

Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка

кафедра теоретичної фізики та методики викладання фізики

Василь БОЙЧУК, Ігор БЛІНСЬКИЙ, Роман ЛЕШКО

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

Частина 2

Тексти лекцій

**Дрогобич
2014**

УДК 53.538 (075)

ББК 22.313.73

Б 77

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка як навчальний посібник (протокол № 6 від 24.04.2014 р.)

Рецензенти:

Ткач Микола Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної фізики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича;

Пелешак Роман Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри загальної Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Бойчук В. І., Білинський І. В., Лешко Р. Я.
Електродинаміка. Частина 2 : тексти лекцій [для студентів фізичних спеціальностей]. — Дрогобич : Видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, 2014. — 96 с.

Навчальний посібник написано відповідно до програми навчальної дисципліни «Теоретична фізика» розділу «Електродинаміка» освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр» галузі знань 0402. «Фізико-математичні науки» напряму підготовки 6.040203. «Фізика», затвердженої вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. У навчальному посібнику розкриваються основи макроскопічної електродинаміки та електродинаміки матеріального середовища. Містить теоретичний матеріал і набір задач з детальними розв'язками. Рекомендується учителям фізики та студентам денної і заочної форми навчання фізико-математичних факультетів педагогічних університетів.

Зміст

Розділ III. Елементи електростатики	5
§17. Можливість окремого розгляду електростатичних і магнітостатичних задач	5
§18. Електростатичне поле в однорідному середовищі	6
§19. Рівняння Лапласа й Пуассона	9
§20. Потенціал систем зарядів на великих відстанях	13
§21. Дипольний, квадрупольний моменти	15
§22. Енергія системи зарядів	17
§23. Енергія недеформовної системи зарядів у зовнішньому полі	18
Розділ IV. Магнітостатика	21
§25. Загальні властивості й рівняння магнітостатичного поля	21
§26. Магнітостатичне поле в однорідному середовищі	22
§27. Магнітне поле на великих відстанях від системи струму	26
§28. Магнітні властивості атомних систем	29
§29. Магнітна енергія стаціонарних струмів	31
§30. Енергія стаціонарного струму в зовнішньому магнітному полі.	33
§31. Електрорушійна сила	35
§32. Електрична енергія заряджених провідників	36
Розділ V. Випромінювання та поширення електромагнітних хвиль	38
§33. Загальні рівняння електромагнітних хвиль	38
§34. Випромінювання електромагнітних хвиль	42
§35. Поширення електромагнітних хвиль у діелектриках	48
§36. Поляризація електромагнітних хвиль	50

§37. Відбиття та заломлення плоских електромагнітних хвиль на границі між діелектриками _____	52
Питання і тести для самоконтролю _____	57
Приклади розв'язування задач _____	62
Предметний покажчик _____	91
Основні та додаткові літературні джерела _____	92

Розділ III. Елементи електростатики

Ми приступаємо до обговорення проблем електродинаміки поля у речовині. Наявність речовини й особливо вільних зарядів у ній призводить до значних відмінностей електромагнітних полів і методів їхнього розрахунку від вивчених раніше. Важливим новим явищем у речовині є виникнення електричного струму, який породжується електричним полем. Своєю чергою струм викликає магнітне поле, а його зміна – явище електромагнітної індукції.

У цьому розділі викладені основні питання електростатики – учення про статичне електромагнітне поле в системі заряджених і нейтральних діелектричних тіл і провідників.

§17. Можливість окремого розгляду електростатичних і магнітостатичних задач

Електростатика розглядає стале електричне поле нерухомих зарядів. Математично область електростатичних явищ виділяється з усієї області електромагнітних явищ такими вимогами:

- 1) усі величини сталі протягом часу;
- 2) рух зарядів відсутній, тобто $\vec{j} = 0$.

При цих умовах рівняння Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad \operatorname{div}\vec{D} = \rho; \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0$$

і крайові умови набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{H} &= 0, & \operatorname{rot}\vec{E} &= 0, \\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0; & \operatorname{div}\vec{D} &= 0; \\ B_{2n} - B_{1n} &= 0, & D_{2n} - D_{1n} &= \sigma, \\ H_{2t} - H_{1t} &= 0; & E_{2t} - E_{1t} &= 0. \end{aligned}$$

Таким чином, рівняння розбилися на дві групи незалежних рівнянь, які містять величини, що стосуються лише магнітного поля і лише електричного поля. Тому електростатичне поле і магнітостатичне поле можна розглядати окремо. Такий розгляд електричного та магнітного полів можливий лише у випадку незалежних від часу полів. У загальному випадку полів, які

змінюються з часом, електричне та магнітне поле не можна відділяти одне від одного, їх необхідно розглядати разом.

§18. Електростатичне поле в однорідному середовищі

Розглянемо електростатичне поле в однорідному середовищі ($\varepsilon = const$). У випадку вакууму $\varepsilon = 1$.

Основні задачі електростатики. Рівняння електростатичного поля і крайові умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= 0, \\ \varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} &= \rho; \\ E_{2n} - E_{1n} &= \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \\ E_{2t} - E_{1t} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

У теорії електростатичного поля існують три основні задачі:

- 1) за заданим електростатичним полем, тобто за відомою величиною напруженості поля $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$, знайти розподіл електричних зарядів, тобто визначити функції ρ і σ як функції координат;
- 2) за відомим розподілом зарядів, тобто при заданих функціях ρ і σ , знайти значення вектора напруженості поля \vec{E} в усіх точках простору;
- 3) знайти сили, які діють на заряди в електростатичному полі.

Перша з цих задач розв'язується досить просто. Насправді, рівняння (1) переписані в дещо іншому вигляді

$$\varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho; \quad \sigma = \varepsilon\varepsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}), \quad (2)$$

відразу дають розв'язок цієї задачі. Найбільшу зацікавленість викликає розв'язок другої та третьої задач.

Потенціальність електростатичного поля. Векторне поле,

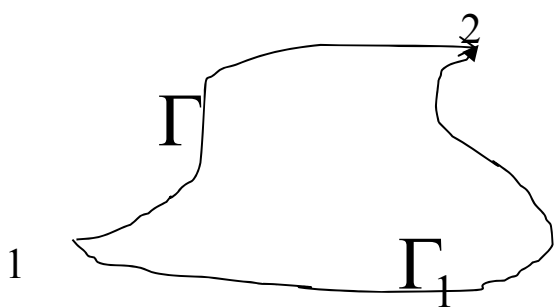


Рис.1

ротор якого дорівнює нулю, називається *потенціальним*. Електростатичне поле є потенціальним, оскільки, згідно з рівнянням (1)

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (3)$$

Доведемо таке твердження: в електростатичному полі робота

сил поля при переміщенні заряду з однієї точки в іншу точку не залежить від форми шляху, яким здійснюється рух (траєкторії руху), а залежить лише від початкової та кінцевої точок шляху. Це безпосередньо випливає з умови (3). Нехай маємо два різних шляхи Γ і Γ_1 , які зв'язують точки 1 і 2 (рис.1). Розглянемо роботу сил поля з переміщення одиничного позитивного заряду по замкнутому контуру, який складається з двох шляхів Γ і Γ_1 . Вона дорівнює:

$$\oint_{\Gamma, -\Gamma_1} \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = 0, \quad (4)$$

де S – поверхня, яка охоплює контур, що розглядається. У (4) використана теорема Стокса та умова (3). Таким чином,

$$\oint_{\Gamma, -\Gamma_1} \vec{E} d\vec{l} = \int_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} + \int_{-\Gamma_1} \vec{E} d\vec{l} = \int_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} - \int_{\Gamma_1} \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad (5)$$

тобто:

$$\int_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = \int_{\Gamma_1} \vec{E} d\vec{l}, \quad (6)$$

що і треба було довести. Шляхи Γ і Γ_1 – повністю довільні.

Скалярний потенціал. Ми довели, що у потенціальному полі робота з переміщення заряду q не залежить від форми шляху, а лише від початкового та кінцевого положення:

$$A_{1,2} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (7)$$

Це зумовлює існування такої скалярної функції φ , різниця значень якої у кінцевих і початкових положеннях шляху визначає цю роботу. Оскільки можна довести, що $\text{rot}(\text{grad} \varphi) = 0$, то розв'язком загального рівняння (3) є:

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi, \quad (8)$$

причому знак мінус виник історично, але ніякого принципового значення не має. Нагадаємо, що

$$\text{grad} \varphi = \vec{\nabla} \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Завдяки наявності знаку мінус у формулі (8) вектор напруженості електричного поля напрямлений у сторону зменшення потенціалу. Якщо врахувати (8), то вираз для інтеграла (7) може бути написаний так:

$$A_{1,2} = q \int_1^2 (-\text{grad } \varphi) d\vec{l}. \quad (9)$$

З векторного аналізу нам відомо:

$$\text{grad } \varphi d\vec{l} = \frac{\partial \varphi}{\partial l} dl. \quad (10)$$

Підставимо (10) у рівняння (9). Тоді

$$A_{1,2} = -q \int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial l} dl = -q \varphi \Big|_1^2 = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Робота з переміщення заряду з точки 1 у точку 2 не залежить від форми кривої руху, а визначається значеннями функції φ у цих точках:

$$A_{1,2} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (12)$$

Якщо початкове та кінцеве положення збігаються, то робота дорівнює нулю.

З умови (12) видно, що робота $A_{1,2}$ визначається різницею значень функції φ у точках траєкторії. Тому функцію φ можна вибрати з точністю до постійної величини. А саме різниця значень $\varphi' = \varphi + c$ відповідає тій самій роботі, що і різниця значень φ . Функцію φ назовемо *потенціалом електростатичного поля*. Отже, потенціал електростатичного поля визначається з точністю до сталої.

Потенціал точкового заряду. Доведемо, що потенціал точкового заряду q є сферично-симетричним. Врахуємо, що напруженість точкового заряду q

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}. \quad (13)$$

Уведемо потенціал точкового заряду q у точці \vec{r} , як роботу з переміщення одиничного заряду з нескінченності:

$$\varphi(r) = \int_r^\infty \vec{E} d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (14)$$

Потенціал точкового заряду q на відстані r від нього пропорційний величині заряду та обернено пропорційний цій відстані.

Якщо маємо поверхневі та об'ємні заряди, то формулу (14) можна узагальнити:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r}. \quad (15)$$

Потенціал системи точкових зарядів. Розглянемо два заряди, які створюють окремо електричні поля \vec{E}_1, \vec{E}_2 . За принципом суперпозиції повне поле \vec{E} , що створене двома зарядами, дорівнює сумі напруженостей полів \vec{E}_1 та \vec{E}_2 :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \quad (16)$$

Підставивши (8) у (16), отримаємо:

$$-\text{grad } \varphi = -\text{grad } \varphi_1 - \text{grad } \varphi_2.$$

Звідси випливає, що:

$$\text{grad } \varphi = \text{grad}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Потенціал поля двох зарядів визначається сумою потенціалів, створених кожним точковим зарядом: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

§19. Рівняння Лапласа й Пуассона

Для отримання диференціальних рівнянь, з яких можна знайти потенціал φ , нагадаємо рівняння електростатичного поля:

$$\text{div} \vec{D} = \rho, \quad (1)$$

$$\text{rot} \vec{E} = 0, \quad (2)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (3)$$

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi. \quad (4)$$

Як було показано в попередньому параграфі, водночас з векторними величинами \vec{E}, \vec{D} , електростатичне поле характеризується скалярною функцією координат φ . Щоб знайти потенціал сукупності зарядів, треба підсумувати потенціал кожного заряду зокрема. Оскільки потенціал – скаляр, то додаємо скалярно. Тому якщо маємо задачу про визначення напруженості електричного поля, створеного багатьма зарядами, то потрібно знайти потенціал для кожного заряду, визначити суму потенціалів, а потім обчислити $\text{grad} \varphi$. Знайти сумарний потенціал набагато легше, ніж визначити сумарну напруженість, бо напруженість \vec{E} є векторною величиною.

Після зазначених зауважень приступаємо до знаходження диференціального рівняння для потенціалу та отримання його загального розв'язку.

Запишемо рівняння (1) через напруженість, використовуючи умову (3):

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (5)$$

Підставимо \vec{E} з формули (4) у формулу (5). Отримаємо:

$$-\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}.$$

Оскільки

$$-\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = -\nabla \nabla \varphi = -\nabla^2 \varphi,$$

то

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad (6)$$

де $\nabla^2 = \Delta$ – оператор Лапласа. У декартових координатах:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Рівняння (6), якому задовольняє потенціал, називають рівнянням Пуассона. З рівняння Пуассона видно, що потенціал електростатичного поля задається густиною заряду. Якщо $\rho = 0$, то рівняння Пуассона переходить в рівняння Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (6')$$

Як знайти розв'язок рівняння (6), (6') для усіх ρ ? Для того, щоб це зробити, розкладають φ та ρ в ряд Фур'є, а саме:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \varphi(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k, \quad (7)$$

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \rho(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k, \quad (8)$$

де $d^3k = dk_x dk_y dk_z$, а $\varphi(\vec{k})$ та $\rho(\vec{k})$ – Фур'є-образи.

Підставивши рівняння (7) та (8) у рівняння (6), можна перейти від диференціального рівняння до алгебраїчного, в яке входять $\varphi(\vec{k})$ та $\rho(\vec{k})$. Визначивши $\varphi(\vec{k})$ через $\rho(\vec{k})$, можемо його підставити у формулу (7) і знайти загальний розв'язок для $\varphi(\vec{r})$.

Визначимо, як записати рівняння Пуассона для точкового заряду. За наявності точкового заряду напруженість \vec{E} буде задаватись формулою:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3} \vec{r}. \quad (9)$$

Ми переконалися, що:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}. \quad (10)$$

Аналіз показує, що точковому заряду q відповідає таке ρ :

$$\rho = q\delta(\vec{r} - 0),$$

де δ – деяка узагальнена функція, яку називають функцією Дірака.

Якщо заряд є у точці простору з радіус-вектором \vec{r}' , то густина

$$\rho = q\delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (11)$$

Випишемо основні властивості, якими володіє дельта-функція Дірака:

$$1) \delta(\vec{r} - \vec{r}') = f(\vec{r}) - \text{функція від змінної } \vec{r};$$

$$2) \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \begin{cases} \infty, & \vec{r} = \vec{r}', \\ 0, & \vec{r} \neq \vec{r}'; \end{cases}$$

3) якщо взяти інтеграл по всьому простору, то $\int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV = 1$, коли об'єм включає \vec{r}' ;

$$4) \int_V f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV = f(\vec{r}')$$

інтеграл від добутку довільної функції f та δ -функції дорівнює значенню функції f в полюсі функції δ -функції;

$$5) \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')} d^3k - \text{інтегральне зображення}$$

δ -функції. Для одновимірного випадку:

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-a)} dk;$$

6) з властивості (2) випливає, що δ -функція є парною $\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(\vec{r}' - \vec{r})$. Тобто δ -функція залежить лише від віддалі до полюса.

Рівняння Пуассона для точкового заряду, який поміщений у точку з радіус-вектором \vec{r}' буде мати вигляд:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{q\delta(\vec{r} - \vec{r}')}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Ураховуючи (10), розв'язок цього рівняння можна записати у вигляді:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (10')$$

Повернемося до аналізу рівняння (6). Будемо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді:

$$\varphi = \int_{V'} G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV', \quad (12)$$

де інтегрування ведеться по об'єму V' простору, в якому перебувають заряди.

Функцію $G(\vec{r}, \vec{r}')$ називають функцією Гріна. У рівнянні (6) функція $\rho = \rho(\vec{r})$ відома. Отже, поставлена задача зводиться до знаходження $G(\vec{r}, \vec{r}')$. Для цього підставимо (12) у (6) і одержимо:

$$\nabla^2 \int_{V'} G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0},$$

де оператор ∇^2 діє на нештриховані змінні, тому можемо вносити його під знак інтеграла:

$$\int_{V'} \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (13)$$

Неважно перекопатись, що рівняння (13) буде виконуватись лише тоді, коли:

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}')}{\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (14)$$

Для цього підставимо (14) у (13) та отримаємо:

$$-\int_{V'} \frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}')}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho(\vec{r}') dV' = -\frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho(\vec{r}),$$

де під інтегралом \vec{r}' – змінна, а \vec{r} – параметр. Інтегруючи по \vec{r}' з врахуванням властивості δ -функції, отримуємо тотожність. З умови (14) видно, що функція Гріна є потенціалом одиничного точкового заряду. Оскільки (14) і (11) мають аналогічний вигляд, то функція Гріна матиме вигляд:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (15)$$

Отже, функція Гріна – це потенціал точкового заряду, що поміщений у точку \vec{r}' .

Для визначення потенціалу сукупності зарядів підставимо (15) у формулу (12):

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (16)$$

Отримали загальний розв'язок рівняння Пуассона (6).

Нехай маємо деяку сукупність точкових зарядів, тоді, використовуючи (11) для одного заряду, можемо записати густину заряду, створену системою N точкових зарядів:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (17)$$

де \vec{r}_i – радіус-вектор i -го заряду. Підставивши ρ з формули (17) у формулу (16), одержимо потенціал сукупності точкових зарядів:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \int_{V'} \frac{\delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Інтегруємо по \vec{r}' . Тоді:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}. \quad (18)$$

§20. Потенціал систем зарядів на великих відстанях

Розглянемо поле, що створюється системою зарядів на відстанях, значно більших, порівняно з розмірами системи.

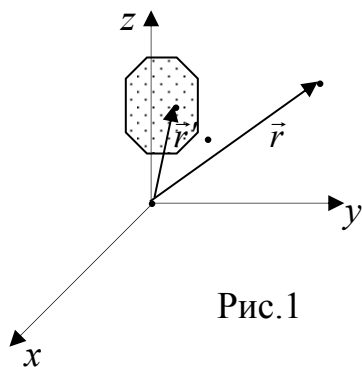


Рис.1

У попередньому параграфі ми бачили, що знання вигляду функції $\rho = \rho(\vec{r})$ для об'ємної густини заряду дає змогу визначити φ у будь-якій точці простору. Але об'ємна густина ρ не завжди відома. Покажемо, як можна визначити $\varphi(\vec{r})$ на великих віддальх від заряду. Тобто, рівняння будуть справедливими, коли $\frac{r'}{r} \ll 1$ (рис.1) або $r \gg r'$.

Щоб визначити φ в електростатичному полі на великій віддалі від області розташування зарядів, розкладемо підінтегральну функцію у ряд Тейлора у формулі:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (1)$$

попереднього параграфа. Як малий параметр виберемо $\frac{r'}{r}$.

Розкладемо $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ у ряд в точці \vec{r} . Нагадаємо, що розклад у ряд Тейлора в околі точки x_0 має вигляд:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

Тут як x виступає $\vec{r} - \vec{r}'$, а як x_0 виступає \vec{r} . Тоді

$$\frac{1}{\vec{r} - \vec{r}'} = \frac{1}{r} - \text{grad} \frac{1}{r} \vec{r}' + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} x'_i x'_j + \dots, \quad (2)$$

де $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$. Підставимо (2) у (1) та тримаємо:

$$\varphi = \varphi^{(0)}(\vec{r}) + \varphi^{(1)}(\vec{r}) + \varphi^{(2)}(\vec{r}) + \dots, \quad (3)$$

де

$$\varphi^{(0)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \int_{V'} \rho(\vec{r}') dV' = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (4)$$

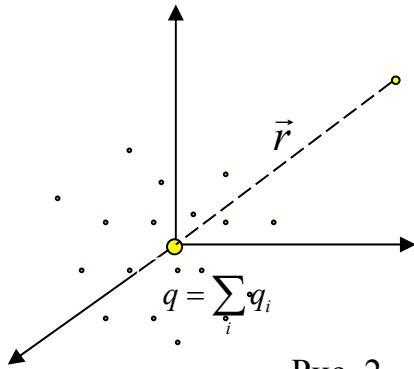


Рис. 2

Формула (4) задає потенціал, що створений точковим зарядом, який за величиною дорівнює величині заряду системи та розташований у точці початку координат. Тобто, у нульовому наближенні потенціал $\varphi \approx \varphi_0$ не залежить від конфігурації системи зарядів.

Розглянемо другий доданок у формулі (3). Перша поправка для потенціалу матиме вигляд:

$$\varphi^{(1)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \text{grad} \frac{1}{r} \int_{V'} r' \rho(\vec{r}') dV'. \quad (5)$$

Вираз

$$\int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' = \vec{p} \quad (6)$$

у формулі (5) називають *дипольним моментом* системи. У випадку електронейтральної системи зарядів основним стає доданок (5). Тоді:

$$\varphi \approx \varphi^{(1)} = \frac{\vec{r} \vec{p}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3}. \quad (7)$$

Якщо заряд системи $q \neq 0$, то потрібно порівняти $\varphi^{(0)}$ та $\varphi^{(1)}$ у формулі (3). З виразів (4) та (7) видно, що $\varphi^{(0)} \sim r^{-1}$, а $\varphi^{(1)} \sim r^{-2}$, тому $\varphi^{(0)} \gg \varphi^{(1)}$. У випадку, поки $q \neq 0$, другим доданком у формулі (3) можна знехтувати, тому $\varphi \approx \varphi^{(0)}$.

Проаналізуємо наступний доданок у формулі (3):

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{8\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} \int_{V'} x'_i x'_j \rho(\vec{r}') dV'. \quad (8)$$

Потенціал (8) визначається через тензор другого рангу. Інтеграл у формулі (8) називається *квадрупольним моментом*. Потенціал $\varphi^{(2)}$ обернено-пропорційний r^3 , тобто $\varphi^{(2)}$ у порівнянні з $\varphi^{(1)}$ є малою величиною. Може бути випадок, коли дипольний та

квадрупольний моменти дорівнюють нулю. Очевидно, тоді треба врахувати $\varphi^{(3)}$ і т.д. Члени розкладу $\varphi^{(3)}$, $\varphi^{(4)}$, ... мають назву мультипольних моментів системи. Як правило, доданки вищого порядку розкладу доцільно враховувати, коли дорівнюють нулю попередні.

§21. Дипольний, квадрупольний моменти

Наведемо приклади найпростіших систем зарядів, які характеризуються дипольним і квадрупольним моментами. З попереднього параграфу можна зробити висновок, що мультиполь нульового порядку – це заряд системи.

Розглянемо сукупність точкових зарядів. Запишемо густину заряду для цієї сукупності:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (1)$$

Підставимо (1) у формулу для дипольного моменту. Отримаємо:

$$\vec{p} = \int \vec{r}' \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) dV' = \sum_{i=1}^N q_i \int \vec{r}' \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) dV',$$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i. \quad (2)$$

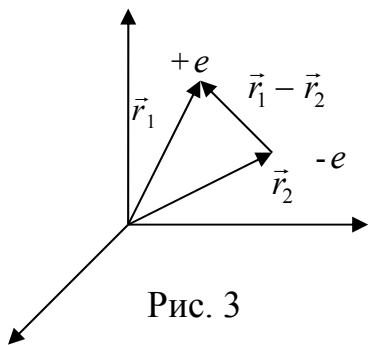


Рис. 3

Запишемо (2) для простої системи двох точкових зарядів (рис. 3). Нехай один заряд є позитивно зарядженим $q_1 = e$, а

інший такий самий за величиною, але негативним – $q_2 = -e$. Зауважимо, що сумарний заряд $q = e - e = 0$. Тоді, згідно з (2)

$$\vec{p} = e\vec{r}_1 - e\vec{r}_2 = e(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = e\vec{r}_{12}.$$

Отже, ми бачимо, що найпростіша нейтральна система, яка характеризується дипольним моментом, – це система двох однакових зарядів різних знаків. Така система зарядів називається *диполем*. Вектор дипольного моменту напрямлений від негативного до позитивного заряду.

Знаючи потенціал, можна визначити напруженість електричного поля, створеного диполем. Для цього треба потенціал підставити у формулу для напруженості. Можна переконатися, що не лише $\varphi^{(0)} = 0$, але й $\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \dots$ дорівнюють нулю. Для диполя маємо, що

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi^{(1)}(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\vec{r}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (3)$$

Отже,

$$\vec{E} = -grad \varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} grad\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}\right). \quad (4)$$

Неважко показати, що

$$grad \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5}. \quad (5)$$

Підставляючи формулу (5) у (4), отримаємо:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} \right). \quad (6)$$

Згідно з формулою (6), напруженість електричного поля, створеного диполем,

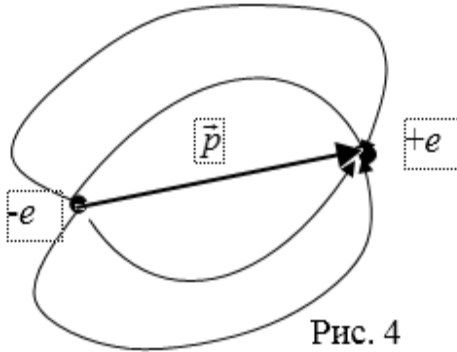


Рис. 4

обернено пропорційна кубу віддалі. Якщо проаналізувати електричне поле для диполя, то силові лінії виходять з негативного заряду до позитивного (рис. 4).

