

Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка

кафедра теоретичної фізики та методики викладання фізики

Василь БОЙЧУК, Ігор БЛІНСЬКИЙ, Роман ЛЕШКО

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

Частина 3

Тексти лекцій

**Дрогобич
2015**

УДК 53.537
ББК 22.313

Бойчук В. І., Білинський І. В., Лешко Р. Я.
Електродинаміка. Частина 3 : тексти лекцій [для студентів фізичних спеціальностей]. – Дрогобич : Видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, 2015. – 71 с.

Навчальний посібник написаний відповідно до програми навчальної дисципліни «Теоретична фізика», затвердженої вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. Тут охарактеризовані основи релятивістської електродинаміки. Міститься теоретичний матеріал і набір задач з детальними розв'язками. Для студентів овітнього рівня «Бакалавр» гулузі знань 0402 «Фізико-математичні науки» напряду підготовки 6.042003 «Фізика» денної і заочної форми навчання.

Бібліографія 17 назв

Рецензенти:

Ткач Микола Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної фізики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича;

Пелещак Роман Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри загальної Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Відповідальний за випуск: Гольський Віталій Богданович, к. ф.-м. н., доцент кафедри теоретичної фізики та МВФ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка як навчальний посібник
(протокол № 4 від 19.03.2015 р.)

Зміст

Розділ VI. Релятивіська електродинаміка	4
§38. Принцип відносності Галілея	4
§39. Рівняння Максвелла та гіпотеза ефіру	6
§40. Принцип відносності Ейнштейна. Перетворення Лоренца	7
§41. Відносність одночасності	12
§42. Власний час	14
§43. Довжини матеріальних тіл	17
§44. Додавання швидкостей	19
§45. Геометрія 4-простору	20
§46. Диференціальні операції	26
§47. 4-швидкість	27
§48. 4-прискорення	28
§49. Функції Лагранжа та Гамільтона в СТВ	29
§50. Коваріантне рівняння руху	33
§51. 4-хвильовий вектор та ефект Доплера	34
§52. Червоний зсув	39
§53. 4-вектор струму	42
§54. 4-вектор потенціал	43
§55. Тензор електромагнітного поля	45
§56. Коваріантний вигляд рівнянь Максвелла	47
§57. Перетворення Лоренца для поля	49
§58. Тензор енергії-імпульсу електромагнітного поля	53
Питання і тести для самоконтролю	55
Приклади розв'язування задач	58
Додаток А. Метричний простір	68
Додаток Б. Евклідовий простір. Евклідова метрика	69
Додаток В. Вимірювання відстані в координатах	70
Додаток Г. Простір Мінковського	73
Предметний покажчик	76
Основні та додаткові літературні джерела	77

Розділ VI. Релятивіська електродинаміка

Ми приступаємо до обговорення проблем електромагнітних полів у рухомих середовищах. Цими питаннями займається релятивіська електродинаміка. Саме вона тісно пов'язана з проблемами теорії відносності – теорії, що описує універсальні просторово-часові властивості фізичних процесів. Ми розглядатимемо лише спеціальний випадок: властивості простору-часу, коли полями тяжіння можна знехтувати. Звідси й термінологія – *спеціальна теорія відносності* (СТВ).

У цьому розділі охарактеризовані питання принципу відносності, виведено перетворення Лоренца, показано інваріантність рівнянь Максвелла відносно перетворень Лоренца, подано чотиривимірні вектори струму, хвильового вектора, тензори електромагнітного поля. Показано релятивіську природу електричного й магнітного полів.

§38. Принцип відносності Галілея

Принцип відносності Галілея, що був сформульований ще в 1636 р., стверджує: *усі закони та рівняння механіки, сформульовані для однієї інерціальної системи відліку, не змінюються при переході до іншої довільної інерціальної системи відліку.*

У такому вигляді це правило відповідає сьогоденню бо, не існує експериментів, які б свідчили про наявність якоїсь виділеної системи відліку. Усі інерціальні системи відліку рівноправні. У цьому розумінні Галілей геніальним чином зрозумів одну з основ сучасної фізики.

Однак завжди, коли мають на увазі принцип відносності Галілея, перелічують можливі варіанти переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої. Очевидно, ми переходимо до нової інерціальної системи відліку, якщо:

- зміщуємо початок системи відліку на деяку постійну відстань (у загальному випадку – на постійний вектор):

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}, \quad (1)$$

• повертаємо систему відліку в просторі навколо її початку; зобразимо, де за допомогою матриці поворотів \hat{U} :

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \hat{U}\vec{r}, \quad (2)$$

• зсуваємо початок відліку часу на деяку постійну величину t_0 :

$$t \rightarrow t' = t + t_0, \quad (3)$$

• переходимо до системи координат, що рухається рівномірно та прямолінійно вздовж осі x відносно «старої» системи координат:

$$x \rightarrow x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t \rightarrow t' = t. \quad (4)$$

Формули (4) називають *перетвореннями Галілея*. З них безпосередньо випливає закон додавання швидкостей у класичній механіці:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}. \quad (5)$$

Зауважимо, що у перетвореннях Галілея (4) останній вираз свідчить про абсолютний характер часу, тобто час іде однаково в усіх інерціальних системах відліку. Такий саме абсолютний характер має в класичній фізиці й простір. Перетворення Галілея є узагальненням повсякденного досвіду, які базуються на деяких припущеннях, що важко перевірити експериментально (для швидкостей руху, які маємо у своєму розпорядженні), а саме:

- довжина деякого тіла однакова в довільній інерціальній системі відліку;
- час у різних інерціальних системах відліку плине однаково;
- маса тіл, а також сили взаємодії між тілами залишаються незмінними при переході від однієї інерціальної системи до іншої.

Два перших пункти виражають абсолютність понять простору і часу в класичній фізиці. З цих тверджень випливає, що рівняння та закони механіки не змінюються при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої. Тобто, не існує якоїсь виділеної, спеціальної системи відліку, бо всі інерціальні системи рівноправні.

§39. Рівняння Максвелла та гіпотеза ефіру

Після появи в 1865 р. рівнянь Максвелла виникла необхідність уточнення принципу відносності й перетворень Галілея. Причина полягає в тому, що самі рівняння Максвелла не інваріантні відносно перетворень Галілея. Щобільше, із самих рівнянь Максвелла можна було отримати теоретичне значення швидкості світла через електродинамічні сталі (причому, з не поганою точністю). Це теоретичне значення добре узгоджувалося з експериментальним. Але виникало питання: у якій саме системі координат світло поширюється зі швидкістю $c=3 \cdot 10^8$ м/с, оскільки з абсолютності поняття часу та простору випливає звичайний закон додавання швидкостей. Проте в теорії Максвелла немає жодних вказівок на те, в якій саме системі світло повинно мати швидкість $3 \cdot 10^8$ м/с. Таке положення наводило на думку, що існує деяка виділена система відліку, в якій світло поширюється зі швидкістю c .

У ті часи вважалось природним, що хвильовий процес поширюється у деякому середовищі (наприклад, гідродинамічні хвилі – на поверхні води). Тому появилась гіпотеза *ефіру*. Вважалось, що світло поширюється в деякому прозорому середовищі – ефірі, який заповнює весь простір. Тобто швидкість c має місце саме в системі координат, пов'язаній з ефіром.

Але це твердження одразу ж приводить до виділеної абсолютної системи відліку, що суперечить принципу відносності Галілея. Друга можлива альтернатива полягала в припущенні, що перехід від однієї системи координат до іншої відбувається не за допомогою перетворень Галілея, а за допомогою інших перетворень.

Психологічно простіше було вважати, що c деяка абсолютна система відліку, позаяк у ті часи було важко відмовитись від середовища, у якому поширюється світло. З цього випливало, що

система нерухома відносно ефіру (абсолютна), а при переході до іншої рухомої системи відліку повинен виконуватись закон додавання швидкостей $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$, тобто $v' = v \pm c$. Оскільки Земля рухається по орбіті зі швидкістю $v = 30$ км/с, то поперек цього руху швидкість світла c , а вздовж нього – $v+c$. Але експерименти Майкельсона і Морлі дали інший результат – і в повздовжньому, і в поперечному напрямку швидкість дорівнювала c . Таким чином, з експериментів незаперечно випливав експериментальний факт: швидкість поширення світла не залежить від швидкості руху спостерігача. Інакше кажучи, у якій би системі координат ми не вимірювали швидкість світла, завжди отримаємо один і той самий результат – $3 \cdot 10^8$ м/с. І в цьому розумінні всі інерціальні системи відліку є рівноправними, виділеної (абсолютної) системи відліку не існує. Тобто, саме формулювання принципу відносності залишається справедливим – треба змінювати формули переходу від однієї системи координат до іншої.

§40. Принцип відносності Ейнштейна. Перетворення Лоренца

Експериментально було надійно встановлено, що швидкість світла у вакуумі c відносно довільної інерціальної системи відліку є однаковою. Не існує виділеної інерціальної системи відліку – всі інерціальні системи відліку рівноправні. Це дало змогу Ейнштейну сформулювати *принцип відносності*, який пізніше назвали *ейнштейнівським*:

а) усі фізичні закони та рівняння, сформульовані для однієї інерціальної системи відліку, не змінюються при переході до іншої довільної інерціальної системи відліку;

б) швидкість світла не залежить від швидкості руху спостерігача і в довільній інерціальній системі відліку дорівнює $3 \cdot 10^{10}$ см/с.

З цих двох тверджень логічно випливають перетворення Лоренца.

Нехай маємо дві системи координат: нерухому K та систему K' , що рухається відносно неї рівномірно і прямолінійно зі швидкістю \vec{V} вздовж осі x (див. рис.1.). Нехай у момент часу $t = 0$ ($t' = 0$) початки координатних систем збіглися і в цей же момент

з початку координат $r = 0$ ($r' = 0$) почала поширюватися сферична світлова хвиля (спалах світла).

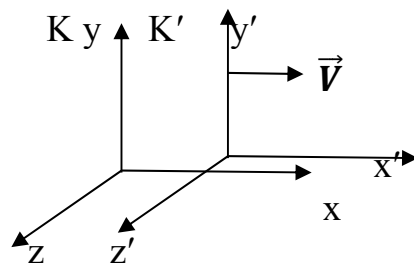


Рисунок 1

У системі відліку K у момент часу t фронт світлової хвилі пройде відстань ct , а в системі K' у момент часу t' його шлях буде ct' . Тобто спостерігач системи K буде бачити передній фронт світлової хвилі як сферу радіуса ct і опише її рівнянням:

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (1)$$

Спостерігач системи K' ту саму сферичну хвилю опише рівнянням:

$$c^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \quad (2)$$

Він опише її саме так, бо у системі координат K' світло поширюється з такою самою швидкістю c . Ці два вирази показують, що величина

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \quad (3)$$

є інваріантом: не змінюється при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої. Загалом цей інваріант може дорівнювати нулеві, бути і додатною, і від'ємною величиною має спеціальну назву – *інтервал*. Він визначає *метрику простору-часу*. Нагадаємо, що в тривимірному просторі інваріантом переходу від однієї системи координат до іншої є сума квадратів координат (відстань між точками не змінюється). Усі доданки такого інваріанта входять із однаковими знаками «плюс». А у виразі для інтервалу час ввійшов зі знаком мінус – протилежним знаком до знака просторових координат. Там, де усі квадрати мають однакові знаки, – то геометрія Евкліда, а в цьому випадку

виникає псевдоевклідова геометрія. Отже, суто фізичні міркування (і експериментальні дані) нашо́вхнули нас на інший тип геометрії, а це, звісно, спричинить інші, частково невідомі нам, наслідки.

Тепер перехід від однієї інерціальної системи координат до іншої можна собі уявляти як перетворення від одних координат до інших у псевдоевклідовому просторі. Якщо йдеться про суто координатні співвідношення, то майже очевидно, що тут все буде так, як в евклідовому випадку. Але коли одна з координат містить час (ct), то ситуація ускладнюється. Справді перетворення просторової частини відбуваються, наприклад, при повороті плоских осей навколо початку координат і мають добре відомий вам вигляд:

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi. \quad (4)$$

Таке перетворення не змінює довжини відрізка від початку координат до точки (x, y) :

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2. \quad (5)$$

Перетворення, у якому бере участь час, зберігає іншу величину – інтервал. Можемо скористатись формулами плоского повороту, якщо записати інтервал у вигляді:

$$x^2 + (ict)^2 = const. \quad (6)$$

Тоді формально скористаємося формулами плоского повороту, замінивши в них координату y на ict :

$$x' = x \cos \varphi + ict \sin \varphi, \quad ict' = -x \sin \varphi + ict \cos \varphi \quad (7)$$

Ці, ще формальні, комплексні рівняння можемо привести до дійсного вигляду, якщо пригадаємо, що гіперболічні функції від уявного аргументу пов'язані з тригонометричними відомими співвідношеннями: $\operatorname{sh} iz = i \sin z$, $\operatorname{ch} iz = i \cos z$. Уведемо позначення $\psi = i\varphi$ та запишемо (13) у вигляді:

$$x' = x \operatorname{ch} \psi + ct \operatorname{sh} \psi, \quad ct' = x \operatorname{sh} \psi + ct \operatorname{ch} \psi. \quad (8)$$

Нас цікавить перетворення координат при русі вздовж осі x . При ньому, очевидно, перетворюються тільки координата x і час t . Залишилося визначити кут ψ .

