання образів”

ТЕОРІЯ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ

П Р О Г Р А М А

для підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня “Магістр”
напряму підготовки 040302 “Інформатика”
спеціальності 8.080201 “Інформатика”

Дисципліна: варіативна (за вибором студента)

Програму уклали: завідувач кафедри інформатики та обчислювальної математики, доцент, кандидат фізико-математичних наук Лазурчак І.І., старший викладач кафедри інформатики та обчислювальної математики, кандидат фізико-математичних наук Даньків О.О.

Рецензенти:

доцент кафедри фундаментальної підготовки Інституту підприємництва та перспективних технологій при Національному університеті “Львівська політехніка”, кандидат фізико-математичних наук
Віктор Волошин

доцент кафедри математики і методики викладання математики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, кандидат фізико-математичних наук
Юрій Галь

Затверджено
на засіданні кафедри інформатики та обчислювальної математики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка
(*протокол № 12 від 22.12.2010 р.*)

Затверджено
на засіданні науково-методичної ради Інституту фізики, математики та інформатики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка
(*протокол № 4 від 28.12.2010 р.*)

Затверджено
на засіданні науково-методичної ради університету Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка
(*протокол № 1 від 25.01.2011 р.*)

Затверджено
на засіданні вченої ради університету Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка
(*протокол № 1 від 26.01.2011 р.*)

Дрогобич, 2010 р.

1. Пояснювальна записка

Навчальна дисципліна “Теорія розпізнавання образів” відповідно до навчального плану підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня “Магістр” напряму підготовки 040302 “Інформатика” спеціальності 8.080201 “Інформатика” вивчається у першому семестрі. Форма контролю – залік. Програма дисципліни складена на основі освітньо-кваліфікаційної характеристики та освітньо-професійної програми чинного галузевого стандарту вищої освіти напряму підготовки 040302 “Інформатика” спеціальності 8.080201 “Інформатика”.

Мета цієї дисципліни – вивчення студентами математичних основ розпізнавання образів, опанування математичних методів розв’язування задач розпізнавання, вироблення умінь та набуття навиків розробки обчислювальних алгоритмів для розв’язування задач розпізнавання, розширення уявлень про методологію побудови систем штучного інтелекту. Значна увага приділяється питанню розпізнавання в просторі ознак, яке включає дискримінантні та байєсівські методи розпізнавання. Дається характеристика синтаксичним методам розпізнавання, а також основним методам попередньої обробки сигналів та зображень.

Завдання дисципліни “Теорія розпізнавання образів” полягають в тому, щоб:

- сформувати у студентів знання про основні принципи, режими та методи розпізнавання образів;
- ознайомити студентів з найважливішими моделями алгоритмів розпізнавання (комбінаторно-логічними, статистичними, структурними та лінгвістичними);
- виробити вміння розробки алгоритмів розпізнавання на основі представлення зображень у вигляді точок або векторів в *n*-вимірному векторному просторі, розпізнавання об’єктів за якісними характеристиками;

– ознайомитися з непараметричними методами розпізнавання, які ґрунтуються на лінійних розділяючих функціях та методикою побудови кусково-лінійних вирішальних правил;
– отримати навики статистичного оцінювання показників якості розпізнавання.

На лабораторних заняттях з цієї дисципліни студенти поглиблюють знання та набувають практичних навичок розробки та комп’ютерної реалізації алгоритмів розпізнавання образів.

Для вивчення навчальної дисципліни “Теорія розпізнавання образів” **студентам необхідні знання таких навчальних дисциплін**: “Математичний аналіз”, “Алгебра та геометрія”, “Диференціальні рівняння”, “Теорія ймовірностей та математична статистика”, “Програмування”, “Системи комп’ютерної математики”, “Архітектура обчислювальних систем”, “Наближене розв’язування інтегральних рівнянь”, “Аналіз даних”, “Чисельні методи” та “Штучний інтелект”.

Виклад навчальної дисципліни “Теорія розпізнавання образів” і контроль досягнутих успіхів студентів здійснюється із застосуванням кредитно-модульної системи. Модульна атестація охоплює теоретичні питання програми та вміння студентів розв’язувати прикладні задачі.

2. Зміст програми

1. Математичні основи розпізнавання. Основні принципи розпізнавання. Розпізнавання у просторі ознак

Основні постановки задач розпізнавання. Деякі практичні застосування систем розпізнавання. Алгебраїчна, геометрична й статистична складові.

Загальна характеристика дискримінантних методів розпізнавання.

Типи ознак, міри відстаней. Вектори та матриці ознак. Гіпотеза компактності. Типова схема розпізнавання в просторі ознак.

Розділяючі функції. Лінійні дискримінантні функції Фішера та їхні властивості.

Метод найближчого сусіда.

Лінійно розподілені множини. Критерій лінійної розподіленості.

Квадратичні дискримінантні функції.

Класи та їх властивості. Модельні описи класів.

2. Статистичні методи розпізнавання

Постановка задачі й основні режими розпізнавання. Розпізнавання як прийняття рішень. Класифікація основних методів розпізнавання.

Поняття про допустимі перетворення. Деякі підходи до створення загальної теорії розпізнавання.

Байєсівські методи розпізнавання.

Оптимальні статистичні критерії.

Статистичні критерії, що використовують процедуру неприйняття рішень.

Індивідуальні статистичні критерії.

Статистичні критерії, що ґрунтуються на навчальних вибірках.

Порядкові статистики обчислення площ та периметра за допомогою дискретизованих зображень.

Перетворення плоских образів (синхронізація, квантування, фільтрація).

3. Однорідні перетворення образів

Векторний опис простору.

Однорідні перетворення.

Поняття спостерігача та принципи створення “сцени”.

Синтез просторових об’єктів.

Фізичні основи та комп’ютерні технології перетворення образів.

Отримання образів – будова камери CCD.

4. Синтаксичні методи розпізнавання

Загальна характеристика синтаксичних методів розпізнавання.

Формальні граматики й мови. Класифікація граматик за Хомським.

Приклад опису зображень на основі формальних граматик.

Основні методи граматичного розбору.

Засоби опису складніших зображень.

5. Основні методи попередньої обробки сигналів та зображень

Суть попередньої обробки сигналів та зображень.

Отримання первинних ознак на основі дискретизаціїї.

Ланцюговий код Фрімена.

Параметризація неперервних функцій на основі лінійних ортогональних перетворень.

Інтегральне перетворення Карунена-Лоева.

Орієнтовна тематика лабораторних робіт

1. Розпізнавання об’єктів за якісними характеристиками.

2. Методи розділяючих функцій.

3. Задача класичного виявлення. Статистичні критерії прийняття рішення.

4. Представлення зображень у *n*-вимірному векторному просторі.

Знання та вміння, яких повинен набути студент після вивчення програмного матеріалу

ЗНАТИ:

***а) поняття*:**

клас; інваріанти класу; інформативні ознаки; навчальна вибірка; простір ознак; формальна граматика; формальна мова; дерево граматичного розбору; ланцюговий код Фрімена; нейронна мережа;

***б) означення*:**

датчик; матриця ризиків; дискримінантні та структурні методи розпізнавання; зважені евклідові відстані; матриця даних; розділяюча функція; лінійна розділимість та лінійна розділяюча функція; синтаксичні методи розпізнавання; контекстно-вільна граматика; регулярна граматика; плекс-граматика; рівномірна дискретизація; ортонормована система функцій; ортогональне перетворення; швидке перетворення Фур'є; інтегральне перетворення Карунена-Лоєва;

***а також*:**

- практичні застосування методів класифікації;
- ключову парадигму теорії розпізнавання, сформульовану Хантом;
- основні властивості класів;
- фактори, які визначають змінюваність реалізацій класів;
- типові схеми без навчання, з одноразовим навчанням та з періодичним перенавчанням;
- класифікацію основних методів розпізнавання;
- загальну характеристику дискримінантних методів розпізнавання;
- загальну характеристику структурних методів розпізнавання;
- суть методу допустимих перетворень;

- типи ознак;
- міри близькості між об’єктами, якщо ознаки є кількісними;
- формулу евклідової відстані між векторами;
- гіпотезу компактності;
- типову схему розпізнавання в просторі ознак;
- основні переваги й недоліки методу найближчого сусіда;
- стиснене правило найближчого сусіда та умови доцільності його застосування;
- суть байєсівських методів розпізнавання образів;
- функції, які виконують блок формування опису та блок синтаксичного аналізу;
- класифікацію формальних граматик за Хомським;
- стратегії розбору “знизу вгору” та “згори вниз”;
- зв’язок стратегії граматичного розбору з бектрекінговими алгоритмами;
- суть процесу дискретизації;
- формули перетворення Фур’є;
- переваги та недоліки інтегрального перетворення Карунена-Лоєва;
- методи стиснення даних.

<u>ВМІТИ</u>:

а) загальна компетентність:

- охарактеризувати роль, яку відіграє в задачі розпізнавання образів навчання на прикладах;
- сформулювати задачу розпізнавання як задачу віднесення об’єкта до певного класу;
- описати етап попередньої обробки при розпізнаванні;
- охарактеризувати етап навчання, який передує розпізнаванню в робочому режимі, та описати основні задачі, що розв’язуються на цьому етапі;

- записати матрицю ризиків при розпізнаванні об’єктів з довільної предметної області;
- застосовувати стратегії розбору “знизу вгору” та “згори вниз”;
- отримати ознаки сигналу на основі ортогональних перетворень;
- визначити, у якому випадку вигідніше застосовувати прямий квадратурний алгоритм, а в якому двоїстий;
- представити за допомогою ланцюгового коду Фрімена довільну фігуру;
- працювати з нейронними мережами;

б) компетентність, що відповідає предмету:

- описати процес розпізнавання з точки зору співставлення зі зразком;
- побудувати типову схему розпізнавання у робочому режимі;
- охарактеризувати задачу розпізнавання як задачу прийняття рішень;
- застосовувати дискримінантні та структурні методи в задачах розпізнавання;
- використовувати метод допустимих перетворень у розпізнаванні образів;
- застосовувати типову схему розпізнавання в просторі ознак;
- застосовувати метод припустимих перетворень;
- створювати власні приклади дихотомічних, номінальних і порядкових ознак;
- описати алгоритм перцептрона для побудови лінійної розділяючої функції;
- сформулювати метод найближчого сусіда;
- застосовувати байєсівські методи розпізнавання образів;
- наводити власний опис простих зображень;

- закодувати графік функції;
- здійснювати перетворення Фур'є до перетворення плоских образів;
- навести приклади дихотомічних, номінальних та порядкових ознак;
- навести приклад навчальної вибірки, для якої існує лінійна розділяюча функція; побудувати цю функцію за допомогою алгоритму перцептрона;
- охарактеризувати синтаксичні методи розпізнавання;
- довести, що будь-яка автоматна граматика є безконтекстною;
- охарактеризувати основні задачі, які розв'язуються на етапі попередньої обробки сигналів і зображень;
- побудувати базову квадратурну схему інтегрального перетворення Карунена-Лоєва;
- написати програму, яка виділяє ознаки неперервних функцій у вигляді набору дискретних значень, диференціального коду, ланцюгового коду Фрімена;
- будувати алгоритми розпізнавання на основі представлення зображень у вигляді точок або векторів в n-вимірному векторному просторі;
- розпізнавати об'єкти за якісними характеристиками та кількісними ознаками.

3. Критерії успішності навчання та засоби діагностики успішності навчання

Оцінювання досягнутих успіхів за семестр проводиться у системі оцінювання університету відповідно до візитки навчальної дисципліни, після чого переводиться у національну шкалу оцінювання та шкалу ECTS відповідно до таблиці:

<table>
<tr><th rowspan="2">Шкала оцінювання університету (в балах)</th><th rowspan="2">Національна шкала оцінювання</th><th rowspan="2">Оцінка із заліку</th><th colspan="3">Шкала ECTS</th></tr>
<tr><th>Сумарна модульна оцінка (в балах)</th><th>Оцінка за шкалою ECTS</th><th>Визначення</th></tr>
<tr><td>90 – 100</td><td>“відмін-но”</td><td rowspan="5">“зараховано”</td><td>90 – 100</td><td>A</td><td>ВІДМІННО – відмінне виконання лише з незначною кількістю помилок.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">75 – 89</td><td rowspan="2">“добре”</td><td>82 – 89</td><td>B</td><td>ДУЖЕ ДОБРЕ – вище середнього рівня з кількома помилками.</td></tr>
<tr><td>75 – 81</td><td>C</td><td>ДОБРЕ – в загальному правильна робота з певною кількістю грубих помилок.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">60 – 74</td><td rowspan="2">“задо-вільно”</td><td>67 – 74</td><td>D</td><td>ЗАДОВІЛЬНО – непогано, але зі значною кількістю недоліків.</td></tr>
<tr><td>60 – 66</td><td>E</td><td>ДОСТАТНЬО – виконання задовольняє мінімальні критерії.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">0 – 59</td><td rowspan="2">“незадо-вільно”</td><td rowspan="2">“незарахо-вано”</td><td>35 – 59</td><td>FX</td><td>НЕЗАДОВІЛЬНО – потрібно працювати, перед тим як отримати залік.</td></tr>
<tr><td>0 – 34</td><td>F</td><td>НЕЗАДОВІЛЬНО – необхідна серйозна подальша робота.</td></tr>
</table>

4. Список рекомендованих підручників та методичних матеріалів

Основна література:

1. Вапник В. Н., Червоненкис А. Я. Теория распознавания образов. – М. : Наука, 1974. – 418 с.
2. Васильев В. И. Распознающие системы. – К. : Наукова думка, 1983. – 423 с.
3. Верхаген К., Дейн Р. и др. Распознавание образов: состояние и перспективы. – М. : Радио и связь, 1985. – 104 с.

4. Глібовець М. М., Олецький О. В. Штучний інтелект. – К. : Видавничий дім “КМ Академія”, 2002. – 366 с.
5. Горелик А. Л., Скрипник В. А. Методы распознавания. – М. : Высшая школа, 1989. – 282 с.
6. Дубровін В. І., Субботін С. О. Методи оптимізації та їх застосування в задачах навчання нейронних мереж : навчальний посібник. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2003. – 136 с.
7. Люгер Д. Искусственный интеллект: методы решений сложных проблем. – М. : Вильямс, 2003. – 864 с.
8. Рідкокаша А. А., Голдер К. К. Основи систем штучного інтелекту : навчальний посібник. – Черкаси : ВІДЛУННЯ-ПЛЮС, 2002. – 240 с.
9. Спірін О. М. Початки штучного інтелекту. – Житомир : Видавництво ЖДУ, 2004. – 172 с.
10. Ту Дж., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов. – М. : Мир, 1978. – 190 с.
11. Фу К. Структурные методы в распознавании образов. – М. : Мир, 1977. – 320 с.

Додаткова література:

1. Васильев В. И., Шевченко А. И. Искусственный интеллект: Проблема обучения опознаванию образов. – Донецк, 1997. – 223 с.
2. Вороновский Г. К., Махотило К. В., Петрашев С. Н., Сергеев С. А. Генетические алгоритмы, искусственные нейронные сети и проблемы виртуальной реальности. – Х. : Основа, 1997. – 112 с.
3. Круглов В. В., Борисов В. В. Искуственные нейронные сети. Теория и практика. – М. : Горячая линия – Телеком, 2001. – 382 с.
4. Рассел С., Норвиг П. Искусственный интеллект: современный поход / пер. с англ. – М. : Вильямс, 2006. – 1408 с.
5. Фор А. Восприятие и распознавание образов. – М. : Мир, 1989. – 272 с.
6. Хант Э. Искусственный интеллект. – М. : Мир, 1977. – 476 с.

2. Методичні рекомендації до тем для самостійного опрацювання. Приклади розв'язування задач

Тема № 1. Задача класичного виявлення. Статистичні критерії прийняття рішення

Класифікація – це віднесення досліджуваного об'єкта (заданого у вигляді сукупності спостережень) до одного із взаємовиключаючих класів. Це означає, що існує однозначне відображення сукупності спостережень, яке є скінченною числовою множиною $\{X\}$, на множину класів $\{A\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $k = 1, \ldots, K$, $\{A\} \leftarrow \{X\}$.

Залежно від повноти даних про статистичні характеристики класів розрізняють класифікацію *розрізнення* (при повній апріорній інформації про класи сигналів) або *розпізнавання* (при неповній апріорній інформації). Задача розпізнавання об'єктів у випадку, коли класів $K = 2$, формулюється як *задача класичного виявлення*.

У класичній постановці задачі розпізнавання універсальна множина розбивається на частини – *образи*. Відображення об'єкта на органи сприйняття системи розпізнавання називають *зображенням*, а множини таких зображень, об'єднані за певними спільними властивостями, і є *образами*.

Процес, у результаті якого система поступово набуває здатності відповідати потрібними реакціями на певні сукупності зовнішніх впливів, називається *навчанням*. Навчання є частиною процесу кваліфікації і має за кінцеву мету формування еталонних описів класів, форма яких визначається способом їхнього використання у вирішальних правилах.

Методика зарахування елемента до певного образу називається **вирішальним правилом**. Для побудови вирішальних правил потрібна навчальна вибірка. **Навчальна вибірка** – це множина об'єктів (заданих значеннями ознак), приналежність яких до певного класу достовірно відома “вчителю” і повідомляється ним системі, навчання якої здійснюється.

Якість вирішальних правил оцінюється за допомогою **контрольної вибірки**, у яку входять об’єкти, задані значеннями ознак, приналежність яких до певного образу відома тільки “вчителю”. Представивши об’єкти контрольної вибірки системі для розпізнавання, “вчитель” може оцінити якість (достовірність) розпізнавання.

До навчальної та контрольної вибірок ставляться певні вимоги. Наприклад, важливо, щоб об’єкти контрольної вибірки не входили в навчальну вибірку. Крім цього, навчальна та контрольна вибірки повинні достатньо повно представляти **генеральну сукупність** (гіпотетичну множину всіх можливих об’єктів кожного образу).

Основні етапи статистичного розпізнавання – це формування простору ознак, отримання еталонних описів класів (якщо апріорно ці дані відсутні) та побудова правила прийняття рішення про досліджуваний клас об’єктів.

Якщо в результаті попереднього аналізу за спостережуваною сукупністю вибіркових значень можливо хоча б наближено встановити вигляд закону їхнього розподілу, то апріорна невизначеність стосується тільки параметрів цього закону; метою навчання у такому випадку буде отримання оцінок параметрів розподілу. Методи розпізнавання, які застосовують у цьому випадку, називаються *параметричними*.