Розглянемо квадрупольний момент зарядженої системи. Найпростіша система, для якої сумарний заряд і дипольний момент дорівнюють нулю, є система двох диполів, що подана на рис. 5.

Нагадаємо, що

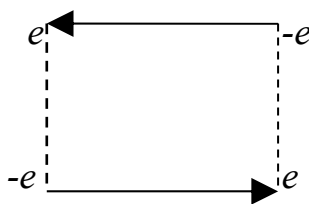


Рис. 5

$$Q_{ij} = \int \rho(\vec{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) dV' \quad (7)$$

є квадрупольним моментом системи зарядів. Величина Q_{ij} , за означенням є тензором другого рангу. Установимо основні властивості цього тензора. З формули (7) видно, що сума

діагональних елементів:

$$\sum_{\alpha} Q_{\alpha\alpha} = 0.$$

Крім того, очевидно, що Q_{ij} – симетричний тензор:

$$Q_{ij} = Q_{ji}.$$

Можна довести, що для такої системи потенціал на великій віддалі дорівнює $\varphi = \varphi^{(2)}$, бо $\varphi^{(3)} = \varphi^{(4)} = \dots = 0$. Якщо підставити (7) у вираз для $\varphi^{(2)}$ і врахувати, що

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} = \frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3}, \quad (7')$$

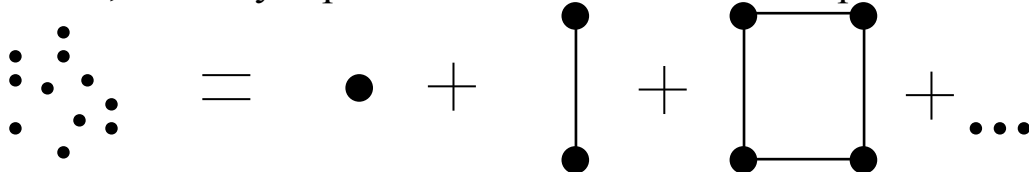
то потенціал квадруполя

$$\varphi = \varphi^{(2)} = \frac{1}{24\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{i,j} \left(\frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) Q_{ij}. \quad (8)$$

У формулі (7') величина δ_{ij} – символ Кронекера, тобто

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

Отже, систему зарядів можна символічно зобразити так:



§22. Енергія системи зарядів

Розглянемо сукупність нерухомих зарядів, та визначимо чому дорівнює енергія електричного поля, створеного цими зарядами. Енергія електромагнітного поля:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) dV. \quad (1)$$

У випадку відсутності магнітного поля $\vec{H} = \vec{B} = 0$, тому

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{E}\vec{D} dV = \frac{1}{2} \epsilon\epsilon_0 \int_V E^2 dV. \quad (2)$$

Нехай електричне поле \vec{E} створене двома полями \vec{E}_1 та \vec{E}_2 . Згідно з принципом суперпозиції

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Тоді

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1\vec{E}_2, \\ W_e = \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \int_V E_1^2 dV + \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \int_V E_2^2 dV + \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \int_V \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dV. \quad (3)$$

Проаналізуємо формулу (3). Перший доданок у формулі (3) – власна енергія першого поля, другий – власна енергія другого поля, третій – енергія взаємодії двох полів або потенціальна енергія цих полів:

$$W_e = W_e^{(1)} + W_e^{(2)} + U. \quad (4)$$

$W_e^{(1,2)}$ – додатна величина, а величина U може бути як додатна, так і від’ємна, бо скалярний добуток $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$ може набувати різних знаків.

Розглянемо перший та другий доданки $W_e^{(1,2)}$. Виразимо ці доданки через скалярний потенціал зарядів $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$:

$$W_e = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \int_V E^2 dV. \quad (5)$$

Запишемо (5) у дещо іншій формі:

$$W_e = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \int_V \vec{E} \cdot \text{grad } \varphi dV \quad (6)$$

та врахуємо, що

$$(\vec{E} \cdot \text{grad } \varphi) = \text{div}(\vec{E}\varphi) - \varphi \text{div } \vec{E}. \quad (7)$$

Формулу (7) підставляємо в (6), отримаємо:

$$W_e = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \int_V \varphi \text{div } \vec{E} dV - \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \int_V \text{div}(\vec{E}\varphi) = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV - \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \oint_S \vec{E}\varphi d\vec{S}.$$

Ми розглядаємо електростатичне поле в нескінченно великому об’ємі. Другий доданок дорівнює нулю, бо $\varphi = 0$ на нескінченності, тому

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV. \quad (8)$$

Енергія системи зарядів визначається густиною зарядів і електростатичним потенціалом, що створений цими зарядами. Коефіцієнт біля інтеграла у формулі (8) виник тому, що ми визначили енергію системи зарядів у полі цих самих зарядів.

§23. Енергія недеформованої системи зарядів у зовнішньому полі

Розглянемо сукупність зарядів у зовнішньому електростатичному полі. Нас цікавить енергія взаємодії зарядів з цим полем. Зазначену взаємодію можна представити як взаємодію поля, створеного цими зарядами, з зовнішнім полем.

Дійсно, врахуємо те, що заряди поміщені у зовнішнє поле, тому енергія взаємодії зарядів і поля запишеться аналогічно до формули (8) за винятком коефіцієнта біля інтеграла:

$$U = \int_V \rho_{\text{заряд}} \varphi_{\text{зовн.поле}} dV \quad (1)$$

Врахуємо, що

$$\rho_{\text{заряд}} = \varepsilon \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}_{\text{заряд}},$$

тому

$$U = \varepsilon \varepsilon_0 \int_V \varphi_{\text{зовн.поле}} \operatorname{div} \vec{E}_{\text{заряд}} dV = \varepsilon \varepsilon_0 \int_V \operatorname{div} (\varphi_{\text{зовн.поле}} \vec{E}_{\text{заряд}}) dV + \\ - \varepsilon \varepsilon_0 \int_V \vec{E}_{\text{заряд}} \operatorname{grad}(\varphi_{\text{зовн.поле}}) dV \quad (2)$$

Перший доданок дорівнює нулю, бо, згідно з теоремою Остроградського,

$$\int_V \operatorname{div} (\varphi_{\text{зовн.поле}} \vec{E}_{\text{заряд}}) dV = \oint_S \varphi_{\text{зовн.поле}} \vec{E}_{\text{заряд}} d\vec{S},$$

а на поверхні, що охоплює область інтегрування, $\vec{E}_{\text{заряд}} = 0$.

Маємо

$$U = -\varepsilon \varepsilon_0 \int_V \vec{E}_{\text{заряд}} \operatorname{grad}(\varphi_{\text{зовн.поле}}) dV = \varepsilon \varepsilon_0 \int_V \vec{E}_{\text{заряд}} \cdot \vec{E}_{\text{зовн.поле}} dV = \\ = \int_V \vec{E}_{\text{заряд}} \cdot \vec{D}_{\text{зовн.поле}} dV. \quad (3)$$

Скалярний добуток $\vec{E}_{\text{заряд}} \cdot \vec{D}_{\text{зовн.поле}}$ задає густину енергії взаємодії зовнішнього поля та поля зарядів.

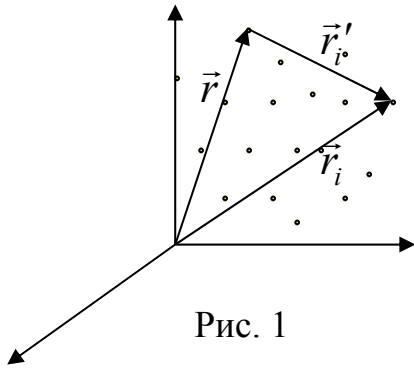


Рис. 1

Розглянемо випадок, коли система зарядів дискретна:

$$\rho_{\text{заряд}} = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (4)$$

Підставляємо вираз (4) у формулу (1):

$$U = \sum_{i=1}^n q_i \int \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \varphi_{\text{зовн.поля}}(\vec{r}) dV = \sum_{i=1}^n q_i \varphi_{\text{зовн.поля}}(\vec{r}_i). \quad (5)$$

Розглянемо випадок, коли потенціал змінюється повільно в області, де є заряд. Для зручності введемо новий радіус-вектор (рис. 1):

$$\varphi(\vec{r}_i) = \varphi(\vec{r} + \vec{r}_i'). \quad (6)$$

Припущення про те, що потенціал змінюється слабо в області розташування зарядів, дає змогу вважати потенціал $\varphi(\vec{r} + \vec{r}_i')$ близьким до $\varphi(\vec{r})$:

$$\varphi(\vec{r} + \vec{r}_i') \cong \varphi(\vec{r}).$$

Тоді розкладемо функцію $\varphi(\vec{r} + \vec{r}'_i)$ у ряд в околі точки r . Обмежимося трьома членами розкладу:

$$\varphi(\vec{r} + \vec{r}'_i) = \varphi(\vec{r}) + \text{grad}\varphi(\vec{r})(\vec{r} + \vec{r}'_i - \vec{r}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varphi(\vec{r}) x'_i x'_j + \dots \quad (7)$$

Якщо $r'_i \ll r$, то достатньо розглядати лише перший і другий доданки:

$$U = \sum_{i=1}^n q_i \varphi(\vec{r}) + \sum_{i=1}^n \text{grad}\varphi(\vec{r}) q_i \vec{r}'_i + \dots = U_0 + U_1, \quad (8)$$

$$U = q\varphi(\vec{r}) - \vec{E} \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}'_i + \dots, \quad q = \sum_i q_i. \quad (9)$$

Перший доданок формули (9) описує взаємодію точкового заряду, величина якого дорівнює сумарному заряду, зі зовнішнім полем, а другий – взаємодію дипольного моменту сукупності зарядів з полем. Якщо ж система, що розглядається, буде диполем, то перший доданок буде дорівнювати нулю і залишиться лише $U_{\text{dun}} = -\vec{E}\vec{p}$ ($\vec{p} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}'_i$). Якщо дипольний момент напрямлений у протилежний бік до напруженості \vec{E} , то $U_{\text{dun}} = Ep$. Для випадку перпендикулярних векторів то $U_{\text{dun}} = 0$. Коли вектори \vec{E} і \vec{p} напрямлені в один бік та паралельні, то $U_{\text{dun}} = -Ep$. Потенціальна енергія диполя буде мінімальною тоді, коли вектори $\vec{E} \uparrow \uparrow \vec{p}$ паралельні.

§24. Система зарядів, що деформується у зовнішньому полі

Систему зарядів будемо вважати недеформовною, якщо густина заряду не залежить від напруженості зовнішнього поля. Розглянемо випадок, коли густина заряду є функцією координат і напруженості поля:

$$\rho = \rho(\vec{r}, \vec{E}). \quad (1)$$

Таку систему зарядів називають деформовною. Як видно з попереднього параграфа, енергія $U = q\varphi$ не залежить від того, яка система зарядів, бо сумарна величина заряду не змінюється. Розглянемо другий доданок $U_1 = -\vec{E}\vec{p}$. Очевидно, що у випадку деформовної системи зарядів дипольний момент

$$\vec{p}(\vec{r}, \vec{E}) = \int \vec{r} \rho(\vec{r}, \vec{E}) dV \quad (2)$$

залежить від напруженості зовнішнього поля.

Здебільшого вважають, що дипольний момент пропорційний напруженості зовнішнього поля:

$$\vec{p} = \alpha \vec{E} . \quad (3)$$

Щоб пояснити (3), розкладемо $\vec{p} = \vec{p}(\vec{E})$, у ряд Тейлора в околі початку координат. Отримаємо:

$$\vec{p} = \vec{p}(0) + \nabla_{\vec{E}} \vec{p} \Big|_{\vec{E}=0} \vec{E} + \dots . \quad (4)$$

Відкидаємо всі доданки ряду (поля невеликих напруженостей), що пропорційні E^2, E^3, \dots . Оскільки система зарядів деформовна (заряди під дією поля переміщуються у просторі), то дипольний момент системи без зовнішнього поля дорівнює нулю. Отже, щоб визначити енергію диполя, що деформується у зовнішньому полі, використовуємо формулу:

$$U = -\alpha E^2 . \quad (5)$$

Розділ IV. Магнітостатика

§25. Загальні властивості й рівняння магнітостатичного поля

Магнітостатика вивчає незалежні від часу магнітні поля. Такі поля породжуються постійними струмами. Як було показано раніше, у випадку незалежних від часу електромагнітних полів магнітне й електричне поле можна розглядати незалежно одне від одного.

Математично область магнітостатичних явищ характеризується умовами:

- 1) незалежністю всіх величин від часу;
- 2) наявністю постійних струмів.

Завдяки цьому, рівняння Максвелла та граничні умови матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}, \\
\operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\
\vec{B} &= \mu\mu_0 \vec{H}, \\
B_{2n} - B_{1n} &= 0, \\
H_{2t} - H_{1t} &= i_{нов}.
\end{aligned}
\tag{1}$$

Перед теорією магнітостатичного поля стоять три основні задачі:

- 1) знаючи поле, знайти струми, які його породжують;
- 2) знаючи струми, знайти магнітне поле, яке вони породжують;
- 3) знайти сили, які діють у магнітостатичному полі.

Перша з цих задач розв'язується елементарно. Насправді, рівняння (1) переписані в дещо іншому вигляді:

$$\begin{aligned}
\vec{j} &= \operatorname{rot} \vec{H}, \\
i_{нов} &= H_{2t} - H_{1t}
\end{aligned}
\tag{2}$$

відразу дають розв'язок цієї задачі. Найбільш цікавим є розв'язок другої та третьої задач.

§26. Магнітостатичне поле в однорідному середовищі

Векторний потенціал. Раніше нами було розглянуто нерухомі заряди. Тепер напруженість не залежить від часу, але в системі існує струм. Частинки можуть рухатися. Їхній рівномірний рух описується формулами:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial t} = 0.$$

У системі існує стаціонарний, незмінний з часом струм. Нас цікавить магнітне поле в системі. Рівняння Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}
\tag{1}$$

показує, що, на відміну від електростатичного поля, магнітостатичне поле, взагалі кажучи, не є потенціальним. Рівняння

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0
\tag{2}$$

свідчить про те, що в природі не існує магнітних зарядів, які породжують магнітне поле. Нагадаємо, що електричні заряди породжують електричне поле.

Можемо довести, що дивергенція ротора довільного вектора тотожно дорівнює нулю:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0.$$

Звідси випливає, що загальним розв'язком рівняння (2) є зображення вектора \vec{B} у вигляді ротора деякого вектора \vec{A} :

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (3)$$

Аналогічно скалярному потенціалу, \vec{A} – *векторний потенціал* магнітного поля. Векторний потенціал неоднозначно визначається заданим магнітним полем \vec{B} . Якщо потенціал \vec{A} описує задане магнітне поле \vec{B} за формулою (3), то потенціал

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \chi, \quad (4)$$

де χ – довільна функція координат, описує те ж саме поле \vec{B} , тому що

$$\vec{B}' = \operatorname{rot} \vec{A}' = \operatorname{rot}(\vec{A} + \operatorname{grad} \chi) = \operatorname{rot} \vec{A} + \operatorname{rot}(\operatorname{grad} \chi) = \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}.$$

Тут враховано, що ротор від градієнта завжди дорівнює нулю. Це вказує на те, що потенціали \vec{A}' , \vec{A} , які відрізняються градієнтом довільної функції, описують одне і те саме магнітне поле.

Для однозначного визначення векторного потенціалу \vec{A} накладають додаткову умову:

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (5)$$

Вектор-потенціал є допоміжною величиною і жодного фізичного змісту не має.

Рівняння для векторного потенціалу. Припустимо, що ми визначили \vec{A} і $\operatorname{div} \vec{A} = \omega \neq 0$. Перейдемо до нового потенціалу \vec{A}' , додаючи $\operatorname{grad} \chi$ так, щоб $\operatorname{div} \vec{A}' = 0$.

Подіємо оператором дивергенції на вираз (4):

$$\operatorname{div} \vec{A}' = \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div}(\operatorname{grad} \chi). \quad (6)$$

З урахуванням (5) рівняння (6) перетвориться до такого:

$$\operatorname{div} \vec{A}' = \omega + \nabla^2 \chi. \quad (7)$$

Ми завжди можемо перейти до такого векторного потенціалу, щоб дивергенція від нього дорівнювала нулю. Отже,

$$\operatorname{div} \vec{A}' = 0 \quad (8)$$

за умови

$$\nabla^2 \chi = -\omega. \quad (9)$$

Вираз (9) є рівнянням Пуассона. З цього рівняння однозначно визначається функція χ :

$$\chi = - \int_{V'} \frac{\omega}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (10)$$

Формула (8) має назву *умови калібровки* або *калібровочного співвідношення*.

Розглянемо рівняння (1). Домножимо його на $\mu\mu_0$. Отримаємо:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{j}. \quad (11)$$

Підставимо (11) у (3):

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \mu\mu_0 \vec{j}. \quad (12)$$

Врахуємо, що

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \left[\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{A} \right] \right] = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}, \quad (13)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) = 0. \quad (14)$$

Формула (14) записана для довільної функції. Підставивши (13) у (12), отримаємо:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu\mu_0 \vec{j}. \quad (15)$$

Це рівняння може бути записане у вигляді трьох скалярних рівнянь для компонентів векторів:

$$\Delta A_x = -\mu\mu_0 j_x, \quad \Delta A_y = -\mu\mu_0 j_y, \quad \Delta A_z = -\mu\mu_0 j_z.$$

Таким чином, кожна координата вектора-потенціалу задовольняє рівнянню Пуассона, розв'язок якого може бути записаний аналогічно до розв'язку рівняння Пуассона для скалярного потенціалу:

$$A_x = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{j_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad A_y = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{j_y}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad A_z = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{j_z}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV',$$

або у векторній формі:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{j(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (16)$$

Лінійні струми. У багатьох практично важливих випадках сталі струми течуть по достатньо тонких провідниках, рівномірно по поперечному перерізу цих провідників. Такі струми називаються *лінійними*. У запропонованому означенні тонким вважається провідник, лінійні розміри поперечного перерізу якого набагато менші відстаней до точок, в яких обчислюється поле. Розглянемо частинний випадок. Нехай маємо лінійний замкнений струм:

$$\vec{j}(\vec{r}') dV' = jS' d\vec{l}' = J d\vec{l}'.$$

Ураховуючи (16), векторний потенціал \vec{A} запишемо так:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int \frac{J d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (17)$$

де $jS' = J$ – сила струму, який протікає по провіднику, $d\vec{l}'$ – елемент довжини провідника, який за напрямком збігається зі струмом у ньому. Визначимо тепер вектор індукції магнітного поля за формулою (3):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \text{rot} \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'. \quad (18)$$

Для перетворення підінтегрального виразу скористаємось відомою формулою з математичної фізики:

$$\text{rot}(\phi \vec{A}) = \phi \text{rot } \vec{A} + [\text{grad } \phi \times \vec{A}].$$

Таким чином:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}') \right) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{rot } \vec{j}(\vec{r}') + \left[\text{grad} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{j}(\vec{r}') \right]. \quad (19)$$

Під інтегралом у (18) вектор густини струму залежить від координат точки інтегрування (\vec{r}'), а операція ротор виконується по координатах точки (\vec{r}), в якій обчислюється поле. Отже, $\text{rot } \vec{j}(\vec{r}') = 0$. Враховуємо тепер те, що

$$\left[\text{grad} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{j}(\vec{r}') \right] = - \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \vec{j}(\vec{r}') \right] = \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Отримуємо:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (20)$$

або

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (21)$$

При переході до лінійних струмів формула (20) набуде такого вигляду:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[(\vec{j}(\vec{r}')dV') \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} J \oint_{L'} \frac{[d\vec{l}', (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (22)$$

де V' – об'єм провідника, а L' – лінійний контур провідника. З (22) очевидним є співвідношення:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{J}{4\pi} \oint_{L'} \frac{[d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (23)$$

Формули (20)-(21) є математичними записами закону Біо-Савара-Лапласа.

§27. Магнітне поле на великих відстанях від системи струму

Поле елементарних струмів.

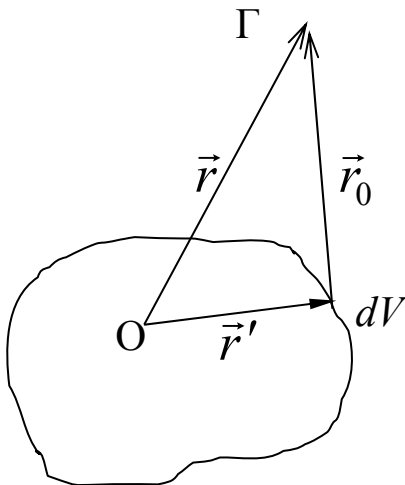


Рис. 1

Елементарними струмами називаються замкнені струми, що протікають в області, лінійні розміри якої набагато менші за відстані від цієї області до точок, в яких обчислюється магнітне поле. Найпростішим прикладом елементарного струму є рамка зі струмом, розміри якої набагато менші за відстань до точок, в яких обчислюється поле. У певних межах будь-який сталий струм є елементарним. Тому спеціально розглянемо поле елементарних струмів. Дуже часто в задачах

магнітостатики густину струму або форму контуру, що входять у вираз:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (1)$$

визначити дуже важко. У цьому випадку вектор \vec{A} можна знайти наближено. Враховуючи те, що $\frac{r'}{r} \ll 1$, розкладемо в ряд

величину $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} - \vec{r}' \operatorname{grad} \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} + \dots$$

Підставивши знайдений вираз у формулу (1), одержимо:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi r} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}') dV' - \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}') \vec{r}' dV' + \frac{\mu\mu_0}{8\pi} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{V'} x'_i x'_j \vec{j}(\vec{r}') dV' + \dots \quad (2)$$

Таким чином, векторний потенціал для системи струмів на великих віддалях представлений у вигляді суми нескінченного ряду. Оскільки $r' \ll r$, можемо обмежитись першими членами цього ряду.

Розглянемо кожен з доданків. Третій, четвертий та решта доданків є настільки малими, що на великих віддалях ними можна знехтувати. Розглянемо перші два.

Доведемо, що перший інтеграл у формулі (2) дорівнює нулю. Ми розглядаємо стаціонарні струми, які від часу явно не залежать ($\frac{d\rho}{dt} = 0$, тому з рівняння неперервності $\operatorname{div} \vec{j} = 0$). Для стаціонарного струму характерним є те, що лінії струму не мають джерел, вони замкнені. В іншому випадку стаціонарного струму не буде. Розглянемо замкнену трубку струму. Розіб'ємо її лініями на ряд окремих трубок настільки, щоб можна вважати струми лінійними. Застосуємо при інтегруванні по кожній трубці зі струмом перетворення:

$$\vec{j} dV' = \vec{j} \Delta S' dl' = j \Delta S' d\vec{l}' = J d\vec{l}'.$$

Отримаємо:

$$\int_{V'} \vec{j}(\vec{r}') dV' = \sum_i \oint_{L_i} J_i d\vec{l}'_i = \sum_i J_i \sum_i \oint_{L_i} d\vec{l}'_i = 0,$$

Оскільки кожна трубка з струмом замкнена, то $\oint_{L_i} d\vec{l}'_i = 0$.

