

Дрогобицький державний педагогічний університет  
імені Івана Франка

**Василь БОЙЧУК, Ігор БЛІНСЬКИЙ, Роман ЛЕШКО**

# **ЕЛЕКТРОДИНАМІКА**

**Частина 1**

**Тексти лекцій**

**Дрогобич  
2013**

УДК 53.537  
ББК 22.313

**Бойчук В. І., Білинський І. В., Лешко Р. Я.**  
**Електродинаміка. Частина 1:** тексти лекцій [для студентів фізичних спеціальностей]. — Дрогобич :  
Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, 2013. — 96 с.

Посібник написано відповідно до програми навчальної дисципліни «Теоретична фізика» розділу «Електродинаміка» освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр» галузі знань 0402. «Фізико-математичні науки» напряму підготовки 6.040203. «Фізика», затвердженої вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. У посібнику розкриваються основи макроскопічної електродинаміки та електродинаміки матеріального середовища. Містить теоретичний матеріал та набір задач з детальними розв'язками. Рекомендується вчителям фізики і студентам денної та заочної форми навчання фізико-математичних факультетів педагогічних університетів.

Бібліографія 17 назв

**Рецензенти:**

**Маханець Олександр Михайлович**, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри теоретичної фізики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича;

**Вірт Ігор Степанович**, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри машинознавства та матеріалознавства Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Відповідальний за випуск: проф. Бойчук Василь Іванович, д. ф.-м. н., завідувач кафедри теоретичної фізики та МВФ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Редактор: \_\_\_\_\_

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка як навчальний посібник  
(протокол № 6 від 23.05 2013 р.)

## Зміст

<b>Вступ</b>	<b>4</b>
<b>Основи теорії електромагнітного поля (макроскопічна електродинаміка)</b>	<b>11</b>
<b>Розділ I. Повна система рівнянь Максвелла-Лоренца</b>	<b>11</b>
§1. Закон Кулона. Напруженість електростатичного поля	11
§2. Поле об'ємних, поверхневих і лінійних зарядів в однорідному середовищі	13
§3. Теорема Остроградського-Гауса	15
§4. Сила Лоренца і магнітне поле рухомих зарядів	18
§5. Принцип суперпозиції магнітного поля. Закони Біо-Савара-Лапласа. Закон Ампера	20
§6. Перші рівняння Максвелла-Лоренца. Силові лінії електричного поля	22
§7. Закон збереження заряду	24
§8. Інтегральна й диференціальна форма рівняння для циркуляції магнітного поля з врахуванням струму зміщення	25
§8. Соленоїдальність магнітного поля	28
§9. Закон електромагнітної індукції Фарадея	29
<b>Розділ II. Електродинаміка матеріального середовища</b>	<b>31</b>
§10. Мікроскопічні та макроскопічні поля	31
§11. Поляризація речовини в електричному полі. Вектор поляризації	33
§12. Середнє значення густини струму. Вектор намагнічення	35
§13. Система граничних умов. Неоднорідність середовища	41
§14. Закон збереження енергії в електромагнітному полі	45
§15. Закон збереження імпульсу в електромагнітному полі	48
<b>Питання і тести для самоконтролю</b>	<b>51</b>
<b>Приклади розв'язування задач</b>	<b>56</b>
<b>Предметний покажчик</b>	<b>91</b>
<b>Основні та додаткові літературні джерела</b>	<b>93</b>

## Вступ

Класична електродинаміка є другим з чотирьох розділів курсу теоретичної фізики, який містить також класичну механіку, квантову механіку, статистичну фізику й термодинаміку.

У фізиці відомі чотири види фундаментальних взаємодій: гравітаційна, електромагнітна, сильна та слабка. Надзвичайно велике значення для формування фізичних властивостей речовини має електромагнітна взаємодія. При заданій будові ядер вона визначає структуру атомів і молекул, їхню взаємодію між собою, а отже, і фізичні властивості конденсованого середовища: кристалів, рідин, плазми і т.д. Практично всі сили, відомі в фізиці і техніці (тиск, пружні сили, сили в'язкості і тертя), мають електромагнітне походження. Основним об'єктом вивчення електродинаміки є електромагнітне поле і його взаємодія з речовиною. Джерело електромагнітного поля — заряджені частинки. Стан цих частинок та їхня взаємодія визначаються певним електромагнітним полем. Тому повна система рівнянь теорії електромагнітних взаємодій представляє собою систему рівнянь руху частинок і електромагнітного поля. В основі будь-якої фізичної теорії (класичної або квантової) лежать фундаментальні закони, отримані експериментальним шляхом. Фундаментальні закони можна поділити на дві групи. Одна з них формулюється словесно і записується у вигляді математичної формули, друга формулюється у вигляді принципів, але без математичного запису.

Класична електродинаміка ґрунтується на трьох фундаментальних законах: 1) Кулона; 2) Біо-Савара-Ампера-Лапласа-Ерстеда; 3) Фарадея; принципі суперпозиції; твердженні про те, що електричний струм, який є джерелом магнітної сили — це рух зарядів; заряди також є джерелом електричної сили.

Класична електродинаміка тісно пов'язана з релятивістською теорією. По-перше, тому, що класична електродинаміка з самого початку була релятивістськи інваріантною, хоча Максвелл цього і не знав, а по-друге — історично та і логічно релятивістська теорія могла виникнути лише при вивченні електромагнітних явищ.

Весь розвиток вчення про електричні та магнітні явища наштовхує на думку про реальність існування електромагнітного

поля. Електромагнітне поле характеризується тим, що діє на рухомі та нерухомі заряди з деякими силами. Залежно від того, як проявляється дія електромагнітного поля, воно умовно може розглядатися як магнітне, яке діє лише на рухомі в заданій системі відліку заряди, або на електричне, що діє на нерухомі заряди. Звісно, це не означає, що електричне поле не діє на рухомі заряди. Розділення електромагнітного поля на електричне та магнітне відносне і залежить від вибору системи відліку. Тому в загальному випадку правильніше говорити про єдине електромагнітне поле.

Електричні заряди є властивістю речовини або частинок. Будь-який заряд (заряджена частинка), що рухається, охоплена електромагнітним полем. Існує і вільне електромагнітне поле, не зв'язане з зарядами. Це так звані електромагнітні хвилі. Вільне поле у будь-якій системі відліку складається з електричного та магнітних складових поля, розповсюджується у вакуумі з швидкістю  $c=3 \cdot 10^8$  м/с. Швидкість розповсюдження електромагнітного поля у вакуумі завжди однакова і не залежить від рівномірного й прямолінійного руху системи відліку. Електричні заряди мають атомістичну структуру. Досвід показує, що всі «елементарні» заряджені частинки (електрони, позитрони, протони і т. д.) мають заряд  $\pm e$ , де  $e=4,8 \cdot 10^{-10}$  одиниць заряду СГСЕ, або  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Заряд частинки розподілений в малому об'ємі. Здебільшого заряди елементарних частинок можна вважати точковими. Кажуть, що заряди дискретні.

На відміну від зарядів, електромагнітне поле розподілено в просторі неперервно. У цьому полягає одна з суттєвих відмінностей поля від частинок в класичній (не квантовій) фізиці. Згідно з сучасними уявленнями, частинки характеризуються неперервними («хвильовими») властивостями і, навпаки, поле характеризується дискретними властивостями. Ці нові «квантові» властивості поля і частинок не входять у сферу явищ, які вивчає класична електродинаміка, і їх не розглядатимемо. У класичній теорії рух частинок характеризують рівняннями руху Ньютона. Властивості ж поля — рівняннями поля. Рівняння поля у вакуумі називається рівняннями *Максвелла-Лоренца* (МЛ). В основі рівнянь поля лежить сформульований Фарадеєм принцип близькодії, який, з врахуванням сучасних понять, зводиться до такого:

а) електромагнітне поле в заданій точці простору та визначений момент часу задається значеннями поля в нескінченно близьких точках простору в нескінченно близькі попередні моменти часу;

б) сила, з якою електромагнітне поле діє в заданий момент часу на заряд, що розміщений в заданій точці простору, визначається значенням поля в цей момент у цій точці і швидкістю заряду в цей момент.

З принципу близькодії випливає, що електромагнітне поле повинно характеризуватися диференціальними рівняннями у частинних похідних.

Зазначимо, що рівняння поля, як і рівняння руху частинок, відомі лише наближено. Розділення матерії на два види (частинки і поля) досить умовне і ґрунтується на тому, що обидва види матерії порівняно слабо взаємодіють один з одним. Тому можливе вивчення частинок незалежно від поля (механіка) і вивчення поля незалежно (або майже незалежно) від частинок (електродинаміка).

Рівняння поля і рівняння руху характеризують два види єдиної матерії. Це наптовхує на думку, що одні і другі рівняння є лише частинними випадками загальних рівнянь руху єдиної матерії (рівняння майбутньої квантової теорії матерії). Тому виявлення особливих властивостей в одного з видів матерії, наприклад, у поля, примушує шукати ті ж властивості у другого виду (частинок) і змінювати рівняння їхнього руху так, щоб включити нові відкриті властивості.

Розвиток учення про рух частинок і поля так і відбувався, хоча необхідність такого зв'язку поля і частинок була зрозумілою лише після встановлення матеріальності поля. Рух частинок, як показує механіка, підкоряється законам збереження енергії, імпульсу і моменту імпульсу. Оскільки електромагнітне поле є видом матерії, то воно також повинно мати енергію, імпульс, момент імпульсу. Мають існувати і відповідні закони збереження для поля. Специфіка поля, яка полягає в його неперервності, відображається у тому, що закони збереження для поля приймали більш складну математичну форму. Крім «механічних» законів збереження, в електродинаміці враховується ще й закон збереження електричного заряду.

Електромагнітне поле, пов'язане з окремими зарядженими частинками, називається *мікроскопічним*. Поле, що існує в присутності макроскопічної речовини, називається *макроскопічним*.

Мікроскопічне поле характеризується векторами напруженості поля. Вектор напруженості електричного поля і вектор напруженості магнітного поля підкоряються рівнянням Максвелла-Лоренца. Обґрунтування рівнянь поля можна виконати різними способами залежно від вибору системи основних дослідних фактів. У цьому курсі за основу взято сили, що діють на квазіточковий заряд в електричному й магнітному полях, і вирази для напруженостей електромагнітного поля, яке створене рухомим квазіточковим зарядом.

Запропонований курс «Електродинаміка» складається з трьох частин. У першій частині на основі експериментальних даних про взаємодію точкових зарядів між собою, точкових рухомих зарядів і зовнішнього магнітного поля встановлюються рівняння поля (тобто рівняння МЛ). На основі рівняння МЛ визначаються основні властивості електричного та магнітного полів, розглядаються конкретні випадки розрахунку цих полів при заданих розподілах зарядів у просторі та їх швидкостях. Вивчається також випадок розповсюдження електромагнітних хвиль у просторі, основні характеристики цих хвиль, особливості їхнього розповсюдження в просторі.

Друга частина курсу присвячена вивченню впливу матеріального середовища на електромагнітне поле. Показано, що поле в середовищі відрізняється від поля у вакуумі, і для одержання значення основних характеристик поля в середовищі необхідно усереднити мікроскопічне поле. Одержуються рівняння МЛ для поля в речовині і на їхній основі вивчаються основні властивості електромагнітних хвиль у різних середовищах.

У третій частині розглядається теорія відносності. Її виклад здійснено разом з електродинамікою не випадково. По-перше, виникнення цієї теорії історично пов'язане з електродинамікою. По-друге, електродинаміка є історично першою релятивістськи інваріантною теорією. По-третє, електродинаміка дає багато прикладів застосування теорії відносності, що дає можливість

найбільш чітко бачити фізичний зміст формул і тверджень теорії відносності.

Згідно з сучасними уявленнями, в природі існують елементарні частинки і системи, що мають складну структуру, і побудовані з елементарних частинок. Це атоми й молекули. Їх прийнято називати мікрочастинками та мікросистемами. Тіла, що складаються з великої кількості атомів, — макросистемами.

Однією з найважливіших характеристик мікрочастинок є закон взаємодії між ними. Мікрочастинки можуть взаємодіяти, перебуваючи на деякій відстані одна від одної. Відомо, що між мікрочастинками існує декілька різних видів взаємодії — електромагнітна, гравітаційна, сильна та слабка. Усі інші, відомі на сьогодні взаємодії, зводяться до них. Наприклад, сили в'язкості та інші зводяться до електромагнітних сил.

Сили тяжіння, що діють між зарядами мікрочастинок малі порівняно з електричними силами, що діють між ними. Наприклад, між двома електронами, що знаходяться на відстані  $r$ , діє гравітаційна сила притягання:

$$F_T = G \frac{m_0^2}{r^2},$$

де  $G = 6.7 \cdot 10^{-11} \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$  — гравітаційна стала, а  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} кг$  — маса електрона. З іншого боку, між електронами діє електрична сила відштовхування:

$$F_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

де  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} Кл$  — заряд електрона, а  $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} Ф/м$  — діелектрична проникливість вакууму. З наведених рівнянь можна знайти відношення  $F_e / F_T$ :

$$\frac{F_e}{F_T} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m_0^2} \approx 10^{43}.$$

Отже, гравітаційна взаємодія між двома електронами дуже мала порівняно з електричною взаємодією між ними. Очевидно, що в області взаємодій елементарних частинок сили тяжіння практично ніякої ролі не відіграють. Вони суттєві лише при взаємодії нейтральних мас достатньо великих розмірів.



Наприклад, вони відіграють основну роль при взаємодії астрономічних об'єктів.

Закон дії ядерних сил, зумовлених сильною взаємодією, до цього часу точно не визначений, але властивості ядерних сил вивчені детально. Відомо, що ці сили є короткодійними. Їхня дія проявляється лише при зближенні нуклонів на відстань порядку  $10^{-15}$  м. На цих відстанях ядерні сили в багато разів більші від електромагнітних. Однак вони швидко зменшуються зі збільшенням відстані і стають набагато меншими порівняно з електричними силами. Тому ядерні сили суттєві лише при взаємодії елементарних частинок, що знаходяться на малих відстанях. Зокрема, вони відіграють основну роль в утворенні ядер речовини. Слабка взаємодія проявляється при взаємному перетворенні частинок одна в одну. При віддаленні частинок одна від одної вона ніякої ролі не грає.

Отже, з чотирьох відомих взаємодій лише електромагнітна взаємодія дає можливість керувати рухом заряджених частинок. Завдяки цьому роль електромагнітних сил в сучасній науці надзвичайно велика.

Одне з головних завдань, що стоїть тепер перед наукою, — це проблема керування термоядерних реакцій. Ця проблема на сьогодні в своїй основній частині є електродинамічною проблемою і зводиться до використання електромагнітних полів як «резервуарів», у яких могла би втримуватися гаряча плазма. Отже, можна образно сказати, задача зводиться до використання магнітного поля як будівельного матеріалу.

Важливу роль в майбутніх космічних польотах повинні відігравати іонні і плазмові реактивні двигуни. При створенні таких двигунів електродинамічні проблеми відіграють головну роль.

Немає необхідності говорити про ті різноманітні застосування електромагнітних явищ, які сьогодні міцно увійшли в практику, — електротехнічні, радіотехнічні, електронні та інші прилади й пристрої, що базуються на законах електродинаміки.

Електродинамічні явища відіграють велику роль і в астрономічних явищах. Магнітні поля, що існують в міжзоряному просторі, прискорюють космічні заряджені частинки. Спалахи на Сонці супроводжуються суттєвою зміною магнітного поля біля поверхні Сонця. Магнітне поле Землі втримує біля Землі

заряджені частинки, завдяки чому створюються радіаційні пояси. Отже, електромагнітні явища необхідно приймати до уваги також і при розгляді космічних проблем.

# Основи теорії електромагнітного поля (макроскопічна електродинаміка)

## Розділ I. Повна система рівнянь Максвелла-Лоренца

### §1. Закон Кулона. Напруженість електростатичного поля

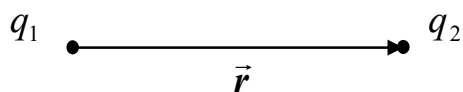
Електромагнітне поле — основний об'єкт, який вивчається в електродинаміці. Електричні та магнітні поля тісно пов'язані одне з одним і утворюють електромагнітне поле. Але у випадку стаціонарних (які з часом не змінюються) полів, електричне та магнітне поле можна розглядати окремо. Ми починаємо з розгляду електростатичного поля у вакуумі.

Основним емпіричним законом, на якому ґрунтується електростатика, є закон взаємодії між точковими зарядами (*закон Кулона*). Поняття точкового заряду є такою ж абстракцією, як і поняття матеріальної точки в механіці. Ми вважаємо заряджене тіло *точковим*, якщо його лінійні розміри малі порівняно з відстанями до досліджуваних точок поля, яке зумовлене зарядом тіла.

*Закон Кулона* стверджує: якщо два точкові заряди  $q_1$  і  $q_2$  нерухомі, то вони взаємодіють між собою з силою, яка прямо пропорційна їхньому добутку і обернено пропорційна квадрату відстані між ними:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^3} \vec{r}, \quad (1)$$

і напрямлена по лінії, що з'єднує ці заряди, де  $k$  — коефіцієнт пропорційності, який залежить від системи, в якій ми працюємо ( в SI —



$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \epsilon_0 \text{ — діелектрична}$$

проникність вакууму  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2 \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^3} \left( \frac{\Phi}{\text{м}} \right)$ ; в (СГСЕ —  $k=1$ ),

$\epsilon$  — діелектрична проникність середовища.

Діелектрична проникність показує, у скільки разів зменшується силова взаємодія між зарядами при заповненні

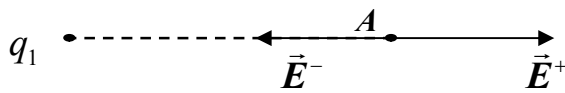
всього поля однорідним середовищем у порівнянні з взаємодією тих самих зарядів у вакуумі, де  $\epsilon=1$ .

Основною (силовою) характеристикою електростатичного поля є *напруженість* поля  $\vec{E}$ . Напруженість поля — векторна величина, що пов'язана з силовою дією поля на заряди, які вносять в нього.

Для дослідження поля в нього вносять пробний заряд. Вважають, що він є достатньо малим, точковим та позитивно зарядженим. Позначимо величину пробного заряду через  $q$  і нехай в точці спостереження поле діє на нього з силою  $\vec{F}$ . Тоді напруженість поля  $\vec{E}$  в точці спостереження визначається співвідношенням:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} \vec{r}. \quad (2)$$

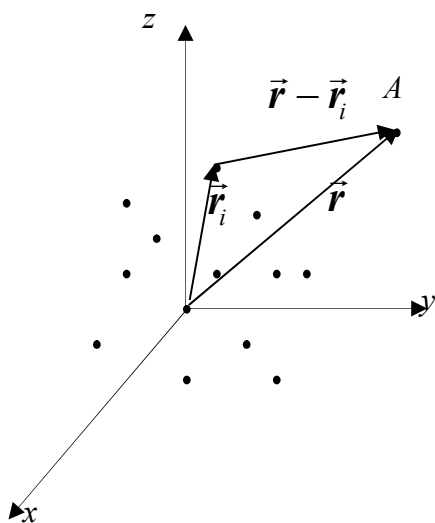
Отже, напруженість поля  $\vec{E}$  в точці спостереження — вектор, що чисельно дорівнює силі, з якою поле в заданій точці діє на внесений в нього одиничний пробний заряд, і збігається за напрямком з цією силою. Напруженість характеризує будь-яку точку поля (крім самої точки) незалежно від знаходження в ньому пробного заряду.



Якщо поле утворене декількома точковими зарядами, то результуюча напруженість поля в точці спостереження знаходиться як векторна сума напруженостей, які зумовлені окремими зарядами:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n. \quad (3)$$

Співвідношення (3) виражає принцип суперпозиції електричних полів, що справедливий в усіх випадках (незалежно від характеру розподілу зарядів).



Розглянемо випадок сукупності  $N$  точкових зарядів. Визначимо напруженість  $i$ -го заряду в точці спостереження  $A$ . Для цього зобразимо систему координат та позначимо вектори, які з'єднують з початком

координат  $i$ -ий заряд та точку спостереження  $A$ . Тоді, згідно з формулою (2), отримаємо:

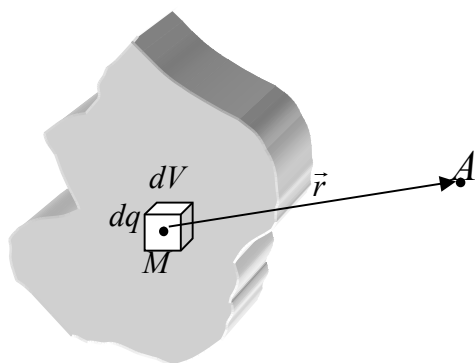
$$\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (4)$$

Напруженість сукупності дискретних зарядів, крім точки  $\vec{r} = \vec{r}_i$ , визначається співвідношенням:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (5)$$

Формула (5) є важливою для випадку, який розглянуто в наступному параграфі.

## §2. Поле об'ємних, поверхневих і лінійних зарядів в однорідному середовищі

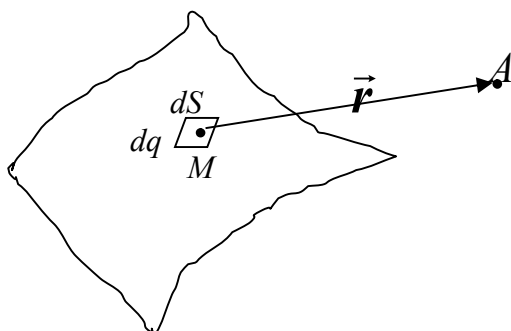


Часто буває фізична ситуація, коли вивчається не окремий точковий заряд, оскільки заряд  $q$  розподілений в об'ємі  $V$ . При цьому необхідно визначити напруженість поля, яку створює цей заряд у будь-якій точці спостереження, що лежить за межами вказаного

об'єму. Тоді весь об'єм розбивають на маленькі об'єми  $\Delta V$  такі, щоб він і його заряд  $\Delta q$  можна було вважати точковими. Вводимо поняття *об'ємної густини заряду*:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}. \quad (1)$$

Якщо ж заряди розміщені не в просторі, а на площині, то зручно ввести *поверхневу густину заряду*:

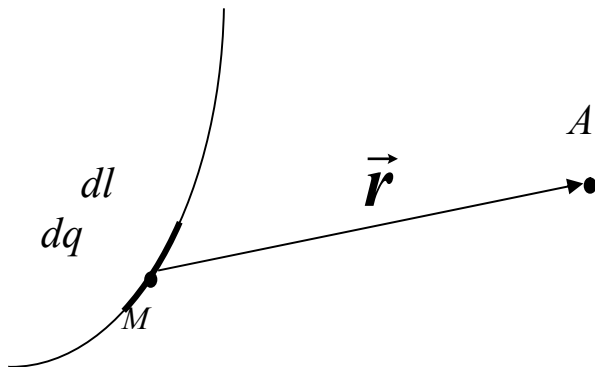


$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}. \quad (2)$$

Прикладом може служити заряджене провідне тіло, у якому заряди розподілені в

надзвичайно тонкому поверхневому шарі.