У найбільш загальному випадку відсутні апріорні дані не тільки про параметри, але й про сам вигляд закону розподілу спостережуваної сукупності вибіркових значень. Така апріорна невизначеність називається *непараметричною*, а методи розпізнавання, які застосовують в цих умовах, – *непараметричними*. Метою навчання у такому випадку є отримання оцінок умовних густин ймовірностей $\widehat{f}_n(\vec{x} \mid a_j)$.

При непараметричному оцінюванні густини ймовірності використовують, в основному, методи: гістограмний, Парзена, розкладу за базисними функціями, полігонів Смірнова, локального оцінювання за $\boldsymbol{k}$ найближчими сусідами, а також ряд спеціальних методів нелінійного оцінювання.

Формування простору ознак

Для розпізнавання об'єкти представляють у вигляді сукупності (вибірки) спостережень, яка переважно записується у вигляді матриці:

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pn} \end{bmatrix}.$$

Кожен стовпець $\vec{x}_i=\left(x_{1i}, \dots, x_{pi}\right)^T,\ i=1, 2, \dots, n$ матриці $\boldsymbol{X}$ – це p-мірний вектор спостережуваних значень ознак $\boldsymbol{X_1, X_2, \dots, X_n}$, які є безрозмірними змінними.

Сукупність ознак повинна найбільшою мірою відображати ті властивості об'єктів, які важливі для класифікації. При цьому від розмірності p простору ознак залежить обчислювальна складність процедур навчання і прийняття рішень, достовірність класифікації, затрати на вимірювання характеристик об'єктів.

Початковий набір ознак формується серед доступних для вимірювання характеристик об'єкта $\boldsymbol{Y_1, Y_2, \dots, Y_g}$, які відображають найсуттєвіші для класифікації властивості. На наступному етапі формується новий набір $\boldsymbol{X_1, X_2, \dots, X_p}$; $\boldsymbol{p < g}$. Традиційні способи формування нових ознак в умовах повного апріорного знання ґрунтуються на максимізації деякої функції $\boldsymbol{J(Y_1, Y_2, \dots, Y_g)}$, яку називають критерієм і розуміють як деяку відстань між класами у просторі ознак з координатами $\boldsymbol{Y_1, Y_2, \dots, Y_g}$.

У деяких випадках критерій $\boldsymbol{J(Y_1, Y_2, \dots, Y_g)}$ виражає діаметр або об'єм області, яку займає клас у просторі ознак, і нові ознаки формуються шляхом мінімізації критерію.

Прийняття рішень

У теорії статистичних рішень всі види вирішальних правил для $K \geq 2$ класів базуються на формуванні **відношення правдоподібності** L та його порівнянні з певним порогом c, значення якого визначається вибраним критерієм якості:

$$L = \frac{f_n(x_1, ..., x_n \mid a_2)}{f_n(x_1, ..., x_n \mid a_1)} \geq c, \tag{1}$$

де $f_n(x_1, ..., x_n \mid a_j)$ – умовна n-мірна густина ймовірності вибіркових значень $x_1, \ldots, x_n$ при умові їхньої приналежності до класу a_j. При статистичному розпізнаванні ці густини невідомі; в (1) підставляють їхні оцінки, отримані в процесі навчання, $\hat{f}_n(x_1, ..., x_n \mid a_j)$.

Отже, у вирішальному правилі з порогом c порівнюється оцінка відношення правдоподібності $\hat{L}$. Вирішальне правило при використанні байєсівського критерію при $K = 2$ має вигляд:

$$L = \frac{f(x_1, ..., x_n \mid a_2)}{f(x_1, ..., x_n \mid a_1)} \underset{<}{\geq} \frac{\Pi_{12} - \Pi_{11}}{\Pi_{21} - \Pi_{22}} \frac{P(a_1)}{P(a_2)}, \tag{2}$$

де $\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix}$ – матриця втрат, кожний елемент якої Π_{kl} кількісно виражає втрати від прийнятого рішення на користь класу a_k, коли в дійсності вибірка належить класу a_l; $P(a_j)$ – апріорні ймовірності класів.

Критерій (2) мінімізує середній ризик:

$$R = \sum_{k=1}^{K} P(a_k) \sum_{l=1}^{K} \Pi_{kl} P_{kl},$$

де P_{kl} – ймовірність прийняття рішення про приналежність вибірки до класу a_k, коли в дійсності вона належить до класу a_l.

Ймовірності помилкових рішень для $K \geq 2$ класів визначаються так. Нехай α_k – ймовірність віднесення вибірки з

$\boldsymbol{n}$ контрольних спостережень до довільного класу з класів $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_K}$, відмінного від класу $\boldsymbol{a_k}$, коли насправді вибірка належить саме до цього класу, а $\boldsymbol{\beta_k}$ – ймовірність віднесення контрольної вибірки до класу $\boldsymbol{a_k}$, коли вона йому не належить.

Помилка першого роду – це віднесення вибірки не до того класу, до якого вона насправді належить (відкинута правильна гіпотеза). **Помилка другого роду** – це віднесення вибірки до певного визначеного класу, до якого вона насправді не належить (прийнята неправильна гіпотеза). Для двох класів $(\boldsymbol{K = 2})$ виконуються очевидні рівності $\boldsymbol{\alpha_1 = \beta_2}$ та $\boldsymbol{\alpha_2 = \beta_1}$, і ймовірності $\boldsymbol{\alpha_1}$ та $\boldsymbol{\beta_1}$ збігаються з ймовірностями помилок першого та другого роду (рис. 1).

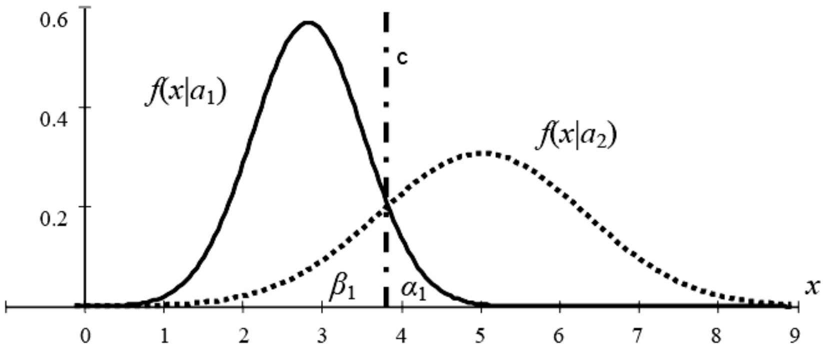


Рис. 1. Густини ймовірностей спостереження класів $\boldsymbol{a_1}$ і $\boldsymbol{a_2}$ та поріг прийняття рішення $\boldsymbol{c}$

Коли матриця втрат невідома або її важко задати чисельно, використовується критерій максимуму апостеріорної ймовірності, згідно якого спостереження $\boldsymbol{x_n}$ належить класу $\boldsymbol{a_j}$, апостеріорна ймовірність якого

$$P(a_j \mid x_n) = \frac{P(a_j)\, f(x_n \mid a_j)}{\sum_{k=1}^{K} P(a_k)\, f(x_n \mid a_k)}$$

перевищує апостеріорні ймовірності інших класів:

$$a = \begin{cases} a_2, & \text{якщо } L(x_n) \geq P(a_1)/P(a_2); \\ a_1, & \text{якщо } L(x_n) < P(a_1)/P(a_2). \end{cases} \tag{3}$$

При використанні критеріїв (2), (3) у вирішальне правило вводяться апріорні дані, але значення апріорних ймовірностей класів і функції втрат є в статистичному розпізнаванні швидше винятком, ніж правилом. Окрім цього, середній ризик малопридатний для оцінки якості класифікації, коли насамперед важливо знати її достовірність. При відсутності апріорної інформації про ймовірності станів і втрати використовуються критерії Неймана-Пірсона, максимальної правдоподібності та ін.

Для $K = 2$ вирішальне правило за критерієм Неймана-Пірсона має вигляд:

$$a = \begin{cases} a_2, & \text{якщо } L(x_n) \geq c, \\ a_1, & \text{якщо } L(x_n) < c. \end{cases} \tag{4}$$

При цьому поріг c визначається так, щоб ймовірність помилкового рішення P_{12} була не більшою заданого значення α:

$$P_{12} = \int_{c}^{\infty} f(L|a_1)dL \leq \alpha \,.$$

Використання критерію доцільне, якщо одну з ймовірностей помилок можна виділити як основну й прирівняти її до певного необхідного значення. Однак критерій не є симетричним відносно ймовірностей помилок P_{12} і P_{21}, а при класифікації важливо забезпечити мінімальні ймовірності помилкових рішень.

Критерій максимальної правдоподібності

$$\boldsymbol{a} = \begin{cases} \boldsymbol{a_2}, & \textbf{якщо } \boldsymbol{L(x_n) \geq 1} \\ \boldsymbol{a_1}, & \textbf{якщо } \boldsymbol{L(x_n) < 1} \end{cases} \tag{5}$$

не потребує знання апріорних ймовірностей класів і функції втрат, дає змогу оцінювати достовірність розв'язків, узагальнюється на випадок багатьох класів, простий в обчисленнях. Тому критерій (5) широко застосовується у багатьох задачах розпізнавання образів.

Приклади розв'язування задач з використанням середовища Mathematica

Вихідні дані:

m_1	σ_1	m_2	σ_2	p_1	p_2
5	1	3	0,6	1/3	2/3

1. Для заданих значень параметрів нормальних законів розподілу (m_1, σ_1) та (m_2, σ_2), які характеризують два класи об'єктів спостереження a_1 і a_2, визначити умовні за класом густини ймовірності результатів спостережень $f(x|a_1) = f(x, m_1, \sigma_1)$ та $f(x|a_2) = f(x, m_2, \sigma_2)$.
2. Побудувати вирішальне правило за критерієм максимальної правдоподібності (5).
3. Розрахувати теоретичні величини ймовірностей помилок розпізнавання першого й другого роду за критерієм (5).
4. Для заданих значень апріорних ймовірностей p_1 і p_2 появи класів a_1 і a_2 визначити умовні густини повної ймовірності результатів спостережень та апостеріорні ймовірності класів a_1 і a_2.
5. Побудувати вирішальне правило за критерієм максимальної апостеріорної ймовірності (3).
6. Розрахувати теоретичні величини ймовірностей помилок розпізнавання першого й другого роду за критерієм (3).
7. Порівняти ефективності вирішальних правил, побудованих за критерієм максимальної правдоподібності і максимальної апостеріорної ймовірності.

Розглянемо **задачі 1 – 3**. Для побудови графіків умовних (за класами $\boldsymbol{a}_1$ і $\boldsymbol{a}_2$) густин ймовірності ознак $\boldsymbol{x}$ визначимо функцію користувача трьох аргументів у середовищі Mathematica:

```
m1 = 5;  σ1 = 1;   m2 = 3;  σ2 = 0.6;
```

$$f[z\_, m\_, \sigma\_] = \frac{1}{\sqrt{2 * Pi} * \sigma} * Exp\left[\frac{-(z-m)^2}{2 * \sigma^2}\right];$$

Верхня і нижня границі значень параметра $\boldsymbol{x}$ визначаються за правилом "трьох сигм", відповідно до якого нормальна випадкова величина належить інтервалу значень $\boldsymbol{m} \pm 3\boldsymbol{\sigma}$ з ймовірністю, більшою за **0,997**.

Вважатимемо, що випадкові значення параметра $\boldsymbol{x}$ лежать у діапазоні **[x1min, x1max]**, якщо спостерігається клас $\boldsymbol{a}_1$, і в діапазоні **[x2min, x2max]**, якщо спостерігається клас $\boldsymbol{a}_2$:

```
x1min = m1 - 3 * σ1;
x1max = m1 + 3 * σ1;
x2min = m2 - 3 * σ2;
x2max = m2 + 3 * σ2;
```

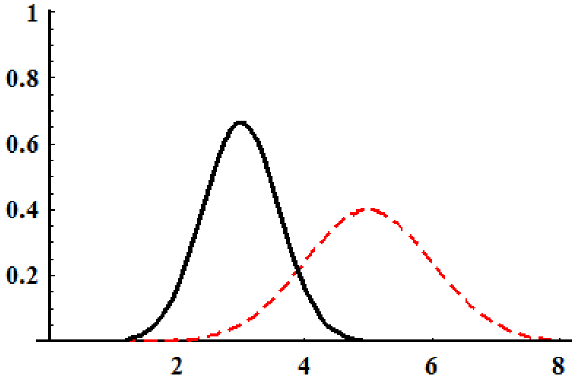
Нижня і верхня границі значень параметра $\boldsymbol{x}$ визначаються так:

```
xmin = Min[x1min, x2min];
xmax = Max[x1max, x2max];
```

Побудуємо графік умовних густин ймовірності:

```
f1 = Plot[f[x, m1, σ1], {x, xmin, xmax},
   PlotStyle → {Hue[1], Dashing[{0.02}], Thickness[0.008]}];
f2 = Plot[f[x, m2, σ2], {x, xmin, xmax},
   PlotStyle → Thickness[0.01]];
Show[f1, f2, AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → {0, 1},
 AxesStyle → Thickness[0.008], TextStyle → {FontFamily → Times,
   FontWeight → "Bold", FontSize → 12}]
```

Отримаємо наступний рисунок, на якому штрихова лінія відповідає умовній густині ймовірності $f(x|a_1) = f(x, m_1, \sigma_1)$, а суцільна лінія – умовній густині ймовірності $f(x|a_2) = f(x, m_2, \sigma_2)$:



Для визначення порогів прийняття рішення за критерієм максимальної правдоподібності (5) потрібно знайти значення x, при яких рівні густини ймовірностей різних класів, тобто розв'язати рівняння:

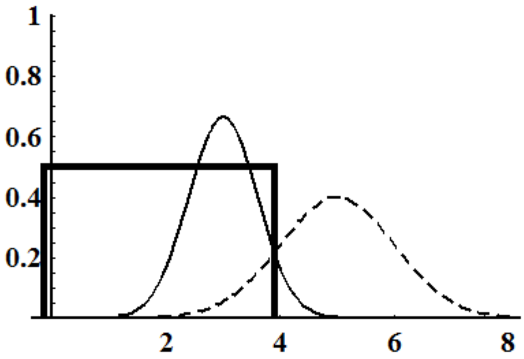
```
xg = x /. Solve[Log[f[x, m1, σ1]] == Log[f[x, m2, σ2]], x];
Print["xg1=", xg[[1]]]
Print["xg2=", xg[[2]]]
```

Одержимо:

```
xg1=-0.14745
xg2=3.89745
```

Побудуємо отримані границі розділу **xg1**, **xg2** між класами a_1 і a_2:

```
f1 = Plot[f[x, m1, σ1], {x, xmin, xmax},
   PlotStyle → {Hue[1], Dashing[{0.02}], Thickness[0.006]}];
f2 = Plot[f[x, m2, σ2], {x, xmin, xmax},
   PlotStyle → Thickness[0.006]];
a1 = Graphics[{Hue[0.3], Thickness[0.015],
    Line[{{xg[[1]], 0}, {xg[[1]], 0.5}}]}];
a2 = Graphics[{Hue[0.3], Thickness[0.015],
    Line[{{xg[[2]], 0}, {xg[[2]], 0.5}}]}];
a3 = Graphics[{Hue[0.3], Thickness[0.015],
    Line[{{xg[[1]], 0.5}, {xg[[2]], 0.5}}]}];
Show[f1, f2, a1, a2, a3, AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → {0, 1},
 AxesStyle → Thickness[0.008], TextStyle → {FontFamily → Times,
   FontWeight → "Bold", FontSize → 14}]
```



Якщо хоча б один з порогів лежить за межами інтервалу **[xmin, xmax]**, то потрібно перевизначити нижню і верхню границі значень параметра $\boldsymbol{x}$:

```
If[xmin > xg[[1]], xmin = xg[[1]], xmin = xmin];
If[xmax < xg[[2]], xmax = xg[[2]], xmax = xmax];
```

Отже, якщо ознака $\boldsymbol{x}$ буде належати інтервалу **[xg1, xg2]**, то клас буде розпізнаний як клас типу $\boldsymbol{a_2}$. Якщо ж ознака $\boldsymbol{x}$ потрапить в інтервал **[xg2, xmax]**, то клас буде розпізнаний як клас типу $\boldsymbol{a_1}$.

Для оцінки ефективності вирішального правила (5) розрахуємо теоретичні величини ймовірностей помилок розпізнавання.

Ймовірність віднести спостережувану ознаку $\boldsymbol{x}$ до класу $\boldsymbol{a}_1$, коли $\boldsymbol{x}$ в дійсності належить до класу $\boldsymbol{a}_2$:

```
P21 = ∫_{xmin}^{xg[[1]]} f[z, m2, σ2] dz + ∫_{xg[[2]]}^{xmax} f[z, m2, σ2] dz
```

Ймовірність прийняття рішення на користь класу $\boldsymbol{a}_2$, коли насправді спостерігається клас $\boldsymbol{a}_1$:

```
P12 = ∫_{xg[[1]]}^{xg[[2]]} f[z, m1, σ1] dz
```

Отже, ймовірність допустити помилку першого та другого роду дорівнює, відповідно, **P21 = 0,067** і **P12 = 0,135**.

Ймовірність правильного розпізнавання визначається так:

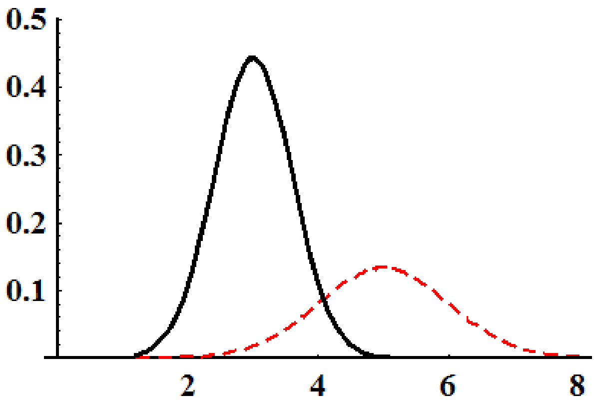
```
P = 1 - 0.5 * (P21 + P12)
```

і дорівнює 0.899 .

Розглянемо **задачі 4 – 6**. Для побудови вирішального правила за критерієм максимальної апостеріорної ймовірності (3) задамо значення апріорних ймовірностей $\boldsymbol{p}_1$ і $\boldsymbol{p}_2$ ($\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \mathbf{1}$).