Розглянемо другий доданок у формулі (2):

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu\mu_0}{4\pi} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}') \vec{r}' dV' = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^3} \vec{j}(\vec{r}') dV', \quad (3)$$

де ураховано, що $\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$. Можна довести, що

$$(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') = -\frac{1}{2} \left[\vec{r} \times \left[\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') \right] \right]. \quad (4)$$

Підставимо (4) в (3), отримаємо:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0}{8\pi r^3} \int_{V'} \left[\left[\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') \right] \vec{r} \right] dV'. \quad (5)$$

Уведемо деяку величину

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_{V'} [\vec{r}', \vec{j}(r')] dV' \quad (6)$$

і назвемо її *магнітним моментом* елементарного струму. Отже, (5) спроститься до такого вигляду:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi r^3} [\vec{m}, \vec{r}]. \quad (7)$$

Знаючи векторний потенціал, можна визначити вектор індукції магнітного поля \vec{B} :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \text{rot } \frac{\mu\mu_0}{4\pi r^3} [\vec{m}, \vec{r}].$$

Отже, необхідно знайти ротор такого виразу:

$$\begin{aligned} \text{rot} \left(\frac{1}{r^3} [\vec{m} \times \vec{r}] \right) &= \left[\vec{\nabla} \times \left[\vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right] \right] = \vec{m} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) - (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3} = \\ &= \vec{m} \left(\frac{3}{r^3} - 3\vec{r} \frac{\vec{r}}{r^5} \right) - \left(\frac{\vec{m}}{r^3} - \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right) = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}. \end{aligned}$$

Тоді вектор індукції магнітного поля

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right). \quad (8)$$

Як видно з (8), магнітне поле замкненого струму спадає обернено пропорційно кубу віддалі. На великій віддалі силові лінії магнітного поля мають таку ж форму, як і силові лінії електричного поля.

Магнітний момент лінійного струму. У випадку лінійного

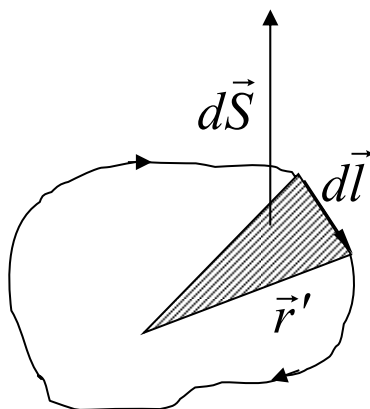


Рис. 2

струму формула (6) для магнітного моменту набуде простішого вигляду. Крім того, варто зазначити, що найпростішою системою, яка характеризується магнітним моментом, є лінійний замкнений струм. Тоді:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_{V'} [\vec{r}' \times \vec{j}(r')] dV' = \frac{1}{2} J \oint_{L'} [\vec{r}' \times d\vec{l}], \quad (9)$$

де L' – контур розглядуваного замкненого струму (рис.2). Врахуємо

те, що

$$\frac{1}{2} [\vec{r}' \times d\vec{l}] = d\vec{S}$$

є вектором елемента поверхні, яку обмежує контур струму. Отже,

$$\frac{1}{2} \oint_{L'} [\vec{r}'' d\vec{l}] = \int_{S'} d\vec{S}' = \vec{S}' \quad (10)$$

є вектором поверхні, що натягнута на контур L' . Підставивши (10) у (9), отримаємо:

$$\vec{m} = J\vec{S}' \quad (11)$$

Магнітний момент лінійного струму пропорційний величині струму та площі поверхні, яка охоплена контуром зі струмом.

§28. Магнітні властивості атомних систем

Розглянемо атом. Будемо вважати, що електрони в атомі рухається замкненими орбітами. Кожен електрон рухається навколо ядра, створюючи деякий замкнений коловий струм. Будемо також вважати, що цей струм стаціонарний. Визначимо магнітний момент системи струмів, який створюють електрони:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_{V'} [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] dV' \quad (1)$$

Врахуємо дискретність системи зарядів:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^Z e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \vec{v}(\vec{r}) \quad (2)$$

Підставивши (2) у (1), отримаємо:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^Z e_i \int_{V'} [\vec{r}', \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) \vec{v}(\vec{r}')] dV' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^Z e_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i] \quad (3)$$

Формула (3) задає магнітний момент сукупності зарядів.

Визначимо тепер момент імпульсу i -го електрона:

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i]$$

Для Z електронів момент імпульсу дорівнює:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^Z m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i] \quad (4)$$

Уведемо позначення:

$$e_i = e, \quad m_i = m_e \quad (5)$$

Тоді з формул (1) та (4) випливає очевидне рівняння:

$$\vec{m} = \frac{e}{2m_e} \vec{L} \quad (6)$$

Зважаючи на те, що заряд електрона від'ємний, \vec{m} та \vec{L} напрямлені у протилежні сторони.

У дещо іншій формі:

$$\frac{m}{L} = \frac{e}{2m_e}. \quad (7)$$

називають *гіромагнітним відношенням*. Воно є відношенням модулів векторів магнітного моменту до моменту імпульсу розглядуваної системи.

Унаслідок руху електрона в атомі коловою орбітою, атом характеризується певним моментом імпульсу та певним магнітним моментом. Причому \vec{m} і \vec{L} протилежно напрямлені, внаслідок того, що заряд електрона $e < 0$. Величини, які виникли завдяки руху електрона, часто називають орбітальним магнітним і орбітальним механічним моментами. Експериментально встановлено, що кожен електрон незалежно від того, чи рухається навколо ядра, чи ні, має свій власний магнітний момент і власний механічний момент. Установлено, що відношення власних магнітного моменту електрона до механічного є величиною в два рази більшою за відповідне відношення орбітальних моментів, тому:

$$\vec{m}_s = \frac{e}{m} \vec{S}, \quad (8)$$

де \vec{S} – власний механічний момент (спін електрона), \vec{m}_s – власний магнітний момент, причому ці величини є адитивними:

$$\vec{m}_s = m_s^{(1)} + m_s^{(2)} + \dots + m_s^{(Z)}, \quad (9)$$

$$\vec{S} = \vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)} + \dots + \vec{S}^{(Z)}. \quad (10)$$

Отже, для визначення магнітного моменту атома треба знайти суму всіх магнітних (орбітальних та власних) моментів:

$$\vec{M} = \vec{m} + \vec{m}_s = \frac{e}{2m_e} (\vec{L} + 2\vec{S}). \quad (11)$$

У природі реалізуються різні ситуації, коли $\vec{M} = 0$ або $\vec{M} \neq 0$. Залежно від того, з яких атомів складається речовина, такі й будуть магнітні властивості речовини. Нехай атоми речовини такі, що $\vec{M} = 0$. Якщо немає дії зовнішнього поля, можна довести, що у цьому випадку сприйнятливість є меншою нуля, а отже, речовина є діамагнетиком. Коли ж $\vec{M} \neq 0$, то магнітна сприйнятливість додатна і речовина називається парамагнетиком.

§29. Магнітна енергія стаціонарних струмів

Вираз енергії поля через векторний потенціал. Запишемо загальний вираз для енергії електромагнітного поля:

$$W_{EMP} = \frac{1}{2} \int_V (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) dV. \quad (1)$$

Обчислимо енергію магнітної складової електромагнітного поля:

$$W_{магн} = \frac{1}{2} \int_V \vec{H}\vec{B} dV. \quad (2)$$

Виразимо (2) через густину струму та векторний потенціал. Скористаємось відомою формулою:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (3)$$

Підставимо (3) у (2):

$$W_{магн} = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{A} dV. \quad (4)$$

Розпишемо підінтегральний вираз:

$$\vec{H} \cdot \text{rot } \vec{A} = \text{div} [\vec{A} \times \vec{H}] + \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{H}. \quad (5)$$

Підставимо (5) у (4) та врахуємо рівняння Максвелла $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$.

Скористаємось теоремою Остроградського-Гауса:

$$W_{магн} = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \text{rot } \vec{H} dV + \frac{1}{2} \int_V \text{div} [\vec{A} \vec{H}] dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{j}(\vec{r}) \vec{A}(\vec{r}) dV + \frac{1}{2} \oint_S [\vec{A} \vec{H}] d\vec{S}. \quad (6)$$

Якщо всі струми розміщені у скінченій області простору, то на великих відстанях від них:

$$A \sim \frac{1}{r^2}, \quad H \sim \frac{1}{r^3}.$$

Отже, на великих віддальх підінтегральний вираз у другому доданку (6) зменшується як $\frac{1}{r^5}$. Оскільки площа поверхні інтегрування росте лише як r^2 , то інтеграл при $S \rightarrow \infty$ спадає, як $\frac{1}{r^3}$. Тому при віддаленні поверхні S на нескінченість поверхневий інтеграл в формулі (6) прямує до нуля. Отже,

$$W_{магн} = \frac{1}{2} \int_V \vec{j}(\vec{r}) \vec{A}(\vec{r}) dV. \quad (7)$$

Енергія магнітного поля для системи лінійних струмів. Розглянемо випадок сукупності лінійних провідників. Для того, щоб у формулі (7) урахувати наявність лінійних струмів потрібно зробити заміну: $\vec{j}dV \rightarrow J_i d\vec{l}_i$. Для багатьох лінійних струмів у

просторі інтеграл (7) зводиться до суми інтегралів по окремих провідниках, які будемо нумерувати індексом i :

$$W_{\text{магн}} = \frac{1}{2} \sum_i J_i \oint_{L_i} \vec{A}_i(\vec{r}) d\vec{l}_i. \quad (8)$$

У формулі (8) L_i – контур i -го провідника, \vec{A}_i – векторний потенціал магнітного поля i -го контуру. Сума враховує усі провідники. Використаємо формулу Стокса:

$$\oint_{L_i} \vec{A}_i(\vec{r}) \cdot d\vec{l}_i = \int_{S_i} \text{rot } \vec{A}_i \cdot d\vec{S}_i = \int_{S_i} \vec{B}_i \cdot d\vec{S}_i = \Phi_i. \quad (9)$$

Величина Φ_i є потоком магнітної індукції через поверхню S_i натягнуту на контур L_i i -го провідника. Отже, формула для енергії магнітного поля системи лінійних струмів запишеться у вигляді:

$$W_{\text{магн}} = \frac{1}{2} \sum_i J_i \Phi_i. \quad (10)$$

Зокрема для одного провідника

$$W_{\text{магн}} = \frac{1}{2} J \Phi. \quad (11)$$

Енергія магнітного поля, створеного контуром зі струмом, пропорційна добутку величини струму в контурі на потік вектора індукції магнітного поля, що проходить через цей контур.

Вираз для коефіцієнтів самоіндукції і взаємоіндукції. Розглянемо вплив одного контуру на інший. Використаємо формулу (7) та замінимо векторний потенціал виразом через струми:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}'(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (12)$$

Підставимо (11) у (7), отримаємо:

$$W_{\text{магн}} = \frac{1}{8\pi} \mu\mu_0 \int_V \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}) \vec{j}'(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dV. \quad (13)$$

Перейдемо знову до системи лінійних струмів:

$$W_{\text{магн}} = \frac{\mu\mu_0}{8\pi} \sum_{i,k} \int_{V_i} \int_{V'_k} \frac{\vec{j}_i(\vec{r}) \vec{j}'_k(\vec{r}')}{|\vec{r}_i - \vec{r}'_k|} dV'_k dV_i, \quad (14)$$

де $\vec{j}_i(\vec{r})$, $\vec{j}'_k(\vec{r}')$ – означають густини струму, які течуть по i -му і k -му провідниках, а $|\vec{r}_i - \vec{r}'_k|$ – відстань між елементами об'єму

dV'_k, dV_i відповідних провідників. Формулу (14) можна переписати так:

$$W_{\text{магн}} = \frac{\mu\mu_0}{8\pi} \sum_{i,k} J_k J_i \frac{1}{J_k J_i} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{\vec{J}_i \vec{J}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} dV_k dV_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} J_k J_i, \quad (15)$$

де

$$L_{ik} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi J_i J_k} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{\vec{J}_i \vec{J}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} dV_k dV_i. \quad (16)$$

З формули (15) випливає, що енергія магнітного поля визначається величиною струмів у контурах, які створюється полем, а також, як видно з (16), формою самих контурів. Величину L_{ik} ($i \neq k$) називають коефіцієнтом взаємної індукції, L_{ii} – коефіцієнтом самоіндукції. З (16) видно, якщо потрібно знайти коефіцієнт самоіндукції, то ми не можемо користуватися цією формулою, бо $L_{ii} = \infty$.

Формула (15) може бути використана для визначення коефіцієнтів самоіндукції провідника. Для одного ізольованого провідника ця формула має вигляд:

$$W_m = \frac{LJ^2}{2}. \quad (17)$$

Порівнюючи формулу (10) і (15), визначимо потік векторного поля через контур L та інші величини:

$$\Phi_i = \sum_k L_{ik} J_k. \quad (18)$$

Таким чином, знання коефіцієнтів взаємоіндукції та самоіндукції дає змогу легко обчислити потоки магнітної індукції. Для одного ізольованого провідника формула (18) має вигляд:

$$\Phi = LJ. \quad (19)$$

Добуток величини струму в контурі на коефіцієнт самоіндукції визначає потік магнітної індукції.

§30. Енергія стаціонарного струму в зовнішньому магнітному полі.

Розглянемо деяку сукупність струмів, які поміщені у зовнішнє поле. Тоді, на відміну від (7) §29

$$W_m^{зобн} = \int_V \vec{j}(\vec{r}) \vec{A}(\vec{r}) dV, \quad (1)$$

де $\vec{j}(\vec{r})$ – густина струму, $\vec{A}(\vec{r})$ – векторний потенціал зовнішнього магнітного поля.

Розглянемо випадок, коли зовнішнє магнітне поле змінюється у просторі повільно (від початкової точки до кінцевої точки). Для крайніх точок довільного контуру різниця між величинами магнітного поля у цих точках буде невелика. Те що магнітне поле змінюється у просторі, дає змогу враховувати його у формулі (1) наближено. Для цього розкладемо векторний потенціал магнітного поля у ряд в околі деякої довільної точки простору біля контуру. Розглянемо випадок, коли маємо один замкнений контур. Виберемо деяку точку O з радіус-вектором \vec{r}_0 . Тоді вираз (1) для одного контуру переписеться так:

$$W_m^{зобн} = J \oint_L \vec{A}(\vec{r}) d\vec{l}. \quad (2)$$

Розкладемо $\vec{A}(\vec{r})$ в ряд за степенями $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0$:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}_0) + (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \dots \quad (3)$$

і врахуємо лише перші доданки. Вираз (3) підставимо у (2):

$$W_m^{зобн} = J \vec{A}(\vec{r}_0) \oint_L d\vec{l} + J \oint_L (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} d\vec{l} = J \oint_L (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} d\vec{l}. \quad (4)$$

У формулі (4) ураховано, що перший доданок дорівнює нулю, бо контур замкнений. Можна довести, що

$$(\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} [\vec{r}' \times d\vec{l}] \cdot [\nabla \times \vec{A}]. \quad (5)$$

Урахувавши (5), отримаємо:

$$W_m^{зобн} = \frac{J}{2} \oint_L [\vec{r}' \times d\vec{l}] \cdot \text{rot } \vec{A}. \quad (6)$$

$$W_m^{зобн} = \vec{m} \vec{B}, \quad (7)$$

де \vec{m} – магнітний момент струму.

Замкнений лінійний струм у зовнішньому магнітному полі аналогічний до електричного диполя у зовнішньому електричному полі. Тому замкнений лінійний струм називають *магнітним диполем*. Виникає різниця лише у знаку, бо змінюється не потенціальна енергія системи, а кінетична.

§31. Електрорушійна сила

Рівняння неперервності у випадку сталих струмів зводиться до рівняння:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (1)$$

яке виражає той факт, що лінії вектора густини струму в цьому випадку не мають ні початку, ні кінця, а зображаються або замкнутими лініями, або прямують до нескінченності.

Розглянемо інтеграл:

$$\oint_L \vec{j} d\vec{l}, \quad (2)$$

який взятий вздовж деякого замкнутого контуру L , що збігається зі замкненою лінією струмів. Якщо маємо лише електростатичне поле \vec{E} кулонівського походження, то густина струму \vec{j} зв'язана з напруженістю \vec{E} рівнянням $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, де $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$. Вважаючи, що $\sigma = \text{const}$, отримаємо для (2):

$$\oint_L \vec{j} d\vec{l} = \sigma \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\sigma \oint_L \operatorname{grad} \varphi d\vec{l} = -\sigma \oint_L d\varphi = 0. \quad (3)$$

З іншого боку, інтегрування у (2) ведеться вздовж лінії густини струму. Тому елемент шляху інтегрування $d\vec{l}$ у кожній точці шляху є паралельним до вектора густини струму. Отже,

$$\vec{j} d\vec{l} = \pm j dl.$$

Знак плюс береться у тому випадку, коли напрямки векторів \vec{j} і $d\vec{l}$ однакові, а знак мінус – у випадку протилежних напрямків. З урахуванням вище сказаного, рівняння (3) зводиться до вигляду:

$$\oint_L \vec{j} d\vec{l} = \pm \oint_L j dl = 0.$$

З рівності нулю інтеграла випливає рівність нулю підінтегрального виразу: $j = 0$. Отже, ми довели, що існування сталих струмів за наявності лише кулонівських сил електростатичного поля неможливе.

Сторонні електрорушійні сили. Сталі струми можуть існувати лише за наявності полів не електростатичного походження. Такі поля існують у джерелах постійного струму – гальванічних елементах, акумуляторах і т. д. Ці поля називаються сторонніми полями, а зумовлені цими полями сили, що спричиняють рух зарядів і виникнення постійного струму, називаються сторонніми електрорушійними силами (е.р.с.). Поле

сторонніх сил характеризується вектором $\vec{E}_{стор}$. Інакше кажучи, якщо існує деякий струм

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} + \vec{j}_{стор},$$

що зумовлений електростатичним полем \vec{E} та стороннім джерелом, то можна ввести напруженість $\vec{E}_{стор}$ згідно з формулою

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{стор}). \quad (4)$$

Запишемо е.р.с. – циркуляцію вектора сумарної напруженості електричного поля:

$$\varepsilon = \oint_L (\vec{E} + \vec{E}_{стор}) d\vec{l} = \oint_L \vec{E}_{стор} d\vec{l}. \quad (5)$$

Коли ми маємо джерело струму, тоді величина постійних струмів спричинюється наявністю сторонніх електрорушійних сил. Напруженість $E_{стор}$ існує на деякій ділянці і не дорівнює нулю там, де є струм. Формула (4) виражає закон Ома для повного кола, $\varepsilon = \int_L \vec{E} d\vec{l}$ – для ділянки кола, де не враховується стороннє джерело.

§32. Електрична енергія заряджених провідників

Нехай маємо деяку сукупність заряджених провідників (або зарядів). Енергія цієї сукупності заряджених провідників

$$W_l = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i, \quad (1)$$

де φ_i – потенціал в точці заряду q_i , створений усіма іншими зарядами, крім i -го. Коефіцієнт $\frac{1}{2}$ у формулі (1) вказує на те, що кожний точковий заряд при сумуванні враховується двічі: один раз, коли обчислюється його енергія у полі всіх решти зарядів, а другий раз, коли визначається енергія інших зарядів у полі цього заряду.

Аналіз показує, що величина заряду кожного провідника:

$$q_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} \varphi_k. \quad (2)$$

Наприклад, якщо розглянути заряджену кулю, то

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_k},$$

де r_k – радіус кулі, тобто аналогічно формулі (2)

$$q = 4\pi\epsilon_0 r_k \varphi. \quad (3)$$

Отже, $c = 4\pi\epsilon_0 r_k$ – коефіцієнт ємності кулі, що визначається лише радіусом.

Розглянемо найпростіший випадок, випадок двох абсолютно однакових (форма, матеріал) провідників. Очевидною є система рівнянь:

$$\begin{aligned} q_1 &= c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2, \\ q_2 &= c_{21}\varphi_1 + c_{22}\varphi_2. \end{aligned} \quad (2')$$

Проаналізуємо систему (2'). Коефіцієнт c_{11} – характеристика першого зарядженого провідника, c_{22} – характеристика другого зарядженого провідника. У зв'язку з тим, що провідники рівноправні, то $c_{11} = c_{22}$. Коефіцієнт c_{12} вказує, який вплив має перший провідник на другий, c_{21} – другий на перший. Але вони однакові, тому:

$$c_{12} = c_{21}. \quad (4)$$

Коефіцієнти c_{ik} при $i \neq k$ називаються коефіцієнтами індукції, а при $i = k$ – коефіцієнтами ємності або просто ємностями. Оскільки позитивний заряд на ізолюваному провіднику створює позитивний потенціал, то можемо зробити висновок, що коефіцієнти ємності завжди додатні.

Система, яка складається з двох провідників з різними за значком, але рівними за модулем зарядами, називається конденсатором. Якщо вважати $\varphi_2 = 0$, врахувати, що $q_1 = -q_2$, то після додавання рівнянь (2'), отримаємо: $c_{11} = -c_{21}$. Аналогічно з умови, що $\varphi_1 = 0$, $c_{22} = -c_{12}$. Урахуємо умови, що справедливі для коефіцієнтів c_{ij} . Легко зрозуміти, що для конденсатора

$$c_{11} = c_{22} = C = \frac{q}{(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (5)$$

Величину C називають ємністю конденсатора. Як уже зазначалося, $C > 0$. Тому у формулі (5) передбачається, що φ_2 – потенціал обкладинки, заряд якої позитивний. Конденсатор може бути ізолюваним від впливу інших тіл у просторі, тобто ємність визначається лише параметрами самого конденсатора.

Розділ V. Випромінювання та поширення електромагнітних хвиль

§33. Загальні рівняння електромагнітних хвиль

Електричне поле в електростатиці та магнітне поле у магнітостатиці спричинені електричними зарядами та струмами відповідно. Вони не існують окремо від зарядів і струмів, не «відриваються» від своїх джерел. Лише у вигляді електромагнітних хвиль електромагнітне поле отримує повну самостійність існування, воно «відривається» від зарядів і струмів, які породили їх. Поле існує незалежно від того, що надалі відбувається у системі зарядів.

Векторний і скалярний потенціали. Надалі виходимо з повної системи рівнянь Максвелла:

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \quad (2)$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0; \quad (3)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \quad (4)$$

Векторний потенціал \vec{A} вводиться аналогічно як для стаціонарних магнітних полів:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}, \quad \operatorname{div}\vec{A} = 0. \quad (5)$$

Використаємо рівняння (2) та (5):

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{A} = -\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}. \quad (6)$$

У формулі (6) послідовність операцій ротора (частинні похідні за координатами) та похідної за часом змінена, бо вони є незалежними. Перепишемо (6) у дещо іншій формі:

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0. \quad (7)$$

Бачимо, що вектор $\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ є потенціальним вектором, а, отже, може бути зображеним у вигляді градієнта від скалярної функції:

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi. \quad (8)$$

Отже, вектор напруженості електричного поля виражається через скалярний та векторний потенціали за формулою:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi. \quad (9)$$

Неоднозначність потенціалів. Калібровочне перетворення. Формули (9) та (5) не дають можливості однозначно ввести потенціали, виходячи із заданих векторів \vec{E}, \vec{B} . Нехай $\chi(\vec{r}, t)$ – деяка неперервна функція координат і часу. Неважко довести, що потенціали

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} \chi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (10)$$

описують те ж саме поле \vec{E}, \vec{B} . Перетворення (10) називається *калібровочним* або *градієнтним*. Користуючись довільністю вибору потенціалів, можна ввести деяку додаткову умову для потенціалів φ та \vec{A} . Такою додатковою умовою в електродинаміці як правило вибирають умову *Лоренца*:

$$\text{div} \vec{A} + \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (11)$$

Якщо потенціали \vec{A}, φ задовольняють умову (11), то для потенціалів \vec{A}', φ' , які визначаються формулами (10), отримуються рівняння:

$$\text{div} \vec{A}' - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \Delta \chi - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}. \quad (12)$$

Якщо ж функція χ задовольняє хвильове рівняння:

$$\Delta \chi - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0, \quad (13)$$

то права частина рівняння (12) дорівнює нулю і (12) перетворюється на умову Лоренца (11) для \vec{A}', φ' .

Рівняння для векторного потенціалу. Повернемося до вихідних рівнянь. Розглянемо випадок однорідного середовища: $\varepsilon = \text{const}, \mu = \text{const}$. Підставимо у рівняння (4) вирази (5) і (9). Отримаємо:

$$\text{rot rot} \vec{A} = \mu \mu_0 \vec{j} + \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi \right).$$

Ліва частина цього рівняння може бути перетворена за формулою векторної алгебри $\text{rot rot} \vec{A} = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$. Після простих перетворень маємо:

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \mu_0 \vec{j} + \text{grad} \left(\text{div} \vec{A} + \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

Щоб максимально спростити це рівняння, використовуючи довільність у виборі потенціалів, прирівняємо останній доданок у правій частині рівняння до нуля. Маємо умову Лоренца (11). Таким чином, рівняння для векторного потенціалу перетвориться до вигляду:

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \mu_0 \vec{j}. \quad (14)$$

Рівняння (14) є диференціальним неоднорідним рівнянням другого порядку як відносно координатної, так і часової змінних.