Лінійний розподіл зарядів — чергова абстракція, прикладом якої може служити заряджений провідник. Міркуючи аналогічно до попередніх випадків, вводимо *лінійну густину заряду*:



$$k = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}. \quad (3)$$

У попередньому параграфі ми розглядали точкові заряди (див. формулу (5) §1). Для визначення напруженості неперервної області весь об'єм (площу, довжину) розбивають на елементарні об'єми (площі, довжини) і розглядають його як точковий заряд. Далі проводять заміну  $q_i \rightarrow dq$ , а підсумовування замінюють інтегруванням. Тоді (5) з попереднього параграфа переписеться у вигляді:

тарні об'єми (площі, довжини) і розглядають його як точковий заряд. Далі проводять заміну  $q_i \rightarrow dq$ , а підсумовування замінюють інтегруванням. Тоді (5) з попереднього параграфа переписеться у вигляді:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dV', \quad (4)$$

де  $\vec{r}'$  — радіус-вектор будь-якої точки об'єму,  $\vec{r}$  — радіус-вектор точки, де вимірюється напруженість,  $dV' = dx'dy'dz'$  — елемент об'єму в декартовій системі координат.

Напруженість поля, що зумовлена зарядами всієї поверхні, повинна зображатись поверхневим інтегралом:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dS'. \quad (5)$$

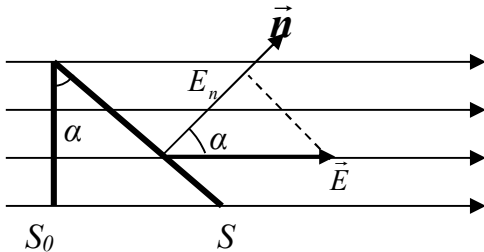
Аналогічно, з врахуванням лінійної густини зарядів, напруженість поля матиме вигляд:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{l'} \frac{k(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dl'. \quad (6)$$

Формули (4) – (6) часто використовують при розв'язуванні задач електростатики.

### §3. Теорема Остроградського-Гауса

Існує інший підхід для знаходження напруженості електростатичного поля. Розглянемо це питання детальніше.



Обчислимо потік вектора напруженості електричного поля  $\vec{E}$ , що створене зарядами, через довільну замкнену поверхню  $S$ . Для простоти розглянемо точковий заряд  $q$ . Помістимо початок системи координат у точку знаходження заряду. Вважаємо заряди

нерухомими і розглянемо замкнену поверхню, яка охоплює заряд.

Згадаємо коротко введені в курсі методів математичної фізики декілька понять. *Силовую лінією поля* називається така лінія, у кожній точці якої вектор напруженості є дотичним до неї. У найпростішому випадку прямої силовій лінії вектор  $\vec{E}$  збігається з нею. Силові лінії починаються на позитивних зарядах і закінчуються на негативних. Нехай  $S_0$  — плоска поверхня, яка перпендикулярна до ліній однорідного поля  $\vec{E} = const$ . Вводимо поняття загальної кількості ліній — потік ліній  $N$ , які пронизують поверхню  $S_0$ :

$$N = E S_0. \quad (1)$$

Нехай  $S$  — інша площа, яка нахилена відносно  $S_0$  на кут  $\alpha$ . Будуємо нормаль до  $S$  у напрямку поля. Очевидно:

$$S_0 = S \cos \alpha = S \cos(\vec{E}, \vec{n}). \quad (2)$$

Потік через  $S$  і  $S_0$  однаковий, тому з рівнянь (1) і (2) випливає:

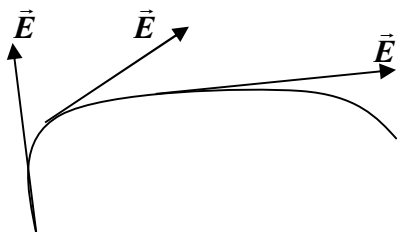
$$N = E \cdot S_0 = ES \cos(\vec{E}, \vec{n}) = E_n S. \quad (3)$$

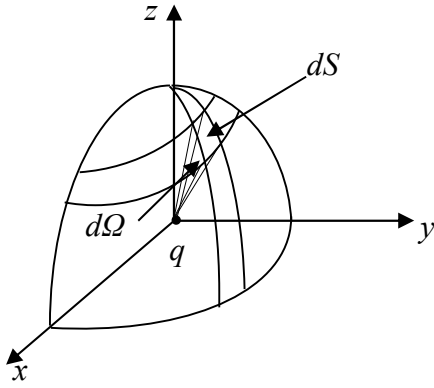
В основі (3) лежить лише одна умова: напруженість на всій поверхні стала. Якщо записати потік вектора через довільну поверхню, то отримаємо аналогічний вираз:

$$dN = E_n dS. \quad (4)$$

Весь потік, що пронизує поверхню  $S$ , знаходиться інтегруванням по всій поверхні:

$$N = \oint_S E_n dS = \oint_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (5)$$





Знайдемо елемент тілесного кута  $d\Omega$  у сферичній системі координат. Як відомо, тілесний кут, що виражається у стерадіанах, дорівнює відношенню поверхні ділянки сфери  $dS'$ , яку видно під цим тілесним кутом, до квадрата радіуса:

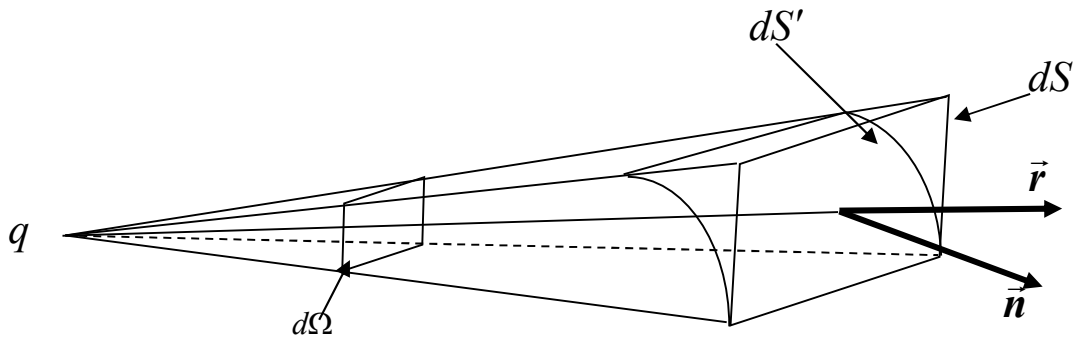
$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2}.$$

Елемент поверхні у сферичних координатах записується формулою:

$$dS' = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi,$$

тому для тілесного кута маємо:

$$d\Omega = \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (6)$$



Нехай під малим тілесним кутом  $d\Omega$  видно як елемент сферичної поверхні  $dS'$ , так і інший несферичний елемент поверхні  $dS$ . Через те, що  $dS'$  і  $dS$  малі, то вважаємо їх плоскими і позначимо кут між ними через  $\alpha$ . Проводимо з вершини кута радіус-вектор через середину площадки  $dS$  і в точці перетину будуємо зовнішню нормаль. Очевидно, що  $\angle \alpha = (\vec{r}, \vec{n})$ . Оскільки

$$dS' = dS \cos \alpha = dS \cos(\vec{r}, \vec{n}),$$

маємо:

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2} = \frac{dS \cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2}. \quad (7)$$

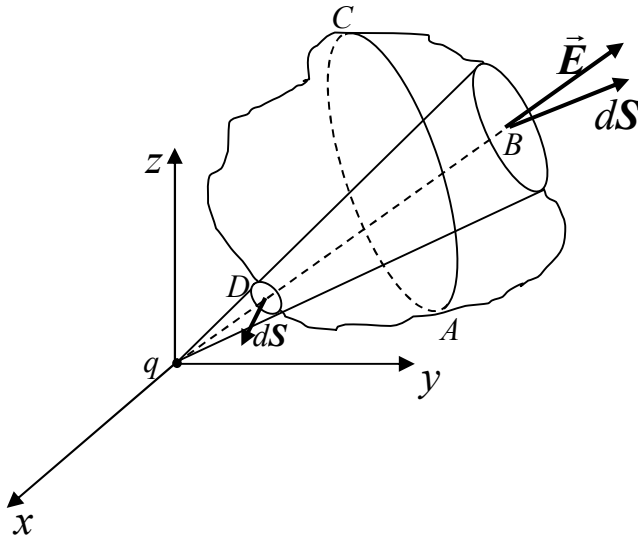
Тоді потік силових ліній, що розглядається, від точкового заряду  $q$  зображається формулою:



$$N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{S}. \quad (8)$$

Якщо тепер врахувати (7), то для потоку  $N$  отримаємо компактний вираз:

$$N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{rdS \cos(\vec{r}, d\vec{S})}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{r}{r^3} dS' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{dS'}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (9)$$



Розглянемо випадок, коли поверхня не охоплює цього заряду. Побудуємо довільну замкнену поверхню. Обчислимо потік вектора  $\vec{E}$  через цю поверхню. Лінія вектора напруженості поля  $\vec{E}$  перетинає поверхню у двох точках:  $D$  і  $B$ . Видно, що на поверхні  $ABC$  кут  $\angle(\vec{E}, d\vec{S})$  буде гострий,

а, отже, косинус кута додатній, а для поверхні  $ADC$  кут  $\angle(\vec{E}, d\vec{S})$  буде тупий, а тому, косинус кута є величиною, що менша за нуль. Позначимо  $ABC=S_1$ ,  $ADC=S_2$ . Тоді здійснимо очевидні перетворення:

$$N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{r}{r^3} dS' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{dS'}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \oint_{S_1} \frac{dS'}{r^2} + \oint_{S_2} \frac{dS'}{r^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (\Omega - \Omega) = 0, \quad (10)$$

де  $\Omega$  — тілесний кут, який охоплює поверхню  $S_1$  чи  $S_2$ . Отже, ми довели, що коли поверхня не охоплює одиничний заряд, то:  $N = 0$ .

Визначимо потік для сукупності дискретних зарядів. Якщо всі вони знаходяться за поверхнею, яка їх охоплює, тоді  $N = 0$ . Коли поверхня охоплює заряди,  $N$  визначається аналогічно до (9):

$$N = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{(\vec{r}-\vec{r}_i) dS'}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (11)$$

де  $q$  — сумарний заряд. У випадку об'ємного розподілу зарядів рівняння (11) отримує вигляд:

$$N = \frac{\int_V \rho dV}{\epsilon_0}, \quad (12)$$

де  $V$  — об'єм, який охоплений замкненою поверхнею  $S$ . Одержаний результат можна сформулювати у вигляді теореми.

**Теорема.** Потік вектора напруженості електростатичного поля через довільну замкнену поверхню пропорційний сумарному заряду, який охоплюється цією поверхнею (*теорема Остроградського-Гауса*).

Поряд з  $\vec{E}$  зручно ввести вектор індукції електричного поля  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$  для точкового заряду. Тоді

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^3} \vec{r},$$

а формула (11) переписеться:

$$N_{\vec{D}} = q.$$

Одержане рівняння можна трактувати у вигляді **теореми**: *потік вектора індукції електричного поля через довільну замкнену поверхню дорівнює сумарному заряду, який охоплюється цією поверхнею.*

## §4. Сила Лоренца і магнітне поле рухомих зарядів

Ми розглянули основні властивості системи нерухомих зарядів. Яка буде принципова відмінність фізичних властивостей системи рухомих зарядів? Згідно з експериментом сукупність зарядів, що рухаються рівномірно (*трубка струмів*) по своєму діє на одиничний (пробний) заряд. Ці заряди взаємодіють не просто за законом Кулона, а крім цієї виникає нова взаємодія. Вважається, що цей заряд рухається в іншому полі, відмінному від електричного поля. Це поле, яке виникає внаслідок наявності рухомих зарядів і яке відчуває рухомий пробний заряд, називається *магнітним полем*. Воно аналогічне до поля, яке

створюють природні магніти. Магнітне поле характеризується вектором напруженості магнітного поля  $\vec{H}$ .

Експериментально доведено, що на заряд  $q$ , який рухається зі швидкістю  $\vec{v}$  в магнітному полі напруженістю  $\vec{H}$ , діє сила:

$$\vec{F} = q\mu_0 [\vec{v}, \vec{H}], \quad (1)$$

що напрямлена перпендикулярно до векторів  $\vec{v}, \vec{H}$ . Ця сила називається *силою Лоренца*. Якщо ввести допоміжний вектор  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , тоді вираз (1) запишеться у вигляді:

$$\vec{F} = q [\vec{v}, \vec{B}], \quad (2)$$

де  $\mu_0$  — магнітна стала вакууму,  $\mu_0 = 12,57 \cdot 10^{-7} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{Кл}^2}$ . Крім того,

одичний заряд, що рухається у просторі, також створює магнітне поле. Експериментально встановлено, що напруженість магнітного поля є величиною прямопропорційною  $\vec{v}, q$  і оберненопропорційною  $r^2$ , де  $|\vec{r}|$  — відстань від заряду до точки вимірювання напруженості:

$$\vec{H} = \frac{q}{4\pi} \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (3)$$

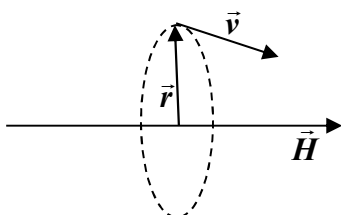
Як видно з формули (3), вектор напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  перпендикулярний як до  $\vec{v}$ , так і до  $\vec{r}$ . Якщо врахувати вираз напруженості точкового заряду  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$ , то формула (3)

набуває вигляд:

$$\vec{H} = \epsilon_0 [\vec{v}, \vec{E}]. \quad (4)$$

З (4) видно, що рухоме електричне поле породжує виникнення магнітного поля. Вектор індукції магнітного поля задається виразом:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \epsilon_0 [\vec{v}, \vec{E}]. \quad (5)$$



Можна переконатися, що добуток  $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ , де  $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$  — швидкість світла у вакуумі. Величину  $c$  називають *електродинамічною сталою*. Вираз (5) можна записати у такому вигляді:

$$\vec{B} = \frac{[\vec{v}, \vec{E}]}{c^2}. \quad (6)$$

У наступному параграфі розглянемо випадок сукупності зарядів.

## §5. Принцип суперпозиції магнітного поля. Закони Біо-Савара-Лапласа. Закон Ампера

Одним з основних досягнень фізики ХІХ століття є встановлення такого факту: аналогічно до того, як будь-який нерухомий електричний заряд створює навколо себе електричне поле, так рухомий заряд, крім того, збуджує в навколишньому середовищі магнітне поле, яке діє лише на рухомі заряди. Заряди, які перебувають у стані спокою, не створюють магнітного поля. Магнітне поле не діє на заряд, що не рухається.

Магнітне поле рухомих зарядів (струмів) було відкрито Ерстедом, коли він зафіксував дію струму на розміщену поблизу магнітну стрілку. Якісне співвідношення між величиною струму і напруженістю зв'язаного з цим струмом магнітного поля задається законом Біо-Савара-Лапласа, відомого з курсу загальної фізики.

Як було зазначено в попередньому параграфі, точковий заряд, що рухається, створює поле з напруженістю:

$$\vec{H} = \frac{q}{4\pi} \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (1)$$

де  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  — радіус-вектори заряду і точки вимірювання  $\vec{H}$  відповідно, а  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ . Магнітне поле діє на заряд, що рухається, з силою:

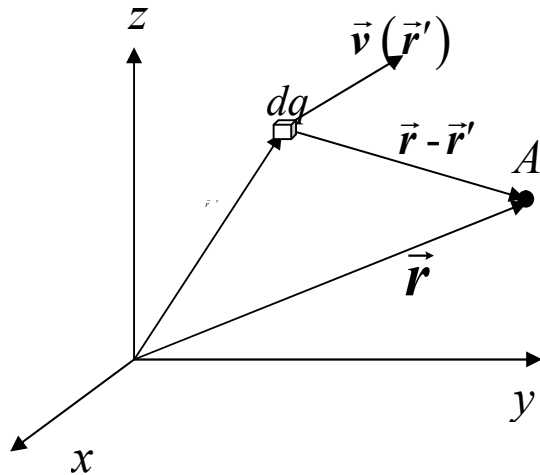
$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (2)$$

Формула (2) виражає експериментальний факт. Щоб встановити закон Біо-Савара-Лапласа, перетворимо формулу (1) та врахуємо, що для магнітного поля справедливий принцип суперпозиції, який формулюється так: якщо є сукупність точкових зарядів, які рухаються, і кожний точковий заряд створює магнітне поле:  $\vec{H}_1, \vec{H}_2, \vec{H}_3, \dots$ , то створене системою зарядів магнітне поле  $\vec{H}$ , дорівнює:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \dots = \sum_{i=1}^N \vec{H}_i, \quad (3)$$

де

$$\vec{H}_i = \frac{q}{4\pi} \frac{[\vec{v}_i, (\vec{r} - \vec{r}_i)]}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (4)$$



Розглянемо випадок, коли заряди розподілені в просторі неперервно. Весь простір розіб'ємо на елементарні об'єми  $dV$  із зарядом  $dq$ . Для деякого елементарного об'єму  $dV$  із зарядом  $dq$ , який рухається з швидкістю  $\vec{v}$ , маємо:

$$d\vec{H} = \frac{dq}{4\pi} \frac{[\vec{v}, (\vec{r} - \vec{r}')]^{\underline{\quad}}]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (5)$$

$\vec{r}'$  — радіус вектор заряду  $dq$ . Задамо об'ємну густину елемента  $\rho = \rho(\vec{r}')$ . Тоді

$$dq = \rho dV. \quad (6)$$

Згідно з принципом суперпозиції, напруженість магнітного поля неперервно розподілених зарядів, які рухаються в об'ємі  $V$ , визначається формулою:

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') [\vec{v}(\vec{r}'), (\vec{r} - \vec{r}')]^{\underline{\quad}}]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (7)$$

Проведемо спрощення виразу (7), ввівши густину струму:

$$\rho(\vec{r}') \vec{v}(\vec{r}') = \vec{j}(\vec{r}'). \quad (8)$$

Тоді вираз (7) зведеться до вигляду:

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), (\vec{r} - \vec{r}')]^{\underline{\quad}}]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (9)$$

Отримали, що магнітне поле, створене струмом густиною  $j$ , пропорційне величині густини струму і обернено пропорційне  $|\vec{r}|^2$ . Цей закон встановлено експериментально і на честь учених одержав назву закону Біо-Савара-Лапласа.

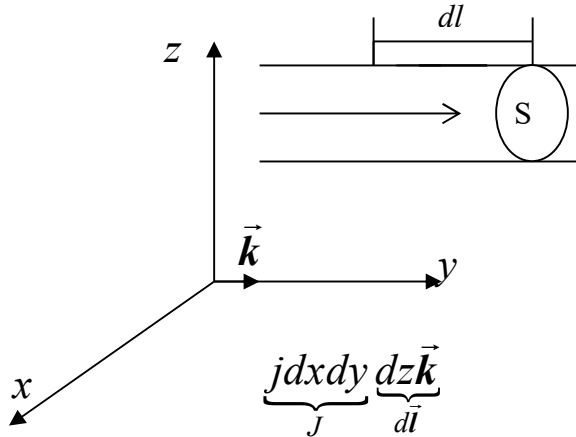
Враховуючи (2), запишемо силу Лоренца, з якою магнітне поле діє на елемент заряду  $dq$ :

$$d\vec{F} = \rho(\vec{r}') [\vec{v}(\vec{r}'), \vec{B}] dV', \quad (10)$$

або в інтегральній формі:

$$\vec{F} = \int_{V'} \rho(\vec{r}') [\vec{v}(\vec{r}'), \vec{B}] dV' = \int_{V'} [\vec{j}(\vec{r}'), \vec{B}] dV'. \quad (11)$$

$\vec{F}$  — це сила, з якою зовнішнє поле діє на неперервно розподілений заряд.



Використаємо наведені вище формули для лінійного струму. Для цього скористаємося формулою (11):

$$d\vec{F} = [\vec{j}(\vec{r}'), \vec{B}] dV'. \quad (12)$$

Як видно з рисунка, у цьому випадку справедливий перехід:

$$\vec{j}(\vec{r}') dV' = J d\vec{l}, \quad (13)$$

$d\vec{l}$  — вектор, що збігається з напрямком густини струму,  $J$  — величина струму. Тоді за умови (13)

$$d\vec{F} = J [d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (14)$$

Вираз (14) визначає закон Ампера: на провідник зі струмом в магнітному полі діє сила, яка пропорційна величині струму, довжині провідника  $d\vec{l}$  та індукції магнітного поля  $\vec{B}$ . З формули (14) видно, що сила  $d\vec{F}$  залежить також від величини кута між елементом провідника  $d\vec{l}$  та вектором  $\vec{B}$ . Зокрема, якщо струм напрямлений вздовж напрямку  $\vec{B}$ , то  $d\vec{F} = 0$ .

## §6. Перші рівняння Максвелла-Лоренца. Силкові лінії електричного поля

Нехай в просторі заданий деякий неперервний розподіл зарядів і ці заряди знаходяться під замкненою поверхнею  $S$ , тобто поверхня охоплює ці заряди. Тоді за теоремою Гауса:

$$N = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (1)$$

Можна довести ще одну теорему, яку інколи називають *другою теоремою Остроградського-Гауса*. Запишемо її у математичній формі для довільного вектора  $\vec{A}$ :

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV, \quad (2)$$

де

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}). \quad (3)$$

Перетворимо ліву частину формули (1) за теоремою Остроградського-Гауса (2). Отримаємо:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV. \quad (4)$$

Таким чином, отримуємо:

$$\int_V \left\{ \operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right\} dV = 0. \quad (5)$$

Умова (5) для будь-якого об'єму  $V$  виконується, якщо підінтегральна функція дорівнює нулю, тому

$$\operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (6)$$

Врахуємо, що

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E},$$

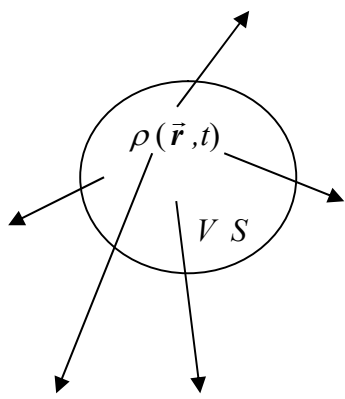
тоді маємо

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (7)$$

З векторного аналізу відомо, що для характеристики векторної функції зручно вводити таке поняття, як лінія вектора. Щоб побудувати лінію вектора  $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$ , необхідно, щоб дотична в будь-якій точці цієї лінії збігалась з напрямком вектора в цій точці. Якщо дивергенція вектора в точці додатна, то кажуть, що лінія в цій точці починається. Точка, де дивергенція є від'ємною вважається закінченням лінії вектора. Лінії напруженості вектора електричного поля (силові лінії) починаються і закінчуються на зарядах. Починається ця силова лінія на додатному заряді, а закінчується на від'ємному. Рівняння (6), (7) — одне з **рівнянь Максвелла-Лоренца**. Його фізичний зміст такий: силові лінії електричного поля починаються і закінчуються на зарядах.