Побудуємо густини ймовірності з урахуванням значень апріорної ймовірності на інтервалі **[xmin, xmax]**:

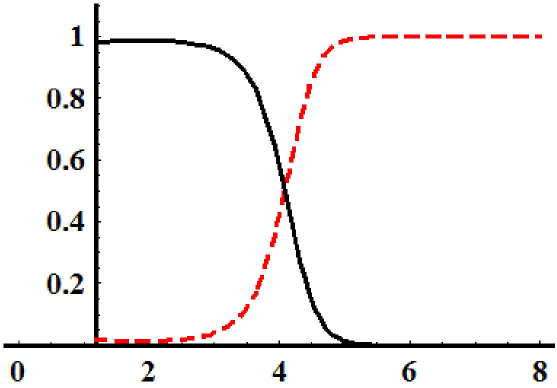
```
p1 = 1 / 3;   p2 = 2 / 3;
F1 = p1 * f[x, m1, σ1];
F2 = p2 * f[x, m2, σ2];
F11 = Plot[F1, {x, xmin, xmax},
   PlotStyle → {Hue[1], Dashing[{0.02}], Thickness[0.008]}];
F22 = Plot[F2, {x, xmin, xmax}, PlotStyle → Thickness[0.009]];
Show[F11, F22, AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → {0, 0.5},
  AxesStyle → Thickness[0.008], TextStyle → {FontFamily → Times,
   FontWeight → "Bold", FontSize → 14}]
```



На рисунку штрихова лінія відповідає умовній густині ймовірності за класом $\boldsymbol{a}_1$ з урахуванням значень апріорної ймовірності $p_1 f(x|a_1)$, а суцільна лінія – умовній густині ймовірності за класом $\boldsymbol{a}_2$ з урахуванням значень апріорної ймовірності $p_2 f(x|a_2)$.

Побудуємо графіки апостеріорних ймовірностей класів $\boldsymbol{a}_1$ і $\boldsymbol{a}_2$:

```
Q1 = Plot[F1/(F1 + F2), {x, xmin, xmax},
   PlotStyle → {Hue[1], Dashing[{0.02}], Thickness[0.008]}];
Q2 = Plot[F2/(F1 + F2), {x, xmin, xmax}, PlotStyle → Thickness[0.009]];
Show[Q1, Q2, AxesOrigin → {xmin, 0}, PlotRange → {0, 1.1},
  AxesStyle → Thickness[0.008], TextStyle → {FontFamily → Times,
   FontWeight → "Bold", FontSize → 14}]
```



Для визначення порогів прийняття рішення про клас об'єкта за критерієм максимальної апостеріорної ймовірності (3) потрібно знайти значення *x*, при яких рівні густини ймовірностей різних класів у цьому випадку, тобто розв'язати рівняння:

```
xg = x /. Solve[Log[p1 * f[x, m1, σ1]] == Log[p2 * f[x, m2, σ2]], x];
Print["xg1=", xg[[1]]]
Print["xg2=", xg[[2]]]
```

Одержимо:

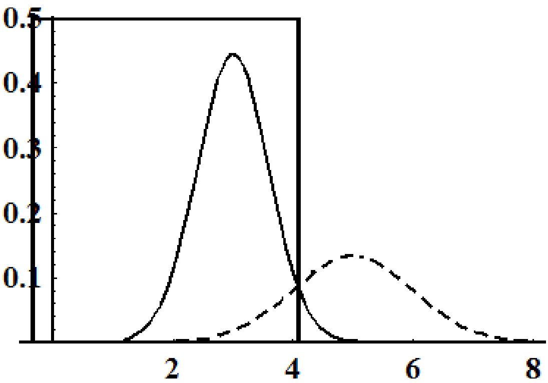
```
xg1=-0.331829
xg2=4.08183
```

Якщо хоча б один з порогів лежить за межами інтервалу **[xmin, xmax]**, то потрібно перевизначити нижню і верхню границі значень параметра *x*:

```
If[xmin > xg[[1]], xmin = xg[[1]], xmin = xmin];
If[xmax < xg[[2]], xmax = xg[[2]], xmax = xmax];
```

Побудуємо отримані границі розділу між класами **xg1**, **xg2**:

```
F11 = Plot[F1, {x, xmin, xmax},
   PlotStyle → {Hue[1], Dashing[{0.02}], Thickness[0.006]}];
F22 = Plot[F2, {x, xmin, xmax}, PlotStyle → Thickness[0.007]];
b1 = Graphics[{Hue[0.3], Thickness[0.015],
    Line[{{xg[[1]], 0}, {xg[[1]], 0.5}}]}];
b2 = Graphics[{Hue[0.3], Thickness[0.015],
    Line[{{xg[[2]], 0}, {xg[[2]], 0.5}}]}];
b3 = Graphics[{Hue[0.3], Thickness[0.015],
    Line[{{xg[[1]], 0.5}, {xg[[2]], 0.5}}]}];
Show[F11, F22, b1, b2, b3, AxesOrigin → {0, 0},
 PlotRange → {0, 0.5},
 AxesStyle → Thickness[0.008],
 TextStyle → {FontFamily → Times,
   FontWeight → "Bold", FontSize → 14}]
```



Отже, якщо ознака x буде належати інтервалу **[xg1, xg2]**, то клас буде розпізнаний як клас типу a_2. Якщо ж ознака x потрапить в інтервал **[xg2, xmax]**, то клас буде розпізнаний як клас типу a_1.

Для оцінки ефективності вирішального правила (3) розрахуємо теоретичні величини ймовірностей помилок розпізнавання.

Ймовірність віднести спостережувану ознаку до класу $\boldsymbol{a}_1$, коли вона в дійсності належить до класу $\boldsymbol{a}_2$:

$$\mathbf{P21} = \int_{\mathrm{xmin}}^{\mathrm{xg[[1]]}} \mathbf{f[z,\ m2,\ \sigma2]}\, \mathbf{dz} + \int_{\mathrm{xg[[2]]}}^{\mathrm{xmax}} \mathbf{f[z,\ m2,\ \sigma2]}\, \mathbf{dz}$$

Ймовірність прийняття рішення на користь класу $\boldsymbol{a}_2$, коли насправді спостерігається клас $\boldsymbol{a}_1$:

$$\mathbf{P12} = \int_{\mathrm{xg[[1]]}}^{\mathrm{xg[[2]]}} \mathbf{f[z,\ m1,\ \sigma1]}\, \mathbf{dz}$$

Отже, ймовірність допустити помилку першого та другого роду складає, відповідно, **P21** = **0.036** та **P12** = **0.179**.

Ймовірність правильного розпізнавання так:

$$\mathbf{P = 1 - (p2 * P21 + p1 * P12)}$$

і дорівнює: **0.916** .

Розглянемо **задачу 7**. На основі отриманих теоретичних оцінок ймовірностей правильного розпізнавання можна зробити такі **висновки:**

- якщо дані про апріорні ймовірності класів відсутні, то це рівнозначно припущенню про рівні ймовірності появи класів: $\sum_{i=1}^{K} p(a_i) = 1$, $\quad p(a_i) = \dfrac{1}{K}$;
- випадок, коли апріорні ймовірності класів однакові, є найгіршим для статистичного розпізнавання (при інших однакових умовах).

Тема № 2. Методи розділяючих функцій

Навчанням називають процес вироблення у деякій системі певної реакції на групи зовнішніх ідентичних сигналів шляхом багатократного впливу на систему зовнішнього коректування. Механізм генерації цього коректування визначає алгоритм навчання.

Розглянемо деякі методи навчання з “вчителем”.

Метод побудови еталонів

Для кожного класу за навчальною вибіркою будується еталон, що має такі значення ознак:

$$\vec{x}^0 = \{x_1^0,\ x_2^0,\ \dots,\ x_n^0\}, \qquad x_i^0 = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} x_{ik}\ ,$$

де K – кількість об’єктів цього образу в навчальній вибірці.

Отже, еталон – це усереднений за навчальною вибіркою абстрактний об’єкт. Абстрактним його називають тому, що він може не збігатися не тільки з жодним об’єктом навчальної вибірки, але й з жодним об’єктом генеральної сукупності.

Розпізнавання здійснюється так. На вхід системи подається об’єкт $\vec{x}^*$, приналежність якого до певного образу невідома. Від цього об’єкта вимірюють відстані до еталонів усіх образів. Після цього система зараховує $\vec{x}^*$ до образу, відстань до еталону якого мінімальна.

Правило найближчого сусіда

Нехай $X^n = \{\vec{x}_1^*,\ \ \vec{x}_2^*,\ \ \dots,\ \ \vec{x}_n^*\}$ – множина n вибіркових значень і $\vec{x}_i^* \in X^n$ – точка, найближча до $\vec{x}$. Тоді *правило найближчого сусіда* для класифікації $\vec{x}$ полягає в тому, що $\vec{x}$ присвоюється мітка, яка асоціюється з $\vec{x}_i^*$ (рис. 2).

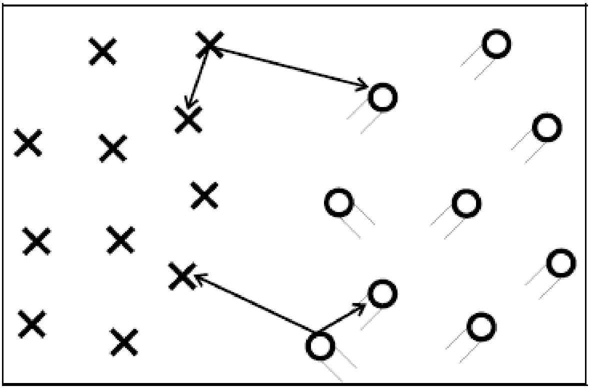


Рис. 2. Класифікація двох образів
за правилом найближчого сусіда

При застосуванні правила найближчого сусіда з конкретною множиною даних результативний рівень помилки класифікації буде залежати від випадкових характеристик вибірки. Зокрема, якщо для класифікації $\vec{x}$ використовуються різні множини вибіркових даних, то для найближчого сусіда вектора $\vec{x}$ будуть отримані різні вектори $\vec{x}_i^*$. При цьому для вибірки необмеженого об'єму рівень помилки за правилом найближчого сусіда ніколи не буде гіршим від байєсівського більше, ніж вдвічі.

Методи розділяючих функцій

Розділяючу функцію, представлену лінійною комбінацією компонентів $\vec{x}$, можна записати у вигляді:

$$g(\vec{x}) = \vec{w}^T \cdot \vec{x} + w_0, \tag{6}$$

де $\vec{w}$ – ваговий вектор, w_0 – поріг.

Лінійний класифікатор для двох класів працює за таким вирішальним правилом: якщо $g(\vec{x}^*) > 0$, то спостерігається клас a_1; якщо $g(\vec{x}^*) < 0$, то спостерігається клас a_2.

Рівняння $g(\vec{x}) = 0$ визначає поверхню розв'язків, що відділяє точки, які відповідають розв'язку $a = a_1$, від точок, які відповідають розв'язку $a = a_2$.

Коли функція $g(\vec{x})$ лінійна, поверхня розв'язків є гіперплощиною. *Гіперплощина* поділяє простір ознак на два півпростори: область розв'язків G_1 для класу a_1 та область розв'язків G_2 для класу a_2.

Якщо число класів $K > 2$, то потрібно декілька лінійних функцій і границя буде кусково-лінійною.

Для наочності будемо вважати, що $K = 2$. Якщо на множині об'єктів виконуються умови:

$g(\vec{x}) > 0$, якщо $\vec{x}^0$ – реалізація першого образу (a_1);

$g(\vec{x}) < 0$, якщо $\vec{x}^0$ – реалізація другого образу (a_2),

то образи a_1 і a_2 називають лінійно роздільними (рис. 3).

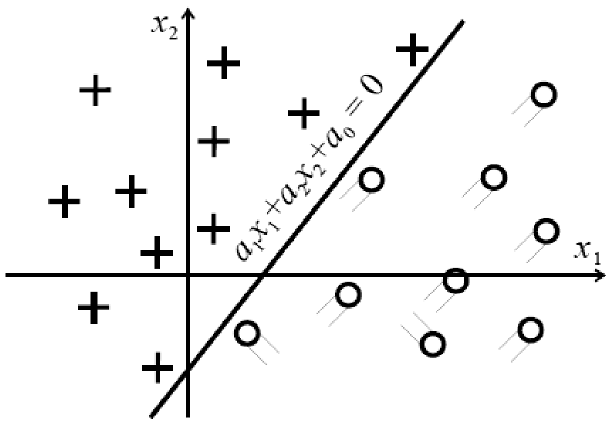


Рис. 3. Лінійне вирішальне правило для розпізнавання двох образів

Складну границю розділу (для лінійно нероздільних класів a_1 і a_2) можна апроксимувати функціями у вигляді:

$$g_i(\vec{x}) = \sum_{j=0}^{n} w_{ij} \cdot x_j \,, \tag{7}$$

де $x_0 \equiv 0$ – фіктивна змінна; w_{ij} – елемент матриці вагових коефіцієнтів w: ($p \times n+1$).

Наприклад, для двовимірного випадку $\vec{x} = (x_1,\, x_2)$ (рис. 4) границя описується системою рівнянь:

$$g(x_1,\, x_2) = \begin{cases} w_{10} + w_{11}x_1 + w_{12}x_2, & \forall\, x_1 \in [x_1^0,\, x_1^1); \\ w_{20} + w_{21}x_1 + w_{22}x_2, & \forall\, x_1 \in (x_1^1,\, x_1^2]; \\ w_{30} + w_{31}x_1 + w_{32}x_2, & \forall\, x_1 \in (x_1^2,\, x_1^3]. \end{cases}$$

Вирішальне правило:

якщо $g(x_1^*, x_2^*) > 0$, то спостерігається клас a_1, інакше – клас a_2.

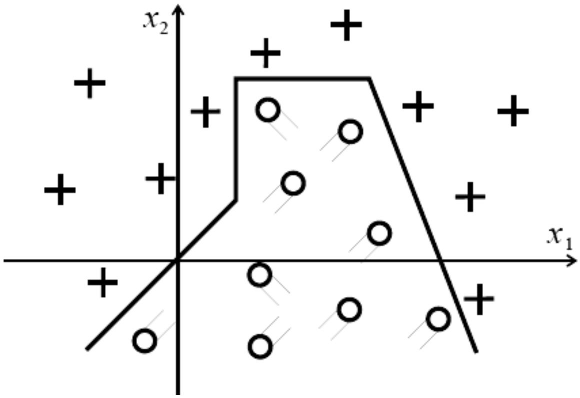


Рис. 4. Кусково-лінійне вирішальне правило
для розпізнавання двох образів

При проведенні границі між класами потрібно скористатися правилом найближчого сусіда.

Якщо відомо, що точка

$$\xi_1 = (x_1, y_1) \in a_1, \quad \xi_2 = (x_2, y_2) \in a_2,$$

то $g(x, y)$ – нормаль, проведена до відрізка, що з'єднує точки ξ_1 та ξ_2, і проходить через середину цього відрізка $M(x_0, y_0)$ з координатами

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Пригадаємо рівняння прямої, що проходить через дві точки з координатами (x_1, y_1) та (x_2, y_2):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

або

$$y = k \cdot x - k \cdot x_1 + y_1,$$

де $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Рівняння перпендикуляра до прямої, що проходить через точку $M(x_0, y_0)$, має вигляд:

$$x - x_0 + k(y - y_0) = 0 \quad \text{або} \quad y = -\frac{x - x_0}{k} + y_0.$$

Приклади розв'язування задач з використанням середовища Mathematica

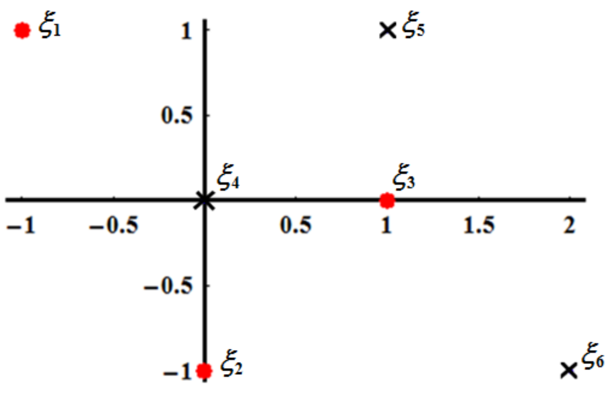
Вихідні дані:

$\{\xi_i\}$	*Клас a_1*			*Клас a_2*		
i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x_i	-1	0	1	0	1	2
y_i	1	-1	0	0	1	-1

1. Для заданих двовимірних результатів спостережень $\xi_i(x_i, y_i)$ двох класів об'єктів a_1 і a_2 за правилом найближчого сусіда провести границі між класами:
   а) за вибірковими значеннями – границю $g_1(x, y) = 0$;
   б) за вибірковим середнім – границю $g_2(x, y) = 0$.
2. Побудувати вирішальне правило g_1 та g_2.
3. Змоделювати процеси розпізнавання спостережень за вирішальним правилом g_1 та g_2 і порівняти ефективність класифікаторів за емпіричними оцінками ймовірностей вірних розв'язків.

Розглянемо **задачі 1 – 3**. Зобразимо точки $\{\xi_i\}$ на площині Oxy, причому на рисунку виділимо точки з різних класів:

```
ξ1 = {{-1, 1}, {0, -1}, {1, 0}};
ξ2 = {{0, 0}, {1, 1}, {2, -1}};

a1 = ListPlot[ξ1, PlotStyle → {PointSize[0.03], Hue[1]}];
a2 = ListPlot[ξ2, PlotStyle → {PointSize[0.035], Hue[0.7]}];

Show[a1, a2,
 AxesStyle → Thickness[0.008], TextStyle →
  {FontFamily → Times,
   FontWeight → "Bold", FontSize → 12}]
```



Проведемо границю між точками $\xi_1 \in a_1$ та $\xi_4 \in a_2$ за правилом найближчого сусіда:

- знайдемо координати точки M_1 – середини відрізка $[\xi_1; \xi_4]$ $M_1\left(\dfrac{x_1+x_4}{2}, \dfrac{y_1+y_4}{2}\right)$:

```
ξ14 = (ξ1[[1]] + ξ2[[1]]) / 2
```

Отримаємо:

$$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

- запишемо рівняння нормалі до відрізка $[\xi_1; \xi_4]$, який проходить через точку $M_1\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$:

```
t1 = ξ1[[1]]; t2 = ξ2[[1]];
x1 = t1[[1]]; y1 = t1[[2]];
x2 = t2[[1]]; y2 = t2[[2]];
Y = y /. Solve[(y - y1)/(y2 - y1) == (x - x1)/(x2 - x1), y];
k = Coefficient[Y[[1]], x, 1];
```

Рівняння нормалі

```
Print["y = ", Y1 = y /. Solve[y - ξ14[[2]] == -1/k * (x - ξ14[[1]]), y]]
```

одержимо у вигляді:

```
y = 1 + x.
```

- Отже, лінія поділу між точками ξ_1 та ξ_4:

$$g_1(x, y) = y - x - 1 = 0.$$

Проведемо границю між точками $\xi_2 \in a_1$ та $\xi_4 \in a_2$ за правилом найближчого сусіда. Оскільки дані точки лежать на осі Oy, то дана границя буде проходити перпендикулярно до цієї осі через точку M_2 – середину відрізка $[\xi_2; \xi_4]$:

```
ξ24 = (ξ1[[2]] + ξ2[[1]]) / 2
```

Отримаємо:

$$\left\{0,\ -\frac{1}{2}\right\}$$

Отже, $g_2(x, y) = y + \frac{1}{2} = 0$.