Рівняння для скалярного потенціалу. Підставимо у рівняння (1) вираз (9). У випадку однорідного середовища ($\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$) отримаємо:

$$\text{div} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \varphi \right) = \rho / \varepsilon \varepsilon_0,$$

або

$$\Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A} = -\rho / \varepsilon \varepsilon_0.$$

Оскільки потенціали φ, \vec{A} задовольняють умові Лоренца (11), то з отриманого рівняння можна виключити дивергенцію векторного потенціалу і остаточно для скалярного потенціалу рівняння запишеться так:

$$\Delta \varphi - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho / \varepsilon \varepsilon_0. \quad (15)$$

Видно, що за структурою це рівняння аналогічне до рівняння векторного потенціалу (14).

Основні відомості про розв'язок рівняння Даламбера.

Рівняння для скалярного та векторного потенціалів має вигляд:

$$\Delta \Phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -f(x, y, z, t). \quad (16)$$

Рівняння виду (16) називають рівнянням Даламбера.

Якщо $f=0$, то отримуємо однорідне рівняння Даламбера:

$$\Delta \Phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (17)$$

З теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних відомо, що рівняння (17) описує хвилю, яка поширюється зі швидкістю v . У теорії доводиться, що для функції f у правій

частині (16), яка відмінна від нуля у скінченній області простору, розв'язок цього рівняння для всього простору має вигляд:

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{f\left(x', y', z', t \pm \frac{r}{v}\right)}{r} dV', \quad (18)$$

де $dV' = dx'dy'dz'$ – елемент об'єму інтегрування, $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ – відстань між точкою інтегрування і точкою, в якій обчислюється значення функції Φ , а швидкість

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (19)$$

Найбільш суттєвим моментом у формулі (18) є різне значення часу у функції Φ і функції f . Функція f характеризує джерело, що породжує поле, яке описується функцією Φ . Візьмемо спочатку знак мінус у часовому аргументі функції f , тобто $t - \frac{r}{v}$. Формула (18) показує, що значення функції Φ у точці x, y, z у момент часу t залежить від значень функції f в інших точках x', y', z' не в той самий момент часу, а в більш ранні моменти часу $t - \frac{r}{v}$, причому це запізнювання за часом дорівнює $\frac{r}{v}$, тобто дорівнює часу поширення сигналу, який рухається зі швидкістю v з точки x', y', z' у точку x, y, z . Якщо сказане застосувати до випадку електромагнітного поля, то можна стверджувати, що швидкість v , яка визначається формулою (19), є швидкістю поширення електромагнітних взаємодій, а формула (18) враховує скінченність швидкості поширення цих взаємодій. Розв'язок (18) називається розв'язком з *урахуванням запізнення*. Знак плюс у часовому аргументі f , тобто $t + r/v$, приводить до розв'язку, який означає таке. Значення функції Φ у момент часу t визначається не тими значеннями функції f у різних точках простору, які були у минулі моменти часу, а тими її значеннями, які будуть у наступні моменти часу. Цей розв'язок називається розв'язком з *випередженням*. Він не має досить зрозумілого фізичного змісту, як розв'язок з запізненням, і використовується значно рідше.

Потенціали запізнення і випередження. Оскільки розв'язком рівняння (16) є (18), тому розв'язки рівнянь (14) і (15) можуть бути записані у вигляді потенціалів запізнення:

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}\left(x', y', z', t - \frac{r}{v}\right)}{r} dV, \quad (20)$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho\left(x', y', z', t - \frac{r}{v}\right)}{r} dV, \quad (21)$$

або у вигляді потенціалів випередження:

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}\left(x', y', z', t + \frac{r}{v}\right)}{r} dV, \quad (20')$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho\left(x', y', z', t + \frac{r}{v}\right)}{r} dV. \quad (21')$$

Існування електромагнітних хвиль теоретично впливає з того факту, що потенціали електромагнітного поля задовольняють рівнянню Даламбера, яке допускає розв'язок у вигляді хвиль.

§34. Випромінювання електромагнітних хвиль

Потенціали запізнення на далеких відстанях від зарядів.
У загальному випадку довільного руху зарядів у системі потенціали електромагнітного поля \vec{A}, φ виражаються формулами потенціалів запізнення. Однак практичне обчислення вказаних потенціалів за відповідними формулами ускладнюється, бо необхідно враховувати ефект запізнення: величини ρ, \vec{j} потрібно виражати для кожної точки простору \vec{r}_0 у різні моменти часу $t - |\vec{r} - \vec{r}_0|/c$, де \vec{r}, \vec{r}_0 – точка спостереження і точка розташування заряду відповідно. У зв'язку з цим, поле можна розраховувати лише наближено з урахуванням деяких обмежень, що стосуються системи зарядів. Обчислимо характеристики поля на далеких віддальх у вакуумі.

Потенціали запізнення мають вигляд:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{\rho(\vec{r}, t - |\vec{r} - \vec{r}_0|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV_0, \quad (1)$$

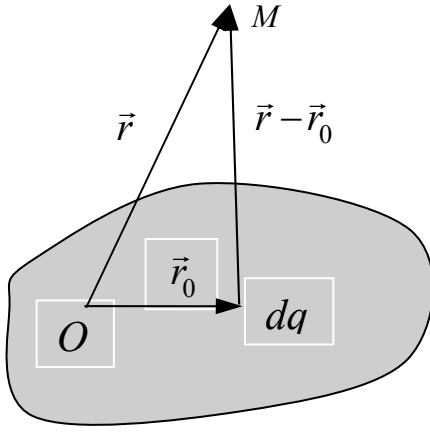


Рис. 1

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\vec{j}(\vec{r}, t - |\vec{r} - \vec{r}_0|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dV_0. \quad (2)$$

На великих віддальх $|\vec{r}| \gg |\vec{r}_0|$.

Зважаючи на це, розкладемо знаменники формул (1) і (2)

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \frac{1}{r'} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 (x_\alpha - x_{0\alpha})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha'^2}}$$

у ряд за степенями малої величини r_0/r (в околі точки \vec{r}), де $\alpha=x, y, z$.

Обмежимося першими доданками розкладу:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} \Big|_{r'=r} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha'} \left(\frac{1}{r'} \right) \Big|_{r'=r} (x_\alpha - x_{0\alpha} - x_\alpha)^2 =$$

$$= \frac{1}{r} - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) x_{0\alpha} = \frac{1}{r} - \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{r}_0 = \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r} \vec{r}_0)}{r^3} = \frac{1}{r} + \frac{(\vec{n} \vec{r}_0)}{r^2}. \quad (3)$$

Аналогічно розкладемо у ряд $|\vec{r} - \vec{r}_0|$:

$$|\vec{r} - \vec{r}_0| = r + (\text{grad } r)(-\vec{r}_0) = r - \frac{(\vec{r} \vec{r}_0)}{r}. \quad (4)$$

У формули (1), (2) входить величина $t - |\vec{r} - \vec{r}_0|/c$, яка, згідно з умовою (4), запишеться так:

$$t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c} = t - \frac{r}{c} + \frac{(\vec{r} \vec{r}_0)}{rc} = \tau + \frac{(\vec{r} \vec{r}_0)}{rc} = \tau + \frac{(\vec{n} \vec{r}_0)}{c}, \quad (5)$$

де τ – час запізнення на загальній відстані r , а $\frac{(\vec{n} \vec{r}_0)}{c}$ – власний час запізнення, \vec{n} – одиничний вектор, що збігається за напрямком з вектором \vec{r} . Вважається, що власний час запізнення є набагато меншим від загального: $\frac{(\vec{n} \vec{r}_0)}{c} \ll \tau$. Це дасть змогу розкласти у ряд густину зарядів і густину струмів за степенями цієї малої величини:

$$\rho\left(\vec{r}_0, \tau + \frac{(\vec{n}\vec{r}_0)}{c}\right) = \rho(\vec{r}_0, \tau) + \dot{\rho}(\vec{r}_0, \tau) \frac{(\vec{n}\vec{r}_0)}{c}, \quad (6)$$

$$\vec{j}\left(\vec{r}_0, \tau + \frac{(\vec{n}\vec{r}_0)}{c}\right) = \vec{j}(\vec{r}_0, \tau) + \dot{\vec{j}}(\vec{r}_0, \tau) \frac{(\vec{n}\vec{r}_0)}{c}, \quad (7)$$

де крапкою позначено похідну за часом τ . Вирази (3) – (7) підставимо в (1). Маємо:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{(\vec{n}\vec{r}_0)}{r^2} \right) \left(\rho(\vec{r}_0, \tau) + \dot{\rho}(\vec{r}_0, \tau) \frac{(\vec{n}\vec{r}_0)}{c} \right) dV_0.$$

Врахуємо доданки нульового та першого порядку малості:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int_{V_0} \rho(\vec{r}_0, \tau) dV_0 + \int_{V_0} \frac{(\vec{n}\vec{r}_0)}{r^2} \rho(\vec{r}_0, \tau) dV_0 + \int_{V_0} \dot{\rho}(\vec{r}_0, \tau) \frac{(\vec{n}\vec{r}_0)}{rc} dV_0 \right] = \\ &= \varphi_1(\vec{r}, t) + \varphi_2(\vec{r}, t) + \varphi_3(\vec{r}, t). \end{aligned}$$

Доданками другого та вищих порядків малості нехтуємо. Проаналізуємо отриманий результат.

Розглянемо електронейтральну систему. Оскільки сумарний заряд дорівнює нулю, то потенціал $\varphi_1=0$. Другий доданок є пропорційним $1/r^2$. Враховуючи те, що $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$, маємо, що напруженість $\sim 1/r^3$. Потік вектора напруженості такого електричного поля $N \sim ES \sim \frac{1}{r^3} r^2 = \frac{1}{r}$ і на великих відстанях прямуватиме до нуля. Звідси видно, що електромагнітні хвилі затухатимуть. Порівнюючи потенціал φ_2 з φ_3 , бачимо, що $\varphi_3 \gg \varphi_2$, бо $\varphi_3 \sim 1/r$. Отже, у формулі для $\varphi(\vec{r}, t)$ основний внесок дає третій доданок:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_3(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \dot{\rho}(\vec{r}_0, \tau) \frac{(\vec{n}\vec{r}_0)}{rc} dV_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{(\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}(\tau))}{r}. \quad (8)$$

Аналогічно можна довести, що

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{(\vec{n}\vec{r}_0)}{r^2} \right) \left(\vec{j}(\vec{r}_0, \tau) + \dot{\vec{j}}(\vec{r}_0, \tau) \frac{(\vec{n}\vec{r}_0)}{c} \right) dV_0.$$

Зберігаючи доданки нульового та першого порядку малості, одержимо:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{V_0} \vec{j}(\vec{r}_0, \tau) dV_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \vec{j}(\vec{r}_0, \tau) \frac{(\vec{n}\vec{r}_0)}{r^2} dV_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \dot{\vec{j}}(\vec{r}_0, \tau) \frac{(\vec{n}\vec{r}_0)}{c} dV_0 = \\ &= \vec{A}_1(\vec{r}, t) + \vec{A}_2(\vec{r}, t) + \vec{A}_3(\vec{r}, t). \end{aligned}$$

Оскільки ми розглядаємо випадок довільних нестационарних струмів, то перший доданок не дорівнює нулю. Другий доданок є малим, бо він пропорційний $1/r^2$. Тому

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_1(\vec{r}, t) + \vec{A}_3(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{V_0} \vec{j}(\vec{r}_0, \tau) dV_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \dot{\vec{j}}(\vec{r}_0, \tau) \frac{(\vec{n}\vec{r}_0)}{c} dV_0. \quad (9)$$

Електричне дипольне випромінювання.

Вирази (8) та (9) описують електричне дипольне випромінювання. Це означає, що A_1 та φ_3 взаємопов'язані. Доведемо це. Розглянемо ще раз формулу (8).

$$\varphi_3(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c r} \int_{V_0} \dot{\rho}(\vec{r}_0, \tau) \vec{r}_0 dV_0.$$

Використаємо рівняння неперервності $\text{div } \vec{j} = -\dot{\rho}$. Тоді

$$\varphi_3(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c r} \int_{V_0} \vec{r}_0 \text{div } \vec{j} dV_0 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c r} \vec{I}, \quad (10)$$

де через $\vec{I} = \vec{i}I_x + \vec{j}I_y + \vec{k}I_z$ позначено інтеграл:

$$\vec{I} = \int_{V_0} \vec{r}_0 \text{div } \vec{j} dV_0.$$

Розглянемо кожну проекцію окремо:

$$I_x = \int_{V_0} x_0 \text{div } \vec{j} dV_0.$$

Використаємо співвідношення з векторного аналізу:

$$\text{div}(x_0 \vec{j}) = x_0 \text{div}(\vec{j}) + \vec{j} \text{grad}(x_0) = x_0 \text{div}(\vec{j}) + j_x.$$

З урахуванням попереднього виразу

$$I_x = \int_{V_0} x_0 \text{div } \vec{j} dV_0 = \int_{V_0} \text{div}(x_0 \vec{j}) dV_0 - \int_{V_0} j_x dV_0.$$

Застосуємо до першого доданку попереднього виразу теорему Остроградського-Гауса і врахуємо, що заряди за межі системи не виходять:

$$I_x = \oint_{S_0} x_0 \vec{j} d\vec{S}_0 - \int_{V_0} j_x dV_0 = -\int_{V_0} j_x dV_0.$$

Аналогічні величини мають інтеграли I_y , I_z . Підставимо їхні значення у (10):

$$\varphi_3(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c r} \int_{V_0} \vec{j} dV_0.$$

Домножимо чисельник і знаменник на магнітну сталу μ_0 і порівняємо з виразом A_1 з формули (10). Маємо:

$$\varphi_3(\vec{r}, t) = \frac{\vec{n}}{\mu_0 \varepsilon_0 c} \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{V_0} \vec{j} dV_0 = \frac{\vec{n}}{\mu_0 \varepsilon_0 c} \vec{A}_1(\vec{r}, t) = c\vec{n}\vec{A}_1(\vec{r}, t).$$

Тут також ураховано, що $c^2 = 1/(\varepsilon_0 \mu_0)$. Домножуючи останній вираз скалярно зліва на вектор \vec{n} , одержимо:

$$\vec{A}_1(\vec{r}, t) = \frac{\vec{n}}{c} \varphi_3(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \frac{\dot{\vec{p}}(\tau)}{r}. \quad (11)$$

З (11) видно, що скалярний і векторний потенціал задаються швидкістю зміни дипольного моменту. Враховуючи характер залежності дипольного моменту від часу $\vec{p}(\tau) = \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)$, можна зробити висновок, що поле (11) є хвилею, що поширюється радіальними напрямками від області розташування системи зарядів. Електромагнітне поле, що визначається виразом (11), називається *електричним дипольним випромінюванням*. За модулем φ_3 є у c раз більшим за A_1 . Однак як буде показано далі, це спричинить співвідношення $E = cB$, що виконується для електромагнітних хвиль. Надалі розглянемо електричне дипольне випромінювання, тому індекси біля потенціалів поля писати не будемо.

Згідно з означенням вектора-потенціалу

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \text{rot} \left(\frac{\dot{\vec{p}}(\tau)}{r} \right) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \text{rot} \left(\frac{\dot{\vec{p}}(t - r/c)}{r} \right).$$

Нагадаємо формулу векторного аналізу:

$$\text{rot}(f \cdot \vec{a}) = f \text{rot}(\vec{a}) + [\text{grad } f \times \vec{a}].$$

З урахуванням цієї умови

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \text{rot} \left(\frac{\dot{\vec{p}}(t - r/c)}{r} \right) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \left(\frac{1}{r} \text{rot } \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \left[\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \times \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right).$$

Гradient в останньому доданку пропорційний r^{-2} . Це, своєю чергою, зумовить різке затухання поля на великих віддальх. Тому останнім доданком можна знехтувати:

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \text{rot } \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (12)$$

Обчислимо тепер ротор від складної функції за формулою:

$$\text{rot } \vec{a}(f(x, y, z)) = - \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial f} \times \text{grad } f(x, y, z) \right].$$

Ураховуючи останню умову, маємо:

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{r} \left[\ddot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \frac{\vec{r}}{r} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{r} \left[\ddot{\vec{p}}(\tau) \times \vec{n} \right]. \quad (13)$$

Знайдемо напруженість поля, згідно з означенням потенціалів поля:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\ddot{\vec{p}}(\tau)}{r}. \quad (14)$$

У формулі (14) враховано калібровку Лоренца для електромагнітних хвиль, тому напруженість поля визначається лише через векторний потенціал.

Маючи (13) і (14), обчислимо потік енергії електромагнітної хвилі, що проходить через одиничну площадку за одиницю часу (вектор Пойтінга):

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{E} \times \vec{B} \right] = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \right)^2 \frac{1}{c\mu_0} \left[-\ddot{\vec{p}}(\tau) \times \left[\ddot{\vec{p}}(\tau) \times \vec{n} \right] \right] = \\ &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \right)^2 \frac{1}{c\mu_0} \left[\left[\ddot{\vec{p}}(\tau) \times \vec{n} \right] \times \ddot{\vec{p}}(\tau) \right] = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \right)^2 \frac{1}{c\mu_0} \left(\vec{n} \left(\ddot{\vec{p}}(\tau) \cdot \ddot{\vec{p}}(\tau) \right) - \ddot{\vec{p}}(\tau) \left(\ddot{\vec{p}}(\tau) \cdot \vec{n} \right) \right) = \\ &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \right)^2 \frac{1}{c\mu_0} \left(\vec{n} \dot{p}^2(\tau) - \ddot{\vec{p}}(\tau) \dot{p}(\tau) \cos\theta \right), \end{aligned}$$

де θ – кут між вектором дипольного моменту і напрямком \vec{n} . Виберемо систему координат так, щоб вектор дипольного моменту збігався з віссю z . Тоді:

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \right)^2 \frac{1}{c\mu_0} \left(\vec{n} \dot{p}^2(\tau) - \vec{k} \dot{p}^2(\tau) \cos\theta \right) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \right)^2 \frac{\dot{p}^2(\tau)}{c\mu_0} \left(\vec{n} - \vec{k} \cos\theta \right) = \\ &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \right)^2 \frac{\dot{p}^2(\tau)}{c\mu_0} \vec{n} \left(1 - \frac{\vec{n}\vec{k}}{|\vec{n}|} \cos\theta \right) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \right)^2 \frac{\dot{p}^2(\tau)}{c\mu_0} \vec{n} \left(1 - \vec{n}\vec{k} \cos\theta \right) = \\ &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \right)^2 \frac{\dot{p}^2(\tau)}{c\mu_0} \vec{n} (1 - \cos^2\theta) = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^5 \mu_0} \frac{\dot{p}^2(\tau) \sin^2\theta}{r^2} \vec{n} \end{aligned}$$

Обчислимо тепер повний потік енергії за усіма напрямками за одиницю часу (*потужність випромінювання*):

$$N = \oint_{S_0} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_0.$$

Проведено обчислення у сферичних координатах:

$$N = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^5 \mu_0} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin\theta d\theta r^2 \frac{\dot{p}^2(\tau) \sin^2\theta}{r^2} = \frac{\dot{p}^2(\tau)}{8\pi \epsilon_0^2 c^5 \mu_0} \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta.$$

Отже,

$$N = \frac{2}{3c} \frac{\mu_0}{4\pi} \dot{p}^2(\tau). \quad (15)$$

Тут ураховано, що $c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$. Отже, формула (15) визначає кількість електромагнітної енергії, що випромінює диполь за одиницю часу у всіх просумованих напрямках, тобто це *інтенсивність дипольного випромінювання*.

§35. Поширення електромагнітних хвиль у діелектриках

Плоскі монохроматичні хвилі. Електромагнітна хвиля називається *плоскою*, якщо вектори напруженості електромагнітного поля мають одну й ту саму величину в усіх точках будь-якої площини, що перпендикулярна до напрямку поширення хвиль. Тоді поверхнями постійної фази у плоскій хвилі є площини, які розташовані перпендикулярно до напрямку поширення хвиль. Хвиля називається *монохроматичною*, якщо вектори напруженості електромагнітного поля змінюються з часом за гармонічним законом із визначеною частотою.

Наприклад, якщо плоска електромагнітна хвиля поширюється вздовж осі z , то вектори напруженості поля хвилі мають вигляд:

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}(z)e^{i\omega t}, \quad \vec{H}(z,t) = \vec{H}(z)e^{i\omega t}. \quad (1)$$

Рівняння для напруженості електромагнітного поля. Розглянемо випадок однорідного необмеженого середовища ($\epsilon = const, \mu = const$) при відсутності зарядів. Нехай $\lambda = 0$. Вихідними є рівняння Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (3)$$

Диференціюємо обидві частини рівняння (2) за часом t , виключивши у лівій частині отриманого рівняння похідну $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ з допомогою рівняння (3), знаходимо:

$$\text{rot } \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad -\frac{1}{\mu \mu_0} \text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Скористаємось формулою $\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$. Врахуємо, що дивергенція електричного поля в однорідному середовищі за

відсутності зарядів дорівнює нулю. Рівняння (4) перетвориться до такого:

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

Аналогічним методом отримаємо рівняння для \vec{H} , яке має через симетрію рівнянь (2) і (3), має такий самий вигляд, як і рівняння (5):

$$\Delta \vec{H} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

Таким чином, напруженість електричного і магнітного полів задовольняють одному і тому ж хвильовому рівнянню з одною і тією ж швидкістю поширення:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad (6)$$

де ε, μ – відносні діелектричні проникності середовища, а c – швидкість світла у вакуумі.

Розв'язок у вигляді плоских монохроматичних хвиль. Нехай вісь z збігається з напрямком поширення електромагнітної хвилі. Вектори напруженості електромагнітного поля задаються формулою (1). Розглянемо для прикладу рівняння для вектора \vec{E} . Підставимо вираз (1) для \vec{E} у рівняння (5). Скоротимо після диференціювання за часом експоненціальний множник. Отримаємо рівняння:

$$\frac{d^2 \vec{E}(z)}{dz^2} + k^2 \vec{E}(z) = 0, \quad k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0}. \quad (7)$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$\vec{E}(z) = A_1 e^{-ikz} + A_2 e^{ikz}. \quad (8)$$

Підставивши (8) у (1), знаходимо:

$$\vec{E}(z, t) = A_1 e^{i(\omega t - kz)} + A_2 e^{i(\omega t + kz)}. \quad (9)$$

Перший доданок правої частини (9) зображає хвилю, яка поширюється у додатному напрямку осі z . Цей висновок можна зробити на основі того, що точка постійної фази:

$$\omega t - kz = \text{const} \quad (10)$$

рухається у напрямку значень z , що зростають, тобто при збільшенні t величина z у (10) також збільшується. Аналогічні міркування показують, що другий доданок у (9) описує хвилю, яка поширюється у від'ємному напрямку осі z .

Розв'язок рівняння (5) знаходиться аналогічним способом. Тому для векторів напруженостей електромагнітної хвилі, яка поширюється у додатному напрямку осі z , можна написати вирази:

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}, \quad \vec{H}(z,t) = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - kz)}. \quad (11)$$

Величини \vec{E}_0 і \vec{H}_0 називають амплітудами напруженостей поля.

Формули (11) записані при спеціальному виборі системи координат, коли вісь z збігається з напрямком поширення хвилі. Цього обмеження можна позбутися, увівши до розгляду хвильовий вектор \vec{k} , який задає напрямок поширення хвилі, а за величиною задається виразом (10). Нехай радіус-вектор деякої точки на площині постійної фази є \vec{r} . Очевидно, що $kz = \vec{k}\vec{r}$, тому замість (11) можна записати:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \quad (12)$$

Ці формули описують вектори напруженостей електричного та магнітного полів плоскої електромагнітної хвилі, яка поширюється у напрямку вектора \vec{k} .

§36. Поляризація електромагнітних хвиль

Розглянемо плоску електромагнітну хвилю, яка поширюється у просторі:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \quad (1)$$

При цьому вважаємо, що величина \vec{E}_0 протягом усього руху хвилі є незмінною, тобто \vec{E}_0 є постійною як за модулем, так і за напрямком. Якщо вектор \vec{E}_0 сталий, то така хвиля називається

лінійно поляризованою. У природі може реалізовуватися також випадок, коли \vec{E}_0 повертається у просторі. Модуль $|\vec{E}_0|$ однаковий з часом, але напрямок вектора змінюється. Розглянемо прямокутну систему координат. Припустимо, що електромагнітна хвиля рухається

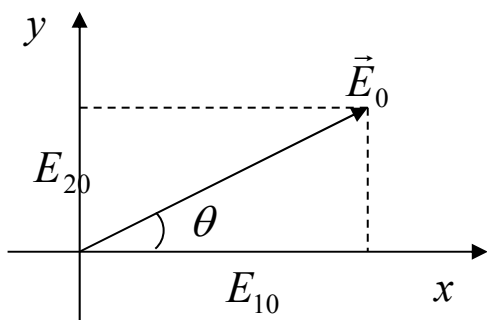


Рис. 1

перпендикулярно до площини рисунку. Тоді позначимо одиничні вектори через \vec{i}, \vec{j} . Отримаємо:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (E_1 \vec{i} + E_2 \vec{j}) e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \quad (2)$$

Загалом величини E_1, E_2 можуть бути комплексними числами:

$$E_1 = E_{10} e^{i\alpha_1}, \quad E_2 = E_{20} e^{i\alpha_2}, \quad (3)$$

причому E_{10}, E_{20} – дійсні величини.