Розглянемо рух початку координат системи K' , тобто усі точки $x' = y' = z' = 0$ відносно системи K . Спостерігач системи K бачить, що відносно нього ця точка рухається зі швидкістю V . Координати цієї точки в системі K такі: $x = Vt$, $y = z = 0$. Врахуємо ці співвідношення у (8), отримаємо:

$$0 = Vt \operatorname{ch} \psi + ct \operatorname{sh} \psi \quad ct' = Vt \operatorname{sh} \psi + ct \operatorname{ch} \psi. \quad (9)$$

Перший з цих виразів перетворюється до $\operatorname{th} \psi = -V/c$. Знаючи співвідношення між гіперболічними функціями, легко обчислити всі значення гіперболічних функцій:

$$\operatorname{th} \psi = -\frac{V}{c}, \quad \operatorname{sh} \psi = \frac{-\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \operatorname{ch} \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (10)$$

Враховуючи співвідношення (9), (10), одержимо *перетворення Лоренца*:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (11)$$

Для знаходження обернених перетворень потрібно розв'язати рівняння (11) відносно x і t . Їх можна отримати також, користуючись простими фізичними міркуваннями – система K' рухається відносно системи K із швидкістю V (у додатньому напрямі осі x), а система K рухається відносно системи K' у бік від'ємних x із швидкістю $-V$. Тому обернений перехід можемо отримати, помінявши місцями штриховані та нештриховані координати і час, змінивши знак біля швидкості V :

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad (12)$$

$$z' = z, \quad t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Для скорочення запису використовують стандартні у СТВ позначення:

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (13)$$

У цих позначеннях перетворення Лоренца (11) має вигляд:

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = \gamma(ct - \beta x). \quad (14)$$

З наведених міркувань і формул можна зробити ряд висновків:

1. У перетвореннях (11), (12) простір і час беруть рівноправну участь; найбільш симетризовану форму має перетворення у позначеннях (14). Це є незаперечним свідченням того, що простір, у якому відбуваються події, є чотиривимірним. Йдеться, що кожна точка простору повинна характеризуватися не лише просторовими координатами, але в кожній точці має існувати свій годинник і показання всіх цих годинників мають бути синхронізованими. Не треба розуміти чотиривимірність як намагання «причепити» четверту координату до тих, що існують.

2. З формул (11), (12) видно, що для малих швидкостей $V \ll c$ перетворення Лоренца переходять у перетворення Галілея: тобто поняття часу наближається до абсолютного за умови $V/c \rightarrow 0$.

3. Перетворення Лоренца не комутують. Результат залежить від порядку переходу між трьома рухомими системами.

Підбиваючи підсумок, можемо стверджувати, що **час не є абсолютним**, і тому слід передовсім розглянути питання про синхронізацію годинників чотиривимірного простору, а також і поняття одночасності.

§41. Відносність одночасності

Як установити годинники та як їх синхронізувати? Перше, що спадає на думку, – треба звести всі годинники до купи (на початок координат); поставити стрілки в однакове положення, а потім розвести по своїх точках. Але так зробити не можна, тому що час, який будуть вони показувати, залежатиме від шляху, яким кожен годинник було перенесено на кінцеву точку.

Тому синхронізацію годинників прийнято виконувати так: нехай всі годинники вже рознесено по своїх точках, у момент часу t на початку координат відбувається спалах світла і сферична хвиля починає поширюватися в усі боки. Відстані до всіх годинників вже відомі, тому коли світлова хвиля дійде до годинника, що є в точці \vec{r} , його стрілки потрібно поставити в положення $t + |\vec{r}|/c$. Цей спосіб синхронізації годинників запропоновано Ейнштейном.

Вимагає також уточнення поняття одночасності. Якщо дві події відбуваються в одній точці, то проблем немає. Але якщо вони відбуваються у різних точках простору (x_1, t_1) та (x_2, t_2) , одночасність визначають так. Нехай одночасно з цими подіями у кожній точці відбувається спалах світла – якщо ці спалахи зустрічаються в точці $(x_1 + x_2)/2$, то такі події називають одночасними. Звернемо увагу, що для синхронізації (і для одночасності) використовують саме світловий сигнал. Причина цього полягає в незалежності швидкості світла від вибору інерціальної системи координат.

Нехай у системі K маємо дві події (x_1, t_1) та (x_2, t_2) і, відповідно, в системі K' – (x'_1, t'_1) та (x'_2, t'_2) . Обчислимо, як пов'язані проміжки часу між цими двома подіями, використавши формулу (14) з §40:

$$\begin{aligned} t'_1 &= \gamma \left(t_1 - \frac{Vx_1}{c^2} \right), t'_2 = \gamma \left(t_2 - \frac{Vx_2}{c^2} \right), \\ t'_2 - t'_1 &= \gamma(t_2 - t_1) - \gamma \frac{V}{c^2} (x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (1)$$

З (1) видно, що коли у нештрихованій системі координат події одночасні ($t_1 = t_2$), то в системі штрихованій можливі всі три варіанти для часового порядку подій:

$$t'_2 - t'_1 = \begin{cases} > 0, & \text{якщо } x_2 - x_1 < 0, \\ < 0, & \text{якщо } x_2 - x_1 > 0, \\ = 0, & \text{якщо } x_2 - x_1 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Отже, в загальному випадку поняття одночасності події є відносним. Але такий результат отримуємо лише тоді, коли події в точках 1 і 2 не пов'язані між собою причинково-наслідковим зв'язком. Здоровий глузд підказує, що причина повинна передувати наслідку, незалежно від системи відліку. Так і є. Наприклад, якщо йдеться про постріл з рушниці та влучення кулі в мішень, то координата мішені пов'язана з координатою рушниці співвідношенням $x_2 = x_1 + v_k(t_2 - t_1)$. Підставивши цю залежність у (2), одержимо:

$$t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) \left(1 - \frac{Vv_k}{c^2} \right), \quad (3)$$

звідки видно, що за умови $t_2 > t_1$ і для системи K' виконується аналогічна нерівність: $t'_2 > t'_1$.

Питання про можливість причинково-наслідкового зв'язку між двома подіями можна розв'язати в загальному випадку з аналізу знака інтервалу. Розглянемо три випадки.

1. Інтервал між двома подіями називають *часоподібним*, якщо квадрат часової компоненти більший за квадрат просторової компоненти:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 < c^2(t_2 - t_1)^2. \quad (4)$$

Ця нерівність, очевидно, еквівалентна такій:

$$\frac{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}{|t|} < c. \quad (5)$$

Відстань між точками простору, де відбуваються дві події, є такою, що інформація про подію у першій точці може дійти до

другої точки за час t , бо швидкість поширення інформації є не більшою за c . Події, які відбуваються у цих точках можуть бути пов'язані причинно-наслідковим зв'язком. Це видно з того, що при заданій відстані за проміжок часу t світло (а, можливо, повільніший сигнал, що передає інформацію про подію в точці 1) може «добігти» від точки 1 до точки 2.

2. Інтервал між двома подіями називають *просторово-подібним*, якщо квадрат часової компоненти менший за квадрат просторової компоненти:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 > c^2(t_2 - t_1)^2. \quad (6)$$

Ця нерівність, очевидно, еквівалентна такій:

$$\frac{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}{|t|} > c. \quad (7)$$

З цієї нерівності з необхідністю випливає дуже важливий наслідок. Події, які відбуваються у цих точках, не можуть бути пов'язані причинно-наслідковим зв'язком, позаяк навіть світло за відведений проміжок часу не зможе подолати відстань між цими точками.

3. Інтервал називають *світлоподібним (нульовим)*, якщо квадрат часової компоненти дорівнює квадрату просторової компоненти.

§42. Власний час

Розглянемо нерухому систему координат K та деяке тіло, що довільно рухається (його швидкість змінює свою величину і напрям). З цим тілом пов'яжемо рухому систему координат. За звичай ця система, загалом кажучи, є неінерціальною, оскільки бере участь в усіх переміщеннях тіла. Але в деякий нескінченно малий проміжок часу $[t; t + dt]$ можемо вважати її локально інерціальною системою координат. Інтервал, що пов'язує дві події, які розділені нескінченно малим проміжком часу, очевидно, має однакову величину для нерухомої системи й системи пов'язаної з тілом $(ds)^2 = (ds')^2$. При запису виразу для

інтервалу врахуємо, що в системі тіла зміщення координат не відбувається, тобто

$$dx' = dy' = dz' = 0.$$

Отже,

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2 = -c^2(d\tau)^2, \quad (1)$$

де $d\tau$ – елемент часу в системі координат, пов'язаний з рухомим тілом (так званий, *власний час*). Звернемо увагу, що згідно з останнім співвідношенням, власний час є інваріантом відносно перетворень Лоренца:

$$d\tau = inv. \quad (2)$$

При виконанні математичних перетворень врахуємо, що

$$\frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(d\tau)^2} = v^2 \quad (3)$$

і після нескладних алгебраїчних операцій одержуємо:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (4)$$

Співвідношення (4) пов'язує елемент часу у власній системі координат тіла з елементом часу в лабораторній системі координат. З нього видно, що у власній системі (системі самого тіла) час плине повільніше, бо $d\tau < dt$.

Те саме стосується і скінченних відрізків часу:

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_1^2 dt \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}. \quad (5)$$

За допомогою формули (5) при заданій швидкості $v(t)$ можна обчислити різницю показників годинників тіла у лабораторній

системі та власній системі відліку. Зокрема для малих, але скінчених відрізків і постійної рівномірної швидкості руху тіла (системи відліку) запишемо формулу, якою будемо користуватися у подальшому:

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (6)$$

З формули (6) видно, що проміжок часу для спостерігача, відносно якого тіло рухається (Δt), є більшим, ніж власний проміжок часу ($\Delta\tau$) між цими самими двома подіями. Відмінність власного часу від лабораторного суттєва лише при швидкостях, порівняних зі швидкістю світла. Такі швидкості реалізуються, наприклад, для елементарних частинок космічного випромінювання.

Наведемо приклад. Відомо, що елементарні частинки мюони (μ) за багатьма параметрами нагадують електрони, але їхня маса у 206 разів більша від маси електронів і, крім того, їхній час життя – $\Delta\tau = 2,2 \cdot 10^{-6}$ с. У земних умовах вони не існують, а приходять до нас як вторинна компонента космічного випромінювання. Космічне випромінювання – потік елементарних частинок (понад 90% складають протони, 7% – це α -частинки, решта – більш важчі частинки), що мають надзвичайно високі енергії (10^6 - 10^{20}) еВ. Вони приходять до нас із космосу (практично рівномірно з усіх боків). Якби не атмосфера Землі, то все живе під потоком такої інтенсивності загинуло б, але ця первинна компонента на своєму шляху натрапляє на атоми азоту, кисню, неону тощо. У результаті зіткнень на висоті приблизно 20 - 30 км утворюється вторинне космічне випромінювання. Однією з компонент цього випромінювання є мюони.

Отже, маючи час життя $2,2 \cdot 10^{-6}$ с навіть при швидкості $3 \cdot 10^8$ м/с (якби справедливі були формули механіки Ньютона), мюон пролетів би тільки 600 м. Але ці частинки постійно спостерігають на поверхні Землі в лабораторних умовах, тобто вони проходять набагато більші відстані з точки зору спостерігача на Землі. Причина полягає в тому, що величина $2,2 \cdot 10^{-6}$ с є часом життя в системі координат, що нерухома від-

носно до мюона. Ми спостерігаємо його як частинку, яка перебуває щодо нас у рухомій системі координат, а в рухомій відносно нас системі координат час іде повільніше. Тобто, при визначенні його часу життя для нас з вами ми повинні користуватись формулою (6), де $\Delta\tau$ – час життя у власній системі координат, а Δt – час життя, який буде спостережено в рухомій системі координат.

Після створення атомних годинників появилась можливість безпосередньої перевірки співвідношення (6). Один із годинників досить довго перебував на борту літака, а інший – на землі. Різниця показників двох годинників (181 ± 23 нс) виявилася близькою до теоретично обчисленої (203 ± 10 нс).

§43. Довжини матеріальних тіл

Для того, щоб знайти довжину деякого тіла в певній системі координат, необхідно визначити координати початку та кінця цього тіла одночасно (відносно згаданої системи координат).

Нехай маємо лінійку довжиною $\Delta x = x_2 - x_1$ у системі K . Потрібно визначити її довжину в системі K' . Як уже зазначалося, вимірювання передбачає одночасний вимір координат x'_1, x'_2 при $t'_2 = t'_1$. Skorистаємося оберненими перетвореннями Лоренца для координат у вигляді:

$$x_1 = \gamma(x'_1 + Vt'_1), \quad x_2 = \gamma(x'_2 + Vt'_2), \quad (1)$$

$$x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1).$$

Отже співвідношення між довжиною предмета в системі K та K' є:

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \Delta x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < \Delta x. \quad (2)$$

З останнього виразу можна зробити декілька висновків. Щодо умови (2) часто застосовують термін *лоренцеве скорочення*. У дійсності йдеться не про скорочення у фізичному розумінні (не треба думати, що наче від предмета відрізають шматок). Йдеться

лише про відносність результатів вимірів предмета рухомим і нерухомим спостерігачем. Нерухомий відносно предмета спостерігач (спостерігач і предмет перебувають у системі K) при вимірюванні одержить, наприклад, результат 1 м. Якщо виміри з тим самим предметом (в системі K) виконуватиме спостерігач рухомої системи координат (у системі K'), то він одержить менший результат (наприклад, 90 см). У цьому немає нічого дивного, позаяк у процесі вимірювання предмет і спостерігач розташовані несиметрично.

Як тоді пов'язати результати вимірів з положенням про рівноправність усіх інерціальних систем відліку? Процес вимірювання в цьому випадку, як зазначено, не є «симетричним» відносно систем K і K' . Рівноправність цих двох систем полягає в тому, що якщо перемістити предмет із системи K у систему K' і виконати вимірювання довжини, то спостерігач системи K' (тепер він нерухомий відносно предмета) одержить довжину 1 м, а спостерігач системи K – 90 см. Тільки так слід розуміти рівноправність цих двох систем.