Точка перетину ліній $g_1(x, y) = 0$ та $g_2(x, y) = 0$ – це точка згину S_1 кусково-лінійної границі $g_1(x, y) = 0$ між класами a_1 і a_2; координати цієї точки знаходимо з розв'язку системи рівнянь:

```
S1x = x /. Solve[{y == Y1[[1]], y == ξ24[[2]]}, {x, y}]
S1y = y /. Solve[{y == Y1[[1]], y == ξ24[[2]]}, {x, y}]
```

або

```
Solve[{y == Y1[[1]], y == ξ24[[2]]}, {x, y}]
```

Одержимо:

$$\left\{\left\{x \to -\frac{3}{2},\ y \to -\frac{1}{2}\right\}\right\}$$

Отже, $S_1(-1{,}5; -0{,}5)$.

Аналогічно знаходимо рівняння ліній, що розділяють інші пари точок та координати точок згину.

Проведемо границю між точками $\xi_3 \in a_1$ та $\xi_4 \in a_2$ за правилом найближчого сусіда. Оскільки ці точки лежать на осі Ox, то границя буде проходити перпендикулярно до цієї осі через точку M_3 – середину відрізка $[\xi_3; \xi_4]$:

```
ξ34 = (ξ1[[3]] + ξ2[[1]])/2
```

Отримаємо:

$$\left\{\frac{1}{2},\ 0\right\}$$

Отже, $g_3(x,\ y) = x - \frac{1}{2} = 0$.

Точка перетину ліній $g_3(x, y) = 0$ та $g_2(x, y) = 0$ – це точка згину S_2 **(S2x, S2y)** кусково-лінійної границі $g_1(x, y) = 0$ між класами a_1 і a_2; координати цієї точки знаходимо з розв'язку системи рівнянь:

```
S2x = x /. Solve[{x == ξ34[[1]], y == ξ24[[2]]}, {x, y}]
S2y = y /. Solve[{x == ξ34[[1]], y == ξ24[[2]]}, {x, y}]
```

Отримаємо: $S_2\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Проведемо границю між точками $\xi_3 \in a_1$ та $\xi_5 \in a_2$ за правилом найближчого сусіда. Оскільки відрізок, який з'єднує ці точки, є паралельний до осі **O*y***, то границя буде проходити перпендикулярно до цієї осі через точку M_4 – середину відрізка $[\xi_3; \xi_5]$:

```
ξ35 = (ξ1[[3]] + ξ2[[2]])/2
```

Координати точки M_4 будуть такі: $M_4\left(1; \frac{1}{2}\right)$. Отже,

$g_4(x,\ y) = y - \frac{1}{2} = 0$.

Точка перетину ліній $g_3(x, y) = 0$ та $g_4(x, y) = 0$ – це точка згину S_3 **(S3x, S3y)** кусково-лінійної границі $g_1(x, y) = 0$ між класами a_1 і a_2; координати цієї точки знаходимо з розв'язку системи рівнянь:

```
S3x = x /. Solve[{x == ξ34[[1]], y == ξ35[[2]]}, {x, y}]
S3y = y /. Solve[{x == ξ34[[1]], y == ξ35[[2]]}, {x, y}]
```

Отримаємо: $\boldsymbol{S}_3\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}};\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$.

Проведемо границю між точками $\xi_3 \in a_1$ та $\xi_6 \in a_2$ за правилом найближчого сусіда. Знайдемо координати точки M_5 – середини відрізка $[\xi_3;\xi_6]$:

$$ξ36 = \frac{ξ1[[3]] + ξ2[[3]]}{2}$$

Координати точки M_5 будуть такі: $\boldsymbol{M}_5\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}};-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$.

Запишемо рівняння нормалі до відрізка $[\xi_3;\xi_6]$, який проходить через точку M_5:

```
t3 = ξ1[[3]]; t6 = ξ2[[3]];
x3 = t3[[1]]; y3 = t3[[2]]; x6 = t6[[1]]; y6 = t6[[2]];
Z = y /. Solve[(y - y3)/(y6 - y3) == (x - x3)/(x6 - x3), y];
f = Coefficient[Z[[1]], x, 1];
```

Рівняння нормалі

```
Z1 = y /. Solve[y - ξ36[[2]] == (-1)/f * (x - ξ36[[1]]), y]
```

одержимо у вигляді:

```
y = -2 + x.
```

Отже, лінія поділу між точками ξ_3 та ξ_6: $g_5(x, y) = y - x + 2 = 0$.

Точка перетину ліній $g_5(x, y) = 0$ та $g_4(x, y) = 0$ – це точка згину S_4(S4x, S4y) кусково-лінійної границі $g_1(x, y) = 0$ між класами a_1 і a_2; координати цієї точки знаходимо з розв'язку системи рівнянь:

```
S4x = x /. Solve[{y = Z1[[1]], y == ξ35[[2]]}, {x, y}]
S4y = y /. Solve[{y = Z1[[1]], y == ξ35[[2]]}, {x, y}]
```

Координати точки S_4 будуть такі: $S_4\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Проведемо границю між точками $\xi_2 \in a_1$ та $\xi_6 \in a_2$ за правилом найближчого сусіда. Оскільки відрізок, який з'єднує ці точки паралельний до осі Ox, то границя буде проходити перпендикулярно до цієї осі через точку M_6 – середину відрізка $[\xi_2; \xi_6]$:

```
ξ26 = (ξ1[[2]] + ξ2[[3]]) / 2
```

Координати точки M_6 будуть такі: $M_6(1; -1)$. Отже, $g_6(x, y) = x - 1 = 0$.

Точка перетину ліній $g_5(x, y) = 0$ та $g_6(x, y) = 0$ – це точка згину S_5**(S5x, S5y)** кусково-лінійної границі $g_1(x, y) = 0$ між класами a_1 і a_2; координати цієї точки знаходимо з розв'язку системи рівнянь:

```
S5x = x /. Solve[{y = Z1[[1]], x == ξ26[[1]]}, {x, y}]
S5y = y /. Solve[{y = Z1[[1]], x == ξ26[[1]]}, {x, y}]
```

Отже, точка $S_5\,(1, -1)$.

Проведемо границю між точками $\xi_1 \in a_1$ та $\xi_5 \in a_2$ за правилом найближчого сусіда. Оскільки відрізок, який з'єднує ці точки паралельний до осі Ox, то границя буде проходити перпендикулярно до цієї осі через точку M_7 – середину відрізка $[\xi_1; \xi_5]$.

```
ξ15 = (ξ1[[1]] + ξ2[[2]]) / 2
```

Отримаємо: $M_7(0; 1)$. Отже, $g_7(x, y) = x = 0$.

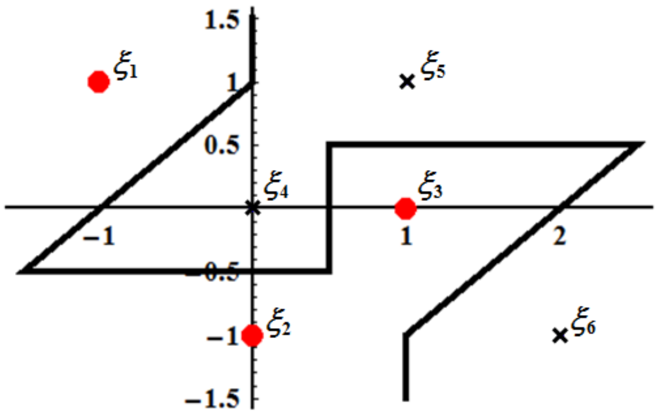
Точка перетину ліній $g_7(x, y) = 0$ та $g_1(x, y) = 0$ – це точка згину $S_0(S0x, S0y)$ кусково-лінійної границі $g_1(x, y) = 0$ між класами a_1 і a_2; координати цієї точки знаходимо з розв'язку системи рівнянь:

```
S0x = x /. Solve[{y == Y1[[1]], x == ξ15[[1]]}, {x, y}]
S0y = y /. Solve[{y == Y1[[1]], x == ξ15[[1]]}, {x, y}]
```

Отже, точка S_0 має координати $S_0(0; 1)$.

Подамо на рисунку вигляд границь g_1 між класами:

```
ξ1 = {{-1, 1}, {0, -1}, {1, 0}};
ξ2 = {{0, 0}, {1, 1}, {2, -1}};
a1 = ListPlot[ξ1, PlotStyle → {PointSize[0.035], Hue[1]}];
a2 = ListPlot[ξ2, PlotStyle → {PointSize[0.025], Hue[0.7]}];
a3 = Graphics[{Thickness[0.012], Line[{{0, 1.5}, {S0x[[1]], S0y[[1]]},
      {S1x[[1]], S1y[[1]]}, {S2x[[1]], S2y[[1]]}, {S3x[[1]], S3y[[1]]},
      {S4x[[1]], S4y[[1]]}, {S5x[[1]], S5y[[1]]}, {S5x[[1]], -1.5}}]}];
Show[a1, a2, a3,
 AxesStyle → Thickness[0.006],
 TextStyle →
  {FontFamily → Times,
   FontWeight → "Bold", FontSize → 12}]
```



Складемо алгоритм класифікації об'єктів a_1 і a_2 з використанням кусково-лінійної границі $g_1(x, y) = 0$. Позначимо через γ_1 – прийняття рішення про те, що спостерігається клас a_1, а через γ_2 – прийняття рішення про те, що спостерігається клас a_2.

якщо $x < -1{,}5$, тоді γ_1

  інакше, якщо $x \in [-1{,}5;\, 0]$, то

    якщо $-0{,}5 \le y \le x + 1$, тоді γ_2, інакше γ_1

  інакше, якщо $x \in (0;\, 0{,}5]$, то

    якщо $y \ge -0{,}5$, тоді γ_2, інакше γ_1

  інакше, якщо $x \in (0{,}5;\, 1]$, то

    якщо $y \ge 0{,}5$, тоді γ_2, інакше γ_1

  інакше, якщо $x \in (1;\, 2{,}5]$, то

    якщо $x - 2 \le y \le 0{,}5$, тоді γ_1, інакше γ_2

  інакше γ_2

Оскільки, результати спостережень – випадкові величини, то між класами можна провести границю після статистичної обробки даних.

Обчислимо відповідні математичні сподівання:

```
ξ1 = {{-1, 1}, {0, -1}, {1, 0}};
ξ2 = {{0, 0}, {1, 1}, {2, -1}};

ξ1x = {-1, 0, 1};  ξ1y = {1, -1, 0};
ξ2x = {0, 1, 2};  ξ2y = {0, 1, -1};
```

$$M1x = \frac{ξ1x[[1]] + ξ1x[[2]] + ξ1x[[3]]}{3}$$

$$M1y = \frac{ξ1y[[1]] + ξ1y[[2]] + ξ1y[[3]]}{3}$$

$$M2x = \frac{ξ2x[[1]] + ξ2x[[2]] + ξ2x[[3]]}{3}$$

$$M2y = \frac{ξ2y[[1]] + ξ2y[[2]] + ξ2y[[3]]}{3}$$

Запишемо рівняння границі g_2 між класами a_1 і a_2 після усереднення даних спостережень. Ця границя проходить через точку M з координатами $\left(\frac{mx_1 + mx_2}{2};\quad \frac{my_1 + my_2}{2}\right)$ і паралельно осі Oy.

Координати точки M

```
Mx = (M1x + M2x) / 2

My = (M1y + M2y) / 2
```

отримаємо такі: $M\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Отже, $g_2(x, y) = x - \frac{1}{2} = 0$.

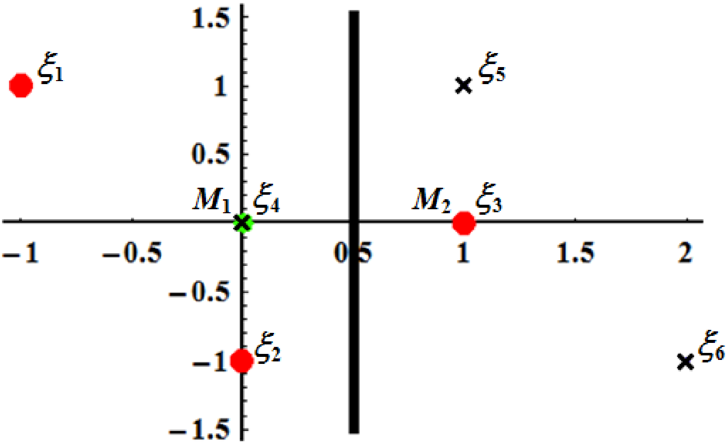
Тоді відповідне правило прийняття рішення матиме вигляд:

$x \le \frac{1}{2}$, тоді γ_1, інакше γ_2.

Представимо графічно вихідні дані, відповідні середні значення та границю між класами:

```
ξ1 = {{-1, 1}, {0, -1}, {1, 0}};
ξ2 = {{0, 0}, {1, 1}, {2, -1}};

a1 = ListPlot[ξ1, PlotStyle →
    {PointSize[0.035], Hue[1]}];

a2 = ListPlot[ξ2, PlotStyle →
    {PointSize[0.025], Hue[0.7]}];

a3 = Graphics[{Thickness[0.015],
    Line[{{Mx, -1.5}, {Mx, 1.5}}]}];
```

```
a4 = ListPlot[{{M1x, M1y}},
   PlotStyle → {PointSize[0.025], Hue[0.3]}];

a5 = ListPlot[{{M2x, M2y}},
   PlotStyle → {PointSize[0.025], Hue[0.5]}];

Show[a1, a2, a3, a4, a5,
 AxesStyle → Thickness[0.006], TextStyle →
  {FontFamily → Times,
   FontWeight → "Bold", FontSize → 12}]
```



Тема № 3. Методи групування даних

Найважчою є задача побудови вирішального правила в умовах повної апостеріорної невизначеності: коли є безліч вибіркових значень (представлених у вигляді файлів даних спостережень або зображень) без зазначення їхньої класифікації, тобто заздалегідь невідома ні кількість об’єктів, ні що це за об’єкти. Тому першим кроком процесу навчання “без вчителя” є розділення даних на підгрупи (*кластери*); при цьому в одну групу об'єднуються об’єкти з подібними ознаками. Відразу виникають два питання: як вимірювати подібність між спостереженнями та як оцінювати поділ вибіркової множини на групи. Найбільш очевидною мірою подібності (або відмінності) між двома спостереженнями є відстань між ними: відстань між об’єктами з однієї групи (одного класу) буде істотно меншою за відстань між об’єктами з різних груп.

Припустимо, що два об’єкти $\vec{x}$ і $\vec{x}'$ належать до однієї групи, якщо евклідова відстань між ними:

$$r = \sqrt{(\vec{x}-\vec{x}')^T(\vec{x}-\vec{x}')} = \|\vec{x}-\vec{x}'\| \qquad (8)$$

менша, ніж порогова відстань d_0. Значення d_0 повинно бути більшим за типові внутрішньогрупові відстані і меншим за типові міжгрупові відстані.

У випадку двовимірного простору ознак $\vec{x}^T = (x_1, x_2)$, $\vec{x}'^T = (x'_1, x'_2)$ формула (8) має вигляд:

$$r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2} \,.$$

Якість групування будь-якої частини об’єктів визначається за допомогою *функцій критерію*. Найпростіша і найбільш використовувана функція критерію – *сума квадратів помилок*:

$$J_e = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\vec{x}\in X_i} \|\vec{x}-\vec{m}_i\|^2 , \qquad (9)$$

де $\vec{m}_i$ – середній вектор i-тої групи, що складається з n_i відліків,

$$\vec{m}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{\vec{x} \in X_i} \vec{x} \,. \tag{10}$$

Інтерпретація функції (2): для цієї групи X_i середній вектор $\vec{m}_i$ найкраще представляє об’єкти (відліки) у X_i, оскільки він мінімізує суму квадратів довжин векторів “помилок” – відхилень $\vec{x}$ від $\vec{m}_i$.

Отже, критерій J_e вимірює загальну квадратичну похибку, внесену при представленні n об’єктів спостереження $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, ..., \vec{x}_n$ центрами k груп $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3, ..., \vec{m}_k$. Оптимальним розділенням вважається таке, яке мінімізує J_e. Групування такого виду називають *розділенням з мінімальною дисперсією*. Зазвичай J_e – відповідний критерій, якщо об’єкти утворюють “групи”, які добре відокремлені одна від одної.

Функції критерію можна отримати з матриць розсіювання, які використовуються у дискримінантному аналізі:

– матриця розсіювання для i-тої групи:

$$S_i = \sum_{\vec{x} \in X_i} (\vec{x} - \vec{m}_i)^T (\vec{x} - \vec{m}_i)\,;$$

– матриця розсіювання всередині групи:

$$S_W = \sum_{i=1}^{k} S_i\,;$$

– матриця розсіювання між групами:

$$S_B = \sum_{i=1}^{k} n_i (\vec{m}_i - \vec{m})^T (\vec{m}_i - \vec{m})\,,$$

де $\vec{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i \vec{m}_i$ – загальний середній вектор;

– загальна матриця розсіювання:

$$S_T = S_W + S_B\,.$$

Загальна матриця розсіювання залежить тільки від загального об’єму вибірки. Внутрішньогрупові та міжгрупові матриці розсіювання залежать від того, як множина об’єктів розділена на групи. Щоб оцінити ступінь внутрішнього та міжгрупового розсіювання, уводять скалярну міру матриць розсіювання: слід та визначник.