Розглянемо проєкції вектора \vec{E} на осі координат:

$$E_x = E_1 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad E_y = E_2 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \quad (4)$$

Запишемо (4) для дійсних частин. З цією метою підставимо (3) у (2). Отримаємо:

$$E_x = E_{10} e^{i\alpha_1} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad E_x = \text{Re} \left(E_{10} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r}) + i\alpha_1} \right) = E_{10} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha_1). \quad (5)$$

Аналогічно для у-проєкції:

$$E_y = E_{20} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha_2). \quad (6)$$

Конкретизуємо ряд випадків. Нехай $\alpha_1 = \alpha_2$. Урахувавши (5), (6)

та рисунок, маємо, що $\text{tg} \theta = \frac{E_2}{E_1} = \frac{E_{20}}{E_{10}} = \text{const}$. Отже, у цьому

випадку хвиля буде лінійно поляризованою. \vec{E}_0 протягом руху електромагнітної хвилі не буде змінювати свого напрямку. Тепер

нехай $\alpha_1 = \alpha_2 \pm \frac{\pi}{2}$. Тоді $E_x = E_{10} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha_1)$, а

$E_y = \mp E_{20} \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha_1)$. Взявши відношення E_x до E_y , бачимо,

що присутня залежність від часу для E_x / E_y . Вектор \vec{E} повертається у просторі з часом, причому

$$E_{20}^2 + E_{10}^2 = E_0^2.$$

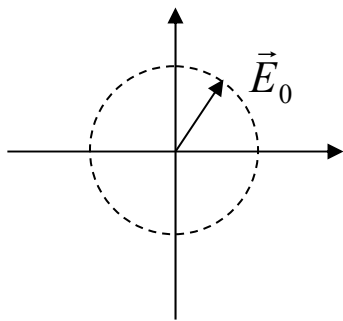


Рис. 2

Квадрат модуля максимально можливого значення напруженості електромагнітної хвилі $E_x^2 + E_y^2$ дорівнює максимальній величині. Вектор напруженості електромагнітного поля, повертаючись з часом, залишається постійним і максимально можливим. Рух вектора може бути як за

годинниковою стрілкою, так і проти годинникової стрілки.

Кажуть, що хвиля може бути або з лівою коловою поляризацією, або з правою коловою поляризацією.

§37. Відбиття та заломлення плоских електромагнітних хвиль на границі між діелектриками

До цього часу ми розглядали однорідні ізотропні середовища. Розглянемо випадок неоднорідного ізотропного середовища. Але розглянемо найпростіший випадок, коли середовище складається з двох однорідних середовищ. Нехай межею поділу

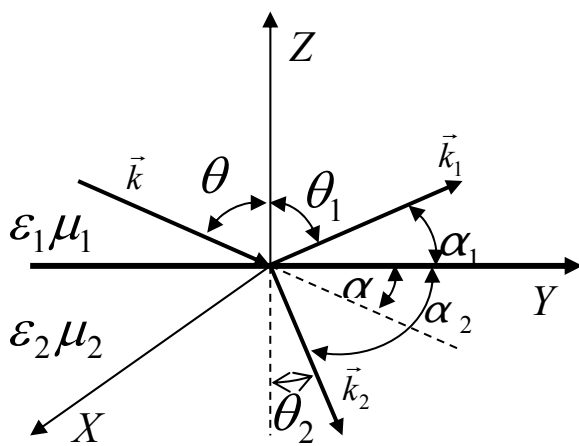


Рис. 1

буде площина XOY. Перше середовище характеризується величинами $\epsilon_1\mu_1$. У першому середовищі рухається плоска лінійно поляризована електромагнітна хвиля. На межі ця хвиля частково відіб'ється у перше середовище, частково заломиться і перейде у друге середовище. Таким чином, у першому середовищі існує падаюча та відбита хвилі, а у

другому – заломлена.

Для напруженості електричного та магнітного полів падаючої, відбитої та заломленої хвиль можемо написати відповідно наступні вирази:

- вектори падаючої хвилі:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad (1)$$

- вектори відбитої хвилі:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} e^{i(\omega_1 t - \vec{k}_1\vec{r})}, \quad \vec{H}_1 = \vec{H}_{01} e^{i(\omega_1 t - \vec{k}_1\vec{r})}, \quad (2)$$

- вектори заломленої хвилі:

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} e^{i(\omega_2 t - \vec{k}_2\vec{r})}, \quad \vec{H}_2 = \vec{H}_{02} e^{i(\omega_2 t - \vec{k}_2\vec{r})}. \quad (3)$$

Нехай відомі параметри середовища $\epsilon_1, \mu_1, \epsilon_2, \mu_2$ та падаючої хвилі: \vec{E}_0, \vec{H}_0 . Визначимо $\vec{E}_{01}, \vec{H}_{01}, \vec{E}_{02}, \vec{H}_{02}$. Задача розв'язується з використанням граничних умов. Унаслідок того, що поверхневі

густина зарядів і струмів дорівнюють нулю, бо ми розглядаємо випадок діелектриків, граничні умови для проєкцій векторів напруженості електричного та магнітного полів запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} D_n + D_{n1} &= D_{n2}, \\ E_t + E_{t1} &= E_{t2}, \\ B_n + B_{n1} &= B_{n2}, \\ H_t + H_{t1} &= H_{t2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Гранична умова неперервності тангенціальних складових вектора електричної напруженості записується так:

$$E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + E_1 e^{i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r})} = E_2 e^{i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r})}. \quad (5)$$

Збереження частоти при відбиванні та заломленні.

Для простоти запишемо умову (5) у вигляді:

$$a e^{i\omega t} + b e^{i\omega_1 t} = c e^{i\omega_2 t}, \quad (6)$$

де величини a, b, c від часу не залежать. Диференціюємо обидві частини (6) за часом, знаходимо:

$$i\omega a e^{i\omega t} + i\omega_1 b e^{i\omega_1 t} = i\omega_2 c e^{i\omega_2 t}. \quad (7)$$

Якщо у правій частині цієї рівності величину $c e^{i\omega_2 t}$ замінити виразом з (5), тоді отримаємо:

$$i a (\omega - \omega_2) e^{i\omega t} = i b (\omega_2 - \omega_1) e^{i\omega_1 t}. \quad (8)$$

Рівність (8) виконується для усіх значень t . Але це можливо лише за умови:

$$\omega = \omega_1. \quad (9)$$

Аналогічним чином, замінюючи у рівності (7) величину $b e^{i\omega_1 t}$ виразом з (5) і, повторюючи наведені міркування, отримаємо умову:

$$\omega = \omega_2. \quad (10)$$

Отже, частота хвилі при відбитті і заломленні не змінюється:

$$\omega = \omega_2 = \omega_1. \quad (11)$$

Покажемо далі, що падаючий, відбитий і заломлений промені лежать в одній площині. У граничній умові (5) \vec{r} зображає радіус-вектор точки поверхні поділу. Виберемо початок координат в одній з точок поверхні поділу. Тоді вектор \vec{r} у рівності (5) буде повністю лежати на межі поділу середовищ. У цьому випадку граничну умову (5) можна записати у вигляді:

$$a' e^{-i\vec{k}\vec{r}} + b' e^{-i\vec{k}_1 \vec{r}} = c' e^{-i\vec{k}_2 \vec{r}}, \quad (12)$$

де a', b', c' не залежать від \vec{r} . Застосуємо до обидвох частин рівняння (12) операцію:

$$(\vec{r}\vec{\nabla}) = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (13)$$

Враховуючи, що

$$(\vec{r}\vec{\nabla})e^{-i\vec{k}\vec{r}} = -i(\vec{k}\vec{r})e^{-i\vec{k}\vec{r}}, \quad (14)$$

отримаємо:

$$-ia'(\vec{k}\vec{r})e^{-i\vec{k}\vec{r}} - ib'(\vec{k}_1\vec{r})e^{-i\vec{k}_1\vec{r}} = -ic'(\vec{k}_2\vec{r})e^{-i\vec{k}_2\vec{r}}. \quad (15)$$

Якщо у правій частині цієї рівності величину $c'e^{-i\vec{k}_2\vec{r}}$ замінити виразом з (12), тоді отримаємо:

$$ia' \left\{ (\vec{k}\vec{r}) - (\vec{k}_2\vec{r}) \right\} e^{-i\vec{k}\vec{r}} = ib' \left\{ (\vec{k}_2\vec{r}) - (\vec{k}_1\vec{r}) \right\} e^{-i\vec{k}_1\vec{r}}. \quad (16)$$

Співвідношення (16) виконується для всіх значень \vec{r} , які лежать у площині межі поділу. Але це справедливо лише за умови:

$$(\vec{k}\vec{r}) = (\vec{k}_1\vec{r}). \quad (17)$$

Аналогічним чином, замінюючи у рівності (15) величину $b'e^{-i\vec{k}_1\vec{r}}$ відповідним виразом з (12) і, повторюючи наведені міркування, отримаємо умову:

$$(\vec{k}\vec{r}) = (\vec{k}_2\vec{r}). \quad (18)$$

Отже, маємо:

$$(\vec{k}\vec{r}) = (\vec{k}_2\vec{r}) = (\vec{k}_1\vec{r}). \quad (19)$$

Звідси випливає, що вектори $\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2$ лежать в одній площині. Дійсно, вектор \vec{r} лежить на площині межі поділу середовищ. У всьому іншому він довільний. Виберемо напрямок перпендикулярним до одного з хвильових векторів, наприклад, вектору \vec{k} . Тоді умова (19) матиме вигляд:

$$(\vec{k}\vec{r}) = 0 = (\vec{k}_2\vec{r}) = (\vec{k}_1\vec{r}). \quad (20)$$

Це означає, що \vec{k}_1, \vec{k}_2 також перпендикулярні до \vec{r} , тобто лежать у тій самій площині, що і \vec{k} . Доведено, що дійсно падаючий, відбитий і заломлений промені лежать в одній площині.

Співвідношення між кутами падіння, відбивання і заломлення. Закон Снелліуса.

Виберемо початок системи координат на поверхні межі поділу діелектриків у точці падіння променя, що розглядається

Сумістимо площину YOZ з площиною, у якій лежать падаючий, відбитий і заломлений промені. Вісь OZ напрямлена перпендикулярно поверхні межі поділу середовищ, а вісь OY – вздовж межі поверхні поділу. Нехай $\vec{k}^{(0)}, \vec{k}_1^{(0)}, \vec{k}_2^{(0)}$ – одиничні вектори, які характеризують напрям відповідних променів. Значення кутів подані на рисунку.

Умови (19) справедливі для довільної системи координат з початком на межі поділу середовищ. Виберемо початок системи координат так, як зображено на рисунку 1. Отже, отримаємо:

$$\left(\vec{k}\vec{r}\right) = kr \cos \alpha, \left(\vec{k}_1\vec{r}\right) = k_1 r \cos \alpha_1, \left(\vec{k}_2\vec{r}\right) = k_2 r \cos \alpha_2. \quad (21)$$

Тому (19) набуде вигляду:

$$k \cos \alpha = k_1 \cos \alpha_1 = k_2 \cos \alpha_2. \quad (22)$$

Позначимо через v, v_1, v_2 модулі швидкостей падаючого, відбитого і заломленого променів відповідно. Ці швидкості пов'язані з хвильовими числами k, k_1, k_2 рівностями:

$$k = \frac{\omega}{v}, k_1 = \frac{\omega_1}{v_1}, k_2 = \frac{\omega_2}{v_2}, \quad (23)$$

де враховано, що частота трьох хвиль однакова. Оскільки падаючий і відбитий промені поширюються в одному і тому самому середовищі, можна записати:

$$v = v_1, k = k_1. \quad (24)$$

З умови (22) отримуємо: $\cos \alpha = \cos \alpha_1, \alpha = \alpha_1$. Звідки

$$\theta = \theta_1. \quad (25)$$

Це означає, що кут падіння дорівнює куту відбивання.

Враховуючи (22) та (23), маємо, що

$$\frac{1}{v} \cos \alpha = \frac{1}{v_2} \cos \alpha_2. \quad (26)$$

Беручи до уваги, що $\cos \alpha = \sin \theta$ і $\cos \alpha_2 = \sin \theta_2$, рівняння (26) можна зобразити у вигляді:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta_2} = \frac{v}{v_2}. \quad (27)$$

Враховуючи, що

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}, \quad (28)$$

рівність (27) можна записати так:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}} = n_{12}. \quad (29)$$

Відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення дорівнює показнику заломлення другого середовища відносно першого (*закон Снелліуса*).

Питання і тести для самоконтролю

Тестове завдання №1

Необхідно вибрати одну відповідь.

1. Електричні властивості диполя в першому наближенні характеризуються дипольним моментом:

а) $\vec{d} = qr/\vec{r}$; б) $\vec{d} = q\vec{r}$; в) $\vec{d} = q/\vec{r}$; г) $\vec{d} = q^2\vec{r}$.

2. Магнітний момент одиниці об'єму середовища \vec{M} та магнітна сприйнятливість середовища χ пов'язані виразом:

а) $\vec{M} = \chi\vec{B}$; б) $\vec{M} = (\chi + 1)\vec{H}$; в) $\vec{M} = \chi\chi_0\vec{H}$; г) $\vec{M} = \chi\vec{H}$.

3. Магнітна проникність середовища виражається через магнітну сприйнятливість співвідношенням:

а) $\mu = \varepsilon + \chi$; б) $\mu = (1 + \chi)\chi_0$; в) $\mu = 1 + \chi$; г) $\mu = 1 - \chi$.

4. Магнітний момент:

а) $\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V [\vec{r}', \vec{j}(r')] dV'$; б) $\vec{m} = [\vec{r}', \vec{j}(r')]$; в) $\mu\alpha'\vec{B} = \vec{M}$; г) $\alpha'\vec{B} = \mu\vec{M}$.

5. Правильний запис емпіричного співвідношення:

а) $\vec{j} = \rho\vec{E}$; б) $\vec{j} = \vec{E}/\mu$; в) $\vec{j} = \varepsilon\vec{E}$; г) $\vec{j} = \sigma\vec{E}$.

6. Залежно від магнітної проникності та магнітної сприйнятливості середовища, речовини поділяються на:

а) діа- ($\chi < 1, \mu < 0$); пара- ($\chi > 0, \mu > 1$); феромагнетики ($\chi \gg 0, \mu \gg 1$).

б) діа- ($\chi < 0, \mu < 1$); пара- ($\chi > 0, \mu > 1$); феромагнетики ($\chi \gg 0, \mu \gg 1$).

в) діа- ($\chi < 0, \mu < 1$); пара- ($\chi > 1, \mu > 1$); феромагнетики ($\chi \gg 1, \mu \gg 1$).

г) діа- ($\chi < 0, \mu < 0$); пара- ($\chi > 0, \mu > 1$); феромагнетики ($\chi \gg 0, \mu \gg 1$).

7. В анізотропних середовищах величини проекції вектора \vec{B} визначаються співвідношенням:

а) $B_i = \sum_{i=1}^3 \mu_i H_i$; б) $B_j = \sum_{j=1}^3 \mu_j H_j$; в) $B_i = \sum_{j=1}^3 \mu_0 H_j$; г) $B_i = \sum_{j=1}^3 \mu_{ij} H_j$.

8. Умови, які накладаються при переході з одного середовища в інше, називаються:

а) крайовими; б) граничними; в) початковими.

9. Сила взаємодії заряду q з електромагнітним полем, яке характеризується векторами \vec{E} і \vec{B} , задається формулою:

а) $\vec{F} = q \left(q_1 + [\vec{v}, \vec{B}] \right)$; б) $\vec{F} = q \left(\vec{v} + [\vec{E}, \vec{B}] \right)$;

$$\text{в) } \vec{F} = q \left(\vec{B} + [\vec{v}, \vec{E}] \right); \quad \text{г) } \vec{F} = q \left(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}] \right).$$

10. Рівняння Пуассона має вигляд:

$$\text{а) } \nabla^2 \varphi = 0; \quad \text{б) } \nabla^2 \varphi = \infty; \quad \text{в) } \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}; \quad \text{г) } \nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}.$$

11. Функція Гріна має вигляд:

$$\text{а) } G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0|\vec{r}' + \vec{r}|}; \quad \text{б) } G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0(\vec{r} + \vec{r}')};$$

$$\text{в) } G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0(\vec{r}' - \vec{r})}; \quad \text{г) } G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

12. Можна визначити φ на великих віддальх від заряду, якщо:

$$\text{а) } r \ll r'; \quad \text{б) } r \gg r'; \quad \text{в) } r > r'; \quad \text{г) } r < r'.$$

13. Для систем з нульовим сумарним зарядом дипольний момент має вигляд:

$$\text{а) } \int_{V'} \vec{r}' \sigma(r') dV' = \vec{p}; \quad \text{б) } \int_{V'} \vec{r}' \rho(r') dV' = \vec{p};$$

$$\text{в) } \int_{V'} \vec{r}' \rho(r - r') dV' = \vec{p}; \quad \text{г) } \int_{V'} \vec{r}' \sigma(r - r') dV' = \vec{p}.$$

14. Густина зарядів для сукупності точкових зарядів:

$$\text{а) } \rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i); \quad \text{б) } \rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} + \vec{r}_i);$$

$$\text{в) } \rho(\vec{r}) = q \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_i); \quad \text{г) } \rho(\vec{r}) = q \sum_{i=1}^{\infty} \delta(\vec{r} + \vec{r}_i).$$

15. Потенціал квадруполь записується:

$$\text{а) } \varphi = \varphi^{(2)} = \frac{1}{24\pi\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{i,j} \left(\frac{3x_i}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) Q_{ij}; \quad \text{б) } \varphi = \varphi^{(2)} = \frac{1}{24\pi\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{i,j} \left(\frac{3x_i x_j}{r^4} - \frac{\delta_{ij}}{r} \right) Q_{ij};$$

$$\text{в) } \varphi = \varphi^{(2)} = \frac{1}{24\pi\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{i,j} \left(\frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) Q_{ij}; \quad \text{г) } \varphi = \varphi^{(2)} = \frac{1}{24\pi\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{i,j} \left(\frac{3x_i}{r^3} - \frac{\delta_{ij}}{r^2} \right) Q_{ij}.$$

16. Виберіть правильне твердження:

$$\text{а) } \vec{E} \cdot \text{grad } \phi = \nabla(\vec{E} \cdot \phi) + \phi \cdot \nabla \vec{E}; \quad \text{б) } \vec{E} \cdot \text{grad } \phi = \nabla(\vec{E} \cdot \phi) - \phi \cdot \Delta \vec{E};$$

$$\text{в) } \vec{E} \cdot \text{grad } \phi = \nabla(\vec{E} \cdot \phi) + \phi \cdot \Delta \vec{E}; \quad \text{г) } \vec{E} \cdot \text{grad } \phi = \nabla(\vec{E} \cdot \phi) - \phi \cdot \nabla \vec{E}.$$

17. Енергія електростатичного поля в всьому просторі:

$$\text{а) } W_e = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varphi dV; \quad \text{б) } W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV; \quad \text{в) } W_e = \frac{1}{2\pi} \int_V \rho \varphi dV; \quad \text{г) } W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \varphi dV.$$

18. Енергія взаємодії одного поля з іншим:

$$\text{а) } U = \int_V \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{заряд}} \vec{E}_{\text{зовн.поля}} dV; \quad \text{б) } U = \int_V \vec{E}_{\text{заряд}} \vec{E}_{\text{зовн.поля}} dV;$$

$$в) U = \int_V \varphi_{\text{заряд}} \vec{E}_{\text{зовн.поля}} dV; \quad г) U = \int_V \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{заряд}} \varphi_{\text{зовн.поля}} dV.$$

19. Виберіть залежність дипольного моменту від напруженості:

$$а) \vec{P} = \chi \vec{E}; \quad б) \vec{P} = \varphi \vec{E}; \quad в) \vec{P} = \alpha \vec{E}; \quad г) \vec{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}.$$

20. Енергія диполя, що деформований у зовнішньому полі:

$$а) U = -\alpha E^2; \quad б) U = -\varphi E^2; \quad в) U = -\frac{1}{4\pi} E^2; \quad г) U = -\nabla E^2.$$

21. Закон Снелліуса записується у вигляді:

$$а) \frac{\sin \theta}{\sin \theta_2} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}} = n_{12}; \quad б) \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}} = n_{12};$$

$$в) \frac{\sin \theta}{\sin \theta_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}} = n_{12}; \quad г) \frac{\cos \theta}{\cos \theta_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}} = n_{12}.$$

22. Формула для інтенсивності дипольного випромінювання має вигляд:

$$а) N = \frac{2}{3c} \frac{\mu_0}{4\pi} \dot{p}^2(\tau); \quad б) N = \frac{2}{3c} \frac{\mu_0}{4\pi} \ddot{p}(\tau);$$

$$в) N = \frac{2}{3c} \frac{\mu_0}{4\pi} \dot{p}^2(\tau); \quad г) N = \frac{2}{3c} \frac{\mu_0}{4\pi} \ddot{p}^2(\tau).$$

23. Хвиля називається монохроматичною, якщо

а) вектори напруженості електромагнітного поля змінюються з часом за гармонічним законом і з визначеною фазою;

б) вектори напруженості електромагнітного поля змінюються з часом за ангармонічним законом і з визначеною частотою;

в) вектори напруженості електромагнітного поля змінюються з часом за ангармонічним законом і з визначеною фазою;

г) вектори напруженості електромагнітного поля змінюються з часом за гармонічним законом і з визначеною частотою.

24. Фізичний розв'язок рівняння Даламбера описується:

а) функцією Гріна; б) потенціалами запізнення;

в) суперпозицією хвиль; г) потенціалами випередження.

25. У якому вигляді існує електромагнітне поле, що «відірвалося» від зарядів? У вигляді:

а) електромагнітних хвиль;

б) градієнтних потоків;

в) електро- та магнітостатичних полів.

Відповіді: 1 – б, 2 – г, 3 – в, 4 – а, 5 – г, 6 – б, 7 – г, 8 – б, 9 – г, 10 – в, 11 – г, 12 – б, 13 – б, 14 – а, 15 – в, 16 – г, 17 – б, 18 – а, 19 – а, 20 – а, 21 – в, 22 – а, 23 – г, 24 – б, 25 – а.

Тестове завдання №2

Доповніть речення або впишіть правильну відповідь.

1. Записати вираз для вектора індукції магнітного поля.

2. Дати означення магнітного поля.

3. Фізичний зміст рівняння $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$:

4. Записати вираз для магніторушійної сили.

5. Що таке диполь?

6. Записати дипольний момент.

7. За характером елементарних диполів речовини поділяють на три основних класи:

8. Записати умови електростатики.

9. Що таке потенціал електростатичного поля?

10. Записати рівняння Лапласа.

11. Що таке функція Гріна?

12. Записати формулу потенціалу, створеного точковим зарядом на великій відстані від системи зарядів.

13. Записати формулу для квадрупольного моменту.

14. Формула для дипольного потенціалу:

15. Якщо енергія системи зарядів виникла за рахунок наявних зарядів, то як визначається енергія цього поля?

16. Якого вигляду набуде формула $U_{\text{дин}} = -\vec{E}\vec{P}$, якщо дипольний момент і напруженість будуть напрямлені однаково / протилежно / будуть паралельні?

17. Якими умовами математично характеризується область магніостатичних явищ?

18. Яку форму мають силові лінії магнітного поля на великій віддалі?

19. Записати вираз для магнітного моменту атомних систем.

20. Дати означення гіромагнітного відношення.

21. Що таке спин електрона?

22. Записати формулу для магнітної енергії з урахуванням $\vec{j}(\vec{r})$.

23. Що таке коефіцієнти взаємоіндукції та самоіндукції?