## §7. Закон збереження заряду

При розв'язуванні рівнянь Максвелла-Лоренца важливе значення має *рівняння неперервності*. У замкненій системі сумарний заряд не змінюється з часом і є постійною величиною, тобто в природі існує *закон збереження заряду*. Для математичного запису цього закону розглянемо поверхню  $S$ , що охоплює заряди, густина яких  $\rho(\vec{r}, t)$ . Нехай через поверхню заряди можуть вільно проникати. Зрозуміло, що коли заряди виходять з під поверхні, то:



$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(\vec{r}, t + \Delta t) - \rho(\vec{r}, t)}{\Delta t} < 0. \quad (1)$$

На скільки при цьому зміниться величина заряду в цьому об'ємі  $V$  за момент часу  $dt$ ? Ми знаємо, що величина заряду, поміщеного всередині об'єму  $V$ , визначається інтегралом:

$$q = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV, \quad (2)$$

де  $q = q(t)$ . Тоді зміна заряду в цьому об'ємі визначається співвідношенням:

$$dq = \left( \frac{d}{dt} q \right) dt = \left\{ \frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV \right\} dt = \left\{ \int_V \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} dV \right\} dt. \quad (3)$$

Рух через поверхню  $S$  можна розглядати як протікання струму через задану поверхню. Густина струму залежить від координат кожної точки. Тоді формула

$$dq = dt \oint_S \vec{j} d\vec{S} \quad (4)$$

задає величину заряду, що проходить через поверхню  $S$  за час  $dt$ . Причому ця величина додатна, якщо струм витікає з розглядуваного об'єму, і від'ємна, якщо струм тече в цей об'єм. З іншого боку, згідно з законом збереження заряду, цей рух зарядів повинен привести до відповідної зміни величини заряду  $q$  в заданому об'ємі. Внаслідок закону збереження заряду ліві частини рівнянь (3) і (4) повинні бути рівні за абсолютною величиною і протилежні за знаком:



$$dt \oint_S \vec{j} d\vec{S} = -dt \int_V \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} dV.$$

Після очевидних спрощень отримаємо:

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} + \int_V \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} dV = 0. \quad (5)$$

Скористаємось теоремою Остроградського-Гауса до лівої частини, та внесемо вираз під один інтеграл:

$$\int_V (\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t}) dV = 0.$$

Рівняння справедливе для довільного об'єму, тому можна стверджувати, що підінтегральний вираз дорівнює нулю:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

Рівняння (6) має назву рівняння *неперервності* і є математичним записом *закону збереження заряду*.

## §8. Інтегральна й диференціальна форма рівняння для циркуляції магнітного поля з врахуванням струму зміщення

Розглянемо сукупність точкових зарядів, які рухаються у просторі. Як відомо, такі заряди будуть створювати як магнітне, так і електричне поле. Завдання полягає у тому, щоб вияснити якому диференціальному рівнянню задовольняють вектори  $\vec{H}$  і  $\vec{E}$  електромагнітного поля зарядів. Для цього розглянемо рівняння для  $i$ -го заряду:

$$\vec{H}_i = \varepsilon_0 [\vec{v}_i, \vec{E}_i], \quad (1)$$

де

$$\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (2)$$

Для простоти обчислень будемо вважати, що кожен заряд рухається рівномірно. Згадаємо формулу тензорного та векторного аналізу:

$$\text{rot}\vec{A} = [\vec{\nabla}, \vec{A}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

Таким чином,

$$\text{rot}\vec{H}_i = \varepsilon_0 [\vec{\nabla}, [\vec{v}_i, \vec{E}_i]]. \quad (3)$$

Скористаємось відомою формулою для ротора від векторного добутку:

$$[\vec{\nabla}, [\vec{A}, \vec{B}]] = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}).$$

Тоді для  $\vec{A} = \vec{v}_i$  і  $\vec{B} = \vec{E}_i$ , враховуючи, що  $\vec{v}_i$  стала величина, одержимо:

$$[\vec{\nabla}, [\vec{v}_i, \vec{E}_i]] = \vec{v}_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_i) - (\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_i. \quad (4)$$

Обчислимо вираз у перших дужках:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_i) = \text{div}\vec{E}_i = \frac{\rho_i}{\varepsilon_0}. \quad (5)$$

Беручи до уваги рівняння (2), можна довести, що

$$\frac{\partial \vec{E}_i}{\partial t} = -(\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_i. \quad (6)$$

Підставимо формули (5) і (6) у (4) і одержане у рівняння (3):

$$\text{rot}\vec{H}_i = \rho_i \vec{v}_i + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_i}{\partial t}. \quad (7)$$

Використаємо принцип суперпозиції. У результаті одержимо сумарну напруженість:

$$\vec{H} = \sum_i \vec{H}_i, \quad \vec{E} = \sum_i \vec{E}_i, \quad \vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i, \quad (8)$$

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (9)$$

Рівняння (9) називається *рівнянням Максвелла-Лоренца*. Воно вказує на те, що магнітне поле можна одержати як за допомогою струму, так і за допомогою змінного електричного поля. Другий доданок називається *густиною струму зміщення*

$$\vec{j}_{\text{зм}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (10)$$

а  $\vec{j}$  — густина струму, пов'язана з рухом зарядів. Отже, рівняння (9) можна записати у такому вигляді:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{зм}},$$

або по-іншому:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \quad (11)$$

Рівняння (9) є диференціальною формою запису закону Біо-Савара-Лапласа.

Нехай деякі заряди величиною  $q_i$  рухаються по контуру  $L$  в зовнішньому електричному полі. На ці заряди діє сила:

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E} = q \vec{E},$$

де  $\vec{E}$  — напруженість електричного поля. Це поле над зарядами виконує роботу

$$A = \oint_L \vec{F} d\vec{l} = q \oint_L \vec{E} d\vec{l}.$$

Нагадаємо поняття *електрорушійної сили* — роботи, яка виконується при переміщенні одиничного заряду.

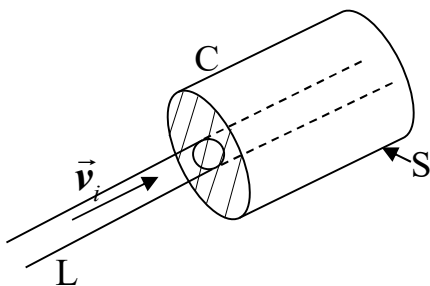
$$\varepsilon_l = \frac{A}{q} = \int_L \vec{E} d\vec{l}. \quad (12)$$

Введемо поняття *магніторушійної сили* в контурі. Рухомі заряди у контурі створюють магнітне поле. Тоді магніторушійну силу аналогічно з (12) введемо так:

$$\varepsilon_M = \int_C \vec{H} d\vec{l}. \quad (13)$$

Розглянемо замкнений контур  $C$  і запишемо вираз для  $\varepsilon_M$ . Нехай цей контур охоплює заряди. Тоді

$$\varepsilon_M = \oint_C \vec{H} d\vec{l} = \int_S \text{rot}\vec{H} d\vec{S}. \quad (14)$$



Тут ми скористалися теоремою Стокса  $\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot}\vec{A} d\vec{S}$ . Використаємо у формулі (14) рівняння (9), отримаємо:

$$\varepsilon_M = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (15)$$

Перший доданок у формулі (15) визначає струм, що проходить через площину контуру або струм, що проходить через поверхню  $S$ . У другому доданку винесемо  $\frac{\partial}{\partial t}$  з під знаку інтеграла і тоді отримаємо:

$$\varepsilon_M = J + \varepsilon_0 \frac{\partial N}{\partial t}, \quad (16)$$

де  $N = \oint_S \vec{E} d\vec{S}$ . Величина  $\varepsilon_0 \frac{\partial N}{\partial t}$  у формулі є струмом зміщення.

Отже,

$$\varepsilon_M = J + J_{зм}. \quad (17)$$

Формули (16), (17) є математичним записом закону повного струму.

## §8. Соленоїдальність магнітного поля

Експериментально встановлено, що силові лінії магнітного поля замкнені. Тобто, у природі не виявлено магнітних зарядів. Математично це означає, потік вектора напруженості  $\vec{H}$  через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю:

$$\oint_S \vec{H} d\vec{S} = 0. \quad (1)$$

Використаємо теорему Остроградського-Гауса:

$$\oint_S \vec{H} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{H} dV. \quad (2)$$

З рівнянь (1) і (2) випливає очевидна умова:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{H} dV = 0, \quad (3)$$

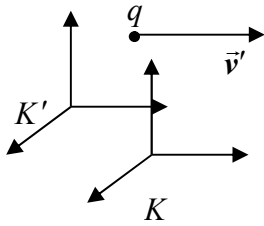
або

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (5)$$

Рівняння (4) — це ще одне рівняння Максвелла-Лоренца. Фізичний зміст рівнянь (4), (5) визначено вище: силові лінії є замкненими або магнітних зарядів не існує. Коли виконуються умови вигляду (4), (5) то кажуть, що поле соленоїдальне.

## §9. Закон електромагнітної індукції Фарадея



У попередніх параграфах ми одержали рівняння, які зв'язують змінне магнітне поле з електричним полем. Чи можна, маючи змінне магнітне поле, одержати електричне поле? Визначимо силу, яка діє на рухомий заряд. Нехай в деякій системі відліку  $K'$  заряджена точка  $q$  рухається з швидкістю  $\vec{v}'$ . Крім того, на цю точку діє зовнішнє магнітне поле  $\vec{B}$ , яке в цій системі є нерухомим. Тоді сила, що діє на заряд, визначається рівнянням:

$$\vec{F} = q[\vec{v}', \vec{B}]. \quad (1)$$

Візьмемо другу систему відліку  $K$ , в якій у заданий момент часу наш точковий заряд не рухається. Система  $K$  рухається відносно  $K'$  з швидкістю  $\vec{v}$ , причому

$$\vec{v} = -\vec{v}'. \quad (2)$$

Тобто,  $\vec{v}$  є швидкістю руху магнітного поля відносно системи  $K$ . Тоді в системі  $K'$  сила Лоренца (1) запишеться у вигляді:

$$\vec{F} = -q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (3)$$

З точки зору системи  $K$  на точку діє якась сила. Цей заряд є нерухомим в цій системі. Очевидно, можна вважати, що сила виникла завдяки дії електричного поля:

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (4)$$

Дію магнітного поля на рухомий заряд зведено до дії електричного поля на нерухомий заряд. Напруженість електричного поля дорівнює:

$$\vec{E} = -[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (5)$$

Отже, якщо в просторі існує рухоме магнітне поле  $\vec{B}$ , то воно викличе появу електричного поля. Таке електричне поле, що утворене магнітним полем, називається *індукційним* електричним полем. Покажемо, що індукційне електричне поле є вихровим, або  $rot\vec{E} \neq 0$ . Випишемо цю величину

$$rot\vec{E} = -rot[\vec{v}, \vec{B}],$$

Розпишемо ротор, вважаючи, що  $\vec{v} = const$ :

$$[\vec{\nabla}, [\vec{v}, \vec{B}]] = \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}. \quad (6)$$

Врахуємо, що

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \text{div} \vec{B} = 0,$$

де

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}'). \quad (7)$$

Вектор  $\vec{B}$  явно від часу не залежить, тому

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (8)$$

Отже, підставивши (7), (8) в (6), одержимо:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (9)$$

Отримали наступне, *четверте рівняння Максвелла-Лоренца*. Рівняння важливе тим, що в нього не входить швидкість заряду:

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (10)$$

Фізичний зміст рівнянь (9) і (10) такий: змінне в часі магнітне поле викликає появу вихрового електричного поля.

Розглянемо замкнутий контур  $L$  і запишемо електрорушійну силу

$$\varepsilon_e = \oint_L \vec{E} d\vec{l}. \quad (11)$$

Згідно з теоремою Стокса

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S}. \quad (12)$$

Підставимо у рівняння (12)  $\text{rot} \vec{E}$  з формули (10):

$$\varepsilon_e = -\mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S},$$

де  $\int_S \vec{B} d\vec{S} \equiv \Phi$  — потік вектора індукції магнітного поля через поверхню. Отже,

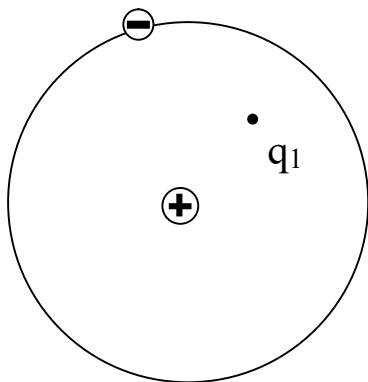
$$\varepsilon_e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (13)$$

Отримали математичний запис *закону електромагнітної індукції Фарадея*.

## Розділ II. Електродинаміка матеріального середовища

### §10. Мікроскопічні та макроскопічні поля

У ядрі атома густина речовини досягає величезних значень (порядку  $10^{14} \text{г/см}^3$ ), а поряд з ядром густина речовини дорівнює нулю. Напруженість електричного поля всередині атома водню на відстанях до  $r \approx 0.5 \cdot 10^{-8} \text{см}$  від його ядра порядку  $10^{-2} \div 10^{-1} \text{Кл}$ , а поза атомом напруженість поля дуже швидко спадає.



Розглянемо заряди, що є у речовині, яка складається з атомів. У близькій до ядра атома області на заряд  $q_1$  діє сильне поле. Поле слабке, якщо заряд  $q_2$  є на значній віддалі від атома (див. рисунок).

Поле, що створене одним або невеликою кількістю зарядів, називається *мікроскопічним*. Якщо поле створене величезною кількістю зарядів (в речовині), то воно називається *макроскопічним*. У речовині на віддалі  $10^{-10} \text{м}$  поле змінюється багато разів. Мікроскопічне поле, яке діє на один заряд, у речовині буде змінюватися надзвичайно сильно. Якщо якась фізична величина різко змінюється, то, внаслідок інерції, покази приладів будуть не точним відображенням істинних значень фізичних величин, а деяких усереднених. Коли в речовині є заряд, який створює поле, а другий заряд пробний, то прилад покаже середнє значення створеного поля. Г. Лоренц запропонував наступний спосіб усереднення мікроскопічних величин. Необхідно ввести поняття фізично нескінченно малих об'ємів, поверхонь, відрізків. Фізично нескінченно малий об'єм, за Лоренцом, повинен одночасно задовольняти двом вимогам. По-перше, він повинен бути дуже великим порівняно з мікроскопічними неоднорідностями речовини, що зумовлені її атомно-молекулярною будовою. По-друге, він повинен бути малий порівняно з макроскопічними неоднорідностями речовини.

Наведені рівняння Максвелла-Лоренца виконуються для мікроскопічних полів. Тому потрібно дещо перетворити ці рівняння, щоб одержати їх для речовини. Введемо деякі позначення:

$$\vec{H}_{\text{мікро}} \equiv \vec{h}, \quad \vec{E}_{\text{мікро}} \equiv \vec{e}, \quad \vec{J}_{\text{мікро}} = \vec{i}.$$

Значимо, що мікроскопічне поле таке ж саме, як поле у вакуумі. Тоді рівняння Максвелла-Лоренца набудуть вигляду:

$$\operatorname{div} \vec{e} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \vec{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{h} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{e} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}. \quad (4)$$

Ці рівняння надзвичайно точні у вакуумі, а для речовини вони жодної інформації не дають, бо ніякий прилад їх не виміряє. Треба усереднити за змінними  $\vec{r}, t$  (бо  $\vec{h}, \vec{e}, \vec{i}$  є функцією  $\vec{r}$  і  $t$ ). Ми маємо врахувати усереднення по великому об'ємі (відносно атома), але такому, щоб цей об'єм був малим відносно приладу (кажуть, *по фізичному малому об'єму*). Усереднення за часом треба проводити так, щоб проміжок часу був великим порівняно з періодом обертання електрона навколо свого ядра (*характерним атомним часом*) і малим порівняно з часом вимірювання. З точки зору фізики такий час можна вважати миттєвим.

$$\overline{f(\vec{r}, t)} = \frac{1}{2\tau} \frac{1}{V_0} \int_{-\tau}^{\tau} dt \int_{V_0} dV f(\vec{r}, t), \quad (5)$$

де  $V_0$  — фізично малий об'єм,  $\tau$  — фізично малий час.

Використовуючи (5), проведемо усереднення рівнянь Максвелла-Лоренца. Рівняння набудуть вигляду:

$$\operatorname{div} \bar{\vec{e}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (6)$$

$$\operatorname{rot} \bar{\vec{h}} = \bar{\vec{i}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{\vec{e}}}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \bar{\vec{h}} = 0, \quad (8)$$



$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{e}} = \mu_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}}{\partial t}. \quad (9)$$

Введемо позначення величин напруженості та індукції макроскопічного поля:

$$\bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{E}}; \quad \bar{\mathbf{h}} = \frac{\bar{\mathbf{B}}}{\mu_0}. \quad (10)$$

Відповідно до (10), рівняння (6) – (9) для макроскопічного поля набудуть вигляду:

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t}, \quad (11)$$

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{B}} = 0, \quad (12)$$

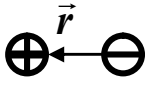
$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \bar{\mathbf{E}}) = \bar{\rho}, \quad (13)$$

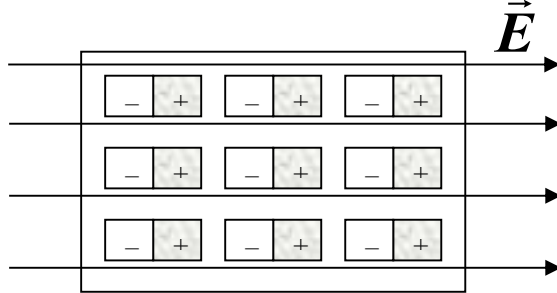
$$\operatorname{rot} \left( \frac{\bar{\mathbf{B}}}{\mu_0} \right) = \bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial(\varepsilon_0 \bar{\mathbf{E}})}{\partial t}. \quad (14)$$

Записані рівняння (11) – (14) називаються *макроскопічними рівняннями Максвелла-Лоренца*. Щоб вони були повними, необхідно визначити середні значення  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\mathbf{i}}$ .

## §11. Поляризація речовини в електричному полі. Вектор поляризації

Щоб знайти середнє значення величин  $\bar{\mathbf{i}}$ ,  $\bar{\rho}$ , визначених у попередньому параграфі, треба конкретизувати потенційну речовину та її більш загальні властивості: одні речовини містять вільні заряди всередині (метали, провідники), інші практично їх не мають. Проміжний стан речовини, коли вільних зарядів є не багато. Розглянемо речовину, яка складається з нейтральних атомів або молекул. Під дією електростатичного поля з напруженістю  $\bar{\mathbf{E}}$  атоми будуть перебудовуватися. Коли на атом діє деяке електростатичне поле, додатна частина атома зсувається в один бік, від'ємна — в протилежний. Електричне поле намагається розсунути заряди і повернути систему, яка утворилась, за напрямком вектора  $\bar{\mathbf{E}}$ , хоча загалом система залишається електронейтральною. Сукупність двох рівних за величиною, але протилежних за знаком точкових зарядів


 називається *диполем*. Електричні властивості диполя характеризуються *дипольним моментом*  $\vec{p} = q\vec{r}$ ,  $\vec{r}$  — вектор, проведений від від'ємного заряду диполя до додатного,  $q$  — абсолютна величина кожного з зарядів диполя.


 Отже, під дією електричного поля атоми поляризуються, отримуючи дипольний момент. Відбувається процес *поляризації речовини* в цілому. Речовину будемо характеризувати дипольним моментом одиниці об'єму:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \left( \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i \right) = \vec{P},$$

або

$$d\vec{p} = \vec{P}dV, \quad (1)$$

де  $\vec{p}_i$  — дипольний момент  $i$ -го атома. Вектор  $\vec{P}$  називають вектором поляризації. Можна довести, що:

$$\vec{P} = \rho_{36} \vec{r}, \quad (2)$$

де  $\rho_{36}$  — густина зв'язаних зарядів, які виникли внаслідок поляризації. Виявляється, що  $\rho_{36}$  не лише визначає вектор поляризації, але й визначається через нього:

$$\rho_{36} = -\text{div}\vec{P}. \quad (3)$$

Знайдемо  $\rho_{36}$  з формули (2). Для цього домножимо скалярно рівняння (2) на  $\vec{r}$ . Маємо:

$$\rho_{36} = \frac{\vec{P}\vec{r}}{r^2}.$$

Якщо в речовині існують вільні заряди, густина яких є  $\rho$ , то

$$\bar{\rho} = \rho_{36} + \rho. \quad (4)$$

Величини  $\bar{\rho}$ ,  $\rho$  у (4) задовольняють рівнянням неперервності:

$$\text{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

$$\text{div}\vec{i} + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

## §12. Середнє значення густини струму. Вектор намагнічення

Визначимо середнє значення густини струму. Для цього ще більше конкретизуємо середовище, що розглядається. На основі деяких загальних фізичних міркувань встановимо від чого залежить величина  $\bar{i}$ . Розкладемо її в ряд через основні фізичні величини. Коефіцієнти розкладу будуть невідомими параметрами теорії, величину яких можна визначити з експерименту.

Виявилось, що  $\bar{i}$  повинно залежати від  $\vec{E}$ ,  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ,  $rot \vec{B}$ . Розкладемо  $\bar{i}$  в ряд, та обмежимося першими членами ряду. Отримаємо:

$$\bar{i} = \sigma \vec{E} + \alpha \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \alpha' rot \vec{B}, \quad (1)$$

де  $\sigma, \alpha, \alpha'$  — невідомі коефіцієнти. У формулі (1) враховано те, що коли не існує полів, електричних чи магнітних, то не буде ніякого струму і перші доданки ряду дорівнюють нулю. Наступні доданки пропорційні  $\vec{E}$ ,  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  і  $rot \vec{B}$ . Якщо існує електричне поле в середовищі, то струм, який виникає в ньому, буде прямо пропорційний напруженості  $\vec{E}$ . Такий самий результат одержано експериментально — закон Ома:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (2)$$

де  $\sigma$  — провідність середовища.

З формули (5) попереднього параграфа видно, що коли  $\vec{j} \neq 0$ , то і  $\rho \neq 0$  (якщо в речовині існують вільні заряди, то в ньому може протікати струм), якщо ж  $\rho = 0$ , то і  $\vec{j} = 0$ . Звідси випливає, що  $\sigma = 0$ . Обчислимо дивергенцію виразу (1). Маємо:

$$div \bar{i} = \sigma div \vec{E} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} div \vec{E}. \quad (3)$$

У формулі (3) враховано, що для довільного вектора  $\vec{A}$ ,  $div rot \vec{A} = 0$ .