Повернемося знову до проблеми вимірювання довжини предмета. Якщо користуватися прямими перетвореннями (11), то при обчисленнях повинні враховувати, що моменти часу t_2 та t_1 не збігаються:

$$\begin{aligned}x'_1 &= \gamma(x_1 - Vt_1), & x'_2 &= \gamma(x_2 - Vt_2), \\x'_2 - x'_1 &= \gamma(x_2 - x_1) - \gamma V(t_2 - t_1).\end{aligned}\tag{3}$$

У правій частині (3) треба виразити різницю $t_2 - t_1$ через $t'_2 - t'_1$, згідно з оберненими перетвореннями Лоренца:

$$\begin{aligned}t_1 &= \gamma\left(t'_1 + \frac{Vx'_1}{c^2}\right), & t_2 &= \gamma\left(t'_2 + \frac{Vx'_2}{c^2}\right), \\t_2 - t_1 &= \gamma(t'_2 - t'_1) - \gamma\frac{V}{c^2}(x'_2 - x'_1).\end{aligned}\tag{4}$$

Підставляючи цей результат у (3), одержимо:

$$\Delta x' = \gamma \Delta x - \frac{v^2}{c^2} \frac{\Delta x'}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (5)$$

З рівняння (5) можна отримати умову (2), якщо виразити $\Delta x'$ через Δx .

§44. Додавання швидкостей

Нехай у системі K рухається матеріальна точка з координатами $x(t)$, $y(t)$ і $z(t)$. Ця ж сама точка в системі K' описується координатами $x'(t')$, $y'(t')$, $z'(t')$. Продиференціюємо координату x' за t' , щоб знайти швидкість точки u'_x у системі K' . Скористаємося оберненими перетвореннями Лоренца:

$$\frac{dx'}{dt'} = u'_x = \gamma \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} - V \frac{dt}{dt'} \right) = \gamma (u_x - V) \frac{dt}{dt'}. \quad (1)$$

З перетворень (12) §40 неважко обчислити похідну dt'/dt :

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma \left(1 - \frac{u_x \cdot V}{c^2} \right). \quad (2)$$

Підставляючи (2) в (1), маємо:

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{u_x \cdot V}{c^2}}. \quad (3')$$

Вирази для u'_y та u'_z отримано аналогічним способом:

$$u'_y = u_y \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x \cdot V}{c^2}}, \quad u'_z = u_z \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x \cdot V}{c^2}}. \quad (3'')$$

Зовсім неважко записати вирази для зворотного переходу:

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \frac{u'_x \cdot V}{c^2}}, \quad u_y = u'_y \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x \cdot V}{c^2}}, \quad u_z = u'_z \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x \cdot V}{c^2}}. \quad (4)$$

Замітимо, що в нерелятивіському випадку, $V/c \rightarrow 0$. перетворення СТВ для швидкостей (3) мають вигляд класичних перетворень Галілея. В іншому граничному випадку, $V \rightarrow c$, формула (3) забезпечує граничний характер швидкості світла c . Отже, швидкість тіла, згідно з перетвореннями Лоренца, завжди не перевищує швидкості світла у вакуумі. Тут слід зазначити, що цей результат не означає, що в СТВ жодні швидкості не перевищують c . СТВ лише стверджує що, з надсвітловими швидкостями не можуть рухатися матеріальні частинки та неможливо передати інформацію. Так, наприклад, фазова швидкість хвилі (але не групова), швидкість світлового «зайчика» можуть бути як завгодно більшими за c .

§45. Геометрія 4-простору

Отримавши перетворення Лоренца, ми пересвідчилися у тому, що просторові та часові координати взаємопов'язані відповідними співвідношеннями, тобто світ, який нас оточує, має в дійсності чотири виміри (\vec{r}, ct), а не три. Щоправда, відмінності тривимірної геометрії від чотиривимірної стають суттєвими лише при швидкостях, які можна порівнювати зі швидкістю світла. Проте нас турбує зараз лише принципівий аспект цього питання.

А навіщо таку геометрію будувати? Причин, принаймні, дві. Перша – ця геометрія є ткою, що об'єктивно існує. Ми в цьому 4-просторі живемо, хоча до цього часу це не усвідомлювали. Є й друга причина. Звісно, можна було б просто користуватися перетвореннями Лоренца і безпосередньо показати, що рівняння Максвелла відносно цих перетворень інваріантні. Але це не найкращий вихід, бо крім рівнянь Максвелла є й інші рівняння – Шредінгера, Дірака та ін. Тому виникає питання: як потрібно записати деяке рівняння, щоб воно було б лоренц-інваріантним?

Очевидно, треба йти шляхом, який вибрано при побудові векторного числення. Відомо, що векторна форма запису є таким

способом зображення фізичних величин, коли вони не залежать від перетворення системи координат. Наприклад, вирази:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}], \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1)$$

не залежать від зсуву чи повороту системи координат.

Для тривимірного випадку в електродинаміці існує ціла низка векторних рівнянь. Аналогічним чином уведемо вектори для 4-простору. Тоді, якщо показати, що деяке рівняння містить лише вектори чотиривимірного простору, то воно гарантовано буде лоренц-інваріантним.

Ще раз зазначимо, що, на відміну від евклідової геометрії, у чотиривимірному просторі-часі мірою довжини є інтервал:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2. \quad (2)$$

Нагадаємо, що в евклідовому 4-просторі такою мірою є:

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2, \quad (3)$$

де u — четверта координата. Відмінність очевидна, але ці дві геометрії мають багато спільного.

Уведемо низку правил та означень, якими будемо користуватись, не виконуючи детальних обґрунтувань.

1. Сукупність координат події будемо вважати компонентами чотиривимірного радіус-вектора (вектор у чотиривимірному просторі) та позначати:

$$x^1 \equiv x, \quad x^2 \equiv y, \quad x^3 \equiv z, \quad x^4 \equiv ct. \quad (4)$$

Часто також використовують позначення $x^i = (x, y, z, ct)$, або $x^i = (\vec{r}, ct)$.

2. Квадрат довжини цього вектора, як ми вже бачили, дорівнює:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 = inv. \quad (5)$$

Ця величина не змінюється при довільних поворотах чотиривимірної системи координат. Зокрема такими поворотами

є й перетворення Лоренца. Важливо зазначити, що координатна частина інтервалу не змінюється при звичайних тривимірних поворотах навколо початку координат, бо квадрат відстані до точки при поворотах системи координат не змінюється.

3. Зрозуміло, що 4-вектором може бути не лише сукупність координат деякої події. З геометричного погляду сукупність чотирьох чисел, що при довільних поворотах системи координат (включаючи і перетворення Лоренца) змінюється так само, як і x^i , називають **чотиривимірним вектором (4-вектором)** і позначають $A^i = (\vec{A}, A^4)$. Закон перетворення має вигляд:

$$A'^1 = \frac{A^1 - \frac{V}{c} A^4}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A'^2 = A^2, \quad A'^3 = A^3, \quad A'^4 = \frac{A^4 - \frac{V}{c} A^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (6)$$

Квадрат довжини довільного 4-вектора, очевидно, є величиною, що не змінюється при переходах від однієї системи координат до іншої,

$$(A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2 - (A^4)^2 = inv. \quad (7)$$

4. Для зручності запису вводять два типи величин: з індексами зверху A^i (контраваріантні) та з індексами внизу A_i (коваріантні).

Визначимо зв'язок між коваріантними та контраваріантними компонентами 4-вектора таким правилом:

$$A_1 = A^1, \quad A_2 = A^2, \quad A_3 = A^3, \quad A_4 = -A^4. \quad (8)$$

Отже, діє правило: підняття або опускання просторових індексів не змінює знак компоненти, а переміщення часового індексу змінює знак на протилежний. Перехід від контраваріантних до коваріантних компонентів вектора можна подати в такому вигляді:

$$A^i = (\vec{A}, \phi), \quad A_i = (\vec{A}, -\phi), \quad (9)$$

де ϕ – скаляр. Використовуючи ці позначення, квадрат 4-вектора набуває форми:

$$A^i A_i = A_i A^i = \sum_{i=1}^4 A^i A_i = A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 + A^4 A_4. \quad (10)$$

У цих та аналогічних виразах прийнято знак суми не писати, а мати на увазі, що якщо індекс повторюється двічі (один раз внизу і один раз вверху), то за ним необхідно взяти суму від 1 до 4. Такі індекси називають німими.

Для ортогональних систем координат різниці між коваріантними та контраваріантними величинами немає. Для косокутних координат різниця полягає в тому, що коваріантні компоненти утворюються при проектуванні точки шляхом опущення перпендикуляра, а контраваріантні – шляхом паралельного переносу (рис. 2).

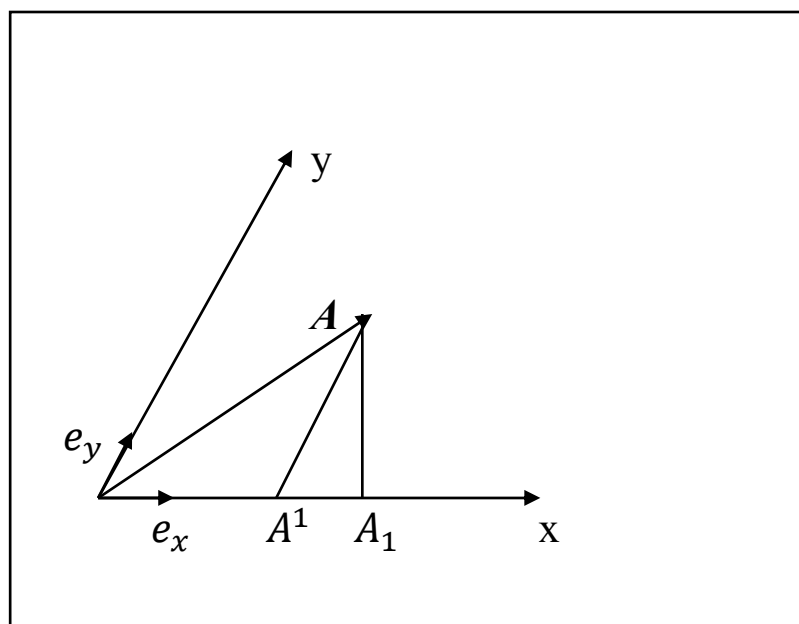


Рисунок 2

Використовуючи коваріантні та контраваріантні позначення, можемо записати основну властивість 4-вектора (6) у вигляді:

$$A'^i = a_k^i A^k, \text{ або } A'_i = a_i^k A_k. \quad (11)$$

Тобто, якщо при поворотах системи координат (включаючи і Лоренцові), деяка сукупність чотирьох величин перетворюється зазначеним способом, то вона має право називатися вектором

чотиривимірного простору. Вираз для матриці a_i^k легко записати безпосередньо з перетворень Лоренца:

$$a_i^k = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (12)$$

5. Аналогічно до тривимірного випадку можна ввести поняття скалярного добутку:

$$\begin{aligned} A^i B_i &= A_i B^i = \sum_{i=1}^4 A^i B_i = A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 + A^4 B_4 = \\ &= A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 + A_4 B^4. \end{aligned} \quad (13)$$

Взагалі, у парі німих індексів верхній та нижній індекс можемо змінювати місцями. Уведений так скалярний добуток є скаляром і не змінюється при довільних поворотах системи координат.

6. Квадрат 4-вектора може бути додатним, від'ємним і дорівнювати нулеві. Відповідно до цього будемо називати 4-вектори **просторовоподібними, часоподібними** або нульовими.

7. Просторові компоненти 4-вектора утворюють звичайний 3-вектор \vec{A} . Відносно тривимірного простору компонента A^4 є скаляром. Квадрат 4-вектора часто позначають таким чином:

$$\begin{aligned} A^i A_i &= A_i A^i = \sum_{i=1}^4 A^i A_i = A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 + A^4 A_4 = \\ &= A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3 + A_4 A^4. \end{aligned} \quad (14)$$

8. Аналогічно до тривимірного випадку 4-тензором другого рангу називають сукупність 16 величин, які при перетвореннях координат перетворюються на добуток двох 4-векторів:

$$T'^{ik} = a_i^l a_m^k T^{lm}. \quad (15)$$

9. Компоненти 4-тензора другого рангу можуть бути зображені у вигляді контраваріантному T^{ik} , коваріантному T_{ik} або змішаному T_k^i . При цьому діє загальне правило: підняття або опускання просторових індексів не змінює знак компоненти, а переміщення часового індексу змінює знак на протилежний:

$$T^{11} = T_{11}, T^{22} = T_{22}, T^{12} = T_{12}, T^{14} = -T_{14}, T^{44} = T_{44}. \quad (16)$$

10. Компоненти T^{ik} , де $i, k = 1, 2, 3$ утворюють звичайний тривимірний тензор. Компоненти T^{i4} та T^{4i} ($i = 1, 2, 3$) утворюють 3-вектори. Компонента T^{44} відносно тривимірного простору є скаляром.

11. Тензор T^{ik} називаємо симетричним, якщо $T^{ik} = T^{ki}$ та антисиметричним, якщо $T^{ik} = -T^{ki}$. В антисиметричного тензора всі діагональні компоненти дорівнюють нулеві, бо $T^{kk} = -T^{kk}$ лише за умови $T^{kk} = 0$.

12. Найважливіше правило, яким постійно користуються при обчисленнях: у будь-якій тензорній (зокрема і векторній) рівності вирази в обидвох частинах повинні містити однакові й однаково розташовані вільні індекси (німих індексів це, звісно, не стосується). Вільні індекси можемо переміщувати вгору або вниз, але обов'язково одночасно у всіх частинах рівності. Прирівнювати коваріантні та контрваріантні величини не можна.