Коли знайдена функція критерію, групування стає коректно поставленою задачею дискретної ($\boldsymbol{k}$) оптимізації: знайти таке розділення вибіркової множини, яке призводить до екстремуму функції критерію. Найбільш часто для пошуку оптимального розділення використовується ітеративна оптимізація, основна ідея якої полягає в знаходженні деякого початкового розділення і переміщенні об’єктів з одного класу до іншого, якщо це переміщення поліпшує значення функції критерію. Такий підхід гарантує, в загальному випадку, локальний, але не глобальний екстремум; різні початкові точки можуть призвести до різних розв’язків, при цьому невідомо, чи був знайдений найкращий розв’язок.

Розглянемо послідовність розділень $\boldsymbol{n}$ об’єктів на $\boldsymbol{k}$ груп. Спочатку, це поділ на $\boldsymbol{n}$ груп, причому кожна група міститиме по одному об’єкту. Потім – поділ на $\boldsymbol{(n-1)}$ групу, на $\boldsymbol{(n-2)}$ групи і т. д.

Якщо два об’єкти утворюють одну групу на рівні $\boldsymbol{k}$ і залишаються разом на вищих рівнях, то таку послідовність називають ***ієрархічним групуванням***. *Агломеративні* (*об’єднуючі*) *процедури* починають з $\boldsymbol{n}$ одиничних груп і утворюють послідовність поступово об'єднуваних груп. *Поділяючі процедури* починають з однієї групи, що містить всі $\boldsymbol{n}$ об’єктів, і утворюють послідовність поступово розділених груп.

Основні кроки ***базового агломеративного групування***:

1) нехай поточне число груп $\boldsymbol{\hat{k} = n}$ і $\boldsymbol{X_i = \{\vec{x}_i\}}$, $\boldsymbol{i = 1, 2, 3, \ldots, n}$;

ЦИКЛ:

2) якщо $\hat{k} \le k$ (задане число груп), то **СТОП**;
3) знайти найближчу пару груп (X_i та X_j);
4) об'єднати X_i та X_j, знищити X_j і зменшити $\hat{k}$ на **1**;
5) перейти до кроку **ЦИКЛ**.

Як міру відстані між двома класами (групами) використовують такі критерії:

$$d_{\min}(X_i, X_j) = \min_{\substack{\vec{x} \in X_i \\ \vec{x}' \in X_j}} \| \vec{x} - \vec{x}' \|; \tag{11}$$

$$d_{\max}(X_i, X_j) = \max_{\substack{\vec{x} \in X_i \\ \vec{x}' \in X_j}} \| \vec{x} - \vec{x}' \|; \tag{12}$$

$$d_{\text{mean}}(X_i, X_j) = \| \vec{m}_i - \vec{m}_j \|. \tag{13}$$

Усі ці міри нагадують мінімальну дисперсію (9) і зазвичай дають однакові результати, якщо класи компактні і добре розділені. Однак якщо класи близькі один до одного або їхня форма не гіперсферична, результати групування з використанням різних критеріїв (11) – (13) можуть бути різними.

Алгоритм “найближчий сусід”

Розглянемо випадок, коли використовується критерій $d_{\min}$. Припустимо, що точки даних розглядаються як вершини графа, причому ребра графа утворюють шлях між вершинами в одній підмножині X. Коли для вимірювання відстані між підмножинами використовується $d_{\min}$, найближчі сусіди визначають найближчі підмножини.

Злиття X_i та X_j відповідає додаванню ребра між двома найближчими вершинами в X_i та X_j. Оскільки ребра, що з'єднують точки підмножини, завжди проходять між різними класами, то результативний граф ніколи не матиме замкнутих контурів або ланцюгів. Користуючись термінологією теорії графів, можна сказати, що ця процедура генерує дерево. Якщо її продовжувати до тих пір, доки всі точки підмножин не будуть з'єднані, то в результаті отримаємо покриваюче дерево – дерево з шляхом від довільної вершини до будь-якої іншої вершини в групі. При цьому сума довжин ребер результативного дерева не буде перевищувати сум довжин ребер для будь-якого іншого покриваючого дерева для цієї множини вибіркових даних. Отже, використовуючи $\boldsymbol{d}_{\mathbf{min}}$ як міру відстані, агломеративна процедура групування перетворюється в алгоритм для генерування мінімального покриваючого дерева.

Мінімальне покриваюче дерево можна отримати, додаючи найкоротше ребро між двома іншими ребрами (двома найближчими парами точок).

Якщо деякі точки розташовані так, що між вихідними класами створюється певний міст, то це призводить до "ланцюгового ефекту" – об'єднання даних в одну велику довгасту групу та одну або декілька маленьких компактних груп. Такий ефект спостерігається, коли результати дуже чутливі до шуму або невеликих змін у розміщенні точок даних. Однак така ж тенденція формування ланцюгів може вважатися перевагою, якщо групи самі собою витягнуті або мають витягнуті відростки.

Алгоритм "далекий сусід"

Коли для вимірювання відстані між класами використовується $\boldsymbol{d}_{\mathbf{max}}$, виникнення витягнутих груп є небажаним. Застосування процедури можна розглядати як отримання графа, у якому ребра з'єднують всі вершини в групу. Користуючись термінологією теорії графів, можна сказати, що кожна група утворює повний підграф. Відстань між двома групами (класами) визначається найбільш віддаленими вершинами у цих двох групах.

Коли дві найближчі групи об'єднуються, граф змінюється: додаються ребра між кожною парою вершин у двох об'єднуваних групах. Відстань між двома групами визначається найбільш віддаленими вершинами в цих двох групах. Якщо *діаметр групи* визначається як найбільша відстань між точками в групі, то відстань між двома групами – це діаметр їхнього об'єднання. Якщо *діаметр розділення* визначається як найбільший діаметр для групи в розділенні, то кожна ітерація збільшує діаметр розділення мінімально. Це є перевагою в тому випадку, коли істинні групи компактні і приблизно однакові за розмірами. Однак в інших випадках, як наприклад, у випадку витягнутих груп, результативне групування безглузде. Це ще один приклад накладання структури на дані замість знаходження їхньої структури.

Приклади розв'язування задач з використанням середовища Mathematica

Вихідні дані:

задана множина результатів спостережень $\boldsymbol{\xi_i(x_i, y_i)}$, $\boldsymbol{i}$ **= 1, 2, 3, …, 10**, без класифікації. Кількість спостережуваних класів невідома.

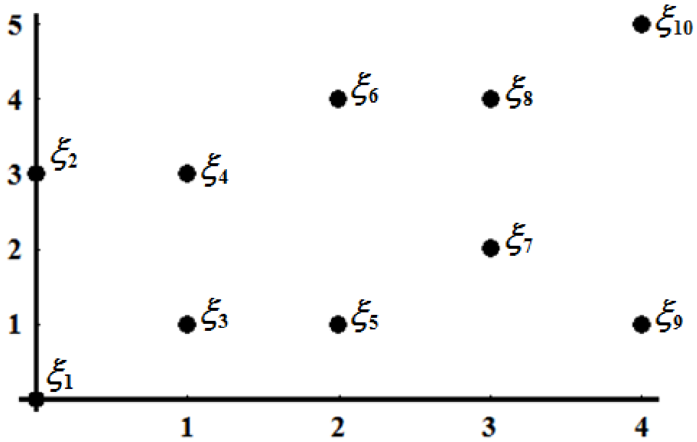
$\boldsymbol{i}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\boldsymbol{x_i}$	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4
$\boldsymbol{y_i}$	0	3	1	3	1	4	2	4	1	5

1. Для заданих двовимірних результатів спостережень, $\boldsymbol{\xi_i(x_i, y_i)}$, $\boldsymbol{i}$ **= 1, 2, 3, …, 10**, в умовах повної апостеріорної невизначеності установити міри подібності – обчислити відстані від кожної точки заданої множини ξ_i до всіх інших точок ξ_j, $i \neq j$.

2. Установити критерій об'єднання даних d_{min}.
3. Виконати групування даних за алгоритмом найближчого сусіда.
4. Отримані результати представити графічно.

Розглянемо задачі **1 – 4**. Зобразимо точки $\{\xi_i\}$ на площині ***Oxy***:

```
ξ = {{0, 0}, {0, 3}, {1, 1}, {1, 3}, {2, 1},
    {2, 4}, {3, 2}, {3, 4}, {4, 1}, {4, 5}};
ListPlot[ξ, PlotStyle → PointSize[0.02]]
```



Визначимо відстані між всіма можливими парами точок $i = 1, 2, \ldots, 10$; $j = 1, 2, \ldots, 10$:

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \; .$$

```
X = {0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4};
Y = {0, 3, 1, 3, 1, 4, 2, 4, 1, 5};
d = Table[N[√((X[[i]] - X[[j]])^2 + (Y[[i]] - Y[[j]])^2), 4],
   {i, 1, 9}, {j, i + 1, 10}];
Do[Do[d = Insert[d, 0, {i, j}], {j, 1, i - 1}], {i, 2, 9}]
d // MatrixForm
```

Отримаємо матрицю відстаней ***d***:

$$\begin{pmatrix} 3.000 & 1.414 & 3.162 & 2.236 & 4.472 & 3.606 & 5.000 & 4.123 & 6.403 \\ 0 & 2.236 & 1.000 & 2.828 & 2.236 & 3.162 & 3.162 & 4.472 & 4.472 \\ 0 & 0 & 2.000 & 1.000 & 3.162 & 2.236 & 3.606 & 3.000 & 5.000 \\ 0 & 0 & 0 & 2.236 & 1.414 & 2.236 & 2.236 & 3.606 & 3.606 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.000 & 1.414 & 3.162 & 2.000 & 4.472 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.236 & 1.000 & 3.606 & 2.236 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.000 & 1.414 & 3.162 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.162 & 1.414 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.000 \end{pmatrix}$$

Тут $\boldsymbol{d}_{11}$ – відстань між точками ξ_1 та ξ_2; $\boldsymbol{d}_{12}$ – відстань між точками ξ_1 та ξ_3; $\boldsymbol{d}_{13}$ – відстань між точками ξ_1 та ξ_4; $\boldsymbol{d}_{22}$ – відстань між точками ξ_2 та ξ_3; $\boldsymbol{d}_{23}$ – відстань між точками ξ_2 та ξ_4; $\boldsymbol{d}_{24}$ – відстань між точками ξ_3 та ξ_4.

Для наочності представимо результати у вигляді таблиці:

d_{ij}	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3.000	1.414	3.162	2.236	4.472	3.606	5.000	4.123	6.403
2		2.236	1.000	2.828	2.236	3.162	3.162	4.472	4.472
3			2.000	1.000	3.162	2.236	3.606	3.000	5.000
4				2.236	1.414	2.236	2.236	3.606	3.606
5					3.000	1.414	3.162	2.000	4.472
6						2.236	1.000	3.606	2.236
7							2.000	1.414	3.162
8								3.162	1.414
9									4.000

Знайдемо найбільшу відстань між точками ξ (найбільший елемент матриці $\boldsymbol{d}$). Визначимо позицію цього елемента.

```
dmax = Max[d]
dd = Position[d, dmax];
Print["Перша точка,  N = ", dd[[1]][[1]]]
Print["Друга точка,  N = ", dd[[1]][[2]] + 1]
```

Отримаємо:

```
6.403

Перша точка,  N = 1

Друга точка,  N = 10
```

Як бачимо, найбільш віддалені одна від одної точки ξ_1 та ξ_{10}. Припустимо, що вони належать до різних класів $\boldsymbol{a}_1$ та $\boldsymbol{a}_2$:

$\xi_1 \in \boldsymbol{a}_1$; $\xi_{10} \in \boldsymbol{a}_2$.

Як початкову точку ієрархічного групування виберемо ξ_1. Виконаємо групування точок ξ_i за алгоритмом найближчого сусіда.

Знайдемо точку, найближчу до точки ξ_1. Для цього в першому рядку матриці $\boldsymbol{d}$ (у якому міститься елемент $\boldsymbol{d}_{1,9}$ = **6,403**) знайдемо мінімальний елемент $\boldsymbol{d}_{1,j}$:

```
d2 = Min[d[[1]]]
```

Отримаємо: `1.414`.

Визначимо позицію цього елемента:

```
dd2 = Position[d[[1]], d2];
Print["Номер рядка = ", 1]
Print["Номер стовпця = ", dd2[[1]][[1]] + 1]

Номер рядка = 1

Номер стовпця = 3
```

Як бачимо, в першому рядку матриці $\boldsymbol{d}$ мінімальний елемент $\boldsymbol{d}_{1,3}$ = 1,414. Отже, найближчою до точки ξ_1 є точка ξ_3. Об'єднаємо ці точки (ξ_1 та ξ_3) в один клас $\boldsymbol{a}_1$.

Переходимо до наступної точки ξ_3.

Знайдемо точку, найближчу до точки ξ_3. Для цього в третьому рядку матриці $\boldsymbol{d}$ знайдемо мінімальний елемент $\boldsymbol{d}_{3,j}$:

```
d3 = Min[Take[d[[3]], {3, 9}]]
```

Отримаємо: **1.000**.

Визначимо позицію цього елемента:

```
dd3 = Position[d[[3]], d3];
Print["Номер рядка = ", 3]
Print["Номер стовпця = ", dd3[[1]][[1]] + 1]
```

```
Номер рядка = 3

Номер стовпця = 5
```

Як бачимо, в третьому рядку матриці $\boldsymbol{d}$ мінімальний елемент $\boldsymbol{d}_{3,5}$ = 1,000. Найближчою до точки ξ_3 є точка ξ_5. Отже, об'єкт ξ_5 також належить до класу $\boldsymbol{a}_1$.

Знайдемо точку, найближчу до точки ξ_5. Для цього в п'ятому рядку матриці $\boldsymbol{d}$ знайдемо мінімальний елемент $\boldsymbol{d}_{5,j}$:

```
d4 = Min[Take[d[[5]], {5, 9}]]
```

Отримаємо: **1.414**.

Визначимо позицію цього елемента:

```
dd4 = Position[d[[5]], d4];
Print["Номер рядка = ", 5]
Print["Номер стовпця = ", dd4[[1]][[1]] + 1]
```

```
Номер рядка = 5

Номер стовпця = 7
```

У п’ятому рядку матриці $\boldsymbol{d}$ мінімальний елемент $\boldsymbol{d}_{5,7}$ = 1,414. Найближчою до точки ξ_5 є точка ξ_7. Отже, об’єкт ξ_7 належить до класу $\boldsymbol{a}_1$.

Знайдемо точку, найближчу до точки ξ_7. Для цього в сьомому рядку матриці $\boldsymbol{d}$ знайдемо мінімальний елемент $\boldsymbol{d}_{7,j}$:

```
d5 = Min[Take[d[[7]], {7, 9}]]
```

Отримаємо: `1.414`.

Визначимо позицію цього елемента:

```
dd5 = Position[d[[7]], d5];
Print["Номер рядка = ", 7]
Print["Номер стовпця = ", dd5[[1]][[1]] + 1]

Номер рядка = 7

Номер стовпця = 9
```

У сьомому рядку матриці $\boldsymbol{d}$ мінімальний елемент $\boldsymbol{d}_{7,9}$ = 1,414. Найближчою до точки ξ_7 є точка ξ_9. Отже, об’єкт ξ_9 належить до класу $\boldsymbol{a}_1$.

У дев’ятому рядку матриці $\boldsymbol{d}$ знаходиться тільки один елемент $\boldsymbol{d}_{9,10}$ = 4,000. Ми не можемо віднести точку ξ_{10} до класу $\boldsymbol{a}_1 = \{\xi_1, \xi_3, \xi_5, \xi_7, \xi_9\}$, оскільки на початку припустили, що $\xi_{10} \in \boldsymbol{a}_2$. Отже, обриваємо ланцюг послідовних об’єднань точок в один клас $\boldsymbol{a}_1$.

Далі потрібно перейти до однієї з точок, яка не ввійшла до класу $\boldsymbol{a}_1$, і повторити кроки алгоритму.

Отже, у результаті роботи алгоритму найближчого сусіда отримаємо таке розділення даних:

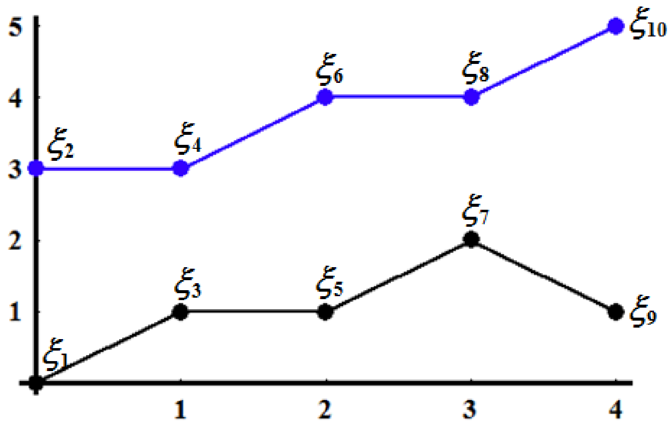
клас $\boldsymbol{a}_1$: $\{\xi_1, \xi_3, \xi_5, \xi_7, \xi_9\}$;

клас $\boldsymbol{a}_2$: $\{\xi_2, \xi_4, \xi_6, \xi_8, \xi_{10}\}$.

Для візуалізації результатів групування з'єднаємо лініями пари точок, що належать до одного класу:

```
ξ1 = {{0, 0}, {1, 1}, {2, 1}, {3, 2}, {4, 1}};
ξ2 = {{0, 3}, {1, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {4, 5}};
a1 = ListPlot[ξ1, PlotStyle →
     {PointSize[0.02], Hue[1]}];
a2 = ListPlot[ξ2, PlotStyle →
     {PointSize[0.02], Hue[0.7]}];
a11 = ListPlot[ξ1, PlotJoined → True,
    PlotStyle → Hue[1]];
a22 = ListPlot[ξ2, PlotJoined → True,
    PlotStyle → Hue[0.7]];
Show[a1, a2, a11, a22]
```

Отримаємо:



3. Питання, які виносяться на колоквіуми з дисципліни “Теорія розпізнавання образів”

а) <u>перший колоквіум</u>

1. Опишіть відомі Вам постановки задачі класифікації.
2. Перелічіть відомі Вам практичні застосування методів класифікації.
3. Наведіть ключову парадигму теорії розпізнавання, сформульовану Хантом.
4. Що таке клас у теорії розпізнавання?
5. Що таке інваріанти класу?
6. Дайте визначення інформативним ознакам.
7. Перелічіть основні властивості класів.
8. Охарактеризуйте роль, яку відіграє у задачі розпізнавання образів навчання на прикладах.
9. Охарактеризуйте процес розпізнавання як співставлення зі зразком.
10. Сформулюйте задачу розпізнавання як задачу віднесення об’єкта до певного класу.
11. Охарактеризуйте типову схему розпізнавання у робочому режимі.
12. У чому полягає етап попередньої обробки при розпізнаванні?
13. Охарактеризуйте етап навчання, який передує розпізнаванню в робочому режимі. Які основні задачі розв’язуються на цьому етапі?
14. Що таке навчальна вибірка?
15. Охарактеризуйте схеми “без навчання”, “з одноразовим навчанням” та “з періодичним перенавчанням”.
16. Охарактеризуйте задачу розпізнавання як задачу прийняття рішення.
17. Наведіть класифікацію основних методів розпізнавання.