Використовуючи (2) та формули (11.5), (11.6), одержимо:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho - \bar{\rho}) = \alpha \frac{\partial}{\partial t} div \vec{E}. \quad (4)$$

З формули (4) попереднього параграфу видно, що ліва частина спрощується:

$$-\frac{\partial \rho_{36}}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} . \quad (5)$$

Якщо врахувати формулу (3) з § 11, то і права частина спрощується до виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{P} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} (\alpha \vec{E}) . \quad (6)$$

Рівняння (6) рівносильне такому:

$$\vec{P} = \alpha \vec{E} , \quad (7)$$

де  $\alpha$  — коефіцієнт, який визначається емпірично, *діелектрична сприйнятливість* середовища.

Крім струму поляризації, в речовині існує інша складова струму зв'язаних зарядів — зумовлена впорядкуванням магнітних моментів атомів або молекул у магнітному полі. Магнітні властивості речовини загалом визначаються тим, що електрони при русі всередині атома створюють замкнені струми, тому атоми характеризуються магнітними моментами. Крім того, електрони володіють власними (спіновими) магнітними моментами.

Кожному молекулярному струму відповідає елементарний магнітний диполь. За характером елементарних диполів речовини поділяють на три основних класи: *парамагнітні*, *діамагнітні* і *феромагнітні*. У пара- і феромагнітних речовин частинки володіють елементарними магнітними моментами при відсутності зовнішнього магнітного поля, але ці моменти орієнтовані в просторі хаотично, так що макроскопічні об'єми речовини магнітними моментами не володіють.

Механізм намагнічування парамагнетиків і феромагнетиків якісно є таким: у зовнішньому магнітному полі елементарні моменти вишиковуються за полем, підсилюючи його. У парамагнетиків намагнічування має місце лише в зовнішньому полі, а у феромагнетиків зберігається і після зняття зовнішнього поля. Крім того, намагніченість феромагнетиків набагато більша. Молекулярні магнітні моменти в діамагнетику виникають лише в зовнішньому полі і орієнтуються проти поля, послаблюючи його.

Можна довести, що добуток  $\alpha'$  на вектор індукції  $\vec{B}$  визначається магнітним моментом одиниці об'єму середовища

$$\alpha' \vec{B} = \vec{M}. \quad (8)$$

Отже, з урахуванням (7) та (8) формула (1) перетвориться до вигляду:

$$\vec{i} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot} \vec{M}. \quad (9)$$

Повернемося до формул (11.3), (11.4). Якщо врахувати (10.13), отримаємо:

$$\text{div}(\varepsilon_0 \vec{E}) = -\text{div} \vec{P} + \rho. \quad (10)$$

Або по-іншому:

$$\text{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho. \quad (11)$$

Введемо вектор індукції електричного поля:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (12)$$

Тоді рівняння (11) запишеться так:

$$\text{div} \vec{D} = \rho. \quad (13)$$

Підставивши (7) у (12), одержимо:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \alpha \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (14)$$

де

$$\varepsilon = 1 + \frac{\alpha}{\varepsilon_0}, \quad (15)$$

$\varepsilon$  — діелектрична проникність середовища. Порівнюючи формулу (14) з відповідним виразом для вакууму, бачимо, що для вакууму  $\varepsilon = 1$ .

Використаємо рівняння (14) з § 10:

$$\text{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{i} + \frac{\partial(\varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t}, \quad (16)$$

та формулу (9). Тоді отримаємо:

$$\text{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot} \vec{M} + \frac{\partial(\varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t}. \quad (17)$$

Після очевидного перегрупування доданків, маємо:

$$\text{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}). \quad (18)$$

Введемо вектор напруженості магнітного поля у середовищі згідно з формулою:

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \vec{H}. \quad (19)$$

Запишемо (19) в іншому вигляді:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}. \quad (20)$$

Використавши введені позначення, отримаємо компактне рівняння Максвелла-Лоренца:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (21)$$

Перетворимо формулу (19), використавши (8):

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \alpha'} \vec{M} - \vec{M}. \quad (22)$$

Звідси маємо, що

$$\vec{M} = \frac{\mu_0 \alpha'}{1 - \mu_0 \alpha'} \vec{H}, \quad (23)$$

$$\vec{M} = \chi \vec{H}, \quad (24)$$

де  $\chi$  — магнітна сприйнятливість середовища.

Якщо у формулу (19) підставити (24), отримаємо:

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \chi \vec{H}, \quad (25)$$

або

$$\vec{B} = (1 + \chi) \mu_0 \vec{H}, \quad (26)$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad (27)$$

де  $\mu$  — магнітна проникність середовища. Магнітна проникність середовища визначається магнітною сприйнятливістю:

$$\mu = 1 + \chi. \quad (28)$$

Залежно від знаку і величини  $\chi$  речовини поділяються на :

$\chi < 0$  — діамагнетики ( $\mu < 1$ );

$\chi > 0$  — парамагнетики ( $\mu > 1$ );

$\chi \gg 0$  — феромагнетики ( $\mu \gg 1$ ).

Для феромагнетиків магнітна сприйнятливість та магнітна проникність  $\chi, \mu$  залежить від напруженості магнітного поля  $\vec{H}$ .

Випишемо рівняння Максвелла-Лоренца для середовища:

$$\text{div} \vec{D} = \rho; \quad (29)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (30)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0; \quad (31)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}; \quad (32)$$

а також рівняння:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad (33)$$

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \quad (34)$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}. \quad (35)$$

Для знаходження поля в речовині використовують систему рівнянь Максвелла-Лоренца (29) – (32), додавши до неї два так звані «матеріальні» рівняння (33) і (34), а також третє — емпіричне співвідношення (35). При заданих  $\rho, \vec{j}$  рівняння Максвелла мають однозначний розв'язок, тобто розв'язавши їх ми можемо одержати всі чотири характеристики поля.

Запишемо рівняння Максвелла в інтегральній формі та виведемо їхній фізичний зміст.

Розглянемо середовище і деяку замкнену поверхню. Проінтегруємо (29) по об'ємі, що охоплений поверхнею. Одержимо:

$$\int_V \operatorname{div}\vec{D}dV = \int_V \rho dV, \quad (36)$$

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho dV. \quad (37)$$

Фізичний зміст (37) такий: **потік вектора індукції електричного поля через будь-яку замкнену поверхню дорівнює величині заряду, що охоплюється цією поверхнею.** Рівняння (29) показує, що силові лінії індукції електричного поля починаються і закінчуються на зарядах.

Аналогічний аналіз проведено для рівняння (31). Розглянемо середовище, охоплене замкненою поверхнею. Проінтегруємо (31) по об'єму, що охоплюється цією поверхнею. Згідно з теоремою Остроградського-Гауса, одержимо

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0. \quad (38)$$

Отримали, що **потік вектора індукції магнітного поля через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю, тобто силові лінії індукції магнітного поля є замкнені.**

Рівняння (30) інтегруємо по довільній замкненій поверхні:

$$\oint_S \operatorname{rot}\vec{E}d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\oint_S \vec{B}d\vec{S}. \quad (39)$$

Тепер одержимо

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad (40)$$

Фізичний зміст рівняння (40) такий: зміна потоку вектора індукції магнітного поля з часом викликає появу електрорушійної сили в заданому контурі.

Аналогічні міркування застосуємо до рівняння (32):

$$\int_S \text{rot} \vec{H} d\vec{S} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S}, \quad (41)$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S}. \quad (42)$$

Отримується такий фізичний зміст рівняння (42): циркуляція вектора напруженості магнітного поля (магніторушійна сила) дорівнює величині струму зарядів, що проходять через площину цього контуру і величині струму зміщення (зміна потоку вектора індукції електричного поля через площадку, що обмежена контуром).

Рівняння (37), (38), (40), (42) — інтегральна форма рівнянь Максвелла для ізотропних середовищ (властивості, яких в різних напрямках однакові). В анізотропних середовищах величини  $\varepsilon, \mu, \sigma$  не є скалярами, а тензорами другого рангу. Проекції векторів позначимо індексами  $i, j=1,2,3$ . Тоді відповідні формули з  $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, \mu_{ij}$  матимуть вигляд:

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \varepsilon_0 E_j, \quad (43)$$

$$j_i = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \varepsilon_0 E_j, \quad (44)$$

$$B_i = \sum_{j=1}^3 \mu_{ij} H_j. \quad (50)$$

З формул (43) – (45) видно, що напрямки векторів  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$ ,  $\vec{j}$  і  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  не збігаються. Цим анізотропне середовище відрізняється від ізотропного.



### §13. Система граничних умов. Неоднорідність середовища

При розв'язку диференціальних рівнянь для  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$  виникають сталі інтегрування і тому для однозначного визначення векторів поля необхідно врахувати їхні властивості на границях розділу різних середовищ. Умови, які накладаються на вектори поля при переході з одного середовища в інше, називаються *граничними*.

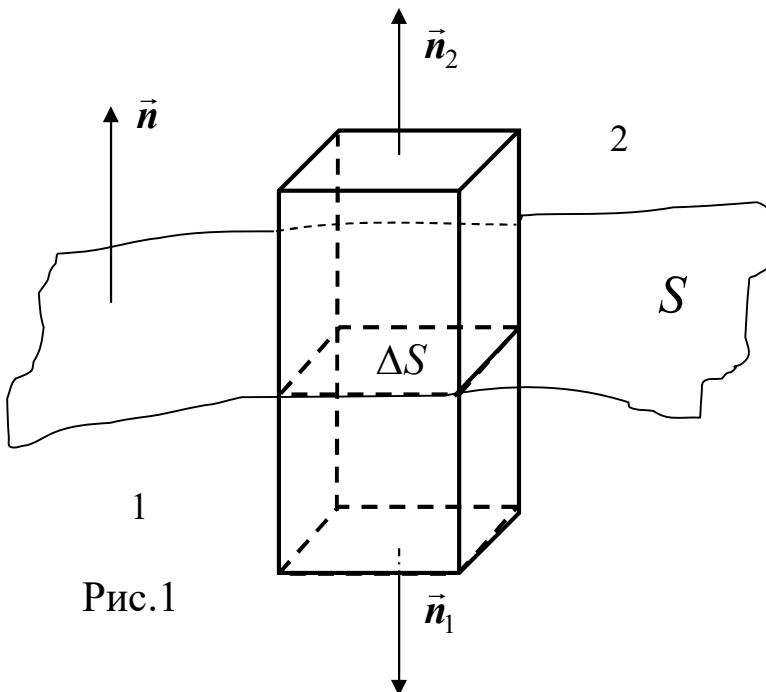


Рис.1

#### А. Гранична умова для вектора $\vec{D}$ у випадку зарядженої поверхні.

Розглядається заряджена поверхня (рис.1), яка відділяє простір 1 (лежить під поверхнею) від простору 2. Позначимо через  $\vec{n}$  нормаль до поверхні, яка напрямлена в друге середовище. Фіксуємо на поверхні

елементарну площадку  $\Delta S$  з поверхневим вільним зарядом  $\sigma\Delta S$  і будуємо на ній пряму призму. Згідно з теоремою Остроградського-Гауса для потоку індукції маємо:

$$\oint_S \vec{D}_n dS = \sigma\Delta S = \vec{D}_2 \cos(\vec{D}_2, \vec{n}_2)\Delta S + \vec{D}_1 \cos(\vec{D}_1, \vec{n}_1)\Delta S + N'_D, \quad (1)$$

де  $N'_D$  – потік через бокові грані, а перші два доданки – потоки через верхню та нижню основи. Враховуючи вибрані орієнтації нормалей, отримуємо:

$$D_2 \cos(\vec{D}_2, \vec{n}_2) = D_{2n}, \quad D_1 \cos(\vec{D}_1, \vec{n}_1) = -D_{1n}. \quad (2)$$

Стиснемо призму так, щоб обидві її основи виявились нескінченно близькими до зарядженої площадки  $\Delta S$ . Тоді потік через бічні грані  $N'_D$  стане нескінченно малим і ним в (1) можна знехтувати. У цьому випадку

$$(D_{2n} - D_{1n})\Delta S = \sigma\Delta S. \quad (3)$$

Звідси випливає важлива гранична умова для вектора  $\vec{D}$ :

$$(D_{2n} - D_{1n}) = \sigma. \quad (4)$$

При переході через заряджену поверхню нормальна складова вектора  $\vec{D}$  міняється стрибком на величину  $\sigma$ .

### Б. Гранична умова для вектора $\vec{D}$ у випадку незарядженої поверхні.

Розглядаємо поверхню поділу двох середовищ, на якій немає вільних зарядів ( $\sigma=0$ ). Для цього випадку з (4) випливає нова гранична умова:

$$D_{2n} - D_{1n} = 0, \quad D_{2n} = D_{1n} \quad (4)$$

На границі двох діелектриків (при  $\sigma=0$ ) нормальна складова вектора  $\vec{D}$  залишається неперервною.

### В. Граничні умови для вектора $\vec{E}$ на межі двох середовищ.

Нормальна складова вектора  $\vec{E}$  стрибкоподібно змінюється не лише при переході через поверхню з вільними зарядами, але і при переході через поверхню з зв'язаними зарядами. Зв'язані заряди враховуються за допомогою відносних діелектричних проникностей  $\epsilon_1$  і  $\epsilon_2$ . В ізотропному діелектричному середовищі зв'язок між векторними  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$  та їхніми складовими записуються однотипно:

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}; \quad D_n = \epsilon\epsilon_0 E_n; \quad D_t = \epsilon\epsilon_0 E_t.$$

$D_n, E_n, D_t, E_t$  – нормальні та тангенціальні складові векторів поля.

Використовуючи (4), маємо на границі двох діелектриків:

$$\epsilon_1\epsilon_0 E_{1n} = \epsilon_2\epsilon_0 E_{2n}.$$

Звідки отримуємо:

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (5)$$

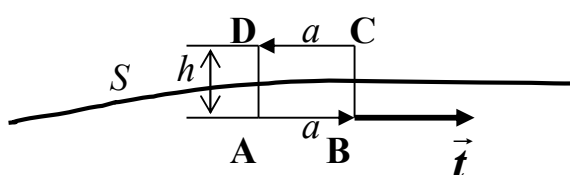


Рис. 2

Нормальна складова вектора  $\vec{E}$  на межі двох середовищ змінюється стрибкоподібно. Величина стрибка залежить від відношення діелектричних

проникностей обох середовищ.

Розглянемо поведінку тангенціальної складової вектора  $\vec{E}$  на границі двох середовищ. Нехай два діелектрики з відносними діелектричними проникностями  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$  розділені поверхнею  $S$  (рис. 2). Складемо циркуляцію вектора напруженості по малому контуру ABCD і через  $\vec{t}$  позначимо вектор дотичної до межі поділу. Через потенціальність поля робота, яка виконується при переміщенні одиничного заряду по замкнутому контуру, дорівнює нулю:

$$\oint_S E_t dl = E_{2t}a - E_{1t}a + A' = 0, \quad (6)$$

де  $A'$  — робота з переміщення одиничного заряду на двох відрізках довжиною  $h$ . Стискаємо контур обходу, необмежено зменшуючи  $h$ . Тоді в границі робота на ділянках  $h$  перетворюється у нуль, звідки:

$$E_{2t} - E_{1t} = 0, \quad E_{2t} = E_{1t}. \quad (7)$$

Ця умова справедлива для межі поділу будь-яких двох середовищ (границі провідника і діелектрика, границі двох провідників), якщо на границі немає подвійного шару. Отже, *на межі двох середовищ тангенціальна складова напруженості неперервна.*

### Г. Гранична умова для вектора $\vec{B}$ .

За аналогією з викладеними міркуваннями, вибираємо на поверхні елементарну площадку  $\Delta S$  і будуємо на ній пряму призму (див. рис.1). Потік вектора індукції  $\Phi$  з цієї призми складається з потоку через обидві основи і потоку  $\Phi'$  через бічні грані. Аналогічно до (1) і (3) маємо:

$$\oint_S B_n dS = (B_{2n} - B_{1n})\Delta S + \Phi' = 0. \quad (8)$$

При зменшенні до нуля висоти призми  $\Phi' \rightarrow 0$ . Отже,

$$B_{2n} = B_{1n}. \quad (9)$$

*Нормальна складова вектора індукції на межі двох середовищ неперервна.*

#### Д. Граничні умови складових вектора $\vec{H}$ .

Поведінку нормальної складової вектора напруженості на межі двох середовищ можна визначити з (9). Проведемо підстановку  $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ . Отримаємо:

$$\mu_1\mu_0H_{1n} = \mu_2\mu_0H_{2n}. \quad (10)$$

Отже,

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{H_{2n}}{H_{1n}}. \quad (11)$$

Нормальна складова вектора  $\vec{H}$  на межі двох середовищ змінюється стрибкоподібно. Величина стрибка залежить від відношення магнітних проникностей обидвох середовищ.

Перейдемо до вивчення поведінки тангенціальної складової напруженості на межі двох різних середовищ. Складемо циркуляцію вектора напруженості по малому контуру. Аналогічно рівнянню (6) маємо:

$$\oint_L H_l dl = H_{2t}a - H_{1t}a + A' = \oint_S j_N dS, \quad (12)$$

де  $A'$  — частина циркуляції, яку вносять два відрізки  $h$  (рис. 2). Інтеграл  $\oint_S j_N dS$  визначає сумарний струм провідності, який протікає через поверхню  $ABCD$ , перпендикулярно до неї. Стискаємо контур так, щоб  $h \rightarrow 0$ . Тоді  $A' \rightarrow 0$  і виконуються умови:

$$\oint_L H_l dl = (H_{2t} - H_{1t})a \cong \oint_S j_N dS, \quad (13)$$

$$H_{2t} - H_{1t} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{a} \oint_S j_N dS \right\}. \quad (14)$$

Вираз  $\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{a} \oint_S j_N dS \right\}$  можна розглядати, як поверхневий струм, який протікає через одиничний відрізок дотичної до межі поділу середовищ перпендикулярно до цієї дотичної:

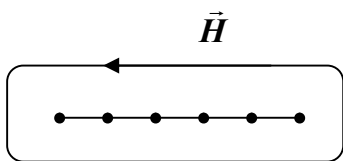


Рис. 3

$$i_N = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{a} \oint_S j_N dS \right\}. \quad (15)$$

З врахуванням (15) можна переписати (14) так:

$$H_{2t} - H_{1t} = i_N. \quad (16)$$

При наявності поверхневих струмів тангенціальна складова вектора  $\vec{H}$  змінюється скачкоподібно на величину  $i_N$ . Цю зміну наглядно пояснює рис. 3. Нехай в тонкій смужці струм тече «на нас» (це відмічено точками). При переході через поверхню напрямком магнітного вектора змінюється на протилежний: відбувається стрибок.

При відсутності поверхневих струмів ( $i = 0$ ) маємо:

$$H_{2t} = H_{1t}. \quad (17)$$

Тобто, тангенціальна складова вектора напруженості на поверхні поділу двох середовищ залишається неперервною, якщо там немає поверхневих струмів.

## §14. Закон збереження енергії в електромагнітному полі

Першими наслідками з рівнянь Максвелла-Лоренца є закони збереження імпульсу, моменту імпульсу та енергії. Вони є наслідками однорідності простору і часу. Нехай маємо систему неперервних зарядів, які рухаються в просторі. Отже, в цьому просторі буде існувати електромагнітне поле. Визначимо, яку роботу виконує електромагнітне поле з переміщення заряду за одиницю часу. Для цього розбиваємо весь простір на частини з елементарним зарядом  $dq = \rho dV$ . Позначимо швидкість заряду  $\vec{v}$ . Запишемо силу взаємодії цього заряду  $dq$  з електромагнітним полем, яке характеризується векторами  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$ :

$$d\vec{F} = dq \left( \vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}] \right). \quad (1)$$

Робота при переміщенні заряду  $dq$  за одиницю часу дорівнює:

$$d\vec{F} \cdot \vec{v} = \rho \vec{v} \left( \vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}] \right) dV. \quad (2)$$

Робота з переміщення всіх зарядів визначається формулою:

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \rho \vec{v} \left( \vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}] \right) dV. \quad (3)$$

Враховуючи те, що  $\rho \cdot \vec{v} = \vec{j}$  і  $\vec{v} \perp [\vec{v}, \vec{B}]$ , отримаємо:

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \vec{j} \vec{E} dV. \quad (4)$$

Отже, робота електромагнітного поля за одиницю часу визначається через вектори  $\vec{j}, \vec{E}$ . Виразимо цю величину через основні вектори поля. З рівняння Максвелла-Лоренца маємо:

$$\vec{j} = \text{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \quad (5)$$

Підставивши вираз (5) в (4), одержимо:

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \left( \text{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \right) \vec{E} dV. \quad (6)$$

Використаємо ще одне з рівнянь Максвелла-Лоренца

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \quad (7)$$

Додамо до формули (6) вираз, що утворений з допомогою (7):

$$-\left\{ \vec{H} \left( \text{rot}\vec{E} + \frac{d\vec{B}}{dt} \right) \right\}. \quad (8)$$

Отримаємо:

$$\frac{dW}{dt} = -\int_V \left( \vec{E} \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \right) dV + \int_V \left( \vec{E} \text{rot}\vec{H} - \vec{H} \text{rot}\vec{E} \right) dV. \quad (9)$$

Можна довести, що

$$\vec{E} \text{rot}\vec{H} - \vec{H} \text{rot}\vec{E} = -\text{div}[\vec{E}, \vec{H}], \quad (10)$$

$$\vec{E} \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}), \quad (11)$$

(наприклад,  $\vec{E} \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{1}{2} \frac{\partial\vec{E}^2}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}\vec{D})$ ).

Підставимо (11) в (9). Отримаємо:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) dV - \int_V \text{div}[\vec{E}, \vec{H}] dV. \quad (12)$$

Використаємо в останньому доданку формулу Остроградського-Гауса:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) dV - \oint_S [\vec{E}\vec{H}] d\vec{S}. \quad (13)$$

Формула (13) задає роботу при переміщенні заряду  $dq$  електромагнітним полем за одиницю часу і складається з двох доданків. Ці доданки показують, на скільки зменшиться енергія електромагнітного поля при виконанні роботи (та за її рахунок). Тому перший доданок визначає зміну енергії електромагнітного

поля за одиницю часу в об'ємі  $V$ , а другий показує, яка енергія переходить через замкнену поверхню, що охоплює цей об'єм. Уведемо позначення:

$$\frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) = w. \quad (14)$$

З зазначеного видно, що  $w$  — густина енергії електромагнітного поля. Якщо проінтегрувати (14) по  $V$ , то одержимо енергію електромагнітного поля в просторі об'ємом  $V$ . Розглянемо випадок, коли об'єм, в якому знаходиться електромагнітне поле, нескінченно великий. Очевидно, що площа поверхні, яка охоплює цей об'єм, також нескінченно велика. Припустимо, що  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  змінюється у просторі таким чином, що

$$\left[ \vec{E}, \vec{H} \right] \approx \frac{1}{r^{2+\alpha}},$$

де  $\alpha > 0$  при великих  $r$ . Площа поверхні при великих  $r$ :  $S \approx r^2$ . Тоді другий доданок в (13) дорівнює нулю. Припустимо, що в системі не виконується робота. Отже, зліва в (13) буде нуль. Для такої системи отримуємо, що

$$\frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) = const, \quad (15)$$

тобто, ця величина з часом не змінюється. Вираз (15) — математичний запис закону збереження енергії.