Один з простіших тензорів другого рангу це, так званий, метричний тензор:

$$g^{ik} = g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Переходячи до іншої інерціальної системи, переконуємося, що цей тензор незмінний, тобто він є інваріантом відносно перетворень Лоренца. За допомогою метричного тензора зв'язок між коваріантними та контраваріантними компонентами 4-векторів набуває вигляду:

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k. \quad (18)$$

Очевидно, що:

$$g_i^k = \delta_k^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

§46. Диференціальні операції

Охарактеризуємо основні диференціальні операції чотиривимірного тензорного аналізу.

1. 4-градієнт деякого скаляра від контраваріантних змінних $\phi(x^1, x^2, x^3, x^4)$ має бути 4-вектором:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \left(\nabla \phi, \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right). \quad (1)$$

Для того, щоб визначити, який це вектор є (коваріантний чи контраваріантний), обчислимо повний диференціал скаляра ϕ :

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i. \quad (2)$$

Очевидно, що диференціал скаляра має бути також скаляром. Диференціали контраваріантних величин є контраваріантними величинами, а результатом множення є скаляр (величина, що не змінюється при переході від однієї системи координат до іншої). Необхідно зауважити, що інші співмножники (похідні) є величинами коваріантними.

Отже, при диференціюванні за контраваріантною змінною утворюється коваріантна величина i , навпаки, при диференціюванні за коваріантною змінною – контраваріантна.

Отже, величина $\partial \phi / \partial x^i$ є коваріантним градієнтом. Відповідно контраваріантний оператор градієнта має вигляд:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \left(\nabla \phi, -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right). \quad (3)$$

Часто вводять коваріантні та контраваріантні величини кажуть, що контраваріантний – це такий вектор, який перетворюється як компоненти вектора події, а коваріантний – це

вектор, який перетворюється як компоненти градієнта 4-вектора за контраваріантними змінними.

2. 4-дивергенція деякого 4-вектора A^i має бути скаляром, тобто інваріантом відносно перетворень Лоренца:

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial A^4}{\partial t}. \quad (4)$$

3. 4-ротор деякого 4-вектора A^i є антисиметричним тензором другого рангу:

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}. \quad (5)$$

4. Оператор Д'Аламбера в чотиривимірних позначеннях має вигляд:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k} = \nabla^2 - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t^2} = \blacksquare. \quad (6)$$

§47. 4-швидкість

У тривимірному просторі швидкість $\vec{u} = d\vec{r}/dt$ не є 4-вектором. Природно ввести 4-швидкість, як похідну від 4-радіус-вектора події за власним часом:

$$u^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tau}, \quad (1)$$

тому що і чисельник, і знаменник є 4-об'єктами. Користуючись цим означенням, можемо обчислити його компоненти. У виразі (1) перейдемо від диференціювання за власним часом до диференціювання за часом лабораторної системи координат:

$$u^1 = \gamma \frac{dx^1}{dt} = \gamma v_x, \quad u^2 = \gamma v_y, \quad u^3 = \gamma v_z. \quad (2)$$

Часова компонента, очевидно, дорівнює:

$$u^4 = \gamma \frac{dx^4}{dt} = \gamma \frac{dct}{dt} = \gamma c. \quad (3)$$

Тому повністю 4-вектор швидкості дорівнює:

$$u^i = (\gamma \vec{v}, \gamma c). \quad (4)$$

Для цього 4-вектора перевіримо, що квадрат його є інваріантом перетворення Лоренца. Інваріантність квадрата швидкості отримуємо майже автоматично:

$$u_i u^i = \gamma^2 (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - \gamma^2 c^2 = \frac{v^2 - c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -c^2. \quad (5)$$

§48. 4-прискорення

Цілком аналогічно до того, як було введено 4-швидкість, вводять 4-прискорення:

$$w^i = \frac{\partial u^i}{\partial \tau} = \frac{du^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{du^i}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} \left(\gamma \frac{dx^i}{dt} \right). \quad (1)$$

Диференціюючи співвідношення (5) §47 для квадрата 4-швидкості, матимемо:

$$u_i w^i = 0, \quad (2)$$

тобто вектори 4-швидкості та 4-прискорення взаємно ортогональні. Розглянемо окремо просторову та часову частини 4-прискорення $w^i = (\vec{w}, w^4)$:

$$\vec{w} = \gamma \frac{d}{dt} \left(\gamma \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \gamma (\dot{\gamma} \vec{v} + \gamma \dot{\vec{v}}) \quad (3)$$

Спочатку обчислимо похідну $\dot{\gamma}$:

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{2c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{d}{dt} (v^2). \quad (4)$$

Похідна від квадрата швидкості $\frac{d}{dt} (v^2) = 2(\vec{v}\dot{\vec{v}})$, тому рівняння (4) перетворюється до такого:

$$\dot{\gamma} = \frac{\gamma^3}{c^2} (\vec{v}\dot{\vec{v}}). \quad (5)$$

Для подальших обчислень прискорення врахуємо (5). Отже, просторові компоненти 4-прискорення визначаються з рівняння:

$$\vec{w} = \frac{\gamma^4 (\vec{v}\dot{\vec{v}})}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \dot{\vec{v}}. \quad (6)$$

Обчислимо часову компоненту, враховуючи значення $\dot{\gamma}$:

$$w^4 = \gamma \frac{d}{dt} \left(\gamma \frac{dx^4}{dt} \right) = \gamma c \frac{d}{dt} (\gamma) = \frac{\gamma^4}{c} (\vec{v}\dot{\vec{v}}). \quad (7)$$

Таким чином, вектор 4-прискорення записуємо у вигляді:

$$w^i = \left(\frac{\gamma^4 (\vec{v}\dot{\vec{v}})}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \dot{\vec{v}}, \quad \frac{\gamma^4}{c} (\vec{v}\dot{\vec{v}}) \right). \quad (8)$$

§49. Функції Лагранжа та Гамільтона в СТВ

Якщо 4-швидкість вже визначено, то 4-імпульс треба визначити як:

$$p^i = m u^i. \quad (1)$$

Так його й визначають, але визначення імпульсу згідно з (1) суперечить означенню функції Лагранжа, яким ми користувалися

у класичній механіці. Справді, для вільної матеріальної точки функція Лагранжа має вигляд:

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2}. \quad (2)$$

Кожна компонента узагальненого імпульсу обчислюється згідно з означенням як $p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}$. Якщо обчислити, наприклад, компоненту p_x за цією формулою, то одержимо $p_x = mv_x$, що не збігається з (1), $p_i = mv_x / \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Причина в тому, що слід перевизначити функцію Лагранжа.

Механіку релятивістських частинок зручно будувати, виходячи з *принципу найменшої дії*, добре відомого з класичної (нерелятивістської) механіки: **реалізується такий рух, для якого інтеграл дії S набуває мінімального значення.**

Визначимо дію S для вільної матеріальної частинки. Очевидно, що значення дії не повинно залежати від вибору системи відліку, тобто має бути лоренц-інваріантним. Однак для вільної частинки єдиним можливим інваріантом є інтервал. Отже, елементарна дія повинна бути пропорційною елементарному інтервалу:

$$dS \sim ds = icd\tau = icdt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (3)$$

де враховано зв'язок між власним часом $d\tau$ та інтервалом ds . Таким чином,

$$S = a \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad (4)$$

де a — деяка, ще не визначена, стала. Як відомо, дія S пов'язана з функцією Лагранжа співвідношенням $S = a \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$. Тому функція Лагранжа вільної частинки має вигляд:

$$\mathcal{L} = a \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (5)$$

Для визначення сталої a скористаємося граничним нерелятивістським випадком, $v/c \rightarrow 0$:

$$\mathcal{L} = a \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx a - \frac{av^2}{2c^2}. \quad (6)$$

Перший доданок є сталим, тобто не впливає на рух і може бути відкинутим. Другий має переходити на класичний вираз (2), звідки $a = -mc^2$. Враховуючи також можливі потенціальні взаємодії, запишемо остаточно функцію Лагранжа релятивістської частинки маси m , що рухається із швидкістю v у полі U :

$$\mathcal{L} = mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U(r). \quad (7)$$

Зроблене означення зобов'язує нас перевизначити відповідно енергію частинки та функцію Гамільтона, позаяк ці величини з функцією Лагранжа нерозривно пов'язані. Справді, енергія матеріальної точки

$$\begin{aligned} \varepsilon = \mathbf{p}\mathbf{v} - \mathcal{L} &= \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + U(r) \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + U(r) = \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + U(r). \end{aligned} \quad (8)$$

При обчисленні було враховано, що просторові компоненти 4-імпульсу дорівнюють $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$. При малих швидкостях цей вираз переходить в більш звичний:

$$\mathcal{E} \approx \frac{mv^2}{2} + U(r) + mc^2. \quad (9)$$

Вираз для функції Гамільтона можемо отримати, якщо запишемо енергію через узагальнені координати й узагальнені імпульси:

$$\mathcal{H} = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + U(r), \quad (10)$$

що для малих швидкостей переходить у

$$\mathcal{H} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m} + U(r). \quad (11)$$

Перший доданок хоча й великий, але постійний (і не впливає на рівняння руху), а інші два доданки задають добре відоме нерелятивістське значення енергії.

Отже, усіма необхідними перевизначеннями ми ввели 4-імпульс:

$$p^i = (\gamma m \vec{v}, \gamma mc). \quad (12)$$

Згадаємо також ще одне співвідношення, яке можна використовувати у квантовій механіці чи оптиці. Просторові компоненти 4-імпульсу пов'язані з просторовими компонентами швидкості формулою:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}. \quad (13)$$

З іншого боку, множник γm можна визначити, використовуючи (8) за умови $U(r) = 0$. Отримуємо:

$$m\gamma = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \quad (14)$$

і тому:

$$\vec{p} = \frac{\varepsilon}{c^2} \vec{v}. \quad (15)$$

Четверта компонента імпульсу:

$$\gamma mc = \frac{\varepsilon}{c^2} c = \frac{\varepsilon}{c}.$$

Бачимо, що вираз для 4-імпульсу можемо переписати у вигляді:

$$p^i = \left(\vec{p}, \frac{\varepsilon}{c} \right). \quad (16)$$

§50. Коваріантне рівняння руху

Рівняння Ньютона (а також рівняння Лагранжа) не інваріантні відносно перетворень Лоренца і тому не можуть адекватно описувати рух із швидкостями, порівняними зі швидкістю світла. Сформулюємо рівняння руху, яке б було інваріантним відносно перетворень Лоренца. Тобто, описувало рух із швидкістю, порівняною зі швидкістю світла, а при малих швидкостях переходило б у рівняння руху Ньютона. Уведемо поняття 4-сили $K^i = (\vec{K}, K^4)$ як

$$K^i = m w^i. \quad (1)$$

Аналогічно до 4-прискорення, 4-сила ортогональна до 4-швидкості (див. §48):

$$u_i K^i = 0. \quad (2)$$

Просторові компоненти пов'язані з тривимірним вектором сили співвідношенням:

$$\vec{K} = m \vec{w} = \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3)$$

Підставляючи цей вираз у (2), знаходимо рівняння:

$$u_i K^i = \frac{(\vec{v}\vec{F})}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{cK^4}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0, \quad (4)$$

звідки легко визначити часову компоненту 4-сили:

$$K^4 = \frac{1}{c} \frac{(\vec{v}\vec{F})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (5)$$

Отже, компоненти 4-сили (**4-сили Мінковського**), згідно з (4) і (5), мають вигляд:

$$K^i = \left(\gamma \vec{F}, \frac{\gamma}{c} (\vec{v}\vec{F}) \right). \quad (6)$$

Релятивістське рівняння руху набуває форми:

$$\frac{dp^i}{dt} = K^i. \quad (7)$$

Просторові компоненти цього рівняння утворюють релятивістське співвідношення між прискоренням і силою, що в граничному випадку малих швидкостей перетворюється на рівняння Ньютона. А часова компонента набуває вигляду:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (\vec{v}\vec{F}). \quad (8)$$

Тобто швидкість зміни енергії частинки дорівнює потужності сил, що діють на неї.

§51. 4-хвильовий вектор та ефект Доплера

Підхід, яким було введено 4-вектори, не є єдиним. Зараз ми введемо 4-вектори іншим чином, а водночас пояснимо важливий фізичний ефект – оптичний ефект Доплера.

Розглянемо деяку *плоску хвилю*. Просторово-часова залежність поля визначається експонентою

$$\exp(i\omega t + i\vec{k}\vec{r}).$$

За таким законом поширюються досить часто хвилі оптичного діапазону, радіохвилі, телевізійні сигнали. Мається на увазі, що вся залежність від часу та просторових змінних міститься в експоненті, а значення полів визначаються, якщо її домножити на постійний вектор (\vec{H}_0 – амплітуду поля).

Розглянемо умови, за яких значення полів є постійними. Очевидно, що поле має постійне значення тоді, коли фаза коливання $\vec{k}\vec{r} - \omega t$ дорівнює сталій. Розглянемо плоску хвилю в деякий момент часу t_0 . Умова постійності поля набуває вигляду:

$$\vec{k}\vec{r} - \omega t_0 = const, \quad (1)$$

що є рівнянням площини, перпендикулярної до вектора \vec{k} .