24. Дати означення магнітного диполя.

25. Дати означення ЕРС.

26. У якому вигляді електромагнітне поле отримує повну самостійність існування?

27. Записати розв'язок для неоднорідного рівняння Даламбера.

28. Яка електромагнітна хвиля називається плоскою?

29. Яка хвиля називається лінійно поляризованою?

30. Запишіть закон Снелліуса.

Приклади розв'язування задач

Задача № 1.

На нескінченній площині заряд розподілений з поверхневою густиною $\sigma = \sigma_0 \cos(ax + by)$. Знайти потенціал поля, що створене площиною у всьому просторі.

Розв'язок

Необхідно виділити дві області з потенціалами $\varphi_1 = \varphi_1(x, y, z)$ для $z \geq 0$ та $\varphi_2 = \varphi_2(x, y, z)$ для $z \leq 0$. Ці потенціали задовольняють рівнянням Пуассона

$$\nabla^2 \varphi_1 = -\rho_1 / \varepsilon_0, \quad \nabla^2 \varphi_2 = -\rho_2 / \varepsilon_0.$$

Оскільки у цих областях зарядів немає, то $\rho_{\{1,2\}} = 0$. Ці два рівняння

однотипні, тому розв'язуватимемо одне з них, а розв'язок другого аналогічний.

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_1(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi_1(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi_1(x, y, z) = 0.$$

Розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$\varphi_1(x, y, z) = \cos(ax + by) Z_1(z).$$

Маємо:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [\cos(ax + by) Z_1(z)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\cos(ax + by) Z_1(z)] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\cos(ax + by) Z_1(z)] = 0$$

$$-a^2 Z_1(z) \cos(ax + by) - b^2 Z_1(z) \cos(ax + by) + \cos(ax + by) \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z_1(z) = 0$$

$$-\underbrace{(a^2 + b^2)}_{\lambda^2} Z_1(z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z_1(z) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z_1(z) - \lambda^2 Z_1(z) = 0.$$

$$Z_1(z) = C_1 e^{-\lambda z} + C_2 e^{\lambda z}, \quad \lambda > 0.$$

Але для першого випадку $z \geq 0$, тому з умови скінченності потенціалу при $z \rightarrow +\infty$ необхідно, щоб $C_2 = 0$. Тоді

$$Z_1(z) = C_1 e^{-\lambda z}.$$

При $z \leq 0$ маємо, що

$$Z_2(z) = C_2 e^{\lambda z}.$$

Повний потенціал набуде вигляду:

$$\varphi(x, y, z) = \begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = C_1 \cos(ax + by) e^{-\lambda z}, & z \geq 0, \\ \varphi_2(x, y, z) = C_2 \cos(ax + by) e^{\lambda z}, & z \leq 0. \end{cases}$$

Невідомі константи знаходимо відомих крайових умов:

$$C_1 \cos(ax + by) e^{-\lambda 0} = C_2 \cos(ax + by) e^{\lambda 0} \Rightarrow C_2 = C_1,$$

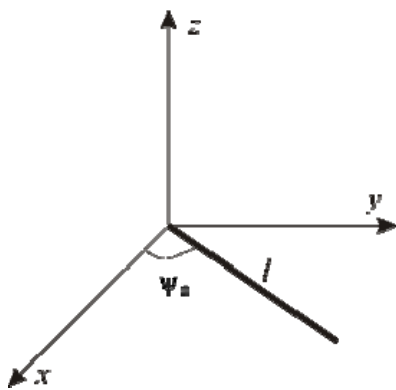
$$C_1 \lambda e^{-\lambda 0} \cos(ax + by) + C_1 \lambda e^{\lambda 0} \cos(ax + by) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos(ax + by), \quad C_1 = \frac{\sigma_0}{2\lambda \varepsilon_0}.$$

Отже,

$$\varphi(x, y, z) = \frac{\sigma_0}{2\lambda \varepsilon_0} \begin{cases} \cos(ax + by) e^{-\lambda z}, & z \geq 0, \\ \cos(ax + by) e^{\lambda z}, & z \leq 0. \end{cases} = \frac{\sigma_0}{2\lambda \varepsilon_0} \cos(ax + by) e^{-\lambda |z|}.$$

Задача № 2.

Рівномірно заряджений з лінійною густиною τ_0 тонкий стержень довжиною l лежить у першій чверті площини XOY , утворюючи кут ψ_0 з віссю X . Один кінець стержня поміщений у початок координат. Знайти розподіл об'ємної густини заряду у просторі ρ . Використовуючи отриманий вираз, обчислити дипольний момент системи відносно початку координат.



Розв'язок

Повний заряд системи $q = \tau_0 l$.

Знайдемо густину зарядів у всьому просторі так, щоб

$$\int_V \rho(\vec{r}) dV = q.$$

Запишемо інтеграл у циліндричних координатах:

$$q = \int_V \rho(\vec{r}) dV = \int_0^\infty dr \int_{-\infty}^\infty dz \int_0^{2\pi} d\alpha r \rho(r, \alpha, z).$$

Очевидно, що

$$r \rho(r, \alpha, z) = \text{Const } q \delta(\alpha - \psi_0) \delta(z) \eta(l - r),$$

$$\rho(r, \alpha, z) = \text{Const } \frac{q}{r} \delta(\alpha - \psi_0) \delta(z) \eta(l - r).$$

Тут $\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$ – дельта-функція Дірака,

$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ – функція Хевісайда.

У нашій задачі $\eta(l-r) = \begin{cases} 0, & l < r, \\ 1, & l \geq r. \end{cases}$

Знайдемо константу з умови

$$\begin{aligned} q &\equiv \text{Const } q \int_0^{\infty} dr \eta(l-r) \int_{-\infty}^{\infty} dz \delta(z) \int_0^{2\pi} d\alpha \delta(\alpha - \psi_0) = \text{Const } q \int_0^{\infty} dr \eta(l-r) = \\ &= \text{Const } q \left(\int_0^l dr - \int_l^{\infty} 0 dr \right) = \text{Const } q l. \end{aligned}$$

Отже, $\text{Const} = \frac{1}{l}$. Звідси:

$$\rho(r, \alpha, z) = \frac{q}{lr} \delta(\alpha - \psi_0) \delta(z) \eta(l-r) = \frac{\tau_0}{r} \delta(\alpha - \psi_0) \delta(z) \eta(l-r).$$

Дипольний момент:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \int dV \vec{r} \rho(\vec{r}) = \vec{i} \int dV x \rho(\vec{r}) + \vec{j} \int dV y \rho(\vec{r}) + \vec{k} \int dV z \rho(\vec{r}). \\ p_x &= \int dV x \rho(\vec{r}) = \int_0^{\infty} dr r \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{2\pi} d\alpha r \cos \alpha \frac{\tau_0}{r} \delta(\alpha - \psi_0) \delta(z) \eta(l-r) = \\ &= \tau_0 \int_0^{\infty} dr r \eta(l-r) \int_{-\infty}^{+\infty} dz \delta(z) \int_0^{2\pi} d\alpha \cos \alpha \delta(\alpha - \psi_0) = \tau_0 \frac{l^2}{2} \cos \psi_0. \end{aligned}$$

Аналогічно:

$$p_y = \tau_0 \frac{l^2}{2} \sin \psi_0,$$

Третя проекція дипольного моменту дорівнює нулю:

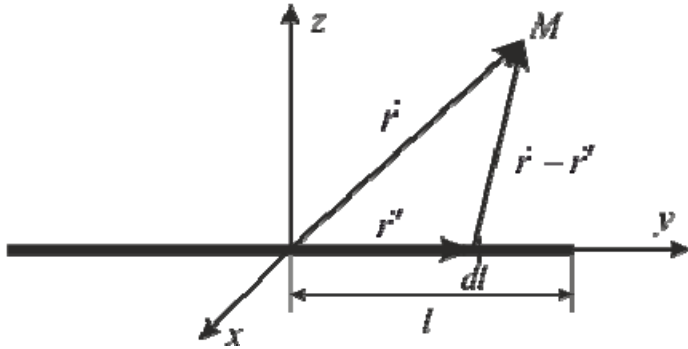
$$\begin{aligned} p_z &= \int dV z \rho(\vec{r}) = \int_0^{\infty} dr r \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{2\pi} d\alpha z \frac{\tau_0}{r} \delta(\alpha - \psi_0) \delta(z) \eta(l-r) = \\ &= \tau_0 \int_0^{\infty} dr \eta(l-r) \int_0^{2\pi} d\alpha \cos \alpha \delta(\alpha - \psi_0) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dz z \delta(z)}_0 = 0. \end{aligned}$$

Бачимо, що дипольний момент \vec{p} напрямлений вздовж стержня.

Задача № 3.

По лінійному провіднику довжиною $2l$ протікає струм I . Знайти індукцію магнітного поля в довільній точці простору. Розглянути також випадок дуже довгого провідника.

Розв'язок



Виберемо систему координат так, як показано на рисунку. Згідно з законом Біо-Савара-Лапласа індукція магнітного поля густини струму, який протікає через елементар-

ний об'єм dV' , має вигляд:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (1)$$

Якщо ввести елемент провідника довжиною dl' , що збігається з напрямком густини струму \vec{j} , то для елемента струму

$$\vec{j}(\vec{r}') dV' = I d\vec{l}'. \quad (2)$$

Урахуємо (2) у формулі (1). Маємо:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (3)$$

Обчислимо векторний добуток з формули (3):

$$d\vec{l}' = \vec{i} dx' + \vec{j} dy' + \vec{k} dz' = \vec{j} dy', \quad \vec{r}' = \vec{i} 0 + \vec{j} y' + \vec{k} 0 = \vec{j} y', \quad \vec{r} = \vec{i} x + \vec{j} y + \vec{k} z.$$

$$[d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & dy' & 0 \\ x & y - y' & z \end{vmatrix} = \vec{i} z dy' + \vec{j} 0 - \vec{k} x dy'.$$

Останній вираз підставимо у (3).

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{i} z dy' + \vec{k} x dy') = \vec{i} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{z dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \vec{k} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{x dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{i} dB_x + \vec{k} dB_z. \quad (4)$$

Отже, $dB_y = 0$, тобто вектор \vec{B} буде напрямлений перпендикулярно до напрямку струму.

Обчислимо окремо проекції вектора індукції.

Проекція B_x :

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{z dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I z}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{dy'}{(x^2 + (y - y')^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 I z}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{d(y - y')}{(x^2 + z^2 + (y - y')^2)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{\mu_0 I z}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{dY}{(x^2 + z^2 + Y^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 I z}{4\pi} A.$$

Останній інтеграл є інтегралом типу:

$$\int Y^m (a + bY^n)^p dY, \quad \text{де}$$

$$m = 0, \quad a = x^2 + z^2, \quad b = 1, \quad n = 2, \quad p = -3/2$$

Тут необхідно здійснювати підстановку:

1) якщо p – ціле, то $Y = t^\lambda$, де λ – знаменник p ;

2) якщо $\frac{m+1}{n}$ – ціле, то $(a + bY^n) = t^\lambda$;

3) якщо $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле, то $\frac{(a + bY^n)}{Y^n} = t^\lambda$.

У нас виконується третя умова, тоді $\frac{(a + Y^2)}{Y^2} = t^2$.

Звідси $Y = \left(\frac{a}{t^2 - 1}\right)^{1/2}$.

Перейдемо від dY до dt . Для цього продиференціюємо останній вираз:

$$dY = -\frac{1}{2\left(\frac{a}{t^2 - 1}\right)^{1/2}} \frac{a}{(t^2 - 1)^2} 2tdt = -\frac{at}{a^{1/2} \frac{1}{(t^2 - 1)^{1/2}} (t^2 - 1)^2} dt = -\frac{a^{1/2} t}{(t^2 - 1)^{3/2}} dt.$$

Усе це підставлятимемо в інтеграл:

$$A = \int_0^l \frac{dY}{(a + Y^2)^{3/2}} = -\int_{-l}^l \frac{1}{\left(a + \left(\frac{a}{t^2 - 1}\right)\right)^{3/2}} \frac{a^{1/2} t}{(t^2 - 1)^{3/2}} dt = -\int_{-l}^l \frac{1}{\left(\frac{at^2}{t^2 - 1}\right)^{3/2}} \frac{a^{1/2} t}{(t^2 - 1)^{3/2}} dt =$$

$$= -\int_{-l}^l \frac{a^{1/2} t}{(at^2)^{3/2}} dt = -\int_{-l}^l \frac{1}{at^2} dt = \frac{1}{at} \Big|_{-l}^l = \frac{1}{(x^2 + z^2) \sqrt{\frac{x^2 + z^2 + Y^2}{Y^2}}} \Big|_{-l}^l =$$

$$= \frac{Y}{(x^2 + z^2)\sqrt{x^2 + z^2 + Y^2}} \Big|_{-l}^l = \frac{y - y'}{(x^2 + z^2)\sqrt{x^2 + z^2 + (y - y')^2}} \Big|_{-l}^l =$$

$$= \frac{y - l}{(x^2 + z^2)\sqrt{x^2 + z^2 + (y - l)^2}} - \frac{y + l}{(x^2 + z^2)\sqrt{x^2 + z^2 + (y + l)^2}}.$$

Отже,

$$B_x = -\frac{\mu_0 I z}{4\pi} I n_1 = -\frac{\mu_0 I z}{4\pi(x^2 + z^2)} \left(\frac{y - l}{\sqrt{x^2 + z^2 + (y - l)^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2 + y^2}} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0 I z}{4\pi(x^2 + z^2)} \left(\frac{l - y}{\sqrt{x^2 + z^2 + (y - l)^2}} + \frac{y + l}{\sqrt{x^2 + z^2 + (y + l)^2}} \right).$$

Аналогічно визначається складова B_z :

$$B_z = -\frac{\mu_0 I x}{4\pi} \int_0^l \frac{dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I x}{4\pi} I n = \frac{-\mu_0 I x}{4\pi(x^2 + z^2)} \left(\frac{l - y}{\sqrt{x^2 + z^2 + (y - l)^2}} + \frac{y + l}{\sqrt{x^2 + z^2 + (y + l)^2}} \right).$$

Отже,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi(x^2 + z^2)} \left(\frac{l - y}{\sqrt{x^2 + z^2 + (y - l)^2}} + \frac{y + l}{\sqrt{x^2 + z^2 + (y + l)^2}} \right) (\vec{iz} - \vec{kx}). \quad (5)$$

Якщо ж провідник є дуже довгий, то можна вважати, що $l \rightarrow \infty$.

Тоді:

$$\vec{B}_\infty = \lim_{l \rightarrow \infty} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi(x^2 + z^2)} 2(\vec{iz} - \vec{kx}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x^2 + z^2)} (\vec{iz} - \vec{kx}). \quad (6)$$

Модуль індукції

$$B_\infty = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x^2 + z^2)} \sqrt{x^2 + z^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}, \quad (7)$$

де R – радіальна відстань від провідника до точки спостереження.

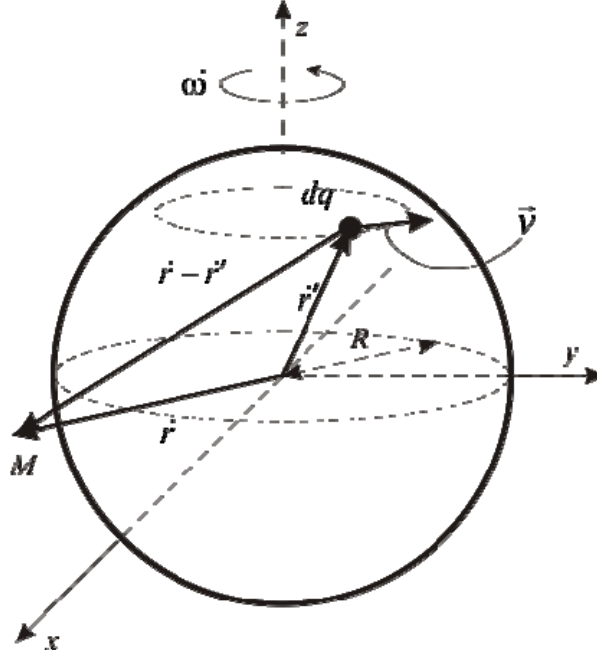
Задача № 4.

Заряд Q рівномірно розподілений по всьому об'єму кулі радіуса R , яка обертається рівномірно навколо діаметра з кутовою швидкістю ω . Знайти індукцію магнітного поля, що утворене кулею у її центрі.

Розв'язок

Оскільки заряд розподілений рівномірно, то можна знайти густину заряду:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3}. \quad (1)$$



Тоді необхідно застосовувати формулу на основі закону Біо-Савара-Лапласа:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')]dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2)$$

Заряджена куля обертається, тому можна говорити про протікання струму. Знайдемо густину струму:

$$\vec{j}(\vec{r}') = \rho \vec{v}(\vec{r}'). \quad (3)$$

Зв'язок лінійної швидкості з кутовою можна подати за допомогою формули:

$$\vec{v}(\vec{r}') = [\vec{\omega} \times \vec{r}']. \quad (4)$$

Вираз (4) підставимо у (3). Маємо:

$$\vec{j}(\vec{r}') = \rho [\vec{\omega} \times \vec{r}']. \quad (5)$$

Вираз (5) підставимо в (2). Маємо:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\rho [\vec{\omega} \times \vec{r}'] \times (\vec{r} - \vec{r}')]dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 \rho}{4\pi} \frac{[[\vec{\omega} \times \vec{r}'] \times (\vec{r} - \vec{r}')]dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (6)$$

Випишемо окремо подвійний векторний добуток з (6):

$$C = \left[[\vec{\omega} \times \vec{r}'] \times (\vec{r} - \vec{r}') \right] = - \left[(\vec{r} - \vec{r}') \times [\vec{\omega} \times \vec{r}'] \right] = - \left\{ \vec{\omega} \left((\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{r}' \right) - \vec{r}' \left((\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{\omega} \right) \right\}.$$

Використано такі властивості векторних добутків:

- 1) $[\vec{a} \times \vec{b}] = -[\vec{b} \times \vec{a}]$;
- 2) $[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Тоді:

$$C = -\vec{\omega}(\vec{r}\vec{r}' - r'^2) + \vec{r}'((\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{\omega}).$$

Для подальшого обчислення C необхідно конкретизувати вектори:

$$\vec{\omega} = \vec{k}\omega, \quad \vec{r}' = \vec{i}x' + \vec{j}y' + \vec{k}z', \quad \vec{r} = \vec{i}0 + \vec{j}0 + \vec{k}0 = 0.$$

Отже,

$$\begin{aligned} C &= -\vec{k}\omega(-x'^2 - y'^2 - z'^2) + (\vec{i}x' + \vec{j}y' + \vec{k}z')(-z')\omega = \\ &= \vec{i}\omega(-z')x' + \vec{j}\omega(-z')y' + \vec{k}\omega(x'^2 + y'^2 + z'^2 - z'^2) = \\ &= \vec{i}\omega(-z')x' + \vec{j}\omega(-z')y' + \vec{k}\omega(x'^2 + y'^2). \end{aligned}$$

Підставимо C у (6)

$$\begin{aligned} d\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0\rho\omega}{4\pi} \frac{\vec{i}(-z')x' + \vec{j}(-z')y' + \vec{k}(x'^2 + y'^2)}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} dV' = \\ &= \frac{\mu_0\rho\omega}{4\pi} \vec{i} \frac{(-z')x'dV'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0\rho\omega}{4\pi} \vec{j} \frac{(-z')y'dV'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} + \\ &+ \frac{\mu_0\rho\omega}{4\pi} \vec{k} \frac{(x'^2 + y'^2)dV'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} = \vec{i}dB_x + \vec{j}dB_y + \vec{k}dB_z. \end{aligned}$$

Обчислимо окремо проекції вектора індукції на осі прямокутної системи координат, переходячи до сферичної системи координат за штрихованими змінними:

1.

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0\rho\omega}{4\pi} \int_0^R dr' r'^2 \int_0^\pi d\theta' \sin\theta' \int_0^{2\pi} d\alpha' \frac{(-r' \cos\theta') r' \sin\theta' \cos\alpha'}{(r'^2 \sin^2\theta' + r'^2 \cos^2\theta')^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0\rho\omega}{4\pi} \int_0^R dr' r'^2 \int_0^\pi d\theta' \sin\theta' \frac{(z - r' \cos\theta') r' \sin\theta'}{r'^3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\alpha' \cos\alpha'}_0 = 0. \end{aligned}$$

2.

$$B_y = \frac{\mu_0 \rho \omega}{4\pi} \int_0^R dr' r'^2 \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \int_0^{2\pi} d\alpha' \frac{(-r' \cos \theta') r' \sin \theta' \sin \alpha'}{(r'^2 \sin^2 \theta' + (r' \cos \theta')^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 \rho \omega}{4\pi} \int_0^R dr' r'^2 \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \frac{(z - r' \cos \theta') r' \sin \theta'}{r'^3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\alpha' \sin \alpha'}_0 = 0.$$

3.

$$B_z = \frac{\mu_0 \rho \omega}{4\pi} \int_0^R dr' r'^2 \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \int_0^{2\pi} d\alpha' \frac{r'^2 \sin^2 \theta'}{(r'^2 \sin^2 \theta' + (r' \cos \theta')^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{2\pi \mu_0 \rho \omega}{4\pi} \int_0^R dr' r'^2 \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \frac{r'^2 \sin^2 \theta'}{r'^3} = \frac{\mu_0 \rho \omega}{2} \int_0^R dr' r' \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \sin^2 \theta' =$$

$$= \frac{\mu_0 \rho \omega}{2} \frac{R^2}{2} \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \sin^2 \theta' = \frac{\mu_0 \rho \omega}{2} \frac{R^2}{2} \frac{4}{3} = \frac{\mu_0 \rho \omega R^2}{3}.$$

Урахуємо формулу (1):

$$B_z = \frac{\mu_0 \rho \omega R^2}{3} = \frac{\mu_0 \omega R^2}{3} \frac{3Q}{4\pi R^3} = \frac{\mu_0 \omega Q}{4\pi R} \equiv B. \quad (7)$$

Отже, індукція магнітного поля у центрі кулі, що обертається, напрямлена вздовж осі z .

Задача № 5.

Простір між обкладками сферичного конденсатора (радіусами r_1 і r_2) заповнений провідним середовищем з питомою електричною провідністю γ . Знайти струм, що проходить через конденсатор, при умові, що різниця потенціалів на обкладках ($\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$) і омичний опір.

Розв'язок

Виділимо у провідному середовищі між обкладками сферичний шар елементарної товщини dr з опором:

$$dR = \rho \frac{dr}{S} = \frac{dr}{4\pi r^2 \gamma}. \quad (1)$$

Повний омичний опір конденсатора знайдемо, інтегруючи (1) у просторі, що обмежений обкладками конденсатора:

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{4\pi r^2 \gamma} = \frac{1}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (2)$$

Опір можна знайти іншим, більш загальним способом. Згідно з законом Ома:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{-(\varphi_2 - \varphi_1)}{R} \rightarrow R = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I}. \quad (3)$$

Силу струму можна виразити через густину струму, а густина струму зв'язана з напруженістю поля законом Ома у диференціальній формі:

$$\begin{aligned} I &= jS \\ j &= \gamma E \end{aligned} \Rightarrow I = \gamma ES. \quad (4)$$

Потенціал та напруженість поля зв'язані співвідношенням:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi \rightarrow d\varphi = -\vec{E}d\vec{l}.$$

Звідси:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}d\vec{l}. \quad (5)$$

Вважаємо, що тече постійний струм (не змінюється з часом). За умовою задачі провідність ϵ сталою величиною, тому напруженість також не змінюється з часом. Для таких полів інтеграл (5) не залежить від шляху інтегрування. За криву інтегрування виберемо радіальну пряму.

Напруженість поля між обкладками конденсатора знайдемо на основі теореми Гауса:

$$\oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Звідси

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r. \quad (6)$$

Оскільки у сферичному конденсаторі його обкладки є концентричні сфери, то напруженість напрямлена радіально.

Вираз (6) підставимо у (5). Одержимо:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \vec{e}_r dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}. \quad (7)$$

Вираз (7) і (4) підставимо у (3) і врахуємо (6):

$$R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\gamma ES} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\gamma} \frac{r_2 - r_1}{4\pi r^2 r_1 r_2} = \frac{1}{4\pi\gamma} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Струм, що проходить через конденсатор на основі закону Ома:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{4\pi\gamma r_1 r_2 (\varphi_1 - \varphi_2)}{r_2 - r_1}. \quad (8)$$

Задача № 6.