18. Дайте загальну характеристику дискримінантним методам розпізнавання.
19. Охарактеризуйте структурні методи розпізнавання.
20. Опишіть механізм застосування методу допустимих перетворень при розпізнаванні образів.

б) <u>другий колоквіум</u>

1. Що таке простір ознак?
2. Перелічіть відомі Вам види ознак.
3. Які Ви знаєте міри близькості між об'єктами, якщо ознаки є кількісними?
4. Наведіть формулу евклідової відстані між векторами.
5. Що таке зважені евклідові відстані? У якому випадку їх доцільно використовувати?
6. Дайте визначення матриці даних.
7. Охарактеризуйте гіпотезу компактності.
8. Опишіть типову схему розпізнавання в просторі ознак.
9. Дайте визначення розділяючої функції.
10. У чому полягає ідея методу розділяючих функцій?
11. Дайте визначення лінійної роздільності та лінійної розділяючої функції.
12. Опишіть алгоритм персептрона для побудови лінійної розділяючої функції.
13. Опишіть метод найближчого сусіда.
14. Чи вимагає метод найближчого сусіда попередньої побудови вирішального правила?
15. Охарактеризуйте основні переваги й недоліки методу найближчого сусіда.
16. Охарактеризуйте байєсівські методи розпізнавання образів.
17. Перерахуйте найвідоміші статистичні критерії прийняття рішень. Чим вони подібні і чим відрізняються між собою?
18. Як вибрати оптимальне вирішальне правило?

19. Як визначити ймовірності помилок першого й другого роду в задачі класичного виявлення?
20. Перерахуйте показники якості багатоальтернативного параметричного розпізнавання.
21. У чому полягає відмінність задач параметричного й непараметричного розпізнавання?
22. Назвіть та опишіть найвідоміші непараметричні методи розпізнавання.
23. Чи може одна й та ж сукупність спостережень використовуватися як навчальна і як контрольна вибірки? Обґрунтуйте відповідь.
24. Назвіть та опишіть відомі Вам методи групування даних.
25. Проаналізуйте переваги й недоліки алгоритмів “найближчий сусід” і “далекий сусід”. Як вибрати оптимальний алгоритм для групування даних?

в) <u>третій колоквіум</u>

1. Охарактеризуйте синтаксичні методи розпізнавання.
2. Які функції формують блок опису та блок синтаксичного аналізу?
3. Дайте визначення формальної граматики.
4. Що таке формальна мова?
5. Опишіть класифікацію формальних граматик за Хомським.
6. Дайте визначення контекстно-вільної та регулярної граматик?
7. Чи будь-яка автоматна граматика є безконтекстною? Обґрунтуйте відповідь.
8. Дайте визначення дерева граматичного розбору.
9. Охарактеризуйте синтаксичні стратегії розбору “знизу вгору” та “згори вниз”.
10. Що таке плекс-граматики? Для чого вони використовуються?

11. Чому для розпізнавання літер і мови більш доцільно використовувати синтаксичні методи?
12. Чому рукописні літери важче розпізнавати, ніж друковані?
13. Наведіть приклад плекс-граматики, за допомогою якої можна описати декілька довільних літер українського алфавіту.
14. Чи можуть правила підстановок формальних граматик розглядатися як продукції деякої продукційної системи?
15. Як пов'язані стратегії граматичного розбору з бектрекінговими алгоритмами?
16. Наведіть власний приклад опису простих зображень на основі деякої граматики.
17. Охарактеризуйте основні задачі, які розв'язуються на етапі попередньої обробки сигналів та зображень.
18. У чому полягає процес дискретизації?
19. Дайте визначення рівномірної дискретизації?
20. Що таке ланцюговий код Фрімена?
21. Дайте визначення ортонормованої системи функцій та ортогонального перетворення?
22. Як можна отримати ознаки сигналу на основі ортогональних перетворень?
23. Наведіть формули перетворення Фур'є.
24. Охарактеризуйте інтегральне перетворення Карунена-Лоева. У чому полягають його переваги та недоліки?
25. Опишіть базову квадратурну схему інтегрального перетворення Карунена-Лоева.
26. У якому випадку вигідніше застосовувати прямий квадратурний алгоритм, а в якому двоїстий?
27. Охарактеризуйте відомі Вам методи стиснення даних. У чому полягають їх переваги і недоліки?

4. Задачі для самостійного розв'язування

Задача № 1.

- Для заданих значень параметрів нормальних законів розподілу (m_1, σ_1) та (m_2, σ_2), які характеризують два класи об'єктів спостереження a_1 і a_2, визначити умовні за класом густини ймовірності результатів спостережень $f(x|a_1) = f(x, m_1, \sigma_1)$ та $f(x|a_2) = f(x, m_2, \sigma_2)$.
- Побудувати вирішальне правило за критерієм максимальної правдоподібності.
- Розрахувати теоретичні величини ймовірностей помилок розпізнавання першого й другого роду.
- Для заданих значень апріорних ймовірностей p_1 і p_2 появи класів a_1 і a_2 визначити умовні густини повної ймовірності результатів спостережень та апостеріорні ймовірності класів a_1 і a_2.
- Побудувати вирішальне правило за критерієм максимальної апостеріорної ймовірності.
- Розрахувати теоретичні величини ймовірностей помилок розпізнавання першого і другого роду.
- Порівняти ефективності вирішальних правил, побудованих за критерієм максимальної правдоподібності і максимальної апостеріорної ймовірності.

Вихідні дані:

1.1.

m_1	σ_1	m_2	σ_2	p_1	p_2
2	0,5	4	1	0,3	0,7

1.2.

m_1	σ_1	m_2	σ_2	p_1	p_2
0	0,4	2	1	0,4	0,6

1.3.

m_1	σ_1	m_2	σ_2	p_1	p_2
0	1	2	0,8	0,1	0,9

1.4.

m_1	σ_1	m_2	σ_2	p_1	p_2
-2	0,7	0	0,4	0,2	0,8

1.5.

m_1	σ_1	m_2	σ_2	p_1	p_2
-1	0,3	1	0,9	0,6	0,4

1.6.

m_1	σ_1	m_2	σ_2	p_1	p_2
-3	1	-1	0,5	0,9	0,1

1.7.

m_1	σ_1	m_2	σ_2	p_1	p_2
-4	0,5	-1	1,2	0,7	0,3

1.8.

m_1	σ_1	m_2	σ_2	p_1	p_2
3	0,8	5	1	0,8	0,2

1.9.

m_1	σ_1	m_2	σ_2	p_1	p_2
5	1	3	0,6	1/3	2/3

1.10.

m_1	σ_1	m_2	σ_2	p_1	p_2
6	1	2	0,3	0,2	0,8

1.11.

m_1	σ_1	m_2	σ_2	p_1	p_2
7,5	2	2,5	0,5	0,6	0,4

1.12.

m_1	σ_1	m_2	σ_2	p_1	p_2
12	2	8	1	0,3	0,7

1.13.

m_1	σ_1	m_2	σ_2	p_1	p_2
1	0,05	5	0,5	2/5	3/5

1.14.

m_1	σ_1	m_2	σ_2	p_1	p_2
24	2	45	4	0,5	0,5

1.15.

m_1	σ_1	m_2	σ_2	p_1	p_2
15	3	4	1	0,8	0,2

1.16.

m_1	σ_1	m_2	σ_2	p_1	p_2
10	0,1	5	2	7/15	8/15

Задача № 2.

- Для заданих двовимірних результатів спостережень $\xi_i(x_i, y_i)$ двох класів об'єктів a_1 і a_2 за правилом найближчого сусіда провести границі між класами:
  а) за вибірковими значеннями – границю $g_1(x, y) = 0$;
  б) за вибірковим середнім – границю $g_2(x, y) = 0$.
- Побудувати вирішальне правило g_1 та g_2.

- Змоделювати процеси розпізнавання спостережень за вирішальним правилом $\boldsymbol{g_1}$ та $\boldsymbol{g_2}$ і порівняти ефективність класифікаторів за емпіричними оцінками ймовірностей вірних розв'язків.

Вихідні дані:

2.1.

$\{\xi_i\}$	***Клас a₁***			***Клас a₂***		
$\boldsymbol{i}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$\boldsymbol{x_i}$	0	1	3	2	3	5
$\boldsymbol{y_i}$	2	0	1	2	-2	1

2.2.

$\{\xi_i\}$	***Клас a₁***			***Клас a₂***		
$\boldsymbol{i}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$\boldsymbol{x_i}$	0	2	4	2	3	6
$\boldsymbol{y_i}$	2	0	2	2	3	3

2.3.

$\{\xi_i\}$	***Клас a₁***			***Клас a₂***		
$\boldsymbol{i}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$\boldsymbol{x_i}$	0	4	4	0	4	6
$\boldsymbol{y_i}$	0	2	-2	4	0	3

2.4.

$\{\xi_i\}$	***Клас a₁***			***Клас a₂***		
$\boldsymbol{i}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$\boldsymbol{x_i}$	0	1	3	1	3	5
$\boldsymbol{y_i}$	2	0	1	1	-2	1

2.5.

$\{\xi_i\}$	***Клас a₁***			***Клас a₂***		
i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x_i	0	4	8	4	4	6
y_i	0	-2	0	0	2	0

2.6.

$\{\xi_i\}$	***Клас a_1***			***Клас a_2***		
i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x_i	0	2	4	2	4	6
y_i	0	4	2	2	0	2

2.7.

$\{\xi_i\}$	***Клас a_1***			***Клас a_2***		
i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x_i	0	2	4	0	2	6
y_i	2	0	2	4	2	3

2.8.

$\{\xi_i\}$	***Клас a_1***			***Клас a_2***		
i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x_i	-1	0	0	0	2	2
y_i	2	0	2	1	-2	1

2.9.

$\{\xi_i\}$	***Клас a_1***			***Клас a_2***		
i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x_i	-1	0	1	0	1	2
y_i	1	-1	0	0	1	-1

2.10.

$\{\xi_i\}$	***Клас a_1***			***Клас a_2***		
i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x_i	3	5	4	3	5	4
y_i	3	2	2,5	9	9	10

2.11.

$\{\xi_i\}$	***Клас a_1***			***Клас a_2***		
i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x_i	-1	0	1	4	5	6
y_i	0	1	-1	-2	-3	-1

2.12.

$\{\xi_i\}$	***Клас a_1***			***Клас a_2***		
i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x_i	-18	-12	-4	-14	-8	-1
y_i	1	2	4	9	10	8

2.13.

$\{\xi_i\}$	***Клас a_1***			***Клас a_2***		
i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x_i	4	5	8	2	3	9
y_i	4	5	12	1	2	4

2.14.

$\{\xi_i\}$	***Клас a_1***			***Клас a_2***		
i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x_i	1	3	5	2	4	5
y_i	-1	-2	-3	-3	-7	-12

2.15.

$\{\xi_i\}$	***Клас a_1***			***Клас a_2***		
i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x_i	0,5	1	2	0	1	1
y_i	4	3	2	0	1	0

2.16.

$\{\xi_i\}$	***Клас a_1***			***Клас a_2***		
i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x_i	-3	0	4	-2	1	4
y_i	-1	1	-1	-4	-3	-4

2.17.

$\{\xi_i\}$	***Клас a_1***			***Клас a_2***		
i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x_i	1	1	2	3	4	3
y_i	1	5	7	1	4	-6

Задача № 3.

- Для заданих двовимірних результатів спостережень, $\xi_i(x_i,\ y_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, 10$, в умовах повної апостеріорної невизначеності установити міри подібності – обчислити відстані від кожної точки заданої множини ξ_i до всіх інших точок ξ_j, $i \neq j$.
- Установити критерій об'єднання даних d_{min}.
- Виконати групування даних за алгоритмом найближчого сусіда.
- Отримані результати представити графічно.

Вихідні дані:

3.1.

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x_i	0	1	2	3	4	4	6	6	8	8
y_i	3	0	3	1	2	5	2	5	2	6

3.2.

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x_i	0	1	2	2	3	3	4	5	6	6
y_i	2	3	0	3	1	4	5	2	2	3

3.3.

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x_i	0	1	2	2	4	4	4	5	6	6
y_i	2	4	0	4	1	4	5	3	3	4

3.4.

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x_i	1	2	3	3	4	4	5	5	7	8
y_i	3	3	0	4	1	6	3	7	3	4

3.5.

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x_i	0	1	2	3	3	5	5	7	7	8
y_i	1	3	-1	-1	2	0	3	0	3	-1

3.6.

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x_i	0	2	2	4	4	6	6	8	8	9
y_i	2	-1	4	-1	3	0	3	-1	4	1

3.7.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	1	1	2	2	3	3	4	5	6
y_i	0	-1	3	0	2	0	3	1	3	1

3.8.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	2	3	4	5	5	6	6	7	8
y_i	1	4	0	5	1	4	0	1	4	3

3.9.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4
y_i	0	3	1	3	1	4	2	4	1	5

3.10.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	2	3	4	5	6	8	8	9	12
y_i	1	4	6	9	9	11	13	14	16	20

3.11.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	-1	-2	2	3	5	7	8	8	9	9
y_i	-2	-3	-6	-8	-4	0	1	2	4	6

3.12.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2	3	3	3	5	6	8	11	12	15
y_i	0	0	4	7	8	8	9	15	16	19

3.13.

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x_i	-2	2	2	3	0	2	-6	-8	-9	-10
y_i	-2	-2	2	0	0	0	2	4	5	7

3.14.

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x_i	1	3	5	7	9	9	11	12	12	15
y_i	0	0	-2	-4	-3	1	2	3	5	8

3.15.

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x_i	0	4	8	12	12	16	16	20	20	24
y_i	-1	1	2	2	5	7	9	9	12	14

3.16.

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x_i	-1	0	0	1	3	4	9	10	12	15
y_i	-4	-5	-3	3	4	4	2	3	4	4

3.17.

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x_i	-1	0	1	1	3	7	11	12	14	18
y_i	-1	0	1	2	4	5	-1	-2	-5	-7

3.18.

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x_i	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19
y_i	0	0	1	6	6	7	-6	-3	-5	-4

Задача № 4.

- Для заданих значень параметрів нормальних законів розподілу $\boldsymbol{m_1}$, $\boldsymbol{m_2}$ та $\boldsymbol{\sigma}$, які характеризують два класи об'єктів спостереження $\boldsymbol{a_1}$ і $\boldsymbol{a_2}$, визначити умовні густини ймовірності результатів спостережень $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{f(x|a_1) = f(x, m_1, \sigma)}$ та $\boldsymbol{f(x|a_2) = f(x, m_2, \sigma)}$.
- Обчислити поріг прийняття рішення і формалізувати вирішальне правило.
- За допомогою алгоритму генерації нормально розподіленої випадкової величини змоделювати дані спостережень класів $\boldsymbol{a_1}$ і $\boldsymbol{a_2}$; розмір кожного масиву даних $\boldsymbol{N}$ = 100 елементів.
- Для дослідження ефективності алгоритму розпізнавання з нагромадженням даних прийняти діапазон варіювання об'єму контрольної вибірки $\boldsymbol{n}$ = 1, 2, …, 10.
- Для заданого об'єму контрольної вибірки обчислити $\boldsymbol{N}$ = 100 разів достатні статистики для двох класів об'єктів.
- Для заданого об'єму контрольної вибірки розрахувати теоретичні ймовірності помилок розпізнавання першого й другого роду та знайти їхні емпіричні оцінки. Як показники ефективності алгоритму розпізнавання прийняти середнє значення ймовірностей помилок і середнє значення оцінок цих ймовірностей.
- Побудувати графіки залежностей експериментальної і теоретичної ймовірностей помилок від об'єму нагромадження даних $\boldsymbol{n}$.

Вихідні дані:

4.1.

$\boldsymbol{m}_1$	$\boldsymbol{m}_2$	$\boldsymbol{\sigma}$
1	3	2

4.2.

m_1	m_2	σ
1	3	1,5

4.3.

m_1	m_2	σ
2	3	1

4.4.

m_1	m_2	σ
2	3	0,75

4.5.

m_1	m_2	σ
-1	1	1

4.6.

m_1	m_2	σ
-1	1	1,5

4.7.

m_1	m_2	σ
-1	0	1

4.8.

m_1	m_2	σ
-2	-1	0,75

4.9.

m_1	m_2	σ
0	2	0,5

4.10.

m_1	m_2	σ
-2	3	1

4.11.

m_1	m_2	σ
1	2	0,3

4.12.

m_1	m_2	σ
2	4	1

4.13.

m_1	m_2	σ
-3	-1	0,75

4.14.

m_1	m_2	σ
-3	-2	1

4.15.

m_1	m_2	σ
1	4	1

4.16.

m_1	m_2	σ
2	4	1,5

4.17.

m_1	m_2	σ
-3	0	0,5

Задача № 5. На основі формального нейрона створіть комп'ютерну модель одношарового персептрона, який би здійснював розпізнавання образів і класифікацію об'єктів на два класи.

Задача № 6. Задано навчальну вибірку, яка складається з трьох представників класу $\boldsymbol{a_1}$ з координатами **(0; 0)**; **(0; 1)** і **(1; 0)** та двох представників класу $\boldsymbol{a_2}$ з координатами **(1; 1)** і **(0.5; 0.5)**. Класифікуйте об'єкт з координатами **(0.2; 1)** за методом найближчого сусіда.

Задача № 7. Закодуйте графік функції $\boldsymbol{y = 2x^2 + 1}$ на проміжку $\mathbf{[0, 1]}$ ланцюговим кодом Фрімена. Для обидвох координат вибрати однаковий крок, рівний $\mathbf{0.1}$.

Задача № 8. Побудуйте довільну геометричну фігуру. Представте її за допомогою ланцюгового коду Фрімена.

Задача № 9. Методом опорних векторів розділіть класи $\boldsymbol{a_1 = \{x_1\}}$ та $\boldsymbol{a_2 = \{x_2, x_3\}}$, якщо $\boldsymbol{x_1 = (1;\ 1)^T}$, $\boldsymbol{x_2 = (1;\ 2)^T}$, $\boldsymbol{x_3 = (2;\ 3)^T}$.