Можемо уявити собі поширення такої хвилі так. Постійне значення поля в деякий момент часу t_0 зосереджене на площині (1). При збільшенні t стала в правій частині рівняння (1) збільшується і площина, на якій поле незмінне, «рухається» перпендикулярно до напрямку вектора \vec{k} з фазовою швидкістю ω/k . Інше постійне значення поля розміщене на паралельній площині й рухається аналогічно. Тому цю модель хвилі й називають *плоскою*. Фаза $\vec{k}\vec{r} - \omega t$ є скаляром і тому не залежить від системи відліку, в якій її вимірювати. Вона є інваріантом перетворення:

$$k_x x + k_y y + k_z z - \frac{\omega}{c} ct = const. \quad (2)$$

Легко бачити, що вираз (2) є скалярним добутком двох 4-векторів, як його визначали раніше. Чотири множники $x, y, z, -ct$ є коваріантними координатами 4-вектора, після множення на інші чотири множники $k_x, k_y, k_z, \omega/c$ утворюється величина, що не залежить від системи відліку, отже маємо право назвати її *хвильовим 4-вектором* і позначити:

$$k^i = (k_x, k_y, k_z, \omega/c). \quad (3)$$

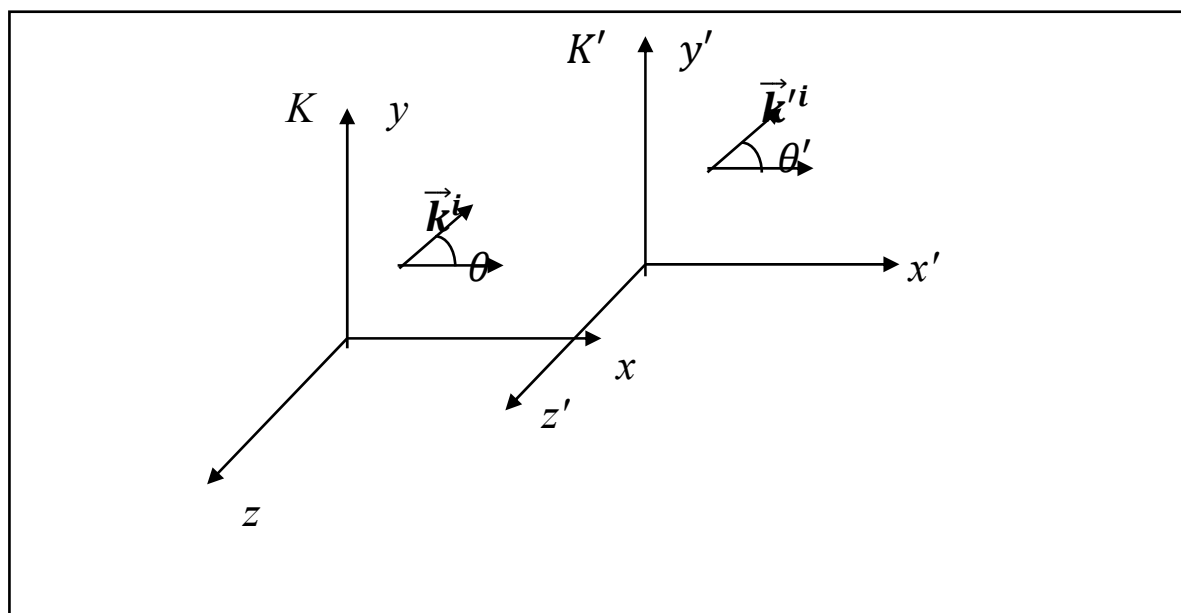


Рисунок 3

Як і належить 4-вектору, при переході до рухомої системи координат він перетворюється згідно з правил перетворення 4-векторів. Нехай у системі K' є джерело (рухається разом з K' відносно K) електромагнітної плоскої хвилі. Нехай також компоненти хвильового 4-вектора в системі K дорівнюють

$$k^i = (k_x, k_y, k_z, \frac{\omega}{c}), \quad (4)$$

а в системі K' , відповідно:

$$k'^i = (k'_x, k'_y, k'_z, \frac{\omega'}{c}). \quad (5)$$

Оскільки квадрат 4-вектора є інваріантом перетворення, то

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = k'^2 - \frac{\omega'^2}{c^2} = 0. \quad (6)$$

Цей квадрат дорівнює нулеві, позаяк йдеться про поширення світла зі швидкістю c , а тому інтервал – нульовий.

Нехай кут між віссю x і вектором k дорівнює θ (рис.3). Відповідно, між віссю x' та вектором k' – кут θ' . Тоді хвильові 4-вектори в системах K та K' запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} k^i &= \left(\frac{\omega}{c} \cos \theta, \frac{\omega}{c} \sin \theta, 0, \frac{\omega}{c} \right), \\ k'^i &= \left(\frac{\omega'}{c} \cos \theta', \frac{\omega'}{c} \sin \theta', 0, \frac{\omega'}{c} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

У цих виразах враховано, що хвильовий вектор відповідним поворотом системи координат можна розташувати в площині XOY . Запишемо перетворення Лоренца для переходу від системи координат K до K' для вектора k'^i :

$$k'_x = \frac{k_x - \frac{V}{c} \cdot \frac{\omega}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, k'_y = k_y, k'_z = k_z, \frac{\omega'}{c} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{V}{c} \cdot k_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (8)$$

Перепишемо четверте рівняння для ω' у вигляді:

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta}, \quad (9)$$

де враховано (7). Отримали точну формула для **ефекту Доплера** в оптиці.

Розглянемо три випадки.

Нехай $\theta = 0$. Він має місце, якщо рухома система координат «доганяє» систему K . Тоді співвідношення (9) спрощується до вигляду:

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c}} = \omega' \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}}. \quad (10)$$

У граничному випадку $V \ll c$ ця формула збігається з результатами класичної теорії: $\omega \approx \omega' (1 + \frac{V}{c})$. Джерело наближається до спостерігача і той сприймає збільшене значення частоти.

Розглянемо тепер випадок, коли рухома система координат віддаляється від системи K ($\theta = \pi$). У цьому випадку співвідношення (9) спрощується:

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c}} = \omega' \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}}. \quad (11)$$

Спостерігач буде фіксувати зменшене значення частоти. При $V \ll c$ маємо формулу, що збігається з класичною: $\omega \approx \omega' (1 - \frac{V}{c})$.

У випадку, коли система K' , пролітаючи повз K , випромінює електромагнітну хвилю в той момент, коли відстань між системами не змінюється (точно по перпендикуляру $\theta = \pi/2$). Тоді має місце так званий *поперечний ефект Доплера* з частотою:

$$\omega = \omega' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (12)$$

Цей ефект не має класичного пояснення, позаяк є цілком релятивістським. Він пов'язаний із тим, що час у цих двох системах координат «іде по-різному» (зверніть увагу на множник $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$). Цей ефект квадратичний, бо при малих швидкостях ω залежить від квадрата швидкості. Дійсно, у наближенні $V \ll c$ формула (12) набуває вигляду:

$$\omega \approx \omega' (1 - V^2/c^2).$$

Це дуже малі величини, тому експериментально його було досліджено лише в 1938 р. (експерименти Айвса на пучкові швидких атомів водню).

З ефектом Доплера тісно пов'язані деякі сучасні фізичні уявлення та моделі, які розглянуто пізніше.

§52. Червоний зсув

Нагадаємо, як в астрономії вимірюють відстані до зірок. Оскільки діаметр земної орбіти становить приблизно 300 млн км, то, вимірюючи кут між площиною земної орбіти та напрямом на зірку з інтервалом у півроку, можемо з прямокутного трикутника визначити катет (відстань до зірки) за відомим кутом і другим катетом (рис.4).

Проте зазначеним способом можна виміряти лише відстані, не більші ніж 300 світлових років. Але ж відомо, що Всесвіт – весь матеріальний світ, що досяжний для спостережень – має набагато більші розміри, 10 млрд світлових років (вік Всесвіту – 10 - 20 млрд років). Термін «розмір Всесвіту» потребує уточнення.

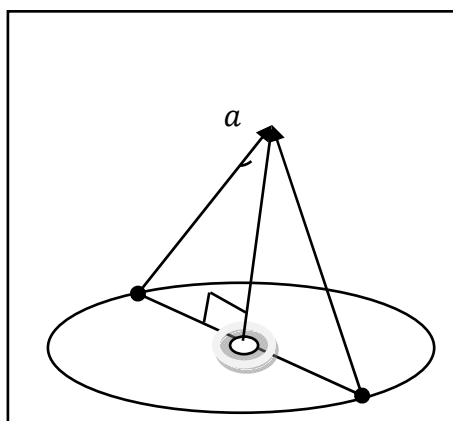


Рисунок 4

Принципово інша можливість вимірювання відстаней виникла з 1929 р. Як виявилось, Всесвіт «розширюється», тобто Галактики «розбігаються» одна від одної. Цей факт був встановлений *експериментально Хабблом (1929)* за зміщенням положення спектральних ліній хімічних елементів у спектрах далеких зірок. Якщо спрямувати спектральний прилад на віддалену зірку, весь спектр як ціле буде зсунуто в бік більших довжин хвиль (у бік інфрачервоного діапазону). Причому величина цього зсуву тим більша, чим далі від нас перебуває зірка. Оскільки «зсув» відбувається у бік збільшення довжин

хвиль, то явище має назву *червоний зсув*. Якщо відстань до галактики позначити через R , а радіальну компоненту швидкості її віддалення – dR/dt , то закон, установлений Хабблом, матиме вигляд:

$$\frac{dR}{dt} = H \cdot R, \quad (1)$$

де $H \approx (50 - 100) \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}} \approx (1.6 - 3.2) \cdot 10^{-18} \frac{1}{\text{с}}$. Величина H називається *сталю Хаббла*. Вимірявши величину зсуву в одиницях довжини хвилі, неважко перейти до частотного зсуву. Яка саме частота випромінюється, – відомо з лабораторних експериментів. Вимірюване значення частоти також відоме. Тому можна обчислити швидкість «віддалення» зірки. А тоді, відповідно до формули (1) можна знайти відстань до неї.

Експерименти, виконані Хабблом, дали змогу зробити вибір між двома моделями Всесвіту, що були відомі на той час. У 1915 р. Ейнштейн остаточно сформулював рівняння загальної теорії відносності. Практично відразу він знайшов розв'язок цих рівнянь, який існує лише при додатковому включенні в рівняння так званої космологічної сталої, що визначається середньою густиною речовини Всесвіту. Цей розв'язок тепер називають *стаціонарною моделлю Всесвіту*. Згідно з ним, Всесвіт мав бути в середньому стаціонарний, незмінний з постійним значенням «розміру». У 1922 р. Фрідман отримав розв'язок тих самих рівнянь для випадку нульового значення космологічної сталої, який тепер називають *нестационарною моделлю Всесвіту*. Відповідно до нього, приблизно 10 - 20 млрд років тому Всесвіт утворився з надзвичайно малого об'єму завдяки початковому вибуху і сьогодні процес розширення продовжується. Через багато мільярдів років він зміниться на зворотний. Експериментальні дослідження Хаббла дали можливість визначити космологічну сталу. За сучасними космологічними даними, вона або нульова, або надзвичайно мала (менша за 10^{-51}см^{-2}). Отже, дослідження Хаббла підтвердили модель нестационарного Всесвіту.

Щодо поняття «розмір Всесвіту», слід зробити декілька зауважень. Одразу ж звернемо увагу на те, що йдеться про настільки незвичні для нас масштаби, що не маємо жодних підстав переносити наші повсякденні уявлення на цей діапазон (як не маємо права переносити результати макроскопічних

спостережень на певні явища мікросвіту). Зокрема, як з'ясувалося, наші уявлення про однорідний, ізотропний простір справедливі лише в межах звичних для нас відстаней та об'ємів. Постулати про паралельні прямі, суму кутів трикутника, евклідову геометрію тощо треба сприймати як моделі, що добре працюють, для відносно малих просторових об'ємів, які, як кажуть, локально евклідові. А для розмірів, набагато більших за звичні, треба дещо змінювати свої уявлення. Виявляється, простір Всесвіту «кривий», якщо мати на увазі досить великі відстані. Можна навіть обчислити кривизну нашого трьохвимірнього простору, як це свого часу зробив Ріман – побудував функцію, яка є кривизною тривимірнього простору. Певна річ, зрозуміти, що тривимірний простір кривий, досить важко. Ми добре розуміємо, що деяка поверхня може бути кривою і розуміємо, що таке радіус кривизни цієї поверхні. Виявляється, що кривою може бути не лише поверхня, але й простір. Це знаходить своє відображення в тому, що в кривому просторі сума кутів трикутника не дорівнює 180° . Але щоб це виявити, треба брати досить великий трикутник.

Яке поняття у нас з вами асоціюється з прямою лінією? Найкраще, напевно, світловий промінь. Та якщо спрямувати промінь у деякому напрямку і почекати досить довго (10 млрд років), то він до нас повернеться, але, з іншого боку, це тому, що його поширення відбувається прямолінійно (за нашими уявленнями) лише для відносно малих об'ємів (для них якраз і можемо вважати геометрію локально евклідовою).

Коли намагаються пояснити ці поняття, то вдаються до такого прикладу. Уявімо собі сферу досить великих розмірів і нехай на поверхні цієї сфери мешкають двовимірні істоти – вони розуміють тільки дві координатні осі (а ми, відповідно, лише три). Що таке третя координатна вісь, вони не розуміють. Якщо на своїй сфері вони малюють невеличкий трикутник, то сума кутів такого трикутника дорівнює 180° : їхня геометрія локально евклідова. Але якщо вони намалюють досить великий трикутник (розміри сторін, порівняно з радіусом сфери), то сума кутів такого трикутника буде більшою за 180° . Їм важко зрозуміти в чому справа. Промінь, який вони випромінюють у одному напрямку повертається до них з іншого боку (нехай у них і світло також не буде мати третьої координати). Проте нам з вами все

очевидно – їхній світ кривий, позаяк сфера має скінчений радіус. Щоправда, цю аналогію не варто механічно переносити на тривимірний простір.

Наведений приклад допомагає якось пережити (але не зрозуміти), чому наш Всесвіт має скінченні розміри, але до межі його дійти неможливо.