Поблизу сферичного заземленого провідника радіусом R розміщений заряд q на відстані a від його центра. Обчислити потенціал, напруженість електростатичного поля, що створене цією системою. Визначити силу, з якою заряд притягується до провідника. Знайти розподіл поверхневого заряду, що індукований зовнішнім зарядом q , на провіднику і повний індукований заряд.

Розв'язок

Провідник характеризується тим, що у ньому наявні вільні заряди. При відсутності зовнішнього електричного поля у провіднику у кожному макроскопічному об'ємі кількість позитивних і негативних зарядів однакова. Тому провідник незаряджений і розподіл зарядів $\rho = 0$.

Якщо провідник помістити у зовнішнє електричне поле \vec{E}_e (external electric field), то вільні заряди у провіднику почнуть переміщуватися (негативні – у напрямку поля, негативні – проти). Ці заряди утворять внутрішнє електричне поле \vec{E}_i (internal electric field). Заряди будуть переміщатися, доки ці поля в середині провідника не зрівноважаться. Причому рух зарядів буде обмежений поверхнею. Звідси зрозуміло, що усі заряди зосередяться на поверхні провідника.

Отже,

1) у середині провідника:

$$\vec{E}_{in} = \vec{E}_e + \vec{E}_i = 0, \quad (1)$$

2) за межами провідника заряди, що є на поверхні, створюють своє електричне поле \vec{E}' . Тому:

$$\vec{E}_{out} = \vec{E}_e + \vec{E}' \neq 0. \quad (2)$$

Щоб визначити $\vec{E}' = \vec{n}E'_n + \vec{\tau}E'_\tau$ використаємо дві умови:

1) очевидно, що $E'_\tau = 0$. Бо в протилежному випадку тангенціальна складова привела б до руху зарядів на поверхні, який би тривав до тих пір, доки не встановилася б рівновага. Тому так чи інакше тангенціальна складова буде дорівнювати нулю;

2) згідно з граничною умовою, маємо $E_{2n}|_S - E_{1n}|_S = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma$

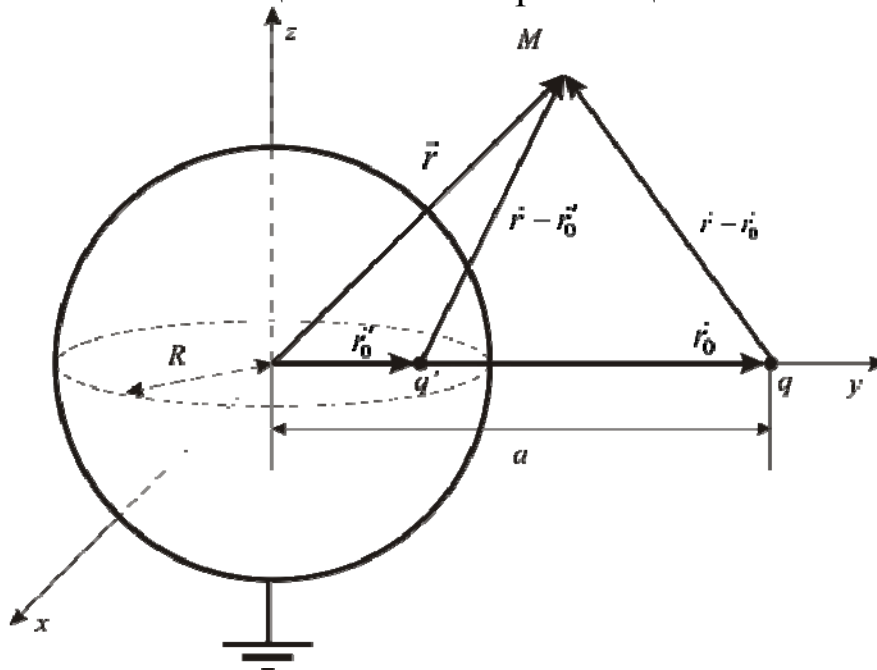
(нормаль напрямлена від межі у друге середовище). У нас у провіднику поле дорівнює нулю, тому:

$$E_n|_S = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma. \quad (3)$$

Отже, електричне поле, що створене поверхневими зарядами (самим провідником) за межами провідника є перпендикулярним до його поверхні. Розподіл зарядів на поверхні провідника визначається його геометрією і зовнішнім полем.

Розглянемо тепер нашу задачу. Для її розв'язання використаємо метод зображень. **Ідея метода:**

необхідно підібрати такі фіктивні точкові заряди (замість провідника), які б разом з заданими зарядами створювали таке поле, для якого поверхня провідника збігається з однією з еквіпотенціальних поверхонь цього поля.



Виберемо систему координат так, щоб вісь y пройшла через заряд q . Радіус-вектор точки із зарядом q : $\vec{r}_0 = \vec{i}0 + \vec{j}y_0 + \vec{k}0 = \vec{j}y_0 = \vec{j}a$.

Згідно з методом зображень, уведемо фіктивний заряд q' , який також лежить на осі y . Радіус-вектор точки із фіктивним зарядом q' : $\vec{r}'_0 = \vec{i}0 + \vec{j}y'_0 + \vec{k}0 = \vec{j}y'_0$.

Запишемо потенціал, що створений реальним і фіктивним зарядами у довільній точці M (повний потенціал системи):

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_i(\vec{r}) + \varphi'(\vec{r}), \quad (4)$$

де $\varphi_i(\vec{r})$, $\varphi'(\vec{r})$ – потенціали, що створені зовнішнім зарядом q та провідником (який згідно з методом зображень замінюється фіктивним зарядом q') відповідно. Тому:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'_0|}. \quad (5)$$

Оскільки куля заземлена, то потенціал на ній завжди дорівнює нулю. Тому запишемо формулу (5) для точки, що лежить на поверхні кулі:

$$0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \Big|_{r=R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'_0|} \Big|_{r=R}.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \frac{q}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z^2}} \Big|_{r=R} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + (y-y'_0)^2 + z^2}} \Big|_{r=R} &= 0, \\ \frac{q}{\sqrt{\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{r^2=R^2} - 2ya + a^2}} \Big|_{r=R} + \frac{q'}{\sqrt{\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{r^2=R^2} - 2yy'_0 + y'^2_0}} \Big|_{r=R} &= 0, \\ \frac{q}{\sqrt{R^2 - 2ya + a^2}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2 - 2yy'_0 + y'^2_0}} &= 0. \end{aligned}$$

Винесемо з першого додану у знаменнику з під кореня R^2 , а в другому – y'^2_0 :

$$\frac{q}{R\sqrt{1 + (-2ya/R^2 + a^2/R^2)}} + \frac{q'}{y'_0\sqrt{(R^2/y'^2_0 - 2y/y'_0) + 1}} = 0$$

Це можливо, коли:

$$\frac{q}{R} = -\frac{q'}{y'_0} \quad (6)$$

і

$$a^2 / R^2 - 2ya / R^2 = R^2 / y_0'^2 - 2y / y_0'. \quad (7)$$

Звідси $a^2 / R^2 - 2y \underbrace{a / R^2} = R^2 / y_0'^2 - 2y \underbrace{1 / y_0'}$, тобто:

$$\frac{1}{y_0'} = \frac{a}{R^2}. \quad (8)$$

З формул (6) і (8) видно, що

$$y_0' = \frac{R^2}{a}, \quad q' = -\frac{y_0'}{R}q = -\frac{R^2}{aR}q = -\frac{R}{a}q. \quad (9)$$

З (9) видно, що при наближенні зовнішнього заряду q до поверхні провідника (якщо a зменшується), величина заряду-зображення зростає і він щоразу ближче наближається до поверхні кулі.

Підставляючи (9) у (5), можна знайти потенціал, що створений системою у будь-якій точці:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{R^2}{a}\right)^2 + z^2}} \frac{R}{a} \right]. \quad (10)$$

Аналогічно, замінюючи провідник фіктивним зарядом можна знайти напруженість поля, що створене системою:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} (\vec{r} - \vec{r}_0) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'_0|^3} (\vec{r} - \vec{r}'_0), \quad (11)$$

де перший доданок визначає поле, що створене зовнішнім зарядом, а другий – провідником (а, згідно з методом зображень, це те саме, що фіктивним зарядом).

Обчислимо силу, з якою притягується заряд q до поверхні провідника. Для цього знайдемо напруженість поля, що створене провідником (а, згідно з методом зображень, фіктивним зарядом q') у точці, де є заряд q :

$$\vec{E}'(\vec{r}) \Big|_{\substack{\text{у точці,} \\ \text{де є заряд } q}} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{a} \frac{q}{\left(x^2 + \left(y - \frac{R^2}{a} \right)^2 + z^2 \right)^{3/2}} \left(\vec{i}x + \vec{j} \left(y - \frac{R^2}{a} \right) + \vec{k}z \right) \Big|_{\substack{\text{у точці,} \\ \text{де є заряд } q}} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{a} \frac{q}{\left(0^2 + \left(a - \frac{R^2}{a}\right)^2 + 0^2\right)^{3/2}} \left(\vec{i}0 + \vec{j}\left(a - \frac{R^2}{a}\right) + \vec{k}0\right) = \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{a} \frac{q}{\left(a - \frac{R^2}{a}\right)^3} \vec{j} \left(a - \frac{R^2}{a}\right) = \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{a} \frac{q}{\left(a - \frac{R^2}{a}\right)^2} \vec{j} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{a^3} \frac{q}{\left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^2} \vec{j}.
\end{aligned}$$

А сила визначається добутком величини заряду на величину напруженості поля у точці, де є заряд:

$$\vec{F} = q \vec{E}'(\vec{r}) \Big|_{\substack{\text{у точці,} \\ \text{де є заряд } q}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{a^3} \frac{q^2}{\left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^2} \vec{j}. \quad (12)$$

Як видно з (12), заряд притягатиметься до провідної поверхні. Формально це пояснюється тим, що значки зарядів q та q' різні.

Задача № 7.

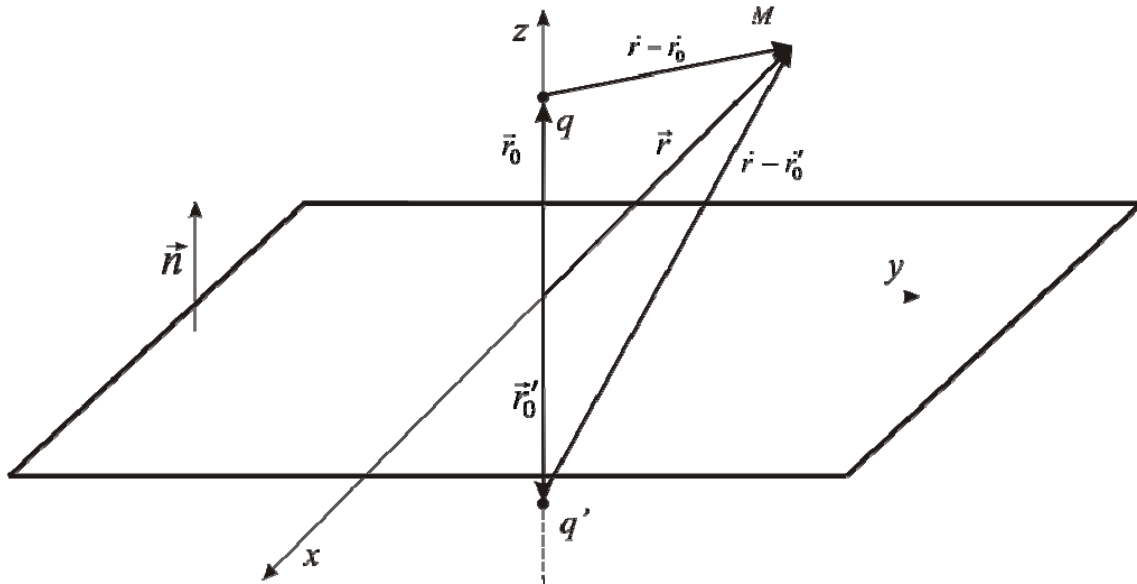
Точковий заряд q розміщений на відстані a від плоскої поверхні нескінченного провідника, що займає весь нижній півпростір. Визначити потенціал і напруженість поля поза провідником. Обчислити силу, з якою притягується до площини заряд. Знайти поверхневий розподіл заряду на поверхні провідника, а також весь заряд на провіднику.

Розв'язок

Виберемо систему координат так, щоб вісь z проходила через заряд q . Згідно з методом зображень, фіктивний заряд q' є у нижній півплощині.

Координати зарядів такі:

- 1) q — $\vec{r}_0 = \vec{k}a$,
- 2) q' — $\vec{r}'_0 = \vec{k}z'_0$.



Запишемо потенціал, що створений реальним і фіктивним зарядами:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} + \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'_0|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z'_0)^2}} \right] \quad (1)$$

Потенціал на поверхні дорівнює нулю. Запишемо формулу (1) для точки, що лежить на поверхні:

$$0 = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} \Big|_{z=0} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z'_0)^2}} \Big|_{z=0},$$

Звідси випливає, що

$$q' = -q, \quad z_0'^2 = a^2 \rightarrow z'_0 = \pm a.$$

Вибираємо другий розв'язок (знак «мінус»), бо фіктивний заряд лежить у нижній півплощині, тому $z'_0 = -a$.

Маючи величину зарядів і координати, де вони розташовані, можна записати повний потенціал і напруженість поля системи:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \right). \quad (2)$$

Аналогічно, замінюючи провідник фіктивним зарядом можна знайти напруженість поля, що створене системою:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}(z - a)}{\left(x^2 + y^2 + (z - a)^2\right)^{3/2}} - \frac{\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}(z + a)}{\left(x^2 + y^2 + (z + a)^2\right)^{3/2}} \right), \quad (3)$$

де перший доданок визначає поле, що створене зовнішнім зарядом, а другий – провідником (а, згідно з методом зображень, це те саме, що фіктивним зарядом).

Обчислимо силу, з якою притягується заряд q до поверхні провідника. Для цього знайдемо напруженість поля, що створене провідником (а, згідно з методом зображень, фіктивним зарядом q') у точці, де є заряд q :

$$\vec{E}'(\vec{r})\Big|_{\text{у точці } \vec{r}_0} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{i}0 + \vec{j}0 + \vec{k}(a+a)}{(0^2 + 0^2 + (a+a)^2)^{3/2}} = -\frac{2aq}{4\pi\epsilon_0 8a^3} \vec{k} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{4a^2} \vec{k}. \quad (4)$$

Сила визначається добутком величини заряду на величини напруженості поля у точці, де є заряд:

$$\vec{F} = q \vec{E}'(\vec{r})\Big|_{\text{у точці } \vec{r}_0} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4a^2} \vec{k}. \quad (5)$$

Для того, щоб знайти розподіл зарядів на площині, треба скористатися формулою (3) **задачі № 6**. А для цього потрібно спочатку визначити E_n на поверхні:

$$E_n = |\vec{E}| \cos(\widehat{\vec{E}\vec{n}}) = |\vec{E}| \frac{\vec{E}\vec{n}}{|\vec{E}||\vec{n}|} = \frac{\vec{E}\vec{n}}{|\vec{n}|} = \vec{E}\vec{n}.$$

Координати одиничного вектора нормалі до площини можна записати так: $\vec{n} = \vec{k}$. Тоді

$$E_n = \vec{E}\vec{n} = \vec{E}(\vec{r})\vec{k} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}(z-a)}{(x^2 + y^2 + (z-a)^2)^{3/2}} - \frac{\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}(z+a)}{(x^2 + y^2 + (z+a)^2)^{3/2}} \right) \vec{k} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(z-a)}{(x^2 + y^2 + (z-a)^2)^{3/2}} - \frac{(z+a)}{(x^2 + y^2 + (z+a)^2)^{3/2}} \right).$$

Тепер знайдемо нормальну складову на поверхні площини $z=0$:

$$E_n|_{z=0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-a}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{a}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Отже, розподіл зарядів буде такий:

$$\sigma = E_n \varepsilon_0 = -\frac{q}{2\pi} \frac{a}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (6)$$

Визначимо тепер повний заряд, що наводиться цим зарядом на поверхні площини. Для цього треба обчислити поверхневий інтеграл:

$$\begin{aligned} Q &= \int_S \sigma dS = -\frac{qa}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\infty \rho d\rho \frac{1}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} = -qa \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{d(\rho^2 + a^2)}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} = \\ &= -\frac{qa}{2} \int_0^\infty \frac{d(\rho^2 + a^2)}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{qa}{2} \int_0^\infty (\rho^2 + a^2)^{-3/2} d(\rho^2 + a^2) = -\frac{qa}{2} \frac{(\rho^2 + a^2)^{-3/2+1}}{-3/2+1} \Big|_0^\infty = \\ &= qa \frac{1}{(\rho^2 + a^2)^{1/2}} \Big|_0^\infty = qa \left(0 - \frac{1}{a} \right) = -q \end{aligned}$$

Звідси видно, що сумарний заряд, що індукується на площині зарядом q , за абсолютним значенням дорівнює цьому заряду і має протилежний знак.

Задача № 8

Поблизу зарядженого зарядом Q сферичного провідника з радіусом R є заряд q на відстані a від його центра. Обчислити потенціал, напруженість електростатичного поля, що створене цією системою. Визначити силу, з якою заряд q притягується до провідника.

Розв'язок

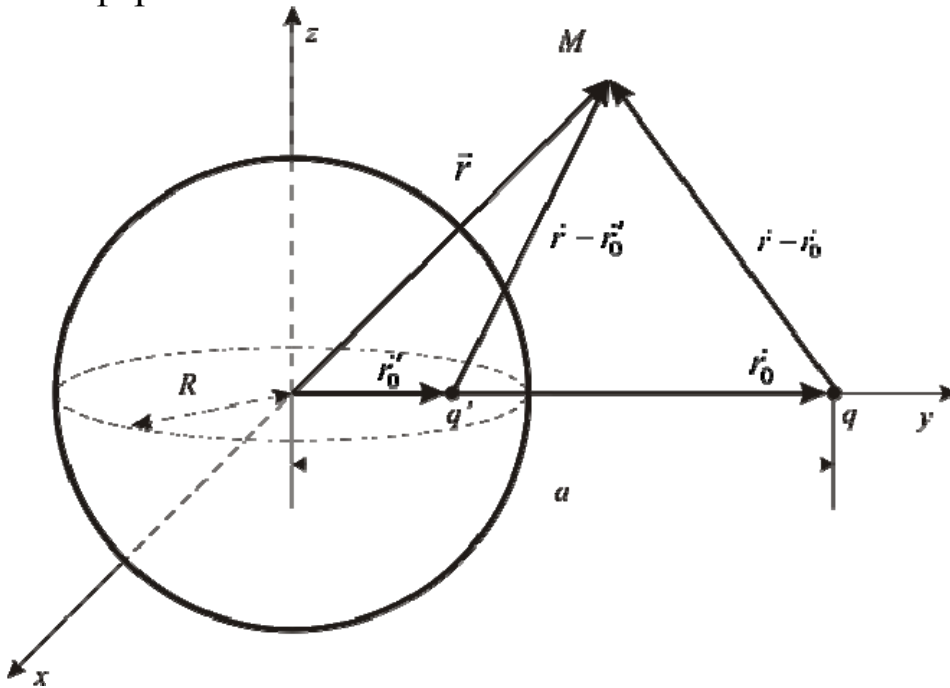
1. Розглянемо спочатку заземлену кулю без заряду Q (як у **задачі № 6**). Тоді повний наведений заряд на поверхні кулі буде $q' = -\frac{R}{a}q$, який є у точці $y'_0 = \frac{R^2}{a}$.
2. Розімкнемо провід заземлення і внесемо на кулю заряд $(Q - q')$. Тоді повний заряд на поверхні кулі стане $(Q - q') + q' = Q$ як і сказано в умові задачі. Цей додатковий внесений заряд $(Q - q')$ розподілиться рівномірно по

поверхні сфери, бо поле, що утворене зарядом q уже зрівноважено зарядом q' .

3. Отже потенціал системи шукатимемо у вигляді суми:

а) потенціалу (10) із задачі № 6,

б) потенціалу, що утворений зарядом $(Q - q')$ на поверхні сфери.



Задача а) вже розв'язана. Для обчислення задачі б), використаємо теорему Остроградського-Гауса, за якою потенціал рівномірно зарядженої сфери за її межами дорівнює потенціалу точкового заряду, що розміщений у точці початку координат:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{R^2}{a}\right)^2 + z^2}} \frac{R}{a} \right) + \frac{Q - q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{R^2}{a}\right)^2 + z^2}} \frac{R}{a} \right) + \frac{Q + (R/a)q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

(1)

Напруженість поля буде визначатися за формулою:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{i}x + \vec{j}(y-a) + \vec{k}z}{\left(x^2 + (y-a)^2 + z^2\right)^{3/2}} - \frac{\vec{i}x + \vec{j}\left(y - \frac{R^2}{a}\right) + \vec{k}z}{\left(x^2 + \left(y - \frac{R^2}{a}\right)^2 + z^2\right)^{3/2}} \frac{R}{a} \right] + \frac{Q + (R/a)q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}. \quad (2)$$

Знайдемо силу, з якою заряд взаємодіє з кулею. Для цього знайдемо напруженість поля, що створене кулею у точці знаходження заряду q . Використаємо формулу (2), але у ній відкинемо перший доданок в дужках, бо він описує електростатичне поле, що створене самим зарядом q :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) \Big|_{y \text{ точки, де є } q} &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{j}}{\left(a - \frac{R^2}{a}\right)^2} \frac{R}{a} + \frac{Q + (R/a)q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{j}}{a^2} = \\ &= \frac{\vec{j}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-qaR}{\left(a^2 - R^2\right)^2} + \frac{Q}{a^2} + \frac{Rq}{a^3} \right] = \frac{\vec{j}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-qaRa^3 + \left(a^2 - R^2\right)^2 Rq}{\left(a^2 - R^2\right)^2 a^3} + \frac{Q}{a^2} \right] = \\ &= \frac{\vec{j}}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[\frac{qR \left(-\left(a^2\right)^2 + \left(a^2 - R^2\right)^2 \right)}{a \left(a^2 - R^2\right)^2} + Q \right] = \\ &= \frac{\vec{j}}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[\frac{qR \left(a^2 - R^2 + a^2 \right) \left(a^2 - R^2 - a^2 \right)}{a \left(a^2 - R^2\right)^2} + Q \right] = \\ &= \frac{\vec{j}}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[-\frac{qR^3 \left(2a^2 - R^2 \right)}{a \left(a^2 - R^2\right)^2} + Q \right]. \quad (3) \end{aligned}$$

Відповідна сила, що діє на заряд, буде такою:

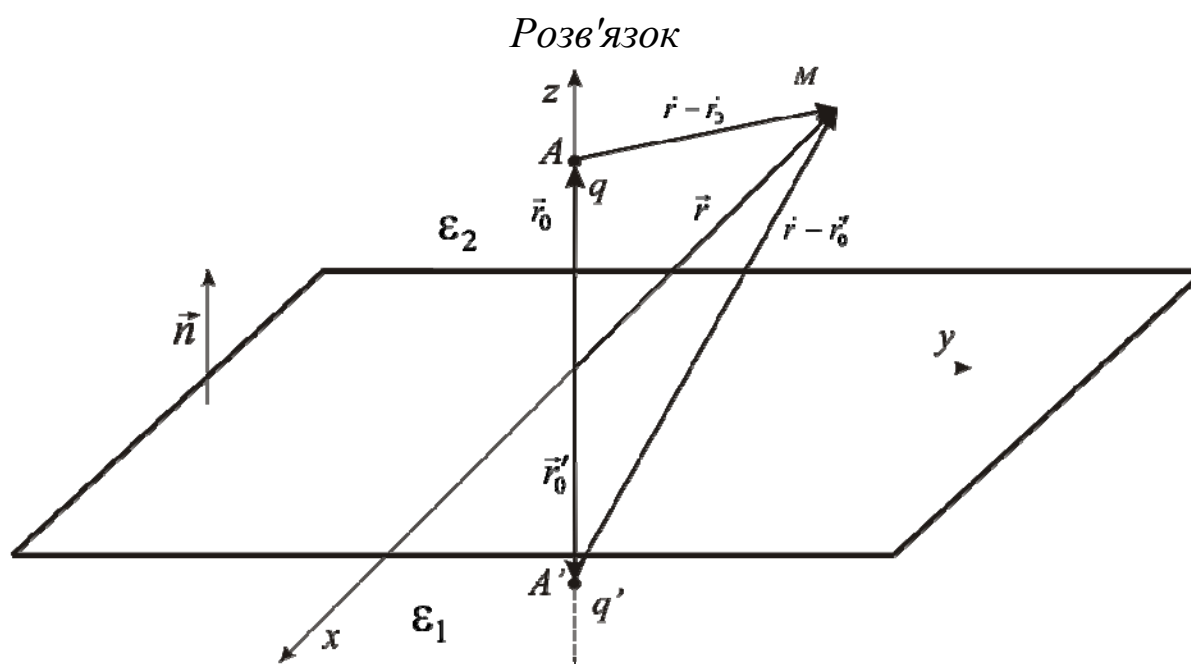
$$\vec{F} = q \vec{E}(\vec{r}) \Big|_{y \text{ точки, де є } q} = \frac{\vec{j}}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \left[Q - \frac{qR^3 \left(2a^2 - R^2 \right)}{a \left(a^2 - R^2\right)^2} \right]. \quad (4)$$

З формули (4) видно, що для великих значень a (коли заряд q дуже далеко від сфери) другим доданком у дужках можна

знехтувати і формула (4) перейде у звичайний закон Кулона. Такий самий результат можна отримати, якщо розміри сфери стають малими, тобто, коли $R \rightarrow 0$.