Задача № 10. Методом опорних векторів розділіть класи $\boldsymbol{a_1 = \{x_1, x_2\}}$ та $\boldsymbol{a_2 = \{x_3\}}$, якщо $\boldsymbol{x_1 = (0;\ 0)^T}$, $\boldsymbol{x_2 = (2;\ 0)^T}$, $\boldsymbol{x_3 = (1;\ 0)^T}$.

Задача № 11. Навчити персептрон розділяти образи на два класи $\boldsymbol{a_1}$ та $\boldsymbol{a_2}$, якщо відомо, що $\boldsymbol{\{x_1, x_2\} \subset a_1}$ і $\boldsymbol{\{x_3, x_4\} \subset a_2}$, де $\boldsymbol{x_1 = (1;\ 0;\ 1;\ 0)^T}$, $\boldsymbol{x_2 = (1;\ 1;\ 1;\ 0)^T}$, $\boldsymbol{x_3 = (0;\ 0;\ 1;\ 1)^T}$, $\boldsymbol{x_4 = (1;\ 1;\ 0;\ 0)^T}$.

Задача № 12. Нехай $\boldsymbol{x_1} = \mathbf{(1;\ \ 1;\ \ -1)}^{\boldsymbol{T}}$, $\boldsymbol{x_2} = \mathbf{(1;\ \ -1;\ \ -1)}^{\boldsymbol{T}}$, $\boldsymbol{x_3} = \mathbf{(-1; -1; -1)}^{\boldsymbol{T}}$, $\boldsymbol{x_4} = \mathbf{(-1; 1; 1)}^{\boldsymbol{T}}$, причому $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{a_1}$; $\boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{x_4} \in \boldsymbol{a_2}$. Потрібно навчити нейрон правильно розпізнавати ці вектори.

Задача № 13. Задано два 6-вимірних еталонних вектори $\boldsymbol{e_1} = \mathbf{(1; 1; 1; 1; -1; 1)}^{\boldsymbol{T}}$ та $\boldsymbol{e_2} = \mathbf{(-1; 1; -1; 1; 1; 1)}^{\boldsymbol{T}}$. За допомогою мережі Хемінга знайти номер еталонного вектора, до якого найближчий вектор $\boldsymbol{x} = \mathbf{(1; 1; 1; 1; -1; -1)}^{\boldsymbol{T}}$.

Задача № 14. Задано вектори-образи $\boldsymbol{x_1} = \mathbf{(0; 0)}^{\boldsymbol{T}}$, $\boldsymbol{x_2} = \mathbf{(1; 0)}^{\boldsymbol{T}}$, $\boldsymbol{x_3} = \mathbf{(0;\ 1)}^{\boldsymbol{T}}$, $\boldsymbol{x_4} = \mathbf{(-1; 0)}^{\boldsymbol{T}}$, $\boldsymbol{x_5} = \mathbf{(0; -1)}^{\boldsymbol{T}}$, причому $\boldsymbol{x_1} \in \boldsymbol{a_1}$; $\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{x_4}, \boldsymbol{x_5} \in \boldsymbol{a_2}$. Побудувати вирішальну функцію методом потенціальних функцій.

Задача № 14. Нехай ознаки в двох класах розподілені за нормальним законом із середніми векторами $\boldsymbol{m_1} = \mathbf{(0; 0)}^{\boldsymbol{T}}$, $\boldsymbol{m_2} = \mathbf{(1; 0)}^{\boldsymbol{T}}$ та коваріаційними матрицями $\boldsymbol{S_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{S_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$. Побудуйте байєсівський класифікатор для випадку однакових апріорних ймовірностей появи класів.

Задача № 15. Нехай ознаки в класах $\boldsymbol{a_1}$ та $\boldsymbol{a_2}$ мають нормальні сферичні розподіли $\boldsymbol{N_1}(\boldsymbol{m_1}; \mathbf{3})$ та $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{m_2}; \mathbf{3})$, відповідно, де $\boldsymbol{m_1} = \mathbf{(1; 1)}^{\boldsymbol{T}}$, $\boldsymbol{m_2} = \mathbf{(2; 4)}^{\boldsymbol{T}}$. Знайти області приналежності до класів, виходячи з байєсівського правила класифікації, якщо платіжна матриця дорівнює $\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, а апріорні ймовірності класів – $\boldsymbol{p_1} = \mathbf{2/5}$, $\boldsymbol{p_2} = \mathbf{3/5}$.

5. Зразки контрольних робіт

Кафедра інформатики та обчислювальної математики

Зразок № 1

Завдання підсумкової контрольної роботи
з навчальної дисципліни "**Теорія розпізнавання образів"**
для підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного
рівня "Магістр" спеціальності "Інформатика"

Структура роботи:

1.	Тестове завдання 1	– 10 балів
2.	Тестове завдання 2	– 5 балів
3.	Теоретичне завдання	– 10 балів
4.	Задачі	– 15 балів
	ВСЬОГО	– 40 балів

Дрогобич
2012

Тестове завдання 1

(*потребує короткої відповіді;*
кожна правильна відповідь оцінюється 1 балом)

1.1. Об'єктом у теорії розпізнавання прийнято називати ____
____
____.

1.2. Інформативні ознаки – це _____________________________
____.

1.3. В основі розпізнавання лежить метапроцедура співставлення зі зразком, яка полягає у _______________
____
____.

1.4. Навчальною вибіркою називається ____________________
____.

1.5. Зважена евклідова відстань між об'єктами обчислюється за формулою _______________________________________.

1.6. Гіпотеза компактності полягає у _______________________
____
____.

1.7. Типова схема системи, яка реалізує синтаксичне розпізнавання, складається з таких основних елементів:
____
____.

1.8. Алгоритм персептрона полягає у ______________________
____
____.

1.9. Формальною граматикою називається _________________
____.

1.10. Основні кроки базового агломеративного групування такі: ____
____
____.

<u>Тестове завдання 2</u>

(*потребує визначення правильної відповіді*;
кожна правильна відповідь оцінюється 0,5 бала)

2.1. Якщо для всіх об’єктів класу a_1 функція $g(x) > 0$, а для всіх об’єктів класу a_2 $g(x) < 0$, то функція $g(x)$ називається

- функцією розподілу;
- розділяючою функцією;
- густиною розподілу;
- параметричною функцією.

Правильна відповідь ___________________.

2.2. Якість групування даних визначається за допомогою

- функцій критерію;
- розділяючих функцій;
- критеріїв максимальної правдоподібності;
- критерію Пірсона.

Правильна відповідь ___________________.

2.3. Множина об’єктів (заданих значеннями ознак), приналежність яких до певного класу достовірно відома “вчителю” і повідомляється ним системі, навчання якої здійснюється, називається

- контрольною вибіркою;
- вирішальним правилом;
- навчальною вибіркою;
- генеральною сукупністю.

Правильна відповідь ___________________.

2.4. Матриця виду $\boldsymbol{S_B = \sum_{i=1}^{k} n_i(\vec{m}_i - \vec{m})^T(\vec{m}_i - \vec{m})}$ називається

- матрицею розсіювання всередині групи;
- матрицею розсіювання між групами;
- загальною матрицею розсіювання;
- оберненою матрицею розсіювання.

Правильна відповідь ___________________.

2.5. Аналого-цифрове перетворення, яке полягає в тому, що аналогова величина реєструється у вигляді набору своїх значень у дискретних точках, називається

- сумуванням;
- дискретизацією;
- лінеаризацією;
- модуляцією.

Правильна відповідь ___________________.

2.6. Теорема Котельникова встановлює:

- максимальну частоту дискретизації, при якій інформація не втрачається;
- якою повинна бути мінімальна частота дискретизації, при якій інформація не втрачається (тобто при якій неперервна функція ще може бути точно відновлена за дискретними даними);
- мінімальну частоту дискретизації, при якій дискретні дані ще можуть бути точно відновлені за неперервною функцією;
- максимальну частоту дискретизації, при якій дискретні дані ще можуть бути точно відновлені за неперервною функцією.

Правильна відповідь ___________________.

2.7. Блок попередньої обробки системи, яка реалізує синтаксичне розпізнавання, призначений для

- виділення атомарних елементів і зв’язків між ними, тобто формування речення, що описує певний об’єкт;
- зменшення шумів;
- граматичного розбору речення та з’ясовування, якою граматикою воно породжується;
- формування граматик, які описують класи.

Правильна відповідь __________________.

2.8. Метод найближчого сусіда можна сформулювати так:

- система розпізнавання зараховує об’єкт до того класу, до якого належить його найближчий сусід з навчальної вибірки;
- система розпізнавання зараховує об’єкт до того класу, до якого належить його найближчий сусід з контрольної вибірки;
- система розпізнавання зараховує об’єкт до того класу, до якого належить його найближчий сусід з генеральної сукупності;
- система розпізнавання зараховує об’єкт до того класу, до якого належить більшість з ***k*** його найближчих сусідів з навчальної вибірки.

Правильна відповідь __________________.

2.9. Основну ідею байєсівських методів розпізнавання можна охарактеризувати так:

- система розпізнавання зараховує об’єкт до того класу, для якого апостеріорна ймовірність приналежності цього об’єкта найбільша;
- система розпізнавання зараховує об’єкт до того класу, для якого апостеріорна ймовірність приналежності цього об’єкта найменша;

- система розпізнавання зараховує об'єкт до того класу, для якого апріорна ймовірність приналежності цього об'єкта найбільша;
- система розпізнавання зараховує об'єкт до того класу, для якого апріорна ймовірність приналежності цього об'єкта найменша.

Правильна відповідь ___________________.

2.10. Сукупність об'єктів, які мають певні спільні ознаки, називають
- класом;
- рядом;
- групою;
- періодом.

Правильна відповідь ___________________.

3. Теоретичне завдання

(*оцінюється 10 балами*)

Методи "найближчий сусід" та "далекий сусід". Проаналізуйте недоліки та переваги цих методів. Як вибрати найоптимальніший алгоритм для групування даних?

4. Задачі

(*оцінюється 15 балами*)

4.1. Для заданих значень параметрів нормальних законів розподілу ($\boldsymbol{m_1 = 0}$, $\boldsymbol{\sigma_1 = 1}$) та ($\boldsymbol{m_2 = 10}$, $\boldsymbol{\sigma_2 = 2}$), які характеризують два класи об'єктів спостереження $\boldsymbol{a_1}$ і $\boldsymbol{a_2}$, визначити умовні за класом густини ймовірності результатів спостережень $\boldsymbol{f(x|a_1) = f(x, m_1, \sigma_1)}$ та

$f(x|a_2) = f(x, m_2, \sigma_2)$. Побудувати вирішальне правило за критерієм максимальної правдоподібності. Розрахувати теоретичні величини ймовірностей помилок розпізнавання першого й другого роду.

4.2. На основі формального нейрона створіть комп'ютерну модель одношарового персептрона, який би здійснював розпізнавання образів і класифікацію об'єктів на два класи.

4.3. Закодуйте графік функції $y = e^x - 1$ на проміжку $[0, 2]$ ланцюговим кодом Фрімена. Для обидвох координат вибрати однаковий крок, рівний **0.1**.

Лектор, доцент О. О. Даньків

Завідувач кафедри інформатики
та обчислювальної математики,
професор І. І. Лазурчак

Завдання виконане студентом _____ курсу, групи ________

____
прізвище, ім'я, по батькові

"____" ____________________ 20___ р. _______________
підпис

Кафедра інформатики та обчислювальної математики

Зразок № 2

Завдання підсумкової контрольної роботи
з навчальної дисципліни “**Теорія розпізнавання образів”**
для підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного
рівня “Магістр” спеціальності “Інформатика”

Структура роботи:

5.	Тестове завдання 1	– 10 балів
6.	Тестове завдання 2	– 5 балів
7.	Теоретичне завдання	– 10 балів
8.	Задачі	– 15 балів
	ВСЬОГО	– 40 балів

Дрогобич
2012

Тестове завдання 1

(*потребує короткої відповіді;*
кожна правильна відповідь оцінюється 1 балом)

1.1. Класом у теорії розпізнавання прийнято називати _______
____.

1.2. Інваріанти класу – це ________________________________
____.

1.3. Основні схеми роботи системи розпізнавання такі: _____
____
____.

1.4. Задача розпізнавання образів як задача прийняття рішення формулюється так: ___________________________
____
____.

1.5. Допустимими або інваріантними перетвореннями називають ______________________________________
____.

1.6. Апостеріорна ймовірність – це ______________________
____
____.

1.7. Лінійна розділяюча функція – це ____________________
____
____.

1.8. Класифікація формальних граматик за Хомським така:
____
____.

1.9. Для опису ліній та контурів зображень застосовуються ланцюгові коди, основна ідея яких полягає у такому:
____
____.

1.10. Рівномірна дискретизація – це _______________________
____
____.

<u>Тестове завдання 2</u>

(*необхідно встановити відповідність*;
кожна правильна відповідь оцінюється 0,5 бала)

<u>2.1.</u> Установіть відповідність:	
1. Матриця розсіювання для $\boldsymbol{i}$-тої групи	А. $\boldsymbol{S_i = \sum_{\vec{x} \in X_i} (\vec{x} - \vec{m}_i)^T (\vec{x} - \vec{m}_i)}$
2. Матриця розсіювання всередині групи	Б. $\boldsymbol{S_T = S_W + S_B}$
3. Матриця розсіювання між групами	В. $\boldsymbol{S_W = \sum_{i=1}^{k} S_i}$
4. Загальна матриця розсіювання	Г. $\boldsymbol{S_B = \sum_{i=1}^{k} n_i (\vec{m}_i - \vec{m})^T (\vec{m}_i - \vec{m})}$

Правильна відповідь: 1 – ___; 2 – ___; 3 – ___; 4 – ___.

<u>2.2.</u> Установіть відповідність:	
1. Робочий режим функціонування системи розпізнавання	А. Оцінка якості навчання та надійності сформованого правила розпізнавання
2. Навчання	Б. Система розпізнавання повинна прийняти рішення про зарахування спостережуваного об'єкта до певного класу
3. Екзамен	В. Формування правила розпізнавання, а також вибір множини інформативних ознак

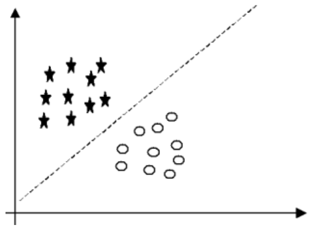
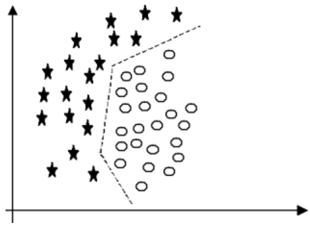
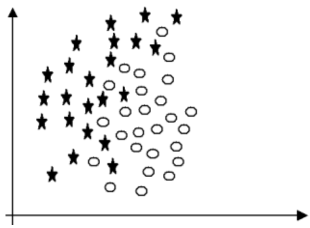
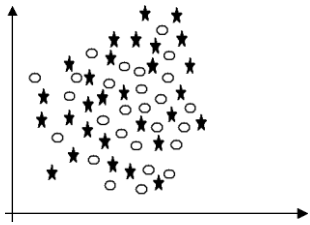
Правильна відповідь: 1 – ___; 2 – ___; 3 – ___.

2.3. Установіть відповідність:	
1. Схема роботи системи розпізнавання “без навчання”	А. Навчальна вибірка може поповнюватися, в тому числі й за рахунок об’єктів, які розпізнавалися в робочому режимі
2. Схема роботи системи розпізнавання “з одноразовим навчанням”	Б. Правило розпізнавання виробляється один раз і надалі не змінюється
3. Схема роботи системи розпізнавання “з періодичним перенавчанням”	В. Правило розпізнавання жорстко задається під час проектування і розробки системи

Правильна відповідь: 1 – ___; 2 – ___; 3 – ___.

2.4. Установіть відповідність:	
1. Дихотомічні ознаки	А. Площа: велика, середня, мала
2. Номінальні ознаки	Б. Відстань: 2 *м*, 4 *м*, 5 *м*
3. Порядкові ознаки	В. Колір: червоний, зелений, синій
4. Кількісні ознаки	Г. Вісь симетрії: є, немає

Правильна відповідь: 1 – ___; 2 – ___; 3 – ___; 4 – ___.

2.5. Установіть відповідність:	
1. Повне перекриття класів	А. 
2. Часткове перекриття класів	Б. 
3. Лінійна роздільність класів	В. 
4. Роздільність класів	Г. 

Правильна відповідь: 1 – ___; 2 – ___; 3 – ___; 4 – ___.

2.6. Установіть відповідність:	
1. Перший крок алгоритму реалізації розпізнавання за методом найближчого сусіда	А. У ПАМ'ЯТЬ заноситься по одному представнику кожного класу
2. Другий крок алгоритму реалізації розпізнавання за методом найближчого сусіда	Б. Після перегляду всіх об'єктів описана процедура повторюється знову, але лише для елементів множини ВІДСІВ. Процедура завершується або при повному вичерпанні ВІДСІВ, або якщо при черговому проходженні жоден об'єкт з ВІДСІВ не перейшов у ПАМ'ЯТЬ
3. Третій крок алгоритму реалізації розпізнавання за методом найближчого сусіда	В. Після завершення роботи алгоритму множина ПАМ'ЯТЬ використовується як скорочена навчальна вибірка
4. Четвертий крок алгоритму реалізації розпізнавання за методом найближчого сусіда	Г. Кожний наступний об'єкт навчальної вибірки класифікується за допомогою правила найближчого сусіда, але при цьому використовуються лише ті об'єкти, які містяться у множині ПАМ'ЯТЬ. Якщо об'єкт класифікується правильно, він переходить у ВІДСІВ, інакше – заноситься в ПАМ'ЯТЬ

Правильна відповідь: 1 – ___; 2 – ___; 3 – ___; 4 – ___.

2.7. Установіть відповідність:	
1. Блок попередньої обробки системи, яка реалізує синтаксичне розпізнавання	А. Призначений для виділення атомарних елементів і зв'язків між ними, тобто формування речення, що описує певний об'єкт
2. Блок формування опису системи, яка реалізує синтаксичне розпізнавання	Б. Здійснює граматичний розбір речення та з'ясовує, якою граматикою воно породжується (якщо таку граматику вдається знайти, система приймає рішення про зарахування об'єкта до відповідного класу)
3. Блок синтаксичного аналізу системи, яка реалізує синтаксичне розпізнавання	В. Призначений для зменшення шумів

Правильна відповідь: 1 – ___; 2 – ___; 3 – ___.