Гравітаційний червоний зсув

Історично склалося так, що термін «червоний зсув» використовують також для подібного явища. Зміщення спектральних ліній у червоний бік може відбуватися також і під впливом гравітаційного поля матеріальних тіл. Один із висновків загальної теорії відносності полягає в тому, що годинники в полі тіл різної маси йдуть по-різному. Так, наприклад, годинник на поверхні Сонця повинен іти повільніше, ніж на поверхні Землі. Поблизу поверхні Землі різниця висот двох годинників в 1 м приводить до різниці показань цих годинників приблизно на 10^{-16} с. Нижній годинник іде повільніше. Така мала величина значно ускладнювала безпосередні виміри в земних умовах. Проте до 60-их років цей ефект спостерігали в спектрах Сонця та інших масивних зірок. Необхідні для вимірів надточні годинники були створені в 60-х роках. З цього часу цей ефект можна спостерігати в лабораторних умовах.

§53. 4-вектор струму

Розглянемо закон збереження заряду в диференціальній формі. Нагадаємо, що це рівняння є лоренц-інваріантним, позаяк це наслідок рівнянь Максвелла. Записавши його у вигляді

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial (c\rho)}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

бачимо, що в (1) диференціювання йде за контраваріантними змінними (результуюча величина – коваріантна). Уводячи до розгляду контраваріантний вектор:

$$j^i = (j_x, j_y, j_z, c\rho) = (\vec{j}, c\rho) = \rho \frac{\partial x^i}{\partial t}, \quad (2)$$

можемо написати (1) у вигляді скалярного добутку двох 4-векторів, адже при множенні цих векторів утворюється величина, що не залежить від системи спостереження – інваріант перетворення.

Таким чином, у коваріантній формі закон збереження заряду набуває вигляду:

$$\frac{\partial j^k}{\partial x^k} = 0. \quad (3)$$

Тобто, 4-дівергенція 4-вектора струму дорівнює нулеві. Користуючись загальним правилом перетворення 4-векторів, одержимо:

$$j'_x = \frac{j_x - v\rho}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z, \quad \rho' = \frac{\rho - \frac{v}{c^2}j_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (4)$$

Нехай у системі координат K' заряди були нерухомі, $\vec{j}' = 0$. Згідно з формулами перетворення (4), у лабораторній системі координат:

$$\vec{j} = \frac{\rho' \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (5)$$

У граничному випадку $V \ll c$ маємо класичний результат:

$$\vec{j} = \rho' \vec{v}. \quad (6)$$

§54. 4-вектор потенціал

Розглянутий приклад для 4-струму можна розповсюдити на 4-потенціал. Пригадаємо лоренцеву калібровку і запишемо її також покоординатно:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

що цілком аналогічно до попереднього випадку. Тому можемо побудувати ще один 4-вектор потенціал. Його просторова частина є векторним потенціалом, а часова – скалярний. Лоренцева калібровка у коваріантному вигляді має досить компактний вигляд:

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0, \quad (2)$$

тобто знову нульове значення 4-дівергенції. Перетворення Лоренца для A^i мають вигляд:

$$A'_x = \frac{A_x - \frac{v}{c} \phi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z, \quad \phi' = \frac{\phi - \frac{v}{c} A_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3)$$

Побудуємо тепер рівняння для потенціалів у коваріантній формі. Завдяки тому, що оператор Д'Аламбера є лоренц-інваріантним, можемо відразу переписати рівняння Д'Аламбера як

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k} \vec{A} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k} \phi &= -\frac{4\pi}{c} (c\rho). \end{aligned} \quad (4)$$

Використовуючи релятивістські позначення $A^i = (\vec{A}, \phi)$ і $j^i = (\vec{j}, c\rho)$, маємо остаточно:

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j^i, \quad (5)$$

Формула (5) – рівняння д'Аламбера для 4-вектора потенціалу.

§55. Тензор електромагнітного поля

Щойно ми показали, що векторний потенціал \vec{A} та скалярний потенціал ϕ утворюють 4-вектор. Для обчислення компонентів магнітної індукції, треба визначити ротор від \vec{A} . Нагадаємо, що аналогом ротора в СТВ є тензор. Позначивши 4-ротор як F^{ik} , запишемо, що

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^k}, \quad (1)$$

тому цей тензор антисиметричний: $F^{ik} = -F^{ki}$ (і відповідно всі діагональні елементи дорівнюють нулеві: $F^{ii} = 0$). Обчислимо його компоненти:

$$\begin{aligned} F^{12} &= \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z, \\ F^{13} &= \frac{\partial A^3}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^3} = \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = -B_y, \\ F^{14} &= \frac{\partial A^4}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^4} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = -E_x, \\ F^{23} &= \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x, \\ F^{24} &= \frac{\partial A^4}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^4} = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} = -E_y, \\ F^{34} &= \frac{\partial A^4}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^4} = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} = -E_z, \end{aligned} \quad (2)$$

З урахуванням антисиметричності тензора F^{ik} , який називають *тензором електромагнітного поля*, отримаємо його вигляд:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & E_x \\ -B_z & 0 & B_x & E_y \\ B_y & -B_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Вираз (4) – це коваріантна форма запису тензора електромагнітного поля. Звернемо увагу на різну симетрію «електричної» та «магнітної» частини тензора електромагнітного поля. Компоненти вектора \vec{E} утворюються вектор-стовпчик і вектор-рядок у складі тензора електромагнітного поля. Компоненти \vec{B} розташовані в F^{ik} у тензорній формі так, ніби вони не утворювали вектор. Причина полягає в тому, що електричне поле – справжній (полярний вектор), а магнітне – псевдовектор (аксіальний).

Нагадаємо, що до полярних векторів належать такі векторні величини, що змінюють знак при інверсії декартових осей координат. Таку властивість мають, очевидно, швидкість, прискорення, імпульс, електричне поле (адже $\vec{E} \sim \vec{r}/r^3$) і деякі інші. Але легко бачити, що такі векторні величини, як момент імпульсу, момент сили та взагалі ті, що пропорційні векторним добуткам, не змінюють знак при інверсії координат, позаяк у векторному добутку двох полярних векторів при інверсії кожний співмножник змінить знак, а добуток у цілому знак не змінить. Отже, такою простою та природною властивістю названі величини не наділені. Їх називають псевдовекторами, або аксіальними векторами. До таких, звісно, належать і магнітне поле $\vec{B} \sim [\vec{j} \times \vec{r}]/r^3$, магнітний момент і деякі інші величини.

Для пояснення їхньої матричної природи наведемо невеличкий суто математичний приклад. Нехай потрібно наведену нижче матрицю помножити справа на вектор-стовпчик. Зробити це легко і результат запишемо одразу:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Результат множення такої спеціальної матриці на вектор-стовпчик дуже подібний на векторний добуток двох векторів: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ та $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Проте, першим співмножником є наведений псевдовектор.

Таким чином, з'ясувалося, що електричне та магнітне поля є єдиною, нероздільною субстанцією. Вони є компонентами однієї й тієї самої величини – тензора електромагнітного поля (3), (4). Магнітне поле є антисиметричним тензором другого рангу в тривимірному просторі, а електричне поле – тривимірним вектором. Отже, теорія відносності допомогла виявити математичну природу магнітного поля.

§56. Коваріантний вигляд рівнянь Максвелла

Досить висока симетрія тензора електромагнітного поля зумовлює зв'язок між його компонентами:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{lk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0. \quad (1)$$

Дійсно, переписавши цей вираз у позначеннях 4-вектора потенціалу, тобто використовуючи (1) з §55, матимемо:

$$\left(\frac{\partial^2 A_k}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 A_l}{\partial x^k \partial x^i} \right) + \left(\frac{\partial^2 A_l}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^l \partial x^i} \right) + \left(\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial^2 A_l}{\partial x^i \partial x^k} \right) = 0, \quad (2)$$

де враховано, що в мішаних похідних можна змінити порядок диференціювання. і

Для знаходження нетривіальних диференціальних співвідношень з (1) слід для трьох індексів i, k, l перебрати всі можливі сполуки з чотирьох чисел по три. Таких нетривіальних рівнянь є чотири:

	k	l
1	2	3
1	2	4
1	3	4
2	3	4

$$\frac{\partial F^{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^3} = 0, \quad (\operatorname{div} \vec{B} = 0),$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial F^{43}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{24}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{23}}{\partial x^4} = 0 \\ \frac{\partial F^{34}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{41}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x^4} = 0 \\ \frac{\partial F^{42}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{14}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^4} = 0 \end{array} \right|, \quad \left(\text{rot} \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0 \right). \quad (3)$$

Таким способом записано в чотирьохвимірних позначеннях першу пару рівнянь Максвелла.

Для знаходження другої пари рівнянь скористаємось рівнянням д'Аламбера в чотиривимірних позначеннях. Підставляючи явний вираз для 4-вектор-потенціалу через тензор електромагнітного поля, матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^i \partial x_k} &= - \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial A^k}{\partial x^k} \right) - \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^i \partial x_k} \right\} = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = - \frac{4\pi}{c} j^i, \end{aligned} \quad (4)$$

де враховано, що $\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0$ (калібровка Лоренца). Отже,

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i. \quad (5)$$

Розпишемо це співвідношення в тривимірному вигляді:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial F^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{14}}{\partial x^4} = \frac{4\pi}{c} j^1 \\ \frac{\partial F^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{24}}{\partial x^4} = \frac{4\pi}{c} j^2 \\ \frac{\partial F^{31}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{32}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{33}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{34}}{\partial x^4} = \frac{4\pi}{c} j^3 \end{array} \right|, \quad \left(\text{rot} \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{\mathbf{J}} \right), \quad (6)$$

$$\frac{\partial F^{41}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{42}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{43}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{44}}{\partial x^4} = \frac{4\pi}{c} j^4,$$

$$(\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho).$$

Тобто, отримали другу пару рівнянь Максвелла.

Повна система рівнянь Максвелла-Лоренца в коваріантній формі набуває вигляду:

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i, \quad (7)$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^k} = 0.$$

§57. Перетворення Лоренца для поля

Завдяки тому, що складові поля є компонентами 4-тензора, закон перетворення полів при переході від однієї системи координат до іншої можемо отримати лише як закон перетворення компонентів тензора:

$$F'^{\mu\nu} = a_i^\mu a_k^\nu F^{ik}. \quad (1)$$

Оскільки кожен тензор другого рангу F^{ik} може бути зображений як зовнішній добуток двох векторів $F^{ik} = G^i T^k$, то закон перетворення деякої компоненти тензора можемо отримати, перетворивши кожен співмножник та потім перемноживши їх.

Випишемо у два стовпчики закони перетворення компонентів G^i і T^k і утворимо всі можливі добутки цих величин:

$$\begin{aligned} G'^1 &= \gamma(G^1 - \beta G^4), & T'^1 &= \gamma(T^1 - \beta T^4), \\ G'^2 &= G^2, & T'^2 &= T^2, \\ G'^3 &= G^3, & T'^3 &= T^3, \\ G'^4 &= \gamma(G^4 - \beta G^1), & T'^4 &= \gamma(T^4 - \beta T^1). \end{aligned} \quad (2)$$

Врахуємо також, що тензор електромагнітного поля є антисиметричним.

Оскільки координати x^2 і x^3 не змінюються, залишиться незмінною також компонента F^{23} (тобто $H'_x = H_x$). Для компоненти F^{12} перетворення має вигляд:

$$F'^{12} = G'^1 T'^2 = \gamma(G^1 - \beta G^4) T^2 = \gamma(F^{12} - \beta F^{42}) \quad (3)$$

або

$$B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y).$$

Цілком аналогічно для F^{13} :

$$F'^{13} = \gamma(F^{13} - \beta F^{43})$$

або

$$-B'_y = \gamma(-B_y - \beta E_z). \quad (4)$$

Легко побачити, що компонента тензора електромагнітного поля F^{14} не змінюється при перетвореннях Лоренца (тобто $E'_x = E_x$). Дійсно, для неї маємо таку низку рівностей:

$$\begin{aligned} F'^{14} &= G'^1 T'^4 = \gamma^2(G^1 - \beta G^4)(T^4 - \beta T^1) = \\ &= \gamma^2(G^1 T^4 - \beta G^4 T^4 - \beta T^1 G^1 + \beta^2 T^1 G^4) = \\ &= \gamma^2(F^{14} + \beta^2 F^{41}) = \gamma^2(1 - \beta^2)F^{14} = F^{14}. \end{aligned} \quad (5)$$

Розпишемо аналогічно решту компонентів:

$$F'^{24} = G'^2 T'^4 = \gamma G^2(T^4 - \beta T^1) = \gamma(F^{24} - \beta F^{21})$$

або

$$-E'_y = \gamma(-E_y + \beta B_z), \quad (6)$$

$$F'^{34} = G'^3 T'^4 = \gamma G^3(T^4 - \beta T^1) = \gamma(F^{34} - \beta F^{31})$$

або

$$-E'_z = \gamma(-E_z + \beta B_y).$$

Перетворення тривимірних компонентів неважко записати у досить компактному вигляді, якщо розкласти поле на поздовжні та поперечні до напрямку руху складові:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}, & \vec{E}_{\parallel} &= (E_x, 0, 0), & \vec{E}_{\perp} &= (0, E_y, E_z), \\ \vec{B} &= \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}, & \vec{B}_{\parallel} &= (B_x, 0, 0), & \vec{B}_{\perp} &= (0, B_y, B_z).\end{aligned}\quad (7)$$

Позначимо $\vec{V}=(V,0,0)$ і врахуємо, що

$$\begin{aligned}[\vec{V} \times \vec{B}_{\perp}] &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ V & 0 & 0 \\ 0 & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\vec{e}_y V B_z + \vec{e}_z V B_y, \\ [\vec{V} \times \vec{E}_{\perp}] &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ V & 0 & 0 \\ 0 & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\vec{e}_y V E_z + \vec{e}_z V E_y.\end{aligned}\quad (8)$$

Тоді формули для перетворень полів можна подати у формі:

$$\begin{aligned}\vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, & \vec{E}'_{\perp} &= \frac{\vec{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\vec{V} \times \vec{B}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel}, & \vec{B}'_{\perp} &= \frac{\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c} [\vec{V} \times \vec{E}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.\end{aligned}\quad (9)$$

Формули для оберненого переходу, як завжди, отримуємо, помінявши знак у швидкості та виконавши взаємну заміну штрихованих і нештрихованих змінних:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\vec{V} \times \vec{B}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \quad \vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c}[\vec{V} \times \vec{E}_{\perp}]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (10)$$

Досить часто ці формули використовують у лінійному наближенні за малим параметром $V/c \ll 1$. Запишемо ці формули у вигляді:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{V} \times \vec{B}], \quad \vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c}[\vec{V} \times \vec{E}]. \quad (11)$$

Отже, якщо в рухомій системі координат магнітне поле відсутнє, $H' = 0$, то між електричним і магнітним полями існує співвідношення:

$$\vec{B} = \frac{1}{c}[\vec{V} \times \vec{E}]. \quad (12)$$

З (12) видно, що заряд рухається зі швидкістю V , утворює магнітне поле (12). Такий результат збігається з відомим магнітостатичним результатом.