Задача 9.

Точковий заряд q розташований у напівнескінченному діелектричному середовищі з діелектричною проникністю ϵ_1 на відстані a від плоскої межі, що відділяє це середовище від другого з діелектричною проникністю ϵ_2 . Знайти потенціал, напруженість, індукцію системи у будь-якій точці простору. Визначити силу, з якої діє на заряд q , а також вектор поляризації, величину поверхневих $\sigma_{зв}$ і об'ємну $\rho_{зв}$ густини зв'язаних зарядів. Знайти також повну величину зв'язаних поверхневих зарядів.



1. Розглянемо спочатку випадок коли точка спостереження M є у середовищі, де є заряд q (2 область). Згідно з методом зображень, потенціал, що створений системою у точці M , є сумою потенціалів заряду q та фіктивного заряду q' (зображення заряду q). Також згідно з цим методом, потенціал, що утворений зарядом q' , визначається так, ніби діелектрик ϵ_2 займає весь простір.

$$\varphi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}} \right). \quad (1)$$

2. Щоб знайти потенціал у середовищі $z < 0$ (1 область), то необхідно припустити, що φ_1 утворений лише деяким фіктивним зарядом q'' (зображення заряду q'), що є у точці A замість заряду q , а діелектрик з нижньої площини займає весь простір. Тоді

$$\varphi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1} \frac{q''}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}}. \quad (2)$$

Застосуємо граничні умови:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\vec{r})\Big|_{z=0} &= \varphi_2(\vec{r})\Big|_{z=0}, \\ -\epsilon_1 \frac{\partial}{\partial z} \varphi_1(\vec{r})\Big|_{z=0} + \epsilon_2 \frac{\partial}{\partial z} \varphi_2(\vec{r})\Big|_{z=0} &= \frac{\sigma_e}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

У задачі відсутні вільні заряди на поверхні, тому $\sigma_e = 0$.

З першої граничної умови знаходимо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_2} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (0-a)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (0+a)^2}} \right) &= \frac{1}{\epsilon_1} \frac{q''}{\sqrt{x^2 + y^2 + (0-a)^2}}, \\ \frac{1}{\epsilon_2} (q + q') &= \frac{1}{\epsilon_1} q'', \end{aligned} \quad (3)$$

а з другої:

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_2} \left(\frac{2(z-a)q}{2(x^2 + y^2 + (z-a)^2)^{3/2}} - \frac{2(z+a)q'}{2(x^2 + y^2 + (z+a)^2)^{3/2}} \right) \Big|_{z=0} = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1} \frac{2(z-a)q''}{2(x^2 + y^2 + (z-a)^2)^{3/2}} \Big|_{z=0},$$

$$\begin{aligned} -(0-a)q - (0+a)q' &= -(0-a)q'', \\ aq - aq' &= aq'', \\ q - q' &= q''. \end{aligned} \quad (4)$$

З (3) і (4) знаходимо величини фіктивних зарядів (зображень):

$$\begin{cases} q' = -q \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}, \\ q'' = q - q' = q \left(1 + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) = q \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}. \end{cases} \quad (5)$$

На основі формул (5) та (1) – (2) можна знайти потенціал системи.

$$\varphi_2(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}} \right), \quad (6)$$

$$\varphi_1(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}}. \quad (7)$$

Відповідно напруженість поля знаходимо так:

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \left(\frac{\vec{i}x + \vec{i}y + \vec{k}(z-a)}{\left(x^2 + y^2 + (z-a)^2\right)^{3/2}} - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{\vec{i}x + \vec{i}y + \vec{k}(z+a)}{\left(x^2 + y^2 + (z+a)^2\right)^{3/2}} \right), \quad (8)$$

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{\vec{i}x + \vec{i}y + \vec{k}(z-a)}{\left(x^2 + y^2 + (z-a)^2\right)^{3/2}}. \quad (9)$$

Зв'язок між індукцією і напруженістю відомий: $\vec{D}_{\{2\}} = \epsilon_{\{2\}} \epsilon_0 \vec{E}_{\{2\}}$.

Тому

$$\vec{D}_2(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{i}x + \vec{i}y + \vec{k}(z-a)}{\left(x^2 + y^2 + (z-a)^2\right)^{3/2}} - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{\vec{i}x + \vec{i}y + \vec{k}(z+a)}{\left(x^2 + y^2 + (z+a)^2\right)^{3/2}} \right), \quad (10)$$

$$\vec{D}_1(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{\vec{i}x + \vec{i}y + \vec{k}(z-a)}{\left(x^2 + y^2 + (z-a)^2\right)^{3/2}}. \quad (11)$$

Щоб знайти силу, що діє на заряд q , треба визначити спочатку напруженість у точці A

$$\vec{E}_2(\vec{r}_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \left(-\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{2a\vec{k}}{(4a^2)^{3/2}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{\vec{k}}{4a^2}.$$

Відповідно сила, що діє на заряд:

$$\vec{F}(\vec{r}_0) = q\vec{E}_2(\vec{r}_0) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{\vec{k}}{4a^2}. \quad (12)$$

З (12) видно, якщо $\epsilon_2 > \epsilon_1$, то заряд відштовхуватиметься від меж поділу середовищ. У протилежному випадку – притягатиметься.

Обчислимо вектор поляризації та величини зв'язаних зарядів. З рівняння Максвелла для речовини:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{в}}}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_{\text{зв}}}{\varepsilon_0}.$$

Відомо, що $\rho_{\text{зв}} = -\operatorname{div} \vec{\mathcal{P}}$, де $\vec{\mathcal{P}}$ – вектор поляризації середовища (повний дипольний момент одиниці об'єму). Тоді:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{в}}}{\varepsilon_0} - \frac{\operatorname{div} \vec{\mathcal{P}}}{\varepsilon_0},$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{\mathcal{P}}) = \rho_{\text{в}}.$$

Оскільки з експерименту відомо, що $\vec{\mathcal{P}} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$, тому

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E}) = \rho_{\text{в}}; \quad \operatorname{div} \left(\underbrace{\vec{E} \varepsilon_0 (1 + \chi)}_{\vec{D}} \right) = \rho_{\text{в}};$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{в}}.$$

Отже,

$$\vec{\mathcal{P}}_1 = (\varepsilon_1 - 1) \varepsilon_0 \vec{E}_1, \quad \vec{\mathcal{P}}_2 = (\varepsilon_2 - 1) \varepsilon_0 \vec{E}_2 \quad (13)$$

$$\begin{cases} \rho_{\text{зв},1} = -\operatorname{div} \vec{\mathcal{P}}_1, \\ \rho_{\text{зв},2} = -\operatorname{div} \vec{\mathcal{P}}_2, \end{cases} \quad (14)$$

Отже,

$$\rho_{\text{зв},1} = -\operatorname{div} \vec{\mathcal{P}}_1 = -(\varepsilon_1 - 1) \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}_1 = -\frac{q}{4\pi} \frac{2(\varepsilon_1 - 1)}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \operatorname{div} \frac{\vec{i}x + \vec{i}y + \vec{k}(z - a)}{(x^2 + y^2 + (z - a)^2)^{3/2}} = 0.$$

Аналогічно $\rho_{\text{зв},2} = 0$.

Визначимо тепер поверхневі зв'язані заряди, які знайдемо з умови неперервності нормальної складової вектора поляризації:

$$\mathcal{P}_{n2}(\vec{r}) \Big|_S - \mathcal{P}_{n1}(\vec{r}) \Big|_S = -\sigma_{\text{зв'язане}}(\vec{r}). \quad (15)$$

Приймаємо напрямок нормалі від межі у друге середовище. Для цього потрібно знайти нормальні складові вектора поляризації, які пов'язані з вектором напруженості за формулою (13). Тому спочатку запишемо нормальні складові вектора напруженості у двох середовищах:

$$E_{2n}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \left(\frac{(z-a)}{(x^2 + y^2 + (z-a)^2)^{3/2}} - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{(z+a)}{(x^2 + y^2 + (z+a)^2)^{3/2}} \right).$$

Нормальна складова напруженості на поверхні:

$$\begin{aligned} E_{2n}(\vec{r})|_{z=0} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \left(\frac{(-a)}{(x^2 + y^2 + (-a)^2)^{3/2}} - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{(+a)}{(x^2 + y^2 + (+a)^2)^{3/2}} \right) = \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \frac{a}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} \left(1 + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} \frac{a}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}. \end{aligned}$$

Відповідно

$$\mathcal{P}_{n,2}(\vec{r})|_{z=0} = (\epsilon_2 - 1)\epsilon_0 E_{2n}|_{z=0} = -\frac{q}{4\pi} \frac{a}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} \frac{2\epsilon_1(\epsilon_2 - 1)}{\epsilon_2(\epsilon_2 + \epsilon_1)}. \quad (16)$$

Аналогічно

$$E_{1n}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{(z-a)}{(x^2 + y^2 + (z-a)^2)^{3/2}},$$

$$E_{1n}(\vec{r})|_{z=0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{-a}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}},$$

$$\mathcal{P}_{n,1}(\vec{r})|_{z=0} = (\epsilon_1 - 1)\epsilon_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{-a}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi} \frac{2(\epsilon_1 - 1)}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{-a}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (17)$$

Вирази (16) і (17) підставимо у (15). Отримаємо величину поверхневих зв'язаних зарядів:

$$\begin{aligned} \sigma_{ze} &= \frac{q}{4\pi} \frac{2(\epsilon_1 - 1)}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{-a}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} - \left(-\frac{q}{4\pi} \frac{a}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} \frac{2\epsilon_1(\epsilon_2 - 1)}{\epsilon_2(\epsilon_2 + \epsilon_1)} \right) = \\ &= \frac{qa}{4\pi(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} \left(-\frac{2(\epsilon_1 - 1)}{\epsilon_2 + \epsilon_1} + \frac{2\epsilon_1(\epsilon_2 - 1)}{\epsilon_2(\epsilon_2 + \epsilon_1)} \right) = \\ &= \frac{qa}{2\pi(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} \frac{1}{\epsilon_2} \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right). \end{aligned}$$

Звідси видно, що найбільше значення поверхневої густини заряду є у точці, що відповідає проекції заряду на площину поділу середовищ (коли $x=0, y=0$):

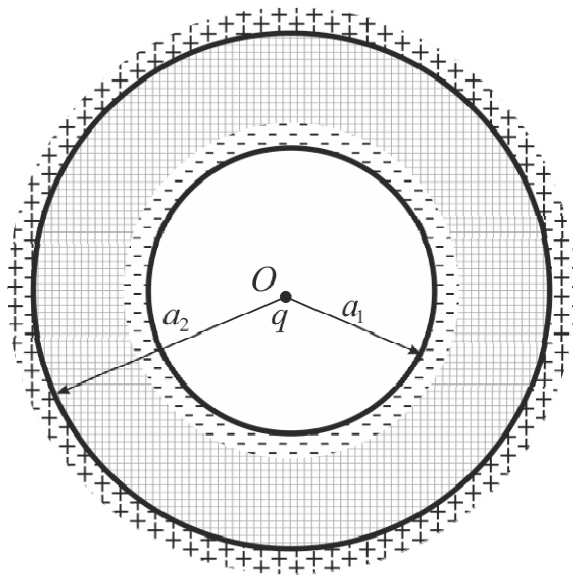
$$\sigma_{зв, \max} = \frac{q}{2\pi a^2 \varepsilon_2} \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \right) = \frac{q'}{2\pi a^2}.$$

Задача № 10.

Знайдіть зв'язані заряди, поляризованість і напруженість електричного поля, що створене точковим зарядом $q > 0$, що розташований в центрі двох концентричних сфер радіусами a_1, a_2 . Сферичний шар заповнено речовиною з діелектричною проникністю ε .

Розв'язок

Використаємо рівняння Максвелла для середовища в інтегральній формі:



$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV \rightarrow \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q. \quad (1)$$

За поверхню інтегрування вибираємо довільну сферу радіусом r та центром в т. O . Через сферичну симетрію задачі вектор зміщення на сфері буде константою. Тому

$$D_n = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2}. \quad (2)$$

Ця величина є неперервною у всьому просторі.

Знайдемо напруженість електричного поля на основі зв'язку напруженості та індукції електричного поля:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (3)$$

Звідси:

$$E_n = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \begin{cases} 1, & r < a_1, \\ 1/\varepsilon, & a_1 < r < a_2, \\ 1, & a_2 < r. \end{cases} \quad (4)$$

Тут враховано, що діелектрична проникність вакууму дорівнює 1. Поляризованість середовища знайдемо на основі формули:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{\mathcal{P}} \rightarrow \vec{\mathcal{P}} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (5)$$

Звідси:

$$\mathcal{P}_n = D_n - \varepsilon_0 E_n = \frac{q}{4\pi r^2} - \frac{q}{4\pi r^2} \begin{cases} 1, & r < a_1, \\ 1/\varepsilon, & a_1 < r < a_2, \\ 1, & a_2 < r. \end{cases} = \frac{q}{4\pi r^2} \begin{cases} 0, & r < a_1, \\ \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}, & a_1 < r < a_2, \\ 0, & a_2 < r. \end{cases} \quad (6)$$

Для знаходження густини поверхневих зв'язаних зарядів використаємо граничну умову для нормальної складової вектора поляризації:

$$\mathcal{P}_{n,2} \Big|_s - \mathcal{P}_{n,1} \Big|_s = -\sigma_{зв}. \quad (7)$$

За зовнішню нормаль виберемо одиничний вектор, що напрямлений зовні сфери.

Отже, на першій межі ($r=a_1$) середовищем 1 виступає внутрішня сфера, а середовищем 2 – сферична оболонка. Тому:

$$-\sigma_{зв} = \frac{q}{4\pi r^2} \Big|_{r=a_1} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} - 0 \rightarrow \sigma_{зв} = -\frac{q}{4\pi a_1^2} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}. \quad (8)$$

На другій межі ($r=a_2$) середовищем 1 виступає сферична оболонка, а 2 – весь навколишній простір. Тому

$$-\sigma_{зв} = 0 - \frac{q}{4\pi r^2} \Big|_{r=a_2} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \rightarrow \sigma_{зв} = \frac{q}{4\pi a_2^2} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}. \quad (9)$$

Тепер знайдемо густину об'ємних зв'язаних зарядів у сферичній оболонці.

$$\rho_{зв} = -\operatorname{div} \vec{\mathcal{P}} = -\operatorname{div} \left(\frac{q}{4\pi r^2} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \frac{\vec{r}}{r} \right) = -\frac{q}{4\pi} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \operatorname{div} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right).$$

Обчислимо окремо дивергенцію у сферичній системі координат:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) &= \operatorname{div} \left(\frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) = \frac{1}{H_r H_\theta H_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial r} (1/r^2 H_\theta H_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (0 H_\theta H_r) + \frac{1}{H_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (0 H_\theta H_r) \right] = \\ &= \frac{1}{H_r H_\theta H_\varphi} \frac{\partial}{\partial r} (1/r^2 H_\theta H_\varphi), \end{aligned}$$

де H_i — коефіцієнти Ламе:

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}, \quad q_i = r, \theta, \varphi.$$

У сферичній системі координат вони мають вигляд: $H_r=1$, $H_\theta=r \sin(\theta)$, $H_\varphi=r$. Отже,

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=\frac{1}{H_r H_\theta H_\varphi} \frac{\partial}{\partial r}\left(1/r^2 H_\theta H_\varphi\right)=\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r}\left(1/r^2 r^2 \sin \theta\right)=0.$$

Звідси маємо, що $\rho_{\text{зв}}=0$.

Знайдемо тепер повні значення зв'язаних зарядів, що виникли на поверхнях:

$$1. \text{ Поверхня } r=a_1. \quad q_{\text{зв}} = \int_s \sigma_{\text{зв}} dS = -\frac{q}{4\pi a_1^2} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} 4\pi a_1^2 = -q \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}.$$

$$2. \text{ Поверхня } r=a_2. \quad q_{\text{зв}} = \int_s \sigma_{\text{зв}} dS = \frac{q}{4\pi a_2^2} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} 4\pi a_2^2 = q \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}.$$

Задача № 11.

Однорідна провідна куля радіусом a і питомою провідністю γ у початковий момент часу заряджена рівномірно вільними зарядами з об'ємною густиною ρ_0 . Установіть закон зміни об'ємного заряду в кулі та поверхневого заряду на поверхні кулі з часом.

Розв'язок

Запишемо рівняння неперервності:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0. \quad (1)$$

Згідно з законом Ома:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}. \quad (2)$$

Вираз (2) підставимо в (1):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\gamma \vec{E}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \operatorname{div}(\vec{E}) = 0. \quad (3)$$

Тут використано те, що питома провідність не залежить від координат (однорідна куля). З рівняння Максвела

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (4)$$

та виразу (3), одержимо

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0. \quad (5)$$

Вважаємо, що густина не залежить від координат, тому частинну похідну замінимо повною. Одержане рівняння є

диференціальним рівнянням першого порядку, в якому можна розділити змінні.

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\gamma}{\varepsilon_0} dt \Rightarrow \ln \rho = -\frac{\gamma}{\varepsilon_0} t + \ln C \Rightarrow \rho = C e^{-(\gamma/\varepsilon_0)t}. \quad (6)$$

У початковий момент часу $\rho = \rho_0$. Звідси знайдемо константу $C = \rho_0$. Отже,

$$\rho = \rho_0 e^{-(\gamma/\varepsilon_0)t}. \quad (7)$$

Визначимо закон зміни поверхневої густини заряду. Знайдемо повний заряд кулі

$$Q_0 = \rho_0 \frac{4}{3} \pi a^3. \quad (8)$$

За теоремою Гауса знайдемо напруженість поля в будь-який момент часу в кулі і за її межами:

$$1) \ r \leq a, \quad \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$E_{1n} 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow E_{1n} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\rho}{3} r = \frac{\rho_0 e^{-(\gamma/\varepsilon_0)t}}{3\varepsilon_0} r.$$

$$2) \ r > a, \quad \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$E_{2n} 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_0 \frac{4}{3} \pi a^3 \Rightarrow E_{2n} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \frac{a^3}{r^2}.$$

Згідно з граничними умовами, $E_{2n}|_{a^+} - E_{1n}|_{a^-} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma$. Звідси

$$\sigma = \varepsilon_0 (E_{2n}|_{a^+} - E_{1n}|_{a^-}) = \varepsilon_0 \left(\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \frac{a^3}{a^2} - \frac{\rho_0 e^{-(\gamma/\varepsilon_0)t}}{3\varepsilon_0} a \right) = \frac{\rho_0 a}{3} (1 - e^{-(\gamma/\varepsilon_0)t}).$$

З останнього рівняння видно, що в початковий момент часу поверхнева густина зарядів кулі дорівнює нулю. При $t \rightarrow \infty$, об'ємна густина зарядів прямуватиме до нуля, а поверхнева густина зарядів – до максимального значення. Величину $t_r = \varepsilon_0 / \gamma$ називають часом релаксації — час, за який об'ємний заряд зменшується в e разів. Для реальних провідників (металів) $\gamma \geq 10^3 \text{ См/м}$. Тому $t_r \leq 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} / 10^3 \text{ См/м} \approx 10^{-15} \text{ с}$. Це досить малий час. Тому можна вважати, що заряд практично миттєво переміститься на поверхню.

Предметний покажчик

В		Л	
векторний потенціал	23	лінійні струми	24
Г		лінійно поляризована хвиля	50
гіромагнітне відношення	30	М	
Д		магнітний момент	28
дипольний момент	14	монохроматична хвиля.....	48
діамагнетик	30	О	
Е		Основні задачі	
електричне дипольне		електростатики.....	6
випромінювання	46	П	
електрорушійна сила	35	парамагнетик.....	30
елементарні струми	26	плоска хвиля.....	48
З		потенціал електростатичного	
закон Снелліуса	56	поля	8
І		потенціали випередження...	42
інтенсивність дипольного		потенціали запізнення	41
випромінювання	48	потенціальне векторне поле .	6
К		Р	
квадрупольний момент	14	рівняння Даламбера.....	40
коефіцієнт взаємної індукції		рівняння Лапласа	10
.....	33	рівняння Пуассона.....	10
коефіцієнт самоіндукції	33	С	
крайові умови.....	5	спін електрона.....	30
		Ф	
		функція Гріна	12

Основні та додаткові літературні джерела

1. Алексеев А. И. Сборник задач по классической электродинамике : учеб. пособие. — М. : Наука, 1977. — 318 с.
2. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике. — М. : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. — 640 с.
3. Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н. Классическая электродинамика : учебное пособие / под редакцией И. Н. Топтыгина. — М. : Наука, 1985. — 400 с.
4. Векштейн Е. Г. Сборник задач по электродинамике. — М. : Высшая школа, 1966. — 286 с.
5. Гречко А. Г., Сугаков В. И., Томасевич О. Ф., Федорченко А. М. Сборник задач по теоретической физике : учеб. пособие [для вузов]. — М. : Высшая школа, 1972. — 336 с.
6. Джексон Дж. Классическая электродинамика. — М. : Мир, 1965. — 702 с.
7. Измайлов С. В. Курс электродинамики. — М. : Учпедгиз, 1962. — 440 с.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : учеб. пособие: в 10 т. Т. II. Теория поля. — 7-е изд. испр. — М. : Наука, 1988. — 512 с.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : Учеб. пособие: в 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. — 2-е изд. испр. — М. : Наука, 1982. — 620 с.
10. Левич В. Г. Курс теоретической физики. Т.1. Теория электромагнитного поля. Теория относительности. Статистическая физика. Электромагнитные процессы в веществе. — М. : Наука, 1969. — 910 с.
11. Мултановский А. В., Василевский А. С. Курс теоретической физики. Классическая электродинамика : учеб. пособие [для студентов физ.-мат. фак. пед. ин.-тов]. — М. : Просвещение, 1990. — 272 с.
12. Новожилов Ю. В., Яппа Ю. А. Электродинамика : учеб. пособие. — М. : Наука, 1978 — 352 с.
13. Савельев И. В. Основы теоретической физики: Учеб. руководство [для вузов]: в 2 т. Т. 1. Механика и электродинамика. — 2-е изд., испр. — М. : Наука, 1991. — 496 с.

14. Сугаков В. Й. Теоретична фізика. Електродинаміка. — К. : Вища школа, 1974. — 271 с.
15. Тамм И. Е. Основы теории электричества : учеб. пособие [для вузов]. — 11-е изд., испр. и доп. — М. : Физматлит, 2003. — 616 с.
16. Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П. Электродинамика : учеб. пособие [для студентов физ. спец. университетов]. — 2-е изд., перераб. — М. : Высшая школа, 1990. — 352 с.
17. Федорченко А. М. Теоретична фізика. Класична механіка та електродинаміка. — К. : Вища школа, 1992. — 535 с.

Для нотаток

Для нотаток

Навчальне видання

Василь БОЙЧУК, Ігор Білинський, Роман ЛЕШКО

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

Частина 2

Тексти лекцій

**Видавничий відділ Дрогобицького
державного педагогічного університету
імені Івана Франка**

Головний редактор
Ірина Невмержицька

Редактор
Іванна Біблій

Технічний редактор
Світлана Бецько

Здано до набору 05.04.2014 р. Підписано до друку 23.05.2014 р. Формат 60x90/16. Папір офсетний. Гарнітура Times. Наклад 300 прим. Ум. друк. арк. 5,1. Зам. 80.

Видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 2155 від 12.04.2005 р.) 82100, Дрогобич, вул. І.Франка, 24, тел. 2 – 23 – 78.