2.8. Установіть відповідність:	
1. Граматичний розбір "згори вниз"	А. Починається з фрази, яка розбирається. Знайдені підланцюжки замінюють на ліві частини відповідних правил підстановки, доки не буде отриманий початковий символ

2. Граматичний розбір “знизу вгору”	Б. Формалізація опису з’єднань між елементами, що можуть мати довільну кількість точок під’єднання
3. Плекс-граматика	В. Послідовно застосовуються підстановки, доки не буде отримана фраза, яка аналізується

Правильна відповідь: 1 – ___; 2 – ___; 3 – ___.

2.9. Установіть відповідність:	
1. Помилка першого роду	А. Прийнята неправильна гіпотеза про класифікацію
2. Помилка другого роду	Б. Відкинута правильна гіпотеза про класифікацію
3. Рівень значущості	В. Ймовірність прийняття неправильної гіпотези про класифікацію
4. Потужність критерію	Г. Ймовірність того, що основна гіпотеза буде відкинута, якщо альтернативна гіпотеза правильна

Правильна відповідь: 1 – ___; 2 – ___; 3 – ___; 4 – ___.

2.10. Установіть відповідність:	
1. Опис класів образів, які розпізнаються	А. Визначення границь класів

2. Визначення оптимальних методів класифікації	Б. Розрахунок величини втрат, пов'язаних з неправильною класифікацією
3. Оцінка достовірності класифікації образів	В. Аналіз вектора ознак
4. Вибір найбільш інформативних ознак, що описують образ	Г. Вибір методів співставлення вектора ознак образа деякому класу

Правильна відповідь: 1 – ___; 2 – ___; 3 – ___; 4 – ___.

3. Теоретичне завдання

(*оцінюється 10 балами*)

Статистичні критерії прийняття рішення. Чим вони відрізняються? У чому їхня схожість? Опишіть, як вибрати найоптимальніше вирішальне правило.

4. Задачі

(*оцінюється 15 балами*)

4.1. Задано результати спостережень ознаки ξ двох класів об'єктів a_1: **(-3; -3)**; **(-1; 4)**; **(0; -2)** та a_2: **(4; -5)**; **(4; 2)**; **(5; 0)**. За правилом найближчого сусіда провести границі між класами:

а) за вибірковими значеннями – границю $g_1(x, y) = 0$;

б) за вибірковим середнім – границю $g_2(x, y) = 0$.

Побудувати вирішальне правило g_1 та g_2.

Змоделювати процеси розпізнавання спостережень за вирішальним правилом g_1 та g_2 і порівняти ефективність класифікаторів за емпіричними оцінками ймовірностей правильних розв'язків.

4.2. Побудувати класифікатор, який би розпізнавав друковані літери українського алфавіту. Система повинна зараховувати об’єкт розпізнавання до однієї з літер українського алфавіту або вказувати, що об’єкт не є літерою українського алфавіту.

4.3. Для заданих значень параметрів нормальних законів розподілу $\boldsymbol{m_1} = \mathbf{-2}$, $\boldsymbol{m_2} = \mathbf{3}$ та $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0{,}5}$, які характеризують два класи об’єктів спостереження $\boldsymbol{a_1}$ і $\boldsymbol{a_2}$, визначити умовні густини ймовірності результатів спостережень $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{f(x|a_1) = f(x, m_1, \sigma)}$ та $\boldsymbol{f(x|a_2) = f(x, m_2, \sigma)}$.

Обчислити поріг прийняття рішення і формалізувати вирішальне правило.

За допомогою алгоритму генерації нормально розподіленої випадкової величини змоделювати дані спостережень класів $\boldsymbol{a_1}$ і $\boldsymbol{a_2}$.

Розрахувати теоретичні ймовірності помилок розпізнавання першого й другого роду та знайти їхні емпіричні оцінки (як показники ефективності алгоритму розпізнавання прийняти середнє значення ймовірностей помилок і середнє значення оцінок цих ймовірностей).

Побудувати графіки залежностей експериментальної і теоретичної ймовірностей помилок від об’єму нагромадження даних.

Лектор, доцент О. О. Даньків

Завідувач кафедри інформатики
та обчислювальної математики,
професор І. І. Лазурчак

Завдання виконане студентом _____ курсу, групи ________

____
прізвище, ім’я, по батькові

“____” ___________________ 20___ р. _______________
підпис

Предметний покажчик

ЛІТЕРАТУРА

1. Вапник В. Н. Теория распознавания образов / В. Н. Вапник, А. Я. Червоненкис. – М. : Наука, 1974. – 418 с.
2. Васильев В. И. Распознающие системы / В. И. Васильев. – К. : Наукова думка, 1983. – 423 с.
3. Васильева И. К. Методы распознавания образов : учебное пособие по лаб. практикуму / И. К. Васильева, П. Е. Ельцов – Х. : Национальный аэрокосмический университет “Харьковский авиационный институт”, 2008. – 56 с.
4. Васильев В. И. Искусственный интеллект: Проблема обучения опознаванию образов / В. И. Васильев, А. И. Шевченко. – Донецк : ДНУ, 1997. – 223 с.
5. Верхаген К. Распознавание образов: состояние и перспективы / К. Верхаген, Р. Дейн. – М. : Радио и связь, 1985. – 104 с.
6. Вороновский Г. К. Генетические алгоритмы, искусственные нейронные сети и проблемы виртуальной реальности / Г. К. Вороновский, К. В. Махотило, С. Н. Петрашев, С. А. Сергеев. – Х. : Основа, 1997. – 112 с.
7. Глібовець М. М. Штучний інтелект / М. М. Глібовець, О. В. Олецький. – К. : Видавничий дім “КМ Академія”, 2002. – 366 с.
8. Горелик А. Л. Методы распознавания / А. Л. Горелик, В. А. Скрипник. – М. : Высшая школа, 1989. – 282 с.
9. Гренадер У. Лекции по теории образов. Том 1. Синтез образов / У. Гренадер. – М. : Мир, 1979. – 383 с.
10. Дубровін В. І. Методи оптимізації та їх застосування в задачах навчання нейронних мереж : навчальний посібник / В. І. Дубровін, С. О. Субботін. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2003. – 136 с.
11. Журавлёв Ю. И. Распознавание. Математические методы. Программная система. Практические применения /

Ю. И. Журавлёв, В. В. Рязанов, О. В. Сенько. – М. : ФАЗИС, 2006. – 244 с.
12. Лепский А. Е. Математические методы распознавания образов / А. Е. Лепский, А. Г. Броневич. – Таганрог : Изд-во ТТИ ЮФУ, 2009. – 155 с.
13. Круглов В. В. Искуственные нейронные сети. Теория и практика / В. В. Круглов, В. В. Борисов. – М. : Горячая линия – Телеком, 2001. – 382 с.
14. Люгер Д. Искусственный интеллект: методы решений сложных проблем / Д. Люгер. – М. : Вильямс, 2003. – 864 с.
15. Рассел С. Искусственный интеллект: современный подход / пер. с англ. / С. Рассел, П. Норвиг. – М. : Вильямс, 2006. – 1408 с.
16. Рідкокаша А. А. Основи систем штучного інтелекту : навчальний посібник / А. А. Рідкокаша, К. К. Голдер. – Черкаси : ВІДЛУННЯ-ПЛЮС, 2002. – 240 с.
17. Симанков В. С. Адаптивное управление сложными системами на основе теории распознавания образов / В. С. Симанков, Е. В. Луценко. – Краснодар : Техническая литература, 1999. – 318 с.
18. Спірін О. М. Початки штучного інтелекту / О. М. Спірін. – Житомир : Видавництво ЖДУ, 2004. – 172 с.
19. Ту Дж. Принципы распознавания образов / Дж. Ту, Р. Гонсалес. – М. : Мир, 1978. – 190 с.
20. Фор А. Восприятие и распознавание образов / А. Фор. – М. : Мир, 1989. – 272 с.
21. Фу К. Структурные методы в распознавании образов / К. Фу. – М. : Мир, 1977. – 320 с.
22. Хант Э. Искусственный интеллект / Э. Хант. – М. : Мир, 1977. – 476 с.
23. Щепин Е. В. Теория информации и распознавание образов / Е. В. Щепин. – М. : Школа Яндекса по анализу данных, 2008. – 180 с.

ДОДАТКИ

Основні функції та команди середовища Mathematica

Abs[z]	повертає абсолютне значення для дійсного числа і модуль для комплексного **z**;
AxesLabel	задає вивід міток для осей координат;
AxesOrigin	вказує точку перетину осей координат;
AxesStyle	задає стиль виводу координатних осей. Ця опція може приймати такі значення: **Thickness[r]** – установлює товщину лінії координатних осей рівною **r** (задається як дробова частина від повної ширини графіка); **Dashing[{r1, r2, …}]** – зображає координатні осі штриховою лінією (лінія утворена штрихами довжиною **r1, r2, …**, які повторюються циклічно; довжина штриха **r** задається як дробова частина від повної ширини графіка); **Hue[r]** – установлює відтінок ліній координатних осей (**r** – це номер відтінку);
Ceiling[x]	повертає значення найменшого цілого числа, більшого або рівного за **x**;

Coefficient[expr, form, n]	повертає коефіцієнт перед **form^n** у виразі **expr**;
Collect[expr, x]	зводить загальні члени виразу **expr** за степенями змінної **x**;
Conjugate[z]	повертає комплексно спряжене з **z** число;
D[f, x]	повертає частинну похідну від функції **f** за змінною **x** $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$;
D[f, {x, n}]	повертає частинну похідну **n**-го порядку від функції **f** за змінною **x** $\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)$;
Det[m]	повертає детермінант (визначник) квадратної матриці **m**;
DigitQ[string]	повертає значення **True**, якщо всі символи стрічки **string** є цифрами від **0** до **9**. У протилежному випадку повертає значення **False**;
Divisors[n]	повертає список цілочисельних дільників числа **n**;
Do[expr, {imin, imax, di}]	обчислює **expr** зі змінною **i**, яка послідовно набуває значень від **imin** до **imax** з кроком **di**;
Dot[a, b, c]	повертає добуток матриць **a**, **b**, **c**;
Drop[A, n]	повертає список **A**, з якого видалені перші **n** елементів;

Eigenvalues[m]	повертає список власних значень квадратної матриці **m**;
Eigenvectors[m]	повертає список власних векторів квадратної матриці **m**;
Expand[expr]	розкриває добутки й додатні цілі степені у виразі **expr**;
ExpToTrig[expr]	перетворює експоненціальний вираз **expr** у тригонометричний;
Factor[poly]	виконує розклад полінома над цілими числами;
Factor[poly, Modulus→p]	виконує розклад полінома за модулем простого **p**;
Factorial[n]	повертає значення факторіала числа **n**;
FindMaximum [f[x], {x, x0}]	виконує пошук локального максимуму функції **f[x]**, починаючи зі значення **x = x0**;
FindMinimum [f[x], {x, x0}]	виконує пошук локального мінімуму функції **f[x]**, починаючи зі значення **x = x0**;
FindRoot [f(x) = = a, {x, x0}]	знаходить числовий розв'язок рівняння **f(x) = a**, починаючи з **x = x0**;
Floor[x]	повертає найбільше ціле число, яке не перевищує значення **x**;
For[start, test, incr, body]	циклічна процедура: спочатку один раз обчислюється вираз **start**, а потім, за чергою, обчислюються вирази **body** і **incr** доти, доки умова **test** не

	перестане давати логічне значення **True**. Коли це трапиться, тобто коли **test** дасть **False**, цикл завершується;
GCD[n1,n2,…]	повертає найбільший спільний дільник цілих чисел **n1,n2,…**;
IdentityMatrix[n]	повертає одиничну матрицю розміру **n × n**;
If[умова, серія команд 1, серія команд 2]	повертає результат розрахунку **серії команд 1**, якщо результатом обчислення умови є **True**, і **серії команд 2**, якщо результат рівний **False**;
Im[z]	повертає уявну частину комплексного числа **z**;
Insert[A, el, n]	додає елемент **el** в позицію **n** списку **A**;
Integrate[f, x]	повертає первісну (невизначений інтеграл) від функції **f** по змінній **x**;
Integrate[f, {x, xmin, xmax}]	повертає значення визначеного інтегралу $\int\limits_{x\,\min}^{x\,\max} f dx$;
IntegerQ[expr]	повертає **True**, якщо **expr** є цілим числом. У протилежному випадку повертає значення **False**;
InterpolatingPolynomial [data, var]	повертає поліном зі змінною **var**, значення якого у вузлових точках точно збігаються з

	даними зі списку **data**, який переважно має вигляд {{**x1, y1**}, {**x2, y2**}, **...**};
Inverse[m]	знаходить обернену матрицю для квадратної матриці **m**;
LCM[n1, n2, …]	повертає найменше спільне кратне цілих чисел **n1, n2, …**;
Length[A]	повертає довжину одномірного списку **A** або число розмінностей у випадку багатомірного списку **A**;
LetterQ[string]	повертає значення **True**, якщо всі символи **string** є буквами. У протилежному випадку повертає значення **False**;
Limit [f(x), x→x0]	знаходить $\lim\limits_{x \to x0} f(x)$ границю функції $f(x)$ при $x \to x0$;
ListPlot[{{**x1, y1**}, {**x2, y2**}, **…**}**]**	будує графік функції на точках **{x1, y1}, {x2, y2}**, **…**;
ListQ[expr]	повертає значення **True**, якщо **expr** є списком. У протилежному випадку повертає значення **False**;
LowerCaseQ[string]	повертає значення **True**, якщо всі символи **string** є малими літерами (літерами нижнього регістра). У протилежному випадку повертає значення **False**;

MatchQ[expr, form]	повертає значення **True**, якщо модель **form** відповідає **expr**. У протилежному випадку повертає значення **False**;
MatrixPower[m, n]	повертає **n**-ту степінь матриці **m**;
Max [x1, x2, x3, x4, …]	повертає найбільше з **x1, x2, x3, x4, …**;
Min [x1, x2, x3, x4, …]	повертає найменше з **x1, x2, x3, x4, …**;
Negative[x]	повертає **True**, якщо **x** є від’ємним числом. У протилежному випадку повертає значення **False**;
NumberQ[expr]	повертає **True**, якщо **expr** є числом. У протилежному випадку повертає значення **False**;
OddQ[expr]	повертає **True**, якщо **expr** є непарним цілим числом. У протилежному випадку повертає значення **False**;
Plot[f(x), {x, x_{min}, x_{max}}]	повертає графік функції **f(x)**, аргумент якої **x** змінюється в інтервалі від x_{min} до x_{max};
Plot3D[f(x, y), {x, x_{min}, x_{max}}, {y, y_{min}, y_{max}}]	повертає графік функції **f(x, y)**, аргумент якої **x** змінюється в інтервалі від x_{min} до x_{max}; аргумент **y** змінюється в інтервалі від y_{min} до y_{max};

PlotJoined → True	з'єднує точки графіка плавною лінією;
PlotStyle	задає стиль ліній та точок графіка. Ця опція може приймати такі ж значення, як і опція **AxesStyle**;
PointSize[d]	установлює діаметр точок графіка рівним **d** (задається як дробова частина від повної ширини графіка);
PolynomialQuotient [p, q, x]	повертає цілу частину від ділення поліномів **p** та **q** від **x**, ігноруючи остачу;
PolynomialRemainder [p, q, x]	повертає остачу від ділення поліномів **p** та **q** від **x**;
Position[A, form]	повертає номер позиції елемента **form** в списку **A**;
Positive[x]	повертає **True**, якщо **x** є додатнім числом. У протилежному випадку повертає значення **False**;
PrimeQ[expr]	повертає **True**, якщо **expr** є простим числом. У протилежному випадку повертає значення **False**;
Product[f, {i, imin, imax, di}]	обчислює добуток значень **f[i]** для значень **i** від **imin** до **imax** з кроком **di**;
Re[z]	повертає дійсну частину комплексного числа **z**;

Roots[a0 + a1*x + a2*x^2 + … + an*x^n = = 0, x]	обчислює корені поліноміальних рівнянь. Результат повертається у вигляді: **x = = x1 || x = = x2 || … || x = = xn**;
Round[x]	заокруглює **x** до найближчого цілого;
Series [f[x], {x, x0, n}]	повертає суму перших **n+1** членів розкладу функції ***f***(***x***) в ряд Тейлора в околі точки **x0**;
Show[a1, a2, a3, …]	комбінує на одному рисунку декілька графічних об'єктів **a1, a2, a3, …**;
Simplify[expr]	виконує послідовність алгебраїчних перетворень над виразом **expr** і повертає найпростішу із знайдених форм;
Solve [f(x) = = a, x]	знаходить корінь ***x*** рівняння з одних невідомим ***f***(***x***) **=** ***a***. Розв'язок повертається у вигляді: {{$x \to x$**0**}};
Solve [f(x, y, z, …) = = a, { x, y, z, …}]	розв'язує рівняння з багатьма невідомими. Результат повертається у вигляді списку: {{ $x \to x$**0**, $y \to y$**0**, $z \to z$**0**, **…**}};
Sort[A]	сортує елементи списку **A** в канонічному порядку;
Sum[f, {i, imin, imax, di}]	обчислює суму значень **f** при зміні значення індекса **i** від **imin** до **imax** з кроком **di**;

Table[expr, {i, i_{min}, i_{max}}, {j, j_{min}, j_{max}}]	генерує вкладений список (матрицю значень);
Take[A, n]	повертає перші **n** елементів списку **A**;
Transpose[m]	повертає транспоновану матрицю **m**;
TrigToExp[expr]	перетворює тригонометричний вираз **expr** до експоненціального вигляду;
VectorQ[expr]	повертає **True**, якщо **expr** є списком, але жоден з його елементів в той же час не є списком. У протилежному випадку повертає значення **False**;
While[test, body]	виконує **body** доти, доки **test** не перестане давати логічне значення **True**.

Навчально-методичне видання

Теорія розпізнавання образів

Методичні матеріали до самостійної роботи

Редакційно-видавничий відділ
Дрогобицького державного педагогічного університету
імені Івана Франка

Головний редактор
Ірина Невмержицька

Редактор
Іванна Біблий

Технічний редактор
Наталя Кізима

Коректор
Світлана Бецко

Здано до набору __________ .   Підписано до друку __________ .
Формат 60×84/16. Папір офсетний. Гарнітура Times. Наклад ___ прим.
Ум. друк. арк. _____ . Зам. ______ .

Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 2155 від 12.04.2005).

82100 Дрогобич, вул. І. Франка, 24, к. 43, тел. 2-23-78.