Зробимо деякі перетворення. Розглянемо процеси в деякому замкненому об'ємі, що охоплюється поверхнею  $S$ . Перетворимо (13), ввівши:

$$\vec{S} \equiv \left[ \vec{E}, \vec{H} \right]$$

— вектор Умова-Пойтінга. Підставимо формулу (4) в (13) і врахуємо (10). Одержимо:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) dV = - \int_V \vec{j}\vec{E} dV - \int_V \text{div} \left[ \vec{E}, \vec{H} \right] dV. \quad (16)$$

Об'єднаємо доданки справа в один інтеграл. Коли об'єм будь-який, то інтегральне рівняння виконується тоді, коли в (16) підінтегральні функції рівні:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) = -\vec{j}\vec{E} - \text{div}\vec{S}. \quad (17)$$

Вираз (17) — диференціальна формула закону зміни енергії електромагнітного поля. Зміна енергії електромагнітного поля з часом відбувається при виконанні роботи або при наявності

потіку через поверхню, якщо енергія входить чи виходить через поверхню. Отже, вектор Умова-Пойтінга — потік енергії, що проходить через одиничну площадку за одиницю часу.

## §15. Закон збереження імпульсу в електромагнітному полі

Для того, щоб отримати закон збереження імпульсу електромагнітного поля, розглянемо систему заряджених частинок, які рухаються в електромагнітному полі. Згідно з другим законом Ньютона, зміна імпульсу одного точкового заряду, що зумовлена його взаємодією з цим полем, дорівнює:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (1)$$

Якщо розглянути неперервний розподіл зарядів, то тоді в ролі точкового заряду виступає заряд елементарного об'єму. Тобто, замінимо  $q \rightarrow dq = \rho dV$ . Тоді формула (1) матиме вигляд:

$$\frac{d\vec{P}_0}{dt} = \rho(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}])dV \quad (1')$$

— зміна імпульсу за одиницю часу, де  $\vec{P}_0$  — імпульс заряду  $dq$ .

Підсумовуємо по всьому об'єму:

$$\frac{d\vec{P}_{\text{част.}}}{dt} = \int_V \rho(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}])dV. \quad (2)$$

Дещо перетворимо (2). Врахуємо такі відомі рівняння:

$$\rho\vec{v} = \vec{j}, \quad (3)$$

$$\vec{j} = \text{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\rho = \text{div}\vec{D}. \quad (5)$$

Підставимо (3) – (5) в рівняння (2) і отримаємо:

$$\frac{d\vec{P}_{\text{част.}}}{dt} = \int_V \left( \vec{E} \text{div}\vec{D} - [\vec{B}, \text{rot}\vec{H}] - \left[ \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \vec{B} \right] \right) dV. \quad (6)$$

Підінтегральну функцію в правій частині рівняння (6) зведемо до симетричного вигляду. Для цього використаємо нуль у вигляді:

$$\text{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (7)$$



$$-\left[\vec{D}, \left(\text{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\right] + \vec{H}\text{div}\vec{B} = 0. \quad (8)$$

Тоді рівняння (6) перетвориться до такого:

$$\frac{d\vec{P}_{\text{част.}}}{dt} = -\int_V \left( \left[ \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \vec{B} \right] + \left[ \vec{D}, \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \right] \right) dV + \int_V \left( \vec{E}\text{div}\vec{D} - \left[ \vec{D}, \text{rot}\vec{E} \right] + \vec{H}\text{div}\vec{B} - \left[ \vec{B}, \text{rot}\vec{H} \right] \right) dV. \quad (9)$$

Розглянемо підінтегральну функцію в першому інтегралі:

$$\left[ \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \vec{B} \right] + \left[ \vec{D}, \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{D}, \vec{B}]. \quad (10)$$

Отже, формулу (9) перепишемо так:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{P}_{\text{част.}} + \int_V [\vec{D}, \vec{B}] dV) = \int_V (\vec{E}\text{div}\vec{D} - [\vec{D}, \text{rot}\vec{E}] + \vec{H}\text{div}\vec{B} - [\vec{B}, \text{rot}\vec{H}]) dV, \quad (11)$$

де  $\vec{D}, \vec{B}$  — це функції від  $\vec{r}, t$ . Інтеграл по об'єму від  $\int_V [\vec{D}, \vec{A}] dV$

залежить лише від часу, тому можна писати  $\frac{\partial}{\partial t}$  або  $\frac{d}{dt}$ . Щоб визначити фізичний зміст  $\int_V [\vec{D}, \vec{A}] dV$ , треба дещо перетворити

(11). Необхідно розглянути фізичну систему, яка є замкненою. Припустимо, що простір, по якому інтегруємо, є нескінченно великим. Розглянемо всю сукупність зарядів як замкнену систему. Нехай  $V \rightarrow \infty$ , тоді площа поверхні, що охоплює цей об'єм,  $S \rightarrow \infty$ . Можна довести, що в реальних фізичних задачах права частина рівняння (11) тоді дорівнює нулю. Для цього потрібно зробити таке перетворення, щоб підінтегральну функцію правої частини рівняння (11) подати у вигляді дивергенції від якоїсь функції. Тоді використати формулу Остроградського-Гауса, тобто перейти до інтегрування по поверхні  $S$ . У зв'язку з тим, що  $S \sim r^2 \rightarrow \infty$  ( $r$  — віддаль від зарядів до поверхні), а в реальних фізичних задачах  $|\vec{B}|, |\vec{H}|, |\vec{D}|, |\vec{E}| \sim \frac{1}{r^{1+\alpha}}$ ,

то підінтегральна функція прямує до нуля, як  $\frac{1}{r^{2+\beta}}$ , ( $\beta > 0$ ). Тобто, підінтегральна функція швидше прямує до нуля, ніж  $S \rightarrow \infty$ . Тому при нескінченно великому  $\vec{r}$  поверхневий інтеграл прямує

до нуля і фізичну систему, що розглядається, можна вважати замкненою, бо ніякого потоку через поверхню, що охоплює нашу систему, немає. Рівняння (11) зводиться до такого:

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_{\text{част.}} + \int_V [\vec{D}, \vec{B}] dV) = 0. \quad (12)$$

Підсумовуючи отриманий результат, зазначимо, що сума імпульсів частинки  $\vec{P}_{\text{част.}}$  плюс функція, що виражається через характеристику поля, є постійною величиною. Величину  $\int_V [\vec{D}, \vec{A}] dV$  називають *імпульсом* електромагнітного поля. Маємо:

$$\vec{P}_{\text{част.}} + \int_V [\vec{D}, \vec{B}] dV = \text{const}. \quad (13)$$

З формули (12) видно, що зміна імпульсу частинки визначає зміну імпульсу електромагнітного поля. Отже, може відбуватися передача імпульсу. Величина  $[\vec{D}, \vec{B}]$  – імпульс одиниці об'єму електромагнітного поля — *густина імпульсу*. Виразимо густину імпульсу через вектор Умова-Пойтінга  $[\vec{A}, \vec{I}]$ :

$$\begin{aligned} \vec{g} = [\vec{D}, \vec{B}] &= \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0[\vec{E}, \vec{H}] = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\vec{S}, \\ \vec{g} &= \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\vec{S}. \end{aligned} \quad (14)$$

З формули (14) видно, що густина імпульсу пропорційна вектору Умова-Пойтінга. Знаючи густину імпульсу, можна визначити густину моменту імпульсу:  $[\vec{r}, \vec{g}]$ . Після інтегрування по об'єму отримуємо момент імпульсу електромагнітного поля:

$$\vec{K} = \int_V [\vec{r}, \vec{g}] dV = \int_V [\vec{r}, [\vec{D}, \vec{B}]] dV. \quad (15)$$

Можна довести, що сума моментів імпульсів з формули (15) плюс момент імпульсу зарядженої частинки буде інтегралом руху для замкненої системи.

## Питання і тести для самоконтролю

### Тестове завдання № 1

Необхідно вибрати одну відповідь.

1. Закон Кулона записується у вигляді:

- а)  $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\epsilon r} \vec{r}$ ;                      б)  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}$ ;  
в)  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2} \vec{r}$ ;                      г)  $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$ .

2. Виберіть вираз для поверхневої густини заряду:

- а)  $\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$ ;                      б)  $\sigma = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$ ;  
в)  $\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{\partial q}{\partial S}$ ;                      г)  $\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow \infty} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$ .

3. Потік вектора напруженості електричного поля, що пронизує поверхню  $S$ :

- а)  $N = \oint_S E dS = \oint_S \vec{E} d\vec{S}$ ;                      б)  $N = \oint_V E_n dS = \oint_V E dS$ ;  
в)  $N = \oint_S \vec{E}_n d\vec{S} = \oint_S \vec{E} d\vec{S}$ ;                      г)  $N = \oint_S E_n dS = \oint_S \vec{E} d\vec{S}$ .

4. Вектор індукції магнітного поля задається виразом:

- а)  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \epsilon_0 [\vec{D}, \vec{E}]$ ;                      б)  $\vec{B} = \mu_0 / \vec{H} = \mu_0 / \epsilon_0 [\vec{v}, \vec{E}]$ ;  
в)  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \epsilon_0 (\vec{v}, \vec{E})$ ;                      г)  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \epsilon_0 [\vec{v}, \vec{E}]$ .

5. Густина струму задається формулою

- а)  $\vec{B}(\vec{r}') \vec{v}(\vec{r}') = \vec{j}(r')$ ;                      б)  $\vec{H}(\vec{r}') = \vec{j}(r')$ ;  
в)  $\rho(\vec{r}') \vec{v}(\vec{r}') = \vec{j}(r')$ ;                      г)  $V(\vec{r}') \vec{v}(\vec{r}') = \vec{j}(r')$ .

6. Рівняння Максвелла-Лоренца, що описує закон повного струму:

- а)  $\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ;                      б)  $\text{rot} \vec{H} = \vec{j} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ;  
в)  $\text{rot} \vec{H} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ;                      г)  $\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

7. Напруженість поля  $\vec{E}$  в точці спостереження визначається співвідношенням:

- а)  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^3} r$ ;                      б)  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2}$ ;

$$\text{в) } \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} \vec{r}; \quad \text{г) } \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{q}{r^3} \vec{r}.$$

8. Вектор індукції магнітного поля задається виразом:

$$\begin{aligned} \text{а) } \vec{B} &= \frac{[\vec{v}, \vec{E}]}{c}; & \text{б) } \vec{B} &= \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 [\vec{v}, \vec{E}]}{c^2}; \\ \text{в) } \vec{B} &= \frac{[\vec{v}, \vec{E}]}{c^2}; & \text{г) } \vec{B} &= \frac{[\vec{v}, \vec{E}]}{4\pi\epsilon\epsilon_0 c^2}. \end{aligned}$$

9. На провідник зі струмом в магнітному полі діє сила (закон Ампера)

$$\begin{aligned} \text{а) } d\vec{F} &= \vec{j} [d\vec{l}, \vec{B}]; & \text{б) } d\vec{F} &= J [d\vec{l}, \vec{B}]; \\ \text{в) } d\vec{F} &= \rho [d\vec{l}, \vec{B}]; & \text{г) } d\vec{F} &= q [d\vec{l}, \vec{B}]. \end{aligned}$$

10. Виберіть вираз для струму зміщення

$$\begin{aligned} \text{а) } \vec{j}_{\text{зм}} &= \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; & \text{б) } \vec{j}_{\text{зм}} &= \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial \rho}; \\ \text{в) } \vec{j}_{\text{зм}} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; & \text{г) } \vec{j}_{\text{зм}} &= \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

11. Якщо поле утворене декількома точковими зарядами, тоді результуюча напруженість поля в точці спостереження виражається формулою:

$$\begin{aligned} \text{а) } \vec{E} &= \vec{E}_1 \times \vec{E}_2 \times \dots \times \vec{E}_n; & \text{б) } \vec{E} &= E_1 + E_2 + \dots + E_n; \\ \text{в) } \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n; & \text{г) } |\vec{E}| &= |\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n|. \end{aligned}$$

12. Результуюча напруженість поля, зумовлена зарядами всієї поверхні, виражається формулою:

$$\begin{aligned} \text{а) } \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_S \frac{\sigma(\vec{r})(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dS'; & \text{б) } \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_V \frac{\sigma(\vec{r})(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV; \\ \text{в) } \vec{E} &= \int_S \frac{\sigma(\vec{r})(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS'; & \text{г) } \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_S \frac{\sigma(\vec{r})(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS'. \end{aligned}$$

13. Сила Лоренца:

$$\begin{aligned} \text{а) } \vec{F} &= q [\vec{v}, \vec{B}]; & \text{б) } \vec{F} &= q [v, B]; \\ \text{в) } \vec{F} &= \vec{q} [\vec{v}, \vec{B}]; & \text{г) } \vec{F} &= e(\vec{v}, \vec{B}). \end{aligned}$$

14. Для магнітного поля справедливий принцип суперпозиції, який формулюється так:

$$\begin{aligned} \text{а) } \vec{H} &= \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \dots = \sum_{i=1}^N \vec{H}_i; & \text{б) } \vec{H} &= H_1 + H_2 + \dots = \sum_{i=1}^N H_i; \\ \text{в) } \vec{H} &= |\vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \dots| = \sum_{i=1}^N |\vec{H}_i|; & \text{г) } \vec{H}^2 &= (\vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \dots)^2 = \sum_{i=1}^N \vec{H}_i^2. \end{aligned}$$

15. Для довільного вектора  $\vec{A}$  формула Остроградського-Гауса має вигляд:

$$\begin{aligned} \text{а) } \oint_S \vec{A} d\vec{S} &= \int_V \text{div} \vec{A} dV; & \text{б) } \oint_S \text{div} \vec{A} d\vec{S} &= \int_V \vec{A} dV; \\ \text{в) } \oint_S \text{rot} \vec{A} d\vec{S} &= \int_V \text{div} \vec{A} dV; & \text{г) } \oint_S \vec{A} d\vec{S} &= \int_V \text{rot} \vec{A} dV. \end{aligned}$$

16. Рухомі заряди в контурі створюють магнітне поле, тоді магніторушійна сила запишеться:

$$\begin{aligned} \text{а) } \varepsilon_M &= \int_L (\vec{H} + \vec{B}) d\vec{l}; & \text{б) } \varepsilon_M &= \int_L \vec{H} d\vec{l}; \\ \text{в) } \varepsilon_M &= \int_L \vec{E} d\vec{l}; & \text{г) } \varepsilon_M &= \varepsilon \int_S \vec{H} d\vec{l}. \end{aligned}$$

17. Закон Біо-Савара-Лапласа має вигляд:

$$\begin{aligned} \text{а) } \vec{H} &= \frac{1}{4\pi \nu} \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), (\vec{r} - \vec{r}')] dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}; & \text{б) } \vec{H} &= \frac{1}{4\pi \nu} \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), (\vec{r} - \vec{r}')] dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|}; \\ \text{в) } \vec{H} &= \frac{1}{4\pi \nu} \int \frac{[\vec{j}(r), (\vec{r} - \vec{r}')] dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}; & \text{г) } \vec{H} &= \frac{1}{4\pi \nu} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}') dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \end{aligned}$$

18. Виберіть правильний запис:

$$\begin{aligned} \text{а) } \text{div} A &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla A; & \text{б) } \text{div} \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = (\vec{\nabla} \vec{A}); \\ \text{в) } \text{div} \vec{A} &= \frac{dA_x}{dx} + \frac{dA_y}{dy} + \frac{dA_z}{dz} = \vec{\nabla} \vec{A}; & \text{г) } \text{div} \vec{A} &= \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} = \vec{\nabla} \vec{A}. \end{aligned}$$

19. Для довільного вектора  $\vec{A}$  теорема Стокса запишеться:

$$\begin{aligned} \text{а) } \oint_L \text{div} \vec{A} d\vec{l} &= \int_S \text{rot} \vec{A} d\vec{S}; & \text{б) } \oint_L \text{rot} \vec{A} d\vec{l} &= \int_S \vec{A} d\vec{S}; \\ \text{в) } \oint_L \vec{A} d\vec{l} &= \int_S \text{rot} \vec{A} d\vec{S}; & \text{г) } \oint_L \vec{A} d\vec{l} &= \int_S \vec{A} d\vec{S}. \end{aligned}$$

20. Силкові лінії магнітного поля замкнені. Математичний запис:

$$\begin{aligned} \text{а) } \text{div} \vec{B} &= \frac{1}{\mu}; & \text{б) } \text{rot} \vec{B} &= 0; \\ \text{в) } \text{div} \vec{B} &= 0; & \text{г) } \text{rot} \vec{B} &= \frac{1}{\mu}. \end{aligned}$$

## Тестове завдання № 2

Доповніть речення або впишіть правильну відповідь.

1. Запишіть співвідношення, яке виражає принцип суперпозиції електричних полів.

---

2. Результируюча напруженість поля, зумовлена зарядами всього об'єму, повинна бути зображена об'ємним інтегралом:

---

3. Що розуміємо під трубкою струмів?

---

4. Запишіть у математичній та словесній формі закон Біо-Савара-Лапласа.

---

5. Як будують лінію вектора?

---

6. Для довільного вектора  $\vec{A}$  теорема Стокса запишеться:

---

7. Запишіть вирази для лінійної густини заряду.

---

8. Дайте означення напруженості поля в точці спостереження.

---

9. Результируюча напруженість поля, зумовлена зарядами всієї поверхні, повинна бути зображена поверхневим інтегралом:

---

10. Запишіть вираз для вектора індукції електричного поля.

---

11. Для магнітного поля сформулюйте принцип суперпозиції.

---

12. Силві лінії починаються і закінчуються на зарядах.  
Запишіть відповідне рівняння Максвелла-Лоренца.

---

13. Запишіть вираз закону електромагнітної індукції Фарадея.

---

14. Фізичний зміст діелектричної проникності.

---

15. Запишіть вираз для об'ємної густини заряду.

---

16. Запишіть теорему Остроградського-Гауса.

---

17. Електродинамічною сталою називають...

---

18. Для довільного вектора  $\vec{A}$  запишіть формулу  
Остроградського-Гауса.

---

19. Запишіть вираз для струму зміщення.

---

20. Дайте фізичний зміст рівняння неперервності заряду.

---

## Приклади розв'язування задач

### Задача № 1

Чи можна створити постійне електричне поле, напруженість якого змінюється у перпендикулярному до вектора  $\vec{E}$  напрямі?

*Розв'язок*

Спрямуємо вісь  $X$  вздовж напрямку вектора  $\vec{E}$ . Тоді за умовою задачі

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} \neq 0.$$

Тому

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial E_x}{\partial y} \vec{k} \neq 0.$$

Але в електростатичному полі

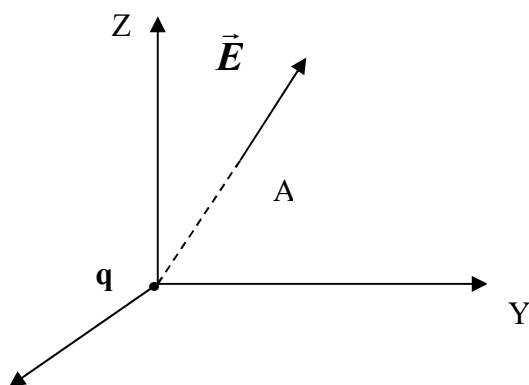
$$\text{rot}\vec{E} \equiv 0.$$

Отже, таке постійне електричне поле створити не можна.

### Задача № 2

Показати, що електричне поле точкового заряду потенціальне.

*Розв'язок*



Виберемо таку систему координат, щоб її початок збігався з точкою розміщення заряду. Тоді вектор напруженості електричного поля матиме такий вигляд:

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}. \quad (1)$$

Складові вектора поля дорівнюють:



$$E_x = k \frac{q}{r^2} \frac{x}{r}, \quad E_y = k \frac{q}{r^2} \frac{y}{r}, \quad E_z = k \frac{q}{r^2} \frac{z}{r}, \quad (2)$$

де  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ .

Якщо поле точкового заряду потенціальне, то повинна виконуватись умова:

$$\text{rot } \vec{E} = 0.$$

Обчислимо  $\text{rot } \vec{E}$ , враховуючи формули (2):

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= [\vec{\nabla}, \vec{E}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \vec{j} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \\ &= \vec{i} \left( k \frac{2}{3} \frac{qzy}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2 + z^2)}} - k \frac{2}{3} \frac{qyz}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2 + z^2)}} \right) - \\ &\quad - \vec{j} \left( k \frac{2}{3} \frac{qzx}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2 + z^2)}} - k \frac{2}{3} \frac{qxz}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2 + z^2)}} \right) + \\ &\quad + \vec{k} \left( k \frac{2}{3} \frac{qyx}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2 + z^2)}} - \frac{2}{3} \frac{qxy}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2 + z^2)}} \right) = \\ &= k \frac{2}{3} \frac{q}{\sqrt[3]{(x^2 + y^2 + z^2)}} \left( \vec{i} (zy - zy) - \vec{j} (zx - xz) + \vec{k} (yx - xy) \right) = 0, \end{aligned}$$

або

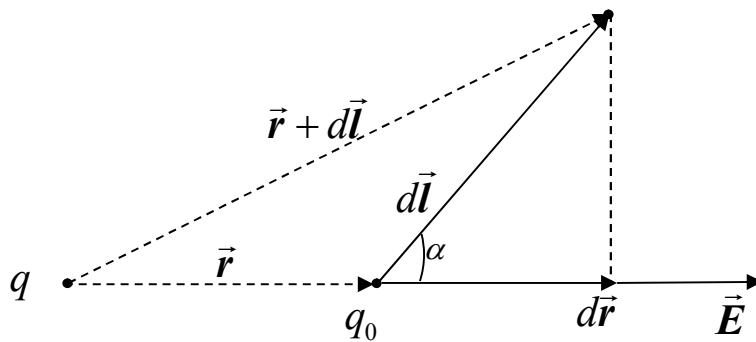
$$\text{rot } \vec{E} = \text{rot}_x \vec{E} \vec{i} + \text{rot}_y \vec{E} \vec{j} + \text{rot}_z \vec{E} \vec{k} = 0.$$

Отже, поле точкового заряду потенціальне.

### Задача № 3

Який фізичний зміст циркуляції вектора електричного поля  $\vec{E}$ ? Довести, що в полі точкового заряду циркуляція вектора  $\vec{E}$  дорівнює нулю.