Наприкінці цього розділу вкажемо, що з векторів \vec{E} і \vec{B} можна побудувати інваріантні величини відносно переходів до інших інерціальних систем координат. Для побудови інваріантів розглянемо комплексний вектор:

$$\vec{F} = \vec{E} + i\vec{B}. \quad (13)$$

Використовуючи формули перетворення полів (9), легко показати, що формули перетворення для цього вектора мають вигляд:

$$\begin{aligned} F_x &= F'_x, \\ F_y &= F'_y \cos i\psi - F'_z \sin i\psi, \\ F_z &= F'_z \cos i\psi + F'_y \sin i\psi, \end{aligned} \quad (14)$$

де $\text{th}\psi = V/c$. Бачимо, що перетворення Лоренца для вектора \vec{F} еквівалентне повороту на уявний кут у площині YOZ. Єдиним інваріантом відносно такого повороту є квадрат вектора:

$$F^2 = E^2 - B^2 + 2i(\vec{E} \cdot \vec{B}). \quad (15)$$

Відокремлюючи дійсну та уявну частини, маємо остаточно, що інваріантом електромагнітного поля є комбінації:

$$E^2 - B^2 = inv, \quad (\vec{E} \cdot \vec{B}) = inv. \quad (16)$$

Наприклад, якщо в деякій системі відліку електричне та магнітне поле взаємно ортогональні, то ця властивість буде зберігатися для будь-якої системи відліку.

§58. Тензор енергії-імпульсу електромагнітного поля

У попередніх параграфах ми розглядали коваріантність законів електродинаміки для густини зарядів-струмів та полів, що створені ними. Відомо, що струми зумовлені рухом заряджених частинок під дією полів. Відповідно, для повного аналізу необхідно також розглянути коваріантне формулювання для сили Лоренца та законів збереження енергії й кількості руху.

Силу Лоренца, що діє на одиницю об'єму (густину сили Лоренца), можна записати у вигляді:

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}. \quad (1)$$

Розпишемо векторний добуток і випишемо явно першу складову:

$$f_1 = f_x = \rho E_x + \frac{1}{c} (j_y B_z - j_z B_y) = \frac{1}{c} (j_4 F_{14} + j_2 F_{12} + j_3 F_{13}). \quad (2)$$

Інші дві компоненти сили записуються аналогічно та їх можна подати у вигляді:

$$f_k = \frac{1}{c} F_{kv} j_v, \quad (3)$$

де $k = 1, 2, 3$. Праві частини виразу (3) є просторовими складовими 4-вектора. Відповідно, і сила повинна бути просторовою частиною 4-вектора сили. Тому при $k = 4$ можна отримати четверту складову 4-вектора сили Лоренца:

$$\begin{aligned} f_4 &= \frac{1}{c} (F_{41}j_1 + F_{42}j_2 + F_{43}j_3 + F_{44}j_4) = \\ &= \frac{1}{c} (-E_x j_x - E_y j_y - E_z j_z) = -\frac{1}{c} \vec{E} \vec{j}. \end{aligned} \quad (4)$$

$\vec{E} \vec{j}$ – це робота, що здійснюється полем над зарядами в одиничному об’ємі за одиницю часу, тобто швидкість зміни механічної енергії частинок в одиниці об’єму. Таким чином видно, що в записаній коваріантній формі рівняння (3) для сили Лоренца, просторова частина визначає швидкість зміни кількості руху одиниці об’єму, а часова частина – швидкість зміни механічної енергії одиниці об’єму. Інакше кажучи, складові сили Лоренца визначають просторові й часові похідні деякої величини з розмірністю повної енергії.

З рівнянь Максвелла (5) §56 визначимо густину 4-струму і підставимо у (3):

$$f_k = \frac{1}{4\pi} F_{kv} \frac{\partial F_{vm}}{\partial x_m}. \quad (4)$$

Праву частину співвідношення (4) можна записати як 4-дивергенцію тензора другого рангу: Для цього введемо симетричний тензор енергії-імпульсу:

$$T_{kv} = \frac{1}{4\pi} (F_{km} F_{mv} + \frac{1}{4} \delta_{kv} F_{mn} F_{mn}). \quad (5)$$

З урахуванням (5) вираз (4) набуде вигляду:

$$f_k = \frac{\partial T_{kv}}{\partial x_v}. \quad (6)$$

Отже, закони збереження імпульсу та енергії є тримірними інтегралами чотиривимірного рівняння (4).

Питання і тести для самоконтролю

Тестове завдання №1

Необхідно вибрати одну відповідь.

1. Перетворення Галілея мають вигляд:

$$\begin{array}{llll} x' = x - vt, & x' = x - vt, & x' = x - vt, & x' = x - vt, \\ y' = y - vt, & y' = y, & y' = y - vt, & y' = y - vt, \\ \text{а) } z' = z - vt, & \text{б) } z' = z, & \text{в) } z' = z - vt, & \text{г) } z' = z - vt, \\ t' = t, & t' = t, & t' = t - \frac{x}{v}, & t' = t - \frac{x}{v}, \end{array}$$

2. Перетворення просторової частини мають вигляд:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } x' = x \cdot \cos \phi + y \cdot \sin \phi, & \text{б) } x' = -x \cdot \cos \phi + y \cdot \sin \phi, \\ y' = -x \cdot \sin \phi + y \cdot \cos \phi, & y' = x \cdot \sin \phi + y \cdot \cos \phi, \\ \text{в) } x' = -x \cdot \cos \phi - y \cdot \sin \phi, & \text{г) } x' = x \cdot \cos \phi - y \cdot \sin \phi, \\ y' = x \cdot \sin \phi - y \cdot \cos \phi, & y' = -x \cdot \sin \phi - y \cdot \cos \phi. \end{array}$$

3. Записати перетворення Лоренца:

$$\text{а) } x' = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$\text{б) } x' = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = \frac{y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad z' = \frac{z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = t;$$

$$\text{в) } x' = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$\text{г) } x' = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t + \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

4. Скільки вимірів має дійсний світ згідно з СТВ?

а) три; б) два; в) чотири; г) n -ну кількість.

5. 4-мірний ротор електромагнітного поля:

$$\text{а) } F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^k}, \quad \text{б) } F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^k}, \quad \text{в) } F^i = \frac{\partial A^k}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^k}, \quad \text{г) } F^{ik} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} - \frac{\partial A^k}{\partial x^i}.$$

6. Тензор електромагнітного поля ϵ :

а) симетричним; б) антисиметричним; в) полярним; г) аксіальним.

7. Між електричним і магнітним полями існує співвідношення:

а) $\vec{B} = \frac{1}{c}[\vec{V} \times \vec{E}]$, б) $\mathbf{B} = \frac{1}{c}[\mathbf{V}, \mathbf{E}]$, в) $\vec{B} = \frac{1}{c}(\vec{V} \cdot \vec{E})$, г) $\vec{B} = \frac{1}{c^2}(\vec{V} \cdot \vec{E})$.

8. 4-мірний вектор ϵ тензором якого рангу?

а) 0; б) 1; в) 2; г) 4.

9. Вираз для 4-мірного прискорення:

а) $b_1 = \frac{d^2}{dt^2}(U_x)$, б) $b_1 = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{U_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$,

в) $b_1 = \frac{d}{dt}(U_x) \frac{dt}{d\tau}$, г) $b_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{U_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \frac{dt}{d\tau}$.

10. Вибрати правильний запис 4-мірного градієнта:

а) $(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}, \frac{\partial \phi}{\partial t})$,; б) $(\frac{d\phi}{dx_1}, \frac{d\phi}{dx_2}, \frac{d\phi}{dx_3}, \frac{d\phi}{dx_4})$,;

в) $(\frac{d\phi}{dx_1}, \frac{d\phi}{dx_2}, \frac{d\phi}{dx_3}, \frac{d\phi}{dt})$,; г) $(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}, \frac{\partial \phi}{\partial x_4})$.

Відповіді: 1 – б, 2 – а, 3 – в, 4 – в, 5 – а,
6 – б, 7 – а, 8 – б, 9 – г, 10 – г.

Тестове завдання №2

Доповніть речення або впишіть правильну відповідь.

1. *Запишіть перетворенням Галілея.*

2. *Сформулюйте два положення принципу відносності Ейнштейна.*

3. *Запишіть перетворення Лоренца.*

4. *Сформулюйте принцип відносності класичної механіки.*

5. *Запишіть вираз для інтервалу.*

6. *Запишіть обернені перетворення Лоренца.*

7. *Який інтервал називають світлоподібним (або нульовим)?*

8. *Дайте означення власного часу.*

9. *Що таке скорочення Лоренца?*

10. *Електричне поле – справжній (полярний вектор), а магнітне?*

11. *Вкажіть комбінації, що є інваріантом електромагнітного поля.*

12. *Запишіть вираз для 4-мірного потенціалу.*

13. *Запишіть вираз для 4-мірної густини струму.*

14. *Дайте означення 4-мірних тензорів електромагнітного поля.*

15. *Запишіть рівняння Максвелла-Лоренца у коваріантній формі.*

Приклади розв'язування задач

Задача № 1.

Обчислити потенціали електромагнітного поля, що створені у вакуумі точковим зарядом q , який рухається рівномірно і прямолінійно із швидкістю v .

Розв'язок

У власній системі відліку K_0 , відносно якої заряд q не рухається у початку координат, поле в абсолютній системі одиниць визначається потенціалами:

$$A = 0, \quad \varphi_0 = -iA_{04} = \frac{q}{r_0}.$$

У лабораторній системі відліку K , відносно якої заряд рухається із швидкістю v вздовж осі x , одержимо:

$$A_1 = \frac{A_1^0 - i\beta A_4^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \varphi_0; \quad A_2 = A_3 = 0;$$
$$A_4 = \frac{i\beta A_1^0 + A_4^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = i \frac{\varphi_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Взявши до уваги те, що

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \frac{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

одержимо:

$$\varphi_0 = \frac{q}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}}; \quad A = \frac{v}{c} \varphi$$

Задача № 2.

Вивести формули перетворення для дипольних моментів (електричного й магнітного), при переході до рухомої системи відліку.

Розв'язок

З того, що вектор поляризації \vec{P} і вектор намагнічування \vec{M} утворюють 4-тензор, впливають формули перетворення для цих

векторів. Дипольні моменти, електричний (\vec{p}) і магнітний (\vec{m}), перетворюються, відповідно, як добуток PV і MV , де

$$V = V_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

Таким чином одержимо, що

$$p_x = p_{0x} \sqrt{1 - \beta^2}; p_y = p_{0y} - \beta m_{0z}; p_z = p_{0z} + \beta m_{0y},$$

$$m_x = m_{0x} \sqrt{1 - \beta^2}; m_y = m_{0y} + \beta p_{0z}; m_z = m_{0z} - \beta p_{0y},$$

де p_0 і m_0 – дипольні моменти у власній системі відліку, відносно якої воно перебуває в спокої, а p і m – дипольні моменти у системі відліку, відносно якої тіло рухається зі швидкістю $v = v_x = c\beta$.

Задача № 3.

Нерухомий діелектрик має показник заломлення n_0 . Як зміниться його показник заломлення, якщо діелектрик рухається з постійною швидкістю v .

Розв'язок

Для матеріального середовища з показником переломлення n , хвильовий вектор

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} n \vec{k}_0,$$

де \vec{k}_0 – одиничний вектор напрямку поширення хвилі.

Записавши перетворення Лоренца для 4-мірного хвильового вектора, одержимо:

$$\omega n \cos \Theta = \frac{\omega_0 n_0 \cos \Theta_0 \beta_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \omega n \sin \Theta = \omega_0 n_0 \sin \Theta,$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1 + \beta n_0 \cos \Theta_0}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

де Θ – кут, між напрямками поширення хвилі \vec{k} і швидкістю руху \vec{v} діелектрика; Θ_0 – аналогічний кут у «власній» системі відліку, щодо якої діелектрик не рухається.

Остання формула – це узагальнення формули доплер-ефекту на випадок матеріального середовища.

З перших двох формул знаходимо, що

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{n_0 \sin \Theta_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{n_0 \cos \Theta_0 + \beta}$$

Виключивши з отриманих формул ω і Θ , одержимо, що показник заломлення рухомого діелектрика:

$$n = \frac{\sqrt{n_0^2 + \beta^2(1 - n_0 \sin^2 \Theta) + 2n_0\beta \cos \Theta_0}}{1 + \beta n_0 \cos \Theta_0}$$

Він залежить не тільки від швидкості (v) руху діелектрика, але і від напрямку (Θ) розповсюдження світла.

Задача № 4.

Визначіть електромагнітне поле точкового заряду q , що рухається зі швидкістю v близькою до швидкості світла c .