Розв'язок



Щоб зрозуміти фізичний зміст циркуляції вектора напруженості електричного поля, знайдемо роботу електричних сил при

переміщенні вздовж замкненої траєкторії  $L$  точкового заряду:

$$A_{12} = q_0 \int_1^2 E \cos(\vec{E}, d\vec{l}) dl,$$

$$A = q_0 \oint_L (\vec{E} d\vec{l}) = q_0 \oint_L E \cos(\vec{E}, \hat{d}\vec{l}) dl = q_0 \oint_L E_l dl.$$

Інтеграл  $\oint_L E_l dl$  називається **циркуляцією вектора**

**напруженості**. Тому циркуляція вектора  $\vec{E}$  є роботою при переміщенні вздовж контура  $L$  одиничного точкового заряду. Доведемо, що в полі точкового заряду  $q$  циркуляція вектора  $\vec{E}$  дорівнює нулю. Запишемо напруженість поля, створеного точковим зарядом в точці  $\vec{r}$  (див. рис.):

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}.$$

Тоді робота по переміщенню заряду  $q_0$  на  $d\vec{l}$  дорівнює

$$dA = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dl \cos \alpha}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2},$$

для точок  $r_1$  і  $r_2$  маємо:

$$A_{12} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

Коли ж контур замкнений, то  $r_1 = r_2$ . Отже,  $A=0$ , а тому

$$\oint_L E_l dl = 0.$$

Останню умову можна взяти за критерій оцінювання силового поля. Силоне поле, у якому  $\oint_L E_l dl = 0$  називається **потенціальним**, або **безвихровим**.

#### Задача № 4

Вектор двовимірного електричного поля має такі компоненти:  $E_x = a + by$ ;  $E_y = 0$ , де  $a$  і  $b$  – константи. Яке це поле, потенціальне чи вихрове?

*Розв'язок*

Якщо б електричне поле було вихровим, то повинна виконуватись умова

$$\text{rot} \vec{E} \neq 0.$$

Знайдемо  $\text{rot} \vec{E}$  для заданого поля, зважаючи на те, що  $E_z = 0$ :

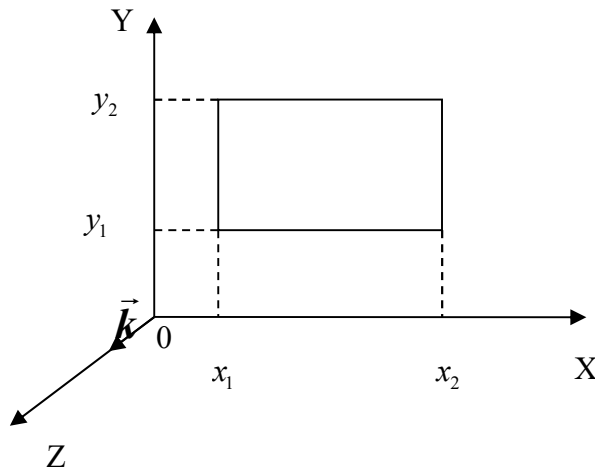
$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} = [\vec{\nabla}, \vec{E}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a + by & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -\vec{j} \frac{\partial}{\partial z}(a + by) - \vec{k} \frac{\partial}{\partial y}(a + by) = \vec{k}b. \end{aligned}$$

Отже, це поле вихрове, бо  $\text{rot} \vec{E} \neq 0$ .

#### Задача № 5

Обчислити циркуляцію вектора поля попередньої задачі по прямокутному контуру зі сторонами, паралельними осям координат. Дати фізичне пояснення результату обчислення.

### Розв'язок



Циркуляція вектора поля дорівнює:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l}.$$

Перейдемо до інтегралу по площі:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S}. (*)$$

У попередній задачі ми отримали, що

$$\text{rot} \vec{E} = -\vec{k}b. (**)$$

Тепер формулу (\*\*) підставимо у формулу (\*) і одержимо:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \vec{k}b d\vec{S};$$

Вектор  $d\vec{S}$  напрямлений перпендикулярно до площини  $XOY$ , тому  $\vec{k}d\vec{S} = ds = dxdy$ . Тепер циркуляція вектора дорівнює:

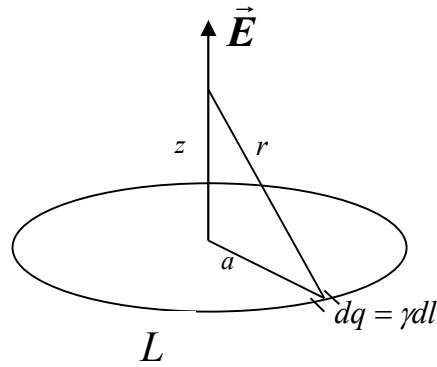
$$\begin{aligned} \oint_L E_l dl &= -\int_S b dS = -b \iint dxdy = -b \left( \int_{x_1}^{x_2} dx \cdot \int_{y_1}^{y_2} dy \right) = \\ &= -b(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = -bS. \end{aligned}$$

Отже, циркуляція вектора  $\vec{E}$  пропорційна площі прямокутника, що охоплений контуром. Задане поле не є потенціальним.

### Задача № 6

Визначити потенціал і напруженість поля рівномірно зарядженого кільця радіуса  $a$ :

- у точці, що лежить на відстані  $z$  на перпендикулярі, поставленому до площини кільця в його центрі;
- в центрі кільця;
- у точці  $z \gg a$ ;
- визначити максимальні значення потенціалу і напруженості на перпендикулярі.



### Розв'язок

**А.** Розбиваємо дане кільце на безліч нескінченно малих елементарних зарядів  $dq$  і визначимо потенціал цього елементарного заряду:  $d\varphi = \frac{k}{r} dq$ . З рисунку видно, що  $r = \sqrt{a^2 + z^2}$ .

Одержимо:  $d\varphi = \frac{k}{\sqrt{a^2 + z^2}} dq = \frac{k\gamma dl}{\sqrt{a^2 + z^2}}$ . Після інтегрування по

контурі  $L$  отримаємо, що  $\varphi = \frac{k\gamma}{\sqrt{a^2 + z^2}} \oint_L dl = \frac{kq}{\sqrt{a^2 + z^2}}$ . Застосувавши

формулу  $\vec{E} = -grad\varphi$ , знаходимо напруженість поля в точці  $z$ :

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\left( \vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = \frac{kqz}{\sqrt{(a^2 + z^2)^3}} \vec{k},$$

( частинні похідні  $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$  і  $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$  дорівнюють нулю ).

**Б.** У центрі кільця ( $z=0$ ) вираз для потенціалу спрощується:

$\varphi = \frac{kq}{a}$ . Оскільки  $\varphi$  не залежить від координат, то напруженість  $\vec{E} = 0$ . Цей результат отримаємо також з вигляду функції  $\vec{E} = \vec{E}(z)$ .

**В.** У випадку  $z \gg a$  у виразі  $\sqrt{a^2 + z^2}$  нехтуємо першим доданком:  $\sqrt{a^2 + z^2} = |z|$ . Отже, аналогічно до п. **Б**, отримаємо  $\varphi = \frac{kq}{|z|}$ , а

$$\vec{E} = \frac{kqz}{z^3} \vec{k} = \frac{kq}{z^2} \vec{k}.$$

Г. Максимальне значення потенціалу  $\varphi = \frac{kq}{a}$  буде в точці  $z=0$ , адже  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ .

Максимальне значення напруженості буде при  $\frac{\partial E}{\partial z} = 0$ . Отже,

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{qz}{\sqrt{(a^2 + z^2)^3}} \right) = kq \frac{\sqrt{(a^2 + z^2)^3} - 3z^2 \sqrt{a^2 + z^2}}{(a^2 + z^2)^3} = 0,$$

Чисельник повинен дорівнювати нулю:

$$\sqrt{(a^2 + z^2)^3} - 3z^2 \sqrt{a^2 + z^2} = 0 \Rightarrow \sqrt{(a^2 + z^2)^3} = 3z^2 \sqrt{a^2 + z^2} \Rightarrow$$

$$a^2 + z^2 = 3z^2 \Rightarrow z = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Максимальне значення напруженості поля буде в точках:

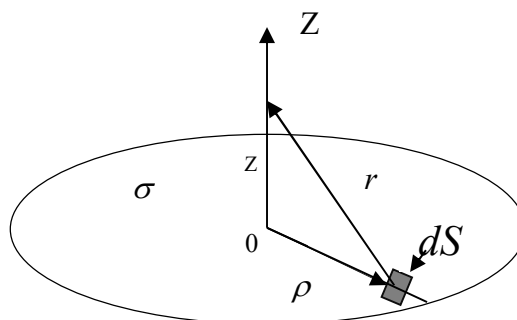
$$z_{1,2} = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

## Задача № 7

Визначити потенціал і напруженість електричного поля рівномірно зарядженого (з поверхневою густиною  $\sigma$ ) круглого диску радіуса  $a$ :

а) у точці  $z$  на перпендикулярі, поставленому до диска в його центрі; б) в центрі диска; в) у точці  $z \gg a$ . Пояснити результат.

*Розв'язок*



**А.** Розбиваємо диск на безліч нескінченно малих елементарних площадок  $dS$  і визначимо потенціал цієї елементарної площадки:

$$d\varphi = \frac{k}{r} dq = \frac{k}{r} \sigma dS. \text{ З рисунку, згідно з теоремою Піфагора,}$$

випливає, що  $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ . Підставивши значення  $r$  в  $d\varphi$ , після інтегрування по полярних координатах, одержимо:

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \frac{k}{r} dq = \int \frac{k}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \sigma ds = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{k}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \rho d\rho d\varphi = 2\pi k \sigma \int_0^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \\ &= \pi k \sigma \int_0^a \frac{d(\rho^2 + z^2)}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \pi k \sigma \sqrt{\rho^2 + z^2} \Big|_0^a = \pi k \sigma (\sqrt{a^2 + z^2} - |z|). \end{aligned}$$

Для напруженості поля маємо:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\pi k \sigma \left( \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z}{|z|} \right) \vec{k} = \pi k \sigma \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}}} \right) \frac{z}{|z|} \vec{k}.$$

**Б.** В центрі кільця  $z=0$ . Тоді, вираз для потенціалу зведеться до такого:  $\varphi = \pi k \sigma a$ , а напруженість буде мати вигляд:  $E = \pi k \sigma$ .

**В.** У випадку  $z \gg a$ , розкладаємо в ряд

$$\sqrt{a^2 + z^2} = |z| \sqrt{\frac{a^2}{z^2} + 1} = |z| \left( 1 + \frac{a^2}{2z^2} + \dots \right).$$

Отже,

$$\varphi = 2\pi k \sigma \frac{a^2}{2|z|} = k \frac{\sigma \pi a^2}{|z|} = k \frac{q}{|z|}.$$

На великій відстані потенціал диска дорівнює потенціалу точкового заряду (розмірами диска можна знехтувати). При визначенні напруженості в точках  $z \gg a$ , розглядаємо розклад в ряд Тейлора дробу:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha}} \approx 1 - \frac{1}{2} \alpha = 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2}.$$

Тоді

$$\vec{E} = 2\pi k\sigma \frac{z}{|z|} \vec{k} \cdot \frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2} = k \frac{\sigma\pi a^2}{|z|^3} \cdot z\vec{k} = k \frac{q}{|z|^3} z\vec{k}.$$

Якщо  $z > 0$ , то  $\vec{E} = k \frac{q}{z^2} \vec{k}$  — поле точкового заряду, що напрямлене вздовж осі  $OZ$  ( $q > 0$ ). Коли ж  $z < 0$ , то  $\vec{E} = -k \frac{q}{z^3} \vec{k}$  — поле точкового заряду, що направлене антипаралельно осі  $OZ$  ( $q > 0$ ).

### Задача № 8

Вимірювання показали, що вектор напруженості  $\vec{E}$  електричного поля в усіх точках ізольованої сферичної поверхні радіуса  $a = 3 \text{ см}$  напрямлений уздовж радіуса сфери і чисельно дорівнює  $100 \text{ В/м}$ . Знайти величину електричного заряду всередині сфери.

*Розв'язок*

Запишемо теорему Остроградського-Гауса  $\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int dq$ . З

умови, що напруженість в усіх точках сфери однакова,  $\vec{E}$  виносимо з-під знака інтеграла  $\vec{E} \oint d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow$

$$E 4\pi a^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow q = 4\pi E \epsilon_0 a^2.$$

Отже,

$$q = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}} 100 \frac{\text{В}}{\text{м}} 4\pi 0,03^2 = 10^{-11} \text{ Кл}.$$

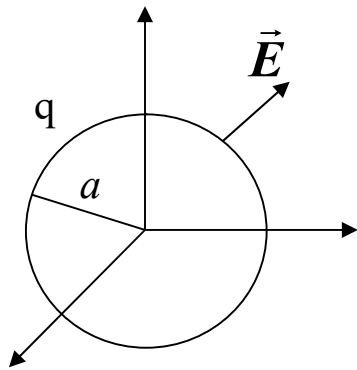
### Задача № 9

Визначити величину поверхневої густини електричного заряду на поверхні Землі в місці, де напруженість електричного поля становить  $E = 300 \text{ В/м}$ .



*Розв'язок*

Розбиваємо всю поверхню на безліч елементарних нескінченно малих площадок  $dS$  і запишемо заряд цієї елементарної площадки  $dq = \sigma dS$ .



Запишемо теорему Остроградського-Гауса  $\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int dq$ . Оскільки  $E = const$ ,

то

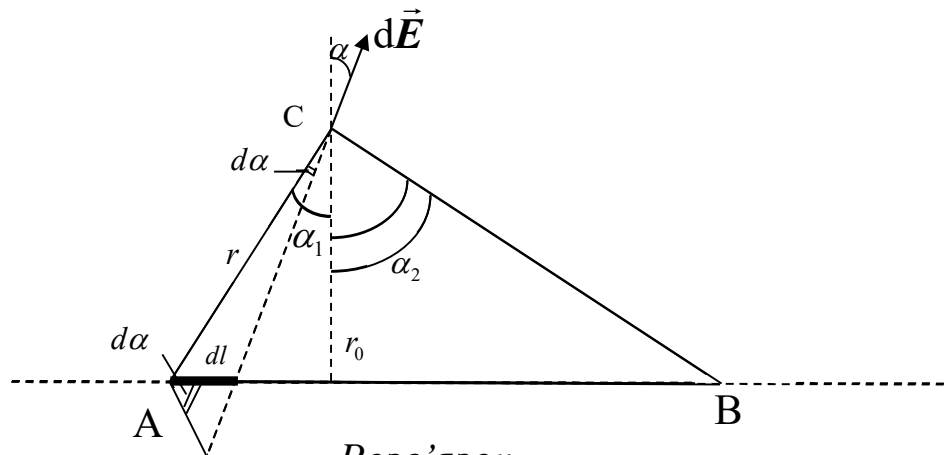
$$E \oint dS = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \oint dS \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\sigma = \epsilon_0 E = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{m} 300 \frac{B}{m} = 2,26 \cdot 10^{-9} \frac{Kл}{m^2}$$

**Задача № 10**

Знайти напруженість поля, що його утворює:

- а) рівномірно заряджений відрізок довжини  $l$  на віддалі  $r_0$  від нього;
- б) нескінченно довга пряма нитка.

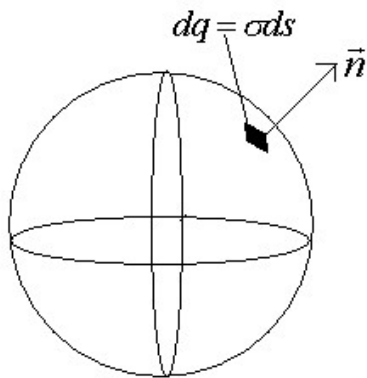


*Розв'язок*

**А.** Розбиваємо відрізок  $AB$  ( $AB=l$ ) на нескінченно малі елементи  $dl$ , заряд яких  $dq = \gamma dl$ , де  $\gamma$  — лінійна густина заряду. Запишемо напруженість поля в точці  $C$ , створеного цим зарядом:

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{r^3} \vec{r} = k\gamma \frac{dl}{r^3} \vec{r}.$$

З рисунку видно, що  $r = \frac{r_0}{\cos \alpha}$  і  $dl = \frac{rd\alpha}{\cos \alpha}$ . Підставивши ці



значення у вираз для напруженості, одержимо  $d\vec{E} = \frac{k\gamma}{r_0} \frac{\vec{r}}{r} d\alpha$ . Розкладаємо

вектор  $d\vec{E}$  на компоненти  $dE_1 = \frac{k\gamma}{r_0} \cos \alpha d\alpha$  та  $dE_2 = \frac{k\gamma}{r_0} \sin \alpha d\alpha$ .

Проінтегрувавши по  $\alpha$  в межах  $\alpha_1$  і  $-\alpha_2$ , отримаємо  $E_1 = \frac{k\gamma}{r_0} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)$ ,

$$E_2 = \frac{k\gamma}{r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

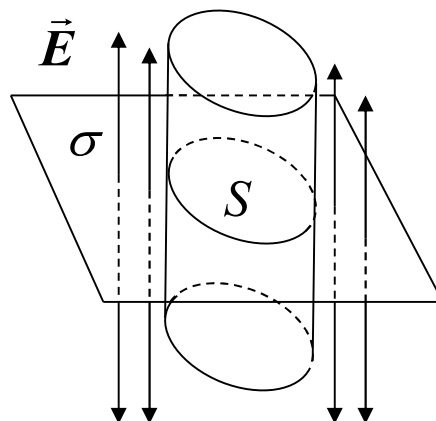
Отже,  $E = k \frac{\gamma}{r_0} \sqrt{2(1 - \cos(\alpha_1 + \alpha_2))}$ .

**Б.** В випадку нескінченної нитки  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ . Тому одержимо

$$E = \frac{2k\gamma}{r_0}.$$

### Задача № 11

Визначить напруженість поля біля нескінченної рівномірно зарядженої площини. Поверхнева густина заряду площини  $\sigma$ .



### Розв'язок

Будуємо циліндр перпендикулярно до площини. Запишемо теорему Остроградського-Гауса:

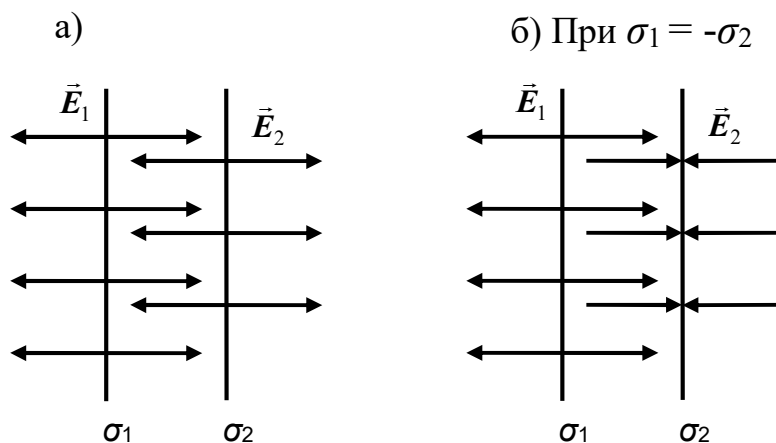
$$\int \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \int dq \Rightarrow \int \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0} \int \sigma dS.$$

Потік вектора  $\vec{E}$  по боковій поверхні дорівнює нулю, бо для бокової поверхні  $\vec{E} \perp d\vec{S}$ . Залишається потік  $\vec{E}$  через основи циліндра. Оскільки основи дві (верхня і нижня), то  $2E_n S = \frac{\sigma S}{\epsilon\epsilon_0}$ .

Отже,  $E_n = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}$ .

### Задача № 12

Знайдіть напруженість поля, утвореного двома рівномірно зарядженими паралельними площинами. Поверхневі густини зарядів дорівнюють  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ . Розгляньте випадок  $\sigma_1 = -\sigma_2$  (плоский конденсатор).



### Розв'язок

Використовуючи розв'язок попередньої задачі, запишемо:

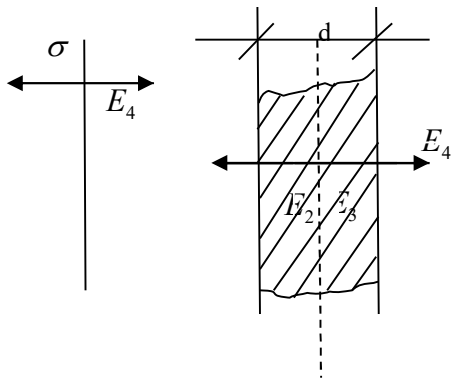
$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon\epsilon_0}, \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon\epsilon_0}.$$

$E^e$  — напруженість поля поза пластинками,  $E^i$  — напруженість поля між пластинками. Використовуючи принцип суперпозицій, запишемо:

$$\text{а) } E^e = E^1 + E^2 = \frac{1}{2\varepsilon\varepsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad E^i = E^1 - E^2 = \frac{1}{2\varepsilon\varepsilon_0}(\sigma_1 - \sigma_2).$$

$$\text{б) при } \sigma_1 = -\sigma_2: E^e = E^1 - E^2 = 0, \quad E^i = E^1 + E^2 = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

### Задача № 13



Нескінченна площина рівномірно заряджена з поверхневою густиною  $\sigma$ . Праворуч від неї і паралельно до неї розміщений шар товщиною  $d$  з об'ємною густиною заряду  $\rho$ . Визначити напруженість поля в усьому просторі.

#### Розв'язок

З попередніх задач нам відомо напруженість поля створеного площиною  $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$ . Проведемо вісь  $X$  перпендикулярно до площини з початком відліку, що міститься на серединній площині шару. Запишемо теорему Остроградського-Гауса для шару:

$$\int \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int dq \Rightarrow \int \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int \rho dV \Rightarrow 2ES_{\text{нос}} = \frac{2\rho S_{\text{нос}} |x|}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Тоді всередині шару:

$$E = \frac{\rho |x|}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

де  $x$  — координата точки шару, а зовні шару:

$$E = \frac{\rho d}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Використовуючи принцип суперпозиції, отримано:

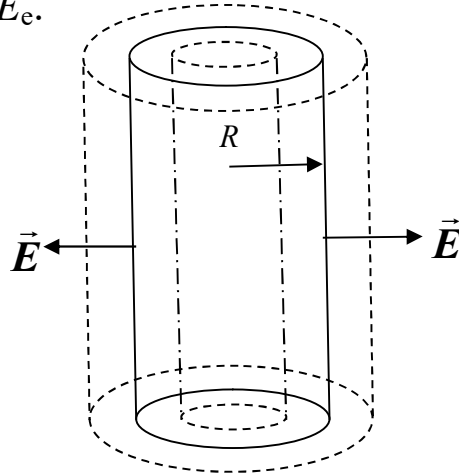
$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} - \frac{\rho d}{2\varepsilon\varepsilon_0}, \quad E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} - \frac{\rho |x|}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad E_3 = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{\rho |x|}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

$$E_4 = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{\rho d}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

### Задача № 14

Прямий круглий нескінченний циліндр радіуса  $R$  рівномірно заряджений з поверхневою густиною  $\sigma$ . Визначіть:

а) напруженість поля всередині циліндра  $E_i$ ; б) напруженість поля зовні циліндра  $E_e$ .



#### Розв'язок

Дано циліндр радіуса  $R$ . Опишемо і впишемо навколо нього циліндри. Тоді, використовуючи теорему Остроградського-Гауса, будемо мати:

$$\int \vec{E} d\vec{S} = \int \frac{dq}{\epsilon\epsilon_0} \Rightarrow \int \vec{E} d\vec{S} = \int \frac{\sigma dS}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Оскільки  $E, \sigma, \epsilon, \epsilon_0$  є величини сталі, то

$$E \int dS = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} \int dS.$$

Перепишемо тепер для напруженості поля ззовні циліндра:

$$E_e S_{r>R} = \frac{\sigma S_{r=R}}{\epsilon\epsilon_0}$$

(бо площа  $S_{r>R}$  має охоплювати заряди). Звідси:

$$E_e 2\pi r h = \frac{\sigma 2\pi R h}{\epsilon\epsilon_0},$$

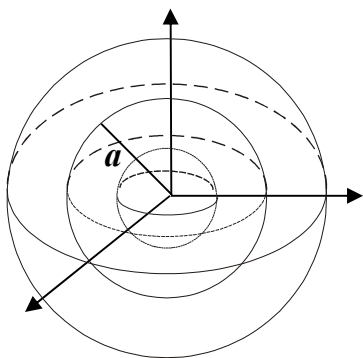
де  $h$  — висота циліндра. Отже,

$$E_e = \frac{\sigma R}{\epsilon\epsilon_0 r},$$

при умові, що  $r > R$ . Напруженість всередині циліндра рівна нулю, бо поверхня  $S_{r < R}$  не охоплює заряди і  $\sigma = 0$ . Тому  $E_i = 0$ .

### Задача № 15

Електричний заряд рівномірно розподілений по сферичній поверхні радіуса  $a$ . Знайдіть напруженість поля всередині і зовні кулі і стрибок вектора  $\vec{E}$  при проходженні через заряджену поверхню.



*Розв'язок*

Дано сферу радіуса  $a$ . Опишемо і впишемо навколо неї сфери радіусами  $r > a$  і  $r < a$ . Тоді, використовуючи теорему Остроградського-Гауса, будемо мати:

$$\int \vec{E} d\vec{S} = \int \frac{dq}{\epsilon \epsilon_0}.$$

Дещо в іншій формі:

$$\int \vec{E} d\vec{S} = \int \frac{\sigma dS}{\epsilon \epsilon_0},$$

де  $\sigma$ -поверхнева густина заряду. Оскільки  $E, \sigma, \epsilon, \epsilon_0$  є величинами сталими, тоді

$$E \int dS = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} \int dS.$$

Перепишемо тепер для напруженості поля зовні сфери:

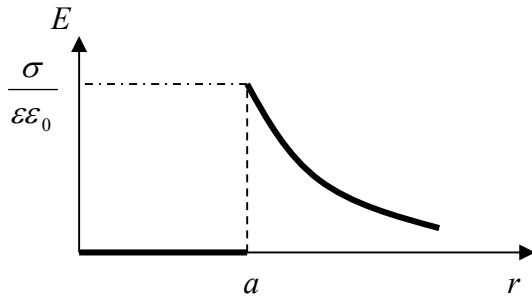
$$E_e S_{r > a} = \frac{\sigma S_{r=a}}{\epsilon \epsilon_0},$$

(бо площа  $S_{r > a}$  має охоплювати заряди), отримаємо:

$$E_e 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi a^2}{\epsilon \epsilon_0}.$$

Отже,  $E_e = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^2$ , при умові, що  $r > a$ . На поверхні  $E|_{r=a} = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0}$ .

Напруженість всередині сфери рівна нулю, бо поверхня  $S_{r < a}$  не охоплює заряди і  $\sigma = 0$ . Тому  $E_i = 0$ . Побудуємо залежності  $E = E(r)$



### Задача № 16

Біля поверхні Землі напруженість поля  $E = 300 \text{ В/м}$ . На висоті  $1400 \text{ м}$  вертикальна складова поля  $E_n = 20 \text{ В/м}$ . Визначіть середню об'ємну густину заряду в земній атмосфері на висотах, нижчих за  $1400 \text{ м}$ .

*Розв'язок*

І спосіб. За означенням об'ємної густини заряду

$$\rho = \frac{dq}{dV}.$$

З теореми Остроградського-Гауса маємо, що

$$dq = E \varepsilon_0 ds,$$

де  $ds$  — елементарна площа,  $\vec{E}$  — напруженість поля біля поверхні Землі. Підставивши у вираз для густини заряду і врахувавши, що елементарний об'єм дорівнює

$$dV = r ds,$$

одержимо:

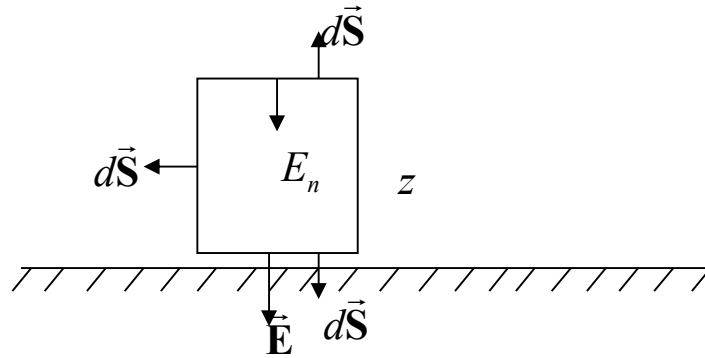
$$\rho = \frac{\varepsilon_0 E}{r}, \quad (1)$$

де  $r$  набагато менший від радіуса Землі. Якщо  $z$  — відстань від поверхні Землі,  $E(z)$  — напруженість поля на цій відстані, то для  $z$  набагато меншого за радіус Землі (а отже  $z \cong r$ ), формула (1) в першому наближенні переписеться так:

$$\rho = \frac{\varepsilon_0 (E - E(z))}{z}.$$

Підставивши значення  $E = 300 \text{ В/м}$ ,  $E(z) = 20 \text{ В/м}$ ,  $z = 1400 \text{ м}$ , одержимо  $\rho = 1.77 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^3$ .

II спосіб.



Розглянемо циліндр висотою  $z$  над поверхнею Землі. З теореми Остроградського-Гауса маємо:

$$\varepsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \rho dV.$$

Врахуємо те, що напруженість поля напрямлена вертикально, тому потік  $\vec{E}$  через бокову поверхню циліндра дорівнює нулю ( $\vec{E} \perp d\vec{S}$ ):

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = ES - E_n(z) \cdot S = [E - E_n(z)] \cdot S.$$

Розглянемо:

$$\int_V \rho dV \approx \bar{\rho} \int_V dV = \bar{\rho} S \cdot z,$$

де  $\bar{\rho}$  – середнє значення  $\rho$ . Тоді отримуємо:

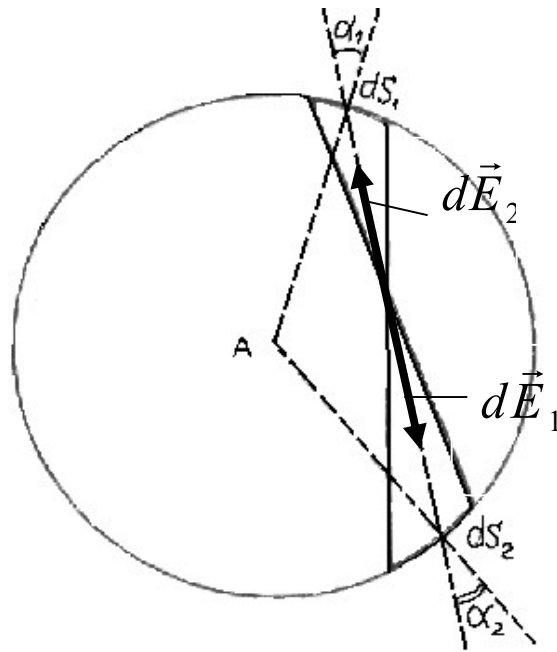
$$\bar{\rho} \cdot z = E - E_n(z); \quad \bar{\rho} = \frac{E - E_n(z)}{z}.$$

Підставивши  $E = 300 \text{ В/м}$ ,  $E(z) = 20 \text{ В/м}$ ,  $z = 1400 \text{ м}$ , маємо  $\rho = 1.77 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^3$ .

### Задача № 17

Сферична поверхня заряджена рівномірно. Користуючись законом Кулона, покажіть, що напруженість поля всередині кулі дорівнює нулю.





### Розв'язок

З точки А, розташованої в центрі сфери, проведемо пучок прямих, що утворюють нескінченно малий тілесний кут  $d\Omega$ . Ці кути вирізають на сфері дві нескінченно малі площадки  $dS_1$  та

$dS_2$ . Заряди цих площадок дорівнюють:  $dq_1 = \sigma dS_1 = \frac{\sigma r_1^2 d\Omega}{\cos \alpha_1}$ ,

$dq_2 = \sigma dS_2 = \frac{\sigma r_2^2 d\Omega}{\cos \alpha_2}$ , де  $\alpha$  — кут між віссю пучка та нормаллю до

площинки;  $r$  — віддаль до площадки;  $\sigma$  — поверхнева густина зарядів. Абсолютні величини напруженостей полів, створених

зарядами  $dq_1$  та  $dq_2$ , дорівнюють:  $dE_1 = \frac{k dq_1}{r_1^2} = k\sigma \cos \alpha_1 d\Omega$ ,

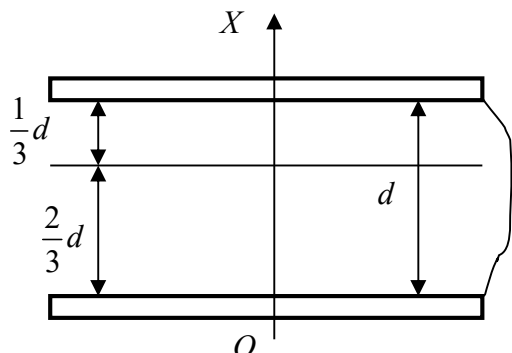
$dE_2 = \frac{k dq_2}{r_2^2} = k\sigma \cos \alpha_2 d\Omega$ . Із рисунка видно, що  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Тому

$dE_1 = dE_2$ . Оскільки вектори  $d\vec{E}_1$  та  $d\vec{E}_2$  напрямлені в протилежні сторони, то їх сума дорівнює нулю.

### Задача № 18

Дві широкі паралельні металеві пластини розміщені горизонтально на віддалі  $d$  одна від одної. Краї цих пластин

з'єднано металевим провідником. Між пластинами на віддалі  $\frac{1}{3}d$ , нижче від верхньої пластини, натягнуто тонку рівномірно заряджену плівку з поверхневою густиною  $\sigma$ . Знайти напруженості полів  $E_1$  і  $E_2$  поблизу верхньої і нижньої пластин.



### Розв'язок

Спрямуємо вісь  $OX$  перпендикулярно до поверхні пластин. З міркувань симетрії випливає, що напруженості шуканих полів мають тільки  $x$ - складові і залежать лише від  $x$ . На підставі теореми про стрибок нормальної складової напруженості поля при переході через заряджену поверхню (в нашому випадку плівку), запишемо:

$$E_1 - E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (1)$$

З іншого боку:

$$E_1 = \frac{\varphi_1}{r_1}, \quad E_2 = \frac{\varphi_2}{r_2}. \quad (2)$$

З (2) випливає, що

$$\varphi_1 = E_1 r_1, \quad \varphi_2 = E_2 r_2. \quad (3)$$

Пластинки з'єднано металевим провідником, отже потенціали їхні однакові:  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Оскільки

$$r_1 = \frac{1}{3}, \quad r_2 = \frac{2}{3},$$

тоді

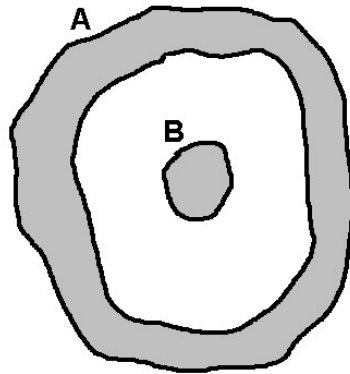
$$\frac{1}{3} E_1 = \frac{2}{3} E_2. \quad (4)$$

Із (1) і (4) випливає:

$$E_1 = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0}, \quad E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

### Задача № 19

Нехай у порожнині, утвореній провідником А, вміщено провідник В. Довести, коли на поверхні тіла В є заряд  $q_B$ , то на внутрішній поверхні тіла А індукується заряд  $q_A$ , який розподілений певним способом по цій поверхні і дорівнює заряду  $q_B$  з протилежним знаком.



#### Розв'язок

Застосуємо теорему Остроградського-Гауса до замкнутої поверхні, що проходить у товщі зовнішнього провідника. Оскільки поля в середині провідника немає, то справедливе рівняння:

$$\oint E_n dS = \frac{q_A + q_B}{\epsilon_0} = 0,$$

причому інтегрування ведеться по поверхні, яка цілком міститься у провіднику А. Отже, отримуємо:

$$q_A = -q_B.$$

### Задача № 20

Обчисліть безпосередньо на основі закону Кулона напруженість наступних полів у вакуумі (для б-в показати, що на зарядженій поверхні нормальна складова напруженості характеризується розривом  $4\pi\sigma$ ):

а) поле нескінченної прямолінійної нитки, рівномірно зарядженої з лінійною густиною  $\chi$ ;

- б) поле нескінченної площини, що рівномірно заряджена з поверхневою густиною  $\sigma$ ;
- в) поле нескінченно довгої поверхні круглого циліндра, який є рівномірно зарядженим з лінійною густиною  $\chi$ . Радіус циліндра  $a$ ;
- г) поле рівномірно зарядженої сферичної поверхні. Радіус сфери  $a$ , її заряд  $q$ ;
- д) поле, створене зарядом  $q$ , що рівномірно розподілений по об'єму кулі радіуса  $a$ .

*Розв'язок*

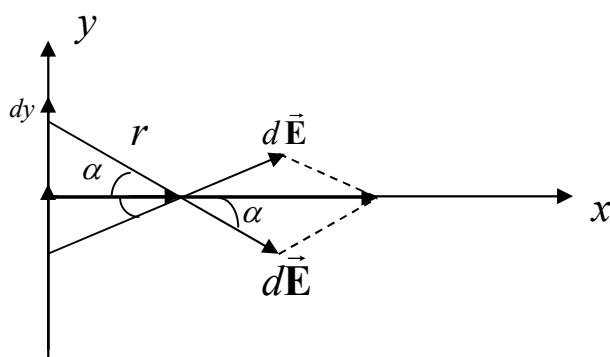


Рис. 1

а)

$$dE = \frac{\chi \cdot dy}{r^2}, \chi > 0.$$

Напруженість поля, створеного елементом довжини нитки

$$E = \int dE \cdot \cos \alpha = \chi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha}{r^2} dy = \chi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha dy}{R^2 + y^2}.$$

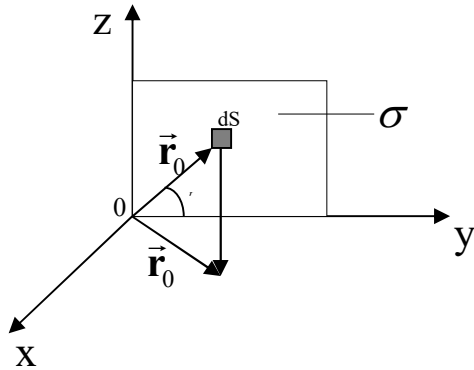
З рисунку видно, що напруженість поля напрямлена перпендикулярно до нитки. Для визначення її величини перетворимо підінтегральну функцію до простішого вигляду, використовуючи формули:

$$y = R \operatorname{tg} \alpha; \quad dy = \frac{R}{\cos^2 \alpha} d\alpha; \quad R^2 + y^2 = \frac{R^2}{\cos^2 \alpha}.$$

Отримуємо:

$$E = \frac{\chi}{R^2} R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{\chi}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = \frac{2\chi}{R}.$$

б)



Напруженість поля, створеного елементом поверхні зарядженої площини:

$$d\vec{E} = \frac{\sigma dS (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}.$$

Проінтегруємо

$$\vec{E} = \sigma \int_S \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}) dS}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}.$$

Запишемо три проекції:

$$E_x = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_0 dz dy}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}; \quad E_y = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y_0 - y) dz dy}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3};$$

$$E_z = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z_0 - z) dz dy}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3}.$$

Доведемо, що  $E_y = E_z = 0$ .

$$E_y = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{y_0 - y}{[x_0^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}}.$$

Уведемо нову змінну:  $du = y_0 - y$ ,  $du = -dy$ .

$$E_y = \sigma \int_{+\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{u}{[x_0^2 + u^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}}.$$

Видно, що внутрішній інтеграл дорівнює нулю, бо підінтегральна функція непарна, а інтегрування ведеться у симетричних межах. Отже  $E_y=0$ . Аналогічно доводиться, що  $E_z=0$ .

Визначимо  $E_x$ .

$$E_x = \sigma x_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dzdy}{\left[ x_0^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2 \right]^{3/2}} = \sigma x_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{1}{\left[ x_0^2 + y'^2 + z'^2 \right]^{3/2}}.$$

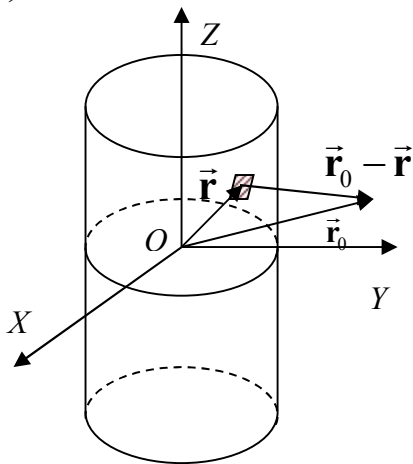
Введемо нові змінні:

$$z' = \rho \sin \varphi, \quad y' = \rho \cos \varphi, \quad dz'dy' = \rho d\rho d\varphi.$$

Отримаємо вираз:

$$\begin{aligned} E_x &= \sigma x_0 \int_0^{\infty} d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\left[ x_0^2 + \rho^2 \right]^{3/2}} = 2\pi\sigma x_0 \int_0^{\infty} d\rho \frac{\rho}{\left[ x_0^2 + \rho^2 \right]^{3/2}} = \\ &= \pi\sigma x_0 \int_0^{\infty} \frac{d(\rho^2 + x_0^2)}{\left[ \rho^2 + x_0^2 \right]^{3/2}} = 2\pi\sigma \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2}} = 2\pi\sigma \frac{x_0}{|x_0|}. \end{aligned}$$

в)



Напруженість поля, створеного елементом поверхні зарядженого циліндра

$$\vec{E} = \int_S \frac{\sigma dS}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} (\vec{r}_0 - \vec{r}),$$

де  $S$  — поверхня циліндра;  $\sigma$  — поверхнева густина заряду,

$$\chi = \sigma 2\pi a, \quad \sigma = \frac{\chi}{2\pi a}.$$

Використаємо циліндричну систему координат:

$$dS = a d\varphi dz; \quad \vec{r}_0 = \rho_0 \vec{n}_{\rho_0} + z_0 \vec{k}; \quad \vec{r} = a \vec{n}_{\rho} + z \vec{k}.$$

$$\vec{E} = \frac{\chi}{2\pi a} \cdot a \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(z_0 - z)\vec{k} + \rho_0 \vec{n}_{\rho_0} - a \vec{n}_{\rho}}{\left[ (\rho_0^2 + z^2) + (a^2 + z^2) - 2a\rho_0 \vec{n}_{\rho_0} \vec{n}_{\rho} - 2z_0 z \right]^{3/2}}.$$

Розглянемо проєкції вектора на осі координат.

$$E_{\rho_0} = \frac{\chi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\rho_0 - a \cos \varphi}{\left[ \rho_0^2 + a^2 + (z_0 - z)^2 - 2a\rho_0 \cos \varphi \right]^{3/2}};$$

$$E_{z_0} = \frac{\chi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{z_0 - z}{\left[ \rho_0^2 + a^2 + (z_0 - z)^2 - 2a\rho_0 \cos \varphi \right]^{3/2}};$$

$$E_{\varphi} = 0.$$

Заміною  $z_0 - z = -u$  інтеграли спростяться до такого вигляду:

$$E_{\rho_0} = \frac{\chi}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\rho_0 - a \cos \varphi}{\left[ \rho_0^2 + a^2 + u^2 - 2a\rho_0 \cos \varphi \right]^{3/2}};$$

$$E_{z_0} = \frac{\chi}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{u}{\left[ \rho_0^2 + a^2 + u^2 - 2a\rho_0 \cos \varphi \right]^{3/2}} = 0.$$

Визначимо інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \frac{1}{\left[ b^2 + u^2 \right]^{3/2}}.$$

Заміною  $u = btg\alpha$  він легко обчислюється:

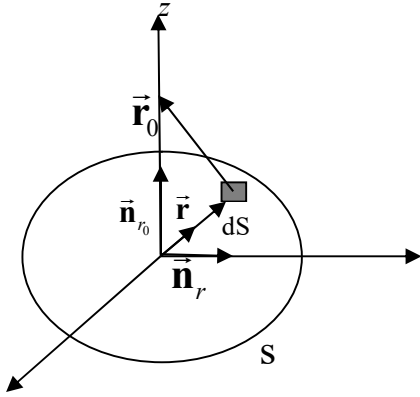
$$\int_{-\infty}^{\infty} du \frac{1}{\left[ b^2 + u^2 \right]^{3/2}} = \frac{1}{b^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = \frac{2}{b^2}.$$

Отже,

$$E_{\rho_0} = \frac{\chi}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\rho_0 - a \cos \varphi}{\rho_0^2 + a^2 - 2a\rho_0 \cos \varphi} = \frac{\chi}{\rho_0} \left( 1 + \frac{\rho_0^2 - a^2}{\left| \rho_0^2 - a^2 \right|} \right).$$

Звідси коли  $\rho_0 > a$   $E_{\rho_0} = \frac{2\chi}{\rho_0}$ , якщо ж  $\rho_0 < a$ , то  $E_{\rho_0} = 0$ .

г)



Направимо для зручності вісь  $OZ$  в точку спостереження. Результат не залежить від вибору системи координат.

$$d\vec{E} = -\frac{\sigma dS(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}, \quad \sigma = \frac{q}{4\pi a^2}, \quad \vec{E} = -\sigma \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) dS}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}.$$

Запишемо вектори  $\vec{r}$  і  $\vec{r}_0$  у сферичній системі координат:

$$\vec{r} = r\vec{n}_2 = a\vec{n}_2, \quad \vec{r}_0 = r_0\vec{n}_{r_0}.$$

Проекції вектора  $\vec{E}$  визначаються з умов:

$$E_{r_0} = \vec{E} \cdot \vec{n}_{r_0}, E_g = \vec{E} \cdot \vec{n}_g, E_\varphi = \vec{E} \cdot \vec{n}_\varphi.$$

Отже,

$$E_{r_0} = -\sigma \int_S \frac{(a\vec{n}_r \cdot \vec{n}_{r_0} - r_0) dS}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0\vec{n}_r \cdot \vec{n}_{r_0})^{3/2}} = -\sigma \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(a \cos \vartheta - r_0) a^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \vartheta)^{3/2}},$$

$$E_g = E_\varphi = 0.$$

Знайдемо  $E_{r_0}$ :

$$E_{r_0} = -a^2 \sigma \cdot 2\pi \int_0^\pi \frac{(a \cos \vartheta - r_0) \sin \vartheta d\vartheta}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \vartheta)^{3/2}} = -\frac{q}{2} \int_{-1}^1 \frac{(au - r_0) du}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cdot u)^{3/2}} =$$

$$= \frac{qr_0}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cdot u)^{3/2}} - \frac{aq}{2} \int_{-1}^1 \frac{udu}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cdot u)^{3/2}} =$$

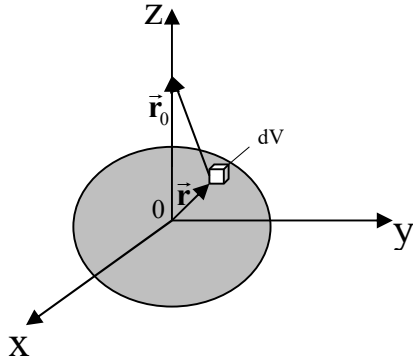
$$= \frac{q}{2} \left\{ \frac{1}{a} \left( \frac{1}{|r_0 - a|} - \frac{1}{r_0 + a} \right) - \frac{a^2 + r_0^2}{2ar_0^2} \left( \frac{1}{|r_0 - a|} - \frac{1}{r_0 + a} \right) + \frac{1}{2ar_0^2} (r_0 + a - |r_0 - a|) \right\} =$$



$$= \frac{q}{2} \left\{ \frac{1}{2ar_0^2} (a+r_0 - |a-r_0|) + \frac{r_0^2 - a^2}{2r_0^2 a} \left( \frac{1}{|a-r_0|} - \frac{1}{a+r_0} \right) \right\}.$$

Якщо  $r_0 > a$ , то  $E = \frac{q}{r_0^2}$ , а коли  $r_0 < a$ , то  $E = 0$ .

д)



Напруженість поля, створеного елементом поверхні зарядженої кулі:

$$\vec{E} = \rho \int_V \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}) dV}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3},$$

де

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3}.$$

$$\vec{E}_{r_0} = \frac{3q}{4\pi a^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \frac{(r_0 - r \cos \vartheta) r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \vartheta)^{3/2}} = \frac{3q}{2a^3} \int_0^a \int_{-1}^1 \frac{(r_0 - ru) du r^2 dr}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 u)^{3/2}} =$$

$$= \frac{3q}{2a^3} \int_0^a dr r^2 \left\{ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{|r_0 - r|} - \frac{1}{r_0 + r} \right) - \frac{r^2 + r_0^2}{2rr_0^2} \left( \frac{1}{|r_0 - r|} - \frac{1}{r_0 + r} \right) + \frac{1}{2rr_0^2} (r_0 + r - |r_0 - r|) \right\}.$$

Для спрощення обчислень розглянемо конкретні випадки.

Якщо  $r_0 > a$ , то  $r_0 > r$ . Тоді

$$E_{r_0} = \frac{3q}{2a^3} \int_0^a dr r^2 \cdot \frac{2}{r_0^2} = \frac{3q}{a^3 r_0^2} \frac{r^3}{3} = \frac{q}{r_0^2}; \quad E_{r_0} = \frac{q}{r_0^2}.$$

У випадку  $r_0 < a$ , маємо

$$E_{r_0} = \frac{3q}{2a^3} \left( \int_0^{r_0} dr r^2 \cdot \frac{2}{r_0^2} + \int_{r_0}^a dr r^2 \cdot 0 \right) = \frac{3q}{a^3 r_0^2} \cdot \frac{r_0^3}{3} = \frac{q}{a^3} r_0.$$

### Задача № 21

Заряд  $q$  рівномірно розподілений по об'єму ( $\rho = \text{Const}$ ), замкненому між двома ексцентричними сферами так, що менша з них перебуває повністю всередині більшої. Визначіть напруженість поля всередині порожнини.

#### *Розв'язок*

Шукане поле дорівнює різниці полів, створених двома рівномірно зарядженими кулями, а тому (див. розв'язок задачі 20 д)

$$E = \frac{4\pi}{3} \rho r - \frac{4\pi}{3} \rho r_1 = \frac{4\pi}{3} \rho a.$$

Отже, поле всередині порожнини однорідне.

### Задача № 22

В основному стані атома водню заряд електрона ( $-e$ ) розподілений з об'ємною густиною  $\rho = -\frac{e}{\pi a^3} \cdot e^{-\frac{2r}{a}}$ , де  $a$  — борівський радіус,  $r$  — відстань від ядра. Обчисліть напруженість поля всередині атома.

#### *Розв'язок*

Напруженість поля, створеного електронною хмаринкою (див. задачу 20д).

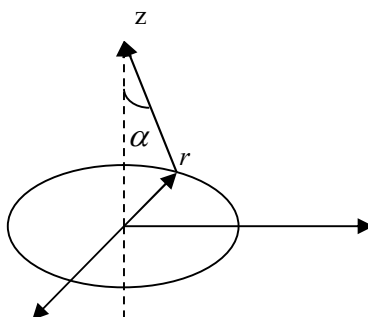
$$E^{el} = E_r^{el} = \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r \rho(r_1) \cdot r_1^2 dr_1.$$

З урахуванням поля ядра отримуємо, що сумарна напруженість поля:

$$E = E_r = \frac{e}{r^2} \left( 1 + 2\frac{r}{a} + 2\frac{r^2}{a^2} \right) \cdot e^{-\frac{2r}{a}}.$$

### Задача № 23

Поле створюється у вакуумі рівномірно зарядженим колом з радіусом  $a$  і зарядом  $q$ . Обчисліть напруженість поля на осі кола.



#### Розв'язок

Елемент довжини кола  $dl$  створює в будь-якій точці на осі  $z$  поле, напруженість якого:

$$dE = \frac{q}{2\pi a} \frac{dl}{r^2},$$

де  $r = \sqrt{a^2 + z^2}$ .

Напруженість електричного поля кола:

$$E_x = E_y = 0,$$

$$E_z = \int dE \cos \alpha = \frac{q}{r^2} \cos \alpha = q \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

### Задача № 24

Круглий диск з радіусом  $a$  рівномірно заряджений з поверхневою густиною  $\sigma$ . У якій точці на осі диску напруженість поля дорівнює  $\pi\sigma$ ?

*Розв'язок*

Елементарне кільце диска, що має радіус  $R$  і ширину  $dR$ , створює поле, напруженість якого:

$$dE_z = 2\pi\sigma R \cdot dR \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Повна напруженість поля створена диском

$$E = 2\pi\sigma z \int_0^a \frac{R \cdot dR}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = 2\pi\sigma \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{z}\right)^2}} \right).$$

Звідси відстань від шуканої точки до диска:

$$|z| = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

**Задача № 25**

Поле створюється зарядом  $q$ , координати якого  $(-a, 0, 0)$  і зарядом  $-q$ , координати якого  $(a, 0, 0)$ . Обчисліть потік вектора напруженості через поверхню круглого диску з радіусом  $a$ , площина якого перпендикулярна до осі  $x$  і центр якого збігається з початком координат.

*Розв'язок*

У будь-якій точці диску, що є на відстані  $R$  від центра, напруженість дорівнює:

$$E_x = 2 \frac{q}{r^2} \cos a = \frac{2aq}{(a^2 + R^2)^{3/2}},$$

а тому потік

$$N = \int E_x \cdot dS = 2aq \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{R \cdot dR \cdot d\vartheta}{(a^2 + R^2)^{3/2}} = 2\sqrt{2}\pi q(\sqrt{2} - 1).$$

## Задача № 26

Поле створюється у вакуумі рівномірно зарядженою прямолінійною нескінченною ниткою. Лінійна густина зарядів  $\chi$ . Обчисліть потік вектора напруженості цього поля через поверхню квадрата зі стороною  $2a$ , площина якого паралельна зарядженій нитці і розміщена на відстані  $a$  від неї.

*Розв'язок*

Напруженість поля (див. задачу 20) дорівнює:

$$E = \frac{2\chi}{R}.$$

Нормальна складова вектора  $\vec{E}$  визначається формулою:

$$E_n = E_z = E \cdot \cos \alpha = \frac{2\chi}{R} \frac{a}{R}.$$

Потік вектора:

$$N = \int E_n dS = 2a\chi \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{dx \cdot dy}{a^2 + y^2} = 2\pi a\chi.$$

## Задача № 27

Вивести з рівнянь Максвелла закон Кулона для вакууму.

*Розв'язок*

Поле, створене у вакуумі точковим зарядом  $q$ , володіє сферичною симетрією:  $E_r = E(r)$ ;  $E_\theta = E_\psi = 0$ . Застосувавши теорему Остроградського-Гауса до сферичної поверхні з центром в заряді  $q$ . Отримаємо, що

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q; \quad E = \frac{q}{r^2}.$$

Останнє рівняння еквівалентне закону Кулона для сили взаємодії двох точкових зарядів у вакуумі.

## Задача № 28

Нескінченна прямолінійна нитка рівномірно заряджена з лінійною густиною  $\chi$  і оточена однорідним діелектриком з проникністю  $\varepsilon_1$ , що має форму нескінченного циліндра з радіусом  $R$ , а за ним ( $R > R_1$ ) — однорідним безмежним діелектриком з проникністю  $\varepsilon_2$ . Визначити напруженість поля, що створює заряджена нитка.

### *Розв'язок*

Поле володіє аксіальною симетрією, тому в циліндричній системі координат лише одна проекція вектора індукції відмінна від нуля:  $D_\rho = D(R)$ ,  $D_\varphi = D_z = 0$ . Застосувавши теорему Остроградського-Гауса до поверхні циліндра висотою  $H$  і радіусом  $R$ , вісь якого збігається із зарядженою ниткою, отримаємо, що (потік через основи циліндру дорівнює нулю). Запишемо останнє рівняння через напруженість електричного поля:

$$D \cdot 2\pi R H = 4\pi \chi H; \quad D = \frac{2\chi}{R}.$$

$$E = \begin{cases} \frac{2\chi}{\varepsilon_1 R}, & (R < R_1); \\ \frac{2\chi}{\varepsilon_2 R}, & (R > R_1). \end{cases}$$

## Задача № 29

Визначить поверхневу густина зв'язаних зарядів на межі ( $R = R_1$ ) діелектриків попередньої задачі.

### *Розв'язок*

Поверхнева густина зв'язаних зарядів:

$$\sigma' = \frac{\chi}{2\pi R_1} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right).$$

### Задача № 30

Визначити поле, створене рівномірно зарядженою ( $\sigma = \text{const}$ ) поверхнею нескінченно довгого циліндра з радіусом  $a$  в неоднорідному діелектричному середовищі, проникність якого  $\varepsilon = \varepsilon(R)$ , де  $R$  – відстань від осі циліндра.

*Розв'язок*

Аналогічно до задачі 28 знаходимо, що

$$D2\pi \cdot RH = \begin{cases} 0, & (R < a), \\ 4\pi\chi H, & (R > a), \end{cases}$$

де  $\chi = 2\pi a\sigma$  — лінійна густина зарядів. Звідси:

$$E = E_R = \begin{cases} 0, & (R < a), \\ \frac{2\chi}{\varepsilon(R) \cdot R}, & (R > a). \end{cases}$$

### Задача № 31

Визначить об'ємну густина зв'язаних зарядів у попередній задачі.

*Розв'язок*

На основі розглянутих задач і з урахуванням результату попередньої задачі вектор поляризації

$$P = P_R = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E = \frac{\varepsilon - 1}{2\pi} \chi \frac{1}{\varepsilon(R) \cdot R}.$$

Звідси на основі задачі 29 густина зв'язаних зарядів

$$\rho' = -\frac{a\sigma}{R} \frac{d}{dR} \left( \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right).$$

### Задача № 32

Визначити поле, що створене нескінченною рівномірно зарядженою ( $\sigma = \text{const}$ ) площиною, якщо з обидвох боків від неї простір заповнено однорідним діелектриком з проникністю  $\varepsilon$ .

### Розв'язок

Напруженість поля є перпендикулярною до зарядженої площини. Застосувавши теорему Остроградського-Гауса до поверхні циліндра, основи якого паралельні до зарядженої площини і знаходяться по різні сторони і на рівних відстанях від неї, отримаємо, що

$$2DS = 4\pi\sigma S; D = 2\pi\sigma.$$

Напруженість поля задається формулою:

$$E = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon}.$$

### Задача № 33

Визначить поле плоского конденсатора, обкладки якого рівномірно заряджені з поверхневою густиною зарядів  $+\sigma$  і  $-\sigma$ . Простір між ними заповнено неоднорідним діелектриком, проникність якого  $\varepsilon = \varepsilon(x)$ . Крайовим ефектом знехтувати. Вісь  $x$  напрямлена перпендикулярно до конденсатора від позитивно зарядженої обкладки до негативно зарядженої.

### Розв'язок

Поле зовні конденсатора дорівнює нулю. Аналогічно до задачі 23 знайдемо поле всередині конденсатора:

$$D_y = D_z = 0; D_x = 4\pi\sigma;$$

$$E_y = E_z = 0; E_x = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}.$$

### Задача № 34

Визначить поле, створене зарядженою провідною кулею з радіусом  $a$ . Заряд її  $Q$ . Діелектрична проникність навколишнього середовища  $\varepsilon = \varepsilon(r)$ , де  $r$  — відстань від центру кулі.

### Розв'язок

Задача має центр симетрії, отже:

$$D_r = D(r); D_\theta = D_\varphi = 0.$$



Застосувавши теорему Остроградського-Гауса до сферичної поверхні, концентричної із зарядженою кулею, отримаємо:

$$D \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q.$$

Всередині кулі ( $r < a$ )  $q = 0$ , а тому

$$D = E = 0.$$

Зовні кулі ( $r > a$ )  $q = Q$ . Отримуємо:

$$D = \frac{Q}{r^2}; \quad E = \frac{Q}{\epsilon r^2}.$$

### Задача № 35

Визначіть поверхневу густину зв'язаних зарядів ( $\sigma'$ ) на межі діелектрика і кулі з попередньої задачі.

*Розв'язок*

Із попередніх задач випливає:

$$E_n^{(1)} - E_n^{(2)} = 4\pi(\sigma + \sigma').$$

Звідси (див. розв'язок попередньої задачі):

$$\sigma' = -\sigma\left(1 - \frac{1}{\epsilon(a)}\right).$$

### Задача № 36

Внутрішня обкладка сферичного конденсатора має заряд  $q$ . Зовнішня обкладка заземлена. Визначіть заряд, індукований на зовнішній обкладці.

*Розв'язок*

Уявімо собі замкнуту поверхню в товщині зовнішньої обкладки конденсатора, яка охоплює внутрішню обкладку. У середині провідникової обкладки поля немає, а тому на основі теореми Остроградського-Гауса:

$$q + q_{\text{інд}} = 0; \quad q_{\text{інд}} = -q.$$

### Задача № 37

Визначить поле сферичного конденсатора, радіуси обкладинок якого  $r_1$  і  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ). Заряд внутрішньої обкладки  $q$ , зовнішня заземлена; між ними неоднорідний діелектрик, проникність якого  $\varepsilon = \varepsilon(r)$ .

*Розв'язок*

У результаті суперпозиції полів, створених кожною із обкладинок зокрема, знаходимо:

$$E = \begin{cases} 0 & (r < r_1), \\ \frac{q}{\varepsilon r^2} & (r_1 < r < r_2), \\ 0 & (r > r_2). \end{cases}$$

### Задача № 38

Однорідна діелектрична куля з радіусом  $a$  рівномірно заряджена по об'єму ( $\rho = \text{const}$ ), заряд її  $q$ , проникність кулі  $\varepsilon_0$ , навколишнього середовища —  $\varepsilon = \varepsilon(r)$ . Обчисліть напруженість поля, створеного зарядженою кулею.

*Розв'язок*

Застосувавши теорему Остроградського-Гауса до сферичної поверхні, концентричної із зарядженою кулею, отримаємо:

$$D \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q'.$$

Всередині кулі ( $r < a$ )  $q' = q$ , а тому

$$D = \frac{q}{r^2}; \quad E = \frac{q}{\varepsilon r^2}.$$

Зовні кулі ( $r > a$ )  $q' = (q/a^3)r^3$ , а тому

$$D = \frac{q}{a^3} r; \quad E = \frac{q}{\varepsilon_0 a^3} r \quad (r > a).$$

## Предметний покажчик

<b>В</b>	
вектор індукції електричного поля.....	18
вектор індукції магнітного поля	19
вектор поляризації.....	34
вектор Умова-Пойтінга.....	47
<b>Г</b>	
граничні умови .....	41
густина енергії електромагнітного поля.....	47
густина зв'язаних зарядів.....	34
густина імпульсу .....	50
густина струму зміщення .....	26
<b>Д</b>	
диполь.....	34
дипольний момент.....	34
діамагнітні речовини.....	36
діелектрична проникність вакууму .....	11
діелектрична проникність середовища .....	11, 37
діелектрична сприйнятливність середовища .....	36
<b>Е</b>	
електродинамічна стала.....	19
електромагнітне поле .....	11
електрорушійна сила.....	27
<b>З</b>	
закон Ампера .....	22
закон Біо-Савара-Лапласа .....	21
закон електромагнітної індукції Фарадея .....	30
закон збереження заряду .....	25
закон Кулона.....	11
закон Ома .....	35
закон повного струму .....	28
закону збереження енергії.....	47
закону зміни енергії електромагнітного поля .....	47
<b>І</b>	
імпульс електромагнітного поля .....	50
індукційне електричне поле.....	29
<b>К</b>	
квазіточковий заряд .....	7
<b>Л</b>	
лінійна густина заряду.....	14
<b>М</b>	
магнітна сприйнятливність середовища .....	38
магніторушійна сила.....	27
макроскопічне поле .....	31
макроскопічні рівняння Максвелла-Лоренца.....	33
матеріальні рівняння.....	39
мікроскопічне поле .....	31
мікроскопічні рівняння Максвелла-Лоренца.....	32
<b>Н</b>	
напруженість поля .....	12
<b>О</b>	
об'ємна густини заряду .....	13
<b>П</b>	
парамагнітні речовини.....	36
поверхнева густина заряду.....	13
поляризація речовини .....	34
потік вектора індукції магнітного поля .....	30

принцип суперпозиції	
електричних полів.....	12
провідність середовища.....	35

### Р

рівняння Максвелла-Лоренца для	
середовища .....	38
рівняння Максвелла-Лоренца ...	23,
26, 28, 30	
рівняння неперервності .....	25

### С

сила Лоренца.....	19
-------------------	----

силова лінія поля.....	15
соленоїдальне поле .....	28

### Т

теорема Остроградського-Гауса	18
теорема Стокса .....	27
точковий заряд.....	11
трубка струмів .....	18

### Ф

ферромагнітні речовини.....	36
-----------------------------	----

## Основні та додаткові літературні джерела

1. Алексеев А. И. Сборник задач по классической электродинамике: Учеб. пособие. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. — 318 с.
2. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике. — М. : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. — 640 с.
3. Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н. Классическая электродинамика: Учебное пособие / под редакцией И. Н. Топтыгина. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. — 400 с.
4. Векштейн Е. Г. Сборник задач по электродинамике. — М.: Высшая школа, 1966. — 286 с.
5. Гречко А. Г. Сугаков В. И., Томасевич О. Ф., Федорченко А. М. Сборник задач по теоретической физике : Учеб. пособие для вузов. — М. : Высшая школа, 1972. — 336 с.
6. Джексон Дж. Классическая электродинамика. — М. : Мир, 1965. — 702 с.
7. Измайлов С. В. Курс электродинамики. — М. : Учпедгиз, 1962. — 440 с.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : Учеб. пособие. В 10 т. Т. II. Теория поля. — 7-е изд. испр. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 512 с.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : Учеб. пособие. В 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. — 2-е изд. испр. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — 620 с.
10. Левич В. Г. Курс теоретической физики. Т.1. Теория электромагнитного поля. Теория относительности. Статистическая физика. Электромагнитные процессы в веществе. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. — 910 с.
11. Мултановский А. В., Василевский А. С. Курс теоретической физики. Классическая электродинамика: Учеб. пособие [для студентов физ.-мат. фак. пед. ин.-тов]. — М. : Просвещение, 1990. — 272 с.
12. Новожилов Ю. В., Яппа Ю. А. Электродинамика : Учеб. пособие. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978 — 352 с.
13. Савельев И. В. Основы теоретической физики : Учеб.

- Руководство [для вузов]. В 2 т. Т. 1. Механика и электродинамика. — 2-е изд., испр. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. — 496 с.
14. Сугаков В. Й. Теоретична фізика. Електродинаміка. — К. : Вища школа, 1974. — 271 с.
  15. Тамм И. Е. Основы теории электричества : Учеб. пособие [для вузов]. — 11-е изд., испр. и доп. — М. : Физматлит, 2003. — 616 с.
  16. Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П. Электродинамика: Учеб. пособие для студентов физ. спец. университетов. — 2-е изд., перераб. — М. : Высшая школа, 1990. — 352 с.
  17. Федорченко А. М. Теоретична фізика. Класична механіка та електродинаміка. — К. : Вища школа, 1992. — 535 с.

Для нотаток

Навчальне видання

**Василь БОЙЧУК, Ігор Білинський, Роман ЛЕШКО**

# **ЕЛЕКТРОДИНАМІКА**

## **Частина 1**

**Тексти лекцій**

**Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького  
державного педагогічного університету  
імені Івана Франка**

**Головний редактор**  
*Ірина Невмержицька*

**Редактор**  
*Іванна Біблій*

**Технічний редактор**  
*Наталя Кізіма*

**Коректор**  
*Наталя Кізіма*

Здано до набору \_\_.\_\_.\_\_\_\_ р. Підписано до друку \_\_.\_\_.\_\_\_\_ р.  
Формат 60x90/16. Папір офсетний. Гарнітура Times. Наклад 300 прим. Ум.  
друк. арк. 5,1. Зам. 80.

Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 2155 від 12. 04. 2005 р.) 82100, Дрогобич, вул. І.Франка, 24, к.42, тел. 2 – 23 – 78.