Розв'язок

Нехай заряд перебуває у стані спокою у точці початку координат системи відліку K' , яка рухається разом із зарядом вздовж осі OX лабораторної системи K зі швидкістю v . У системі відліку K' напруженість електричного поля має вигляд:

$$E'_x = \frac{q x'}{r'^3}, \quad E'_y = \frac{q y'}{r'^3}, \quad E'_z = \frac{q z'}{r'^3},$$

а магнітне поле відсутнє. Знайдемо значення відповідних проекцій напруженості у лабораторній системі координат згідно з перетвореннями Лоренца. Нагадаємо, що тензор електромагнітного поля має вигляд:

$$F'^{41} = E'_x, \quad F'^{24} = E'_y, \quad F'^{34} = E'_z.$$

Згідно з формулами (1)–(6) §57 маємо:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z), & E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y), \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z) & B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y). \end{aligned}$$

Обернені перетворення отримуються, як уже згадувалося у тексті лекцій, шляхом заміни $\beta \rightarrow -\beta$ та зняттям штрихів біля

штрихових величин і дописуванням штрихів нештрихових величин:

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_y &= \gamma(E'_y + \beta B'_z), & E_z &= \gamma(E'_z - \beta B'_y), \\ B_x &= B'_x, & B_y &= \gamma(B'_y - \beta E'_z) & B_z &= \gamma(B'_z + \beta E'_y). \end{aligned}$$

Враховуючи, що у штриховій системі магнітне поле відсутнє, то

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_y &= \gamma E'_y, & E_z &= \gamma E'_z, \\ B_x &= 0, & B_y &= -\gamma\beta E'_z & B_z &= \gamma\beta E'_y. \end{aligned}$$

Врахуємо конкретні вирази для напруженості поля:

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x = \frac{q x'}{r'^3}, & E_y &= \gamma E'_y = \gamma \frac{q y'}{r'^3}, & E_z &= \gamma E'_z = \gamma \frac{q z'}{r'^3}, \\ B_x &= 0, & B_y &= -\gamma\beta \frac{q z'}{r'^3} & B_z &= \gamma\beta \frac{q y'}{r'^3}. \end{aligned}$$

Тепер застосуємо перетворення Лоренца для координат з урахуванням, що $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$. Маємо:

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{\gamma^2(x - \beta ct)^2 + y^2 + z^2} = \\ &= \gamma \sqrt{(x - vt)^2 + \frac{y^2 + z^2}{\gamma^2}} = \gamma R, \\ E_x &= \frac{q \gamma (x - \beta ct)}{\gamma^3 R^3} = \frac{q}{R^3} (1 - \beta)(x - vt), \\ E_y &= \frac{q}{R^3} (1 - \beta)y, \\ E_z &= \frac{q}{R^3} (1 - \beta)z, \\ B_x &= 0, \\ B_y &= -\gamma\beta \frac{q z}{\gamma^3 R^3} = -\beta \frac{q z}{\gamma^2 R^3} = -\beta(1 - \beta) \frac{q z}{R^3} = -\beta E_z \\ B_z &= \frac{\gamma\beta q y}{\gamma^3 R^3} = \frac{\beta q y}{\gamma^2 R^3} = \beta(1 - \beta) \frac{q y}{R^3} = \beta E_y. \end{aligned}$$

Звідси можна написати електричну й магнітну складові у векторній формі:

$$\vec{E} = \frac{q}{R^3} (1 - \beta) \vec{r},$$

де введено позначення $\vec{r} = \vec{i}(x - vt) + \vec{j}y + \vec{k}z$,

$$\vec{B} = \beta(-E_z \vec{j} + E_y \vec{k}) = \frac{v}{c} (-E_z \vec{j} + E_y \vec{k}) = \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{E}].$$

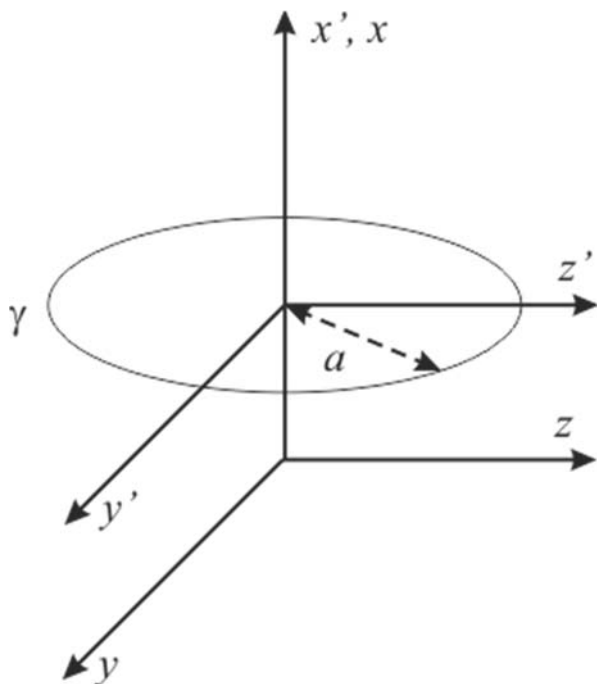
Тут враховано, що $\vec{v} = (v, 0, 0)$.

Отже, рухомий електричний заряд створює як електричну, так і магнітну складову електромагнітного поля. Нерухомий заряд створює лише електричну складову електромагнітного поля.

Задача № 5.

Рівномірно заряджене кільце радіуса a з зарядом q рухається зі швидкістю v паралельно осі, що проведена через центр кільця. Визначить напруженість та індукцію електромагнітного поля на осі x відносно нерухомого спостерігача у системі K .

Розв'язок



Виберемо системи координат, як показано на рисунку. У системі координат K' кільце нерухоме, тому у K' існує лише електричне поле, а магнітне відсутнє.

Згідно з висновками задачі 23 з частини 1 цього посібника, напруженість у системі K' на осі x' визначається так:

$$E'_y = E'_z = 0,$$

$$E'_x = q \frac{x'}{(x'^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Запишемо формули попередньої задачі:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \gamma(E'_y + \beta B'_z), \quad E_z = \gamma(E'_z - \beta B'_y),$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \gamma(B'_y - \beta E'_z), \quad B_z = \gamma(B'_z + \beta E'_y).$$

Враховуючи, що магнітне поле у системі K' відсутнє, а також конкретні значення напруженості, запишемо поле у системі K :

$$E_x = E'_x = q \frac{x'}{(x'^2 + a^2)^{3/2}}, \quad E_y = 0, \quad E_z = 0,$$

$$B_x = 0, \quad B_y = 0, \quad B_z = 0.$$

Тут також враховано, що заряд є інваріантом перетворень Лоренца. Врахуємо, що $x' = \gamma(x - \beta ct)$, тоді:

$$E_x = E'_x = q \frac{\gamma(x - vt)}{(\gamma^2(x - vt)^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Таким чином, магнітне поле на осі кільця відсутнє, як у рухомій, так і у нерухомій системах координат. Відсутні також y - та z -проєкції електричного поля на осі систем K та K' . Складові E_x та E'_x є однакові в обидвох системах.

Задача № 6.

Нескінченно довга рівномірно заряджена нитка з густиною τ розташована вздовж осі x' системи K' . У цій же системі перебуває пробний заряд q на відстані r_0 від нитки. Визначить, яка сила діє на заряд q у системі K , що рухається протилежно до напрямку x' зі швидкістю v .

Розв'язок

Використаємо відносність руху. У системі K нитка і заряд рухаються у бік додатніх значень осі x зі швидкістю v . Тоді у системі координат K' на заряд діє повна сила, що є кулонівською силою, яку визначено у задачі 10 частини 1 посібника:

$$F'_y = \frac{2\tau'q}{r_0} = \frac{2\tau'q}{y'_0}.$$

Інші складові сили дорівнюють нулю.

Густина зарядів у рухомій системі буде визначатися формулою: $\tau = \gamma \tau'$. Враховуючи, що координата y не змінюється, запишемо кулонівську силу у системі K :

$$f_y = \frac{2\tau q}{r_0} = \frac{2\tau q}{y_0} = \frac{2\gamma \tau' q}{y_0} = \gamma F'_y.$$

Малою буквою f позначено кулонівську силу, яка відрізняється від повної сили. Знайдемо тепер повну силу, що діє на заряд у системі K , яка, внаслідок симетрії задачі, напрямлена вздовж осі y :

$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = \frac{dp'_y}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{F'_y}{\gamma}.$$

Порівнюючи повну та кулонівську сили, отримаємо:

$$F_y = \frac{f_y}{\gamma^2} = (1 - \beta^2) f_y.$$

Тобто кулонівська сила відштовхування є більшою від повної сили. Це означає, що на заряд діє ще і магнітна сила притягування:

$$F_{\text{магн},y} = F_y - f_y = -\beta^2 f_y.$$

Задача № 7.

Виведіть перетворення проекції на вісь OX сили Лоренца при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

Розв'язок

Формула для сила Лоренца має вигляд:

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c} [\vec{u} \times \vec{B}] =$$

$$\vec{i} \left(qE_x + \frac{q}{c} (u_y B_z - u_z B_y) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \vec{j} \left(qE_y + \frac{q}{c} (u_z B_x - u_x B_z) \right) + \\
& + \vec{k} \left(qE_z + \frac{q}{c} (u_x B_y - u_y B_x) \right).
\end{aligned}$$

Згідно з формулами переходу:

$$\begin{aligned}
E_x &= E'_x, & E_y &= \gamma(E'_y + \beta B'_z), & E_z &= \gamma(E'_z - \beta B'_y), \\
B_x &= B'_x, & B_y &= \gamma(B'_y - \beta E'_z), & B_z &= \gamma(B'_z + \beta E'_y), \\
u_x &= \frac{u'_x + \beta c}{1 + \frac{u'_x \cdot \beta}{c}}, & u_y &= \frac{1}{\gamma} \frac{u'_y}{1 + \frac{u'_x \cdot \beta}{c}}, & u_z &= \frac{1}{\gamma} \frac{u'_z}{1 + \frac{u'_x \cdot \beta}{c}}.
\end{aligned}$$

Розглянемо перетворення проєкції сили на вісь OX .

$$\begin{aligned}
F_x &= qE_x + \frac{q}{c} (u_y B_z - u_z B_y) = \\
&= qE'_x + \\
&+ \frac{q}{c} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{u'_y}{1 + \frac{u'_x \beta}{c}} \gamma (B'_z + \beta E'_y) - \frac{1}{\gamma} \frac{u'_z}{1 + \frac{u'_x \beta}{c}} \gamma (B'_y - \beta E'_z) \right) = \\
&= qE'_x + \frac{q}{c} \left(\frac{u'_y B'_z + \beta u'_y E'_y}{1 + \frac{u'_x \beta}{c}} - \frac{u'_z B'_y - \beta u'_z E'_z}{1 + \frac{u'_x \beta}{c}} \right) = \\
&= qE'_x + \frac{q}{c} \left(\frac{u'_y B'_z - u'_z B'_y + \beta u'_y E'_y + \beta u'_z E'_z}{1 + \frac{u'_x \beta}{c}} \right) = \\
&= qE'_x + \frac{q}{c} \left(\frac{[\vec{u}' \times \vec{B}]_{x'} + \beta u'_y E'_y + \beta u'_z E'_z}{1 + \frac{u'_x \beta}{c}} \right) = \\
&= \frac{qE'_x \left(1 + \frac{u'_x \beta}{c} \right) + \frac{q}{c} \left([\vec{u}' \times \vec{B}]_{x'} + \beta u'_y E'_y + \beta u'_z E'_z \right)}{1 + \frac{u'_x \beta}{c}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{qE'_x + \frac{q}{c}\beta u'_x E'_x + \frac{q}{c} [\vec{u}' \times \vec{B}]_{x'} + \frac{q}{c}\beta u'_y E'_y + \frac{q}{c}\beta u'_z E'_z}{1 + \frac{u'_x \beta}{c}} = \\
&= \frac{qE'_x + \frac{q}{c} [\vec{u}' \times \vec{B}]_{x'} + \frac{q}{c}\beta (\vec{u}' \cdot \vec{E}')}{1 + \frac{u'_x \beta}{c}}.
\end{aligned}$$

Отже,

$$F_x = \frac{F'_x + \frac{q}{c}\beta (\vec{u}' \cdot \vec{E}')}{1 + \frac{u'_x \beta}{c}}.$$

Задача № 8.

Довести справедливість перетворення Лоренца для поля на основі формули (15) з §45: $T^{ik} = a_i^l a_m^k T^{lm}$.

Розв'язок

У §45 отримано перетворення Лоренца для поля шляхом зображення тензора другого рангу F^{ik} як зовнішнього добутку двох векторів $F^{ik} = G^i T^k$. Виведемо ці ж перетворення іншим способом, згідно з умовою задачі. Запишемо тензор електромагнітного поля у вигляді матриці:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишемо також матрицю переходу:

$$a_i^l = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Вираз $F'^{ik} = a_l^i a_m^k F^{lm}$ можна подати як множення відповідних матриць:

$$F'^{ik} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}$$

Тут враховано, що транспонована матриця a_l^i та матриця a_m^k однакові. Перемноживши послідовно матриці, отримано:

$$F'^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma(B_z - \beta E_y) & -\gamma(B_y + \beta E_z) & -E_x \\ -\gamma(B_z - \beta E_y) & 0 & B_x & -\gamma(E_y - \beta B_z) \\ \gamma(B_y + \beta E_z) & -B_x & 0 & -\gamma(E_z + \beta B_y) \\ E_x & \gamma(E_y - \beta B_z) & \gamma(E_z + \beta B_y) & 0 \end{pmatrix}.$$

З урахуванням, що

$$F'^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B'_z & -B'_y & -E'_x \\ -B'_z & 0 & B'_x & -E'_y \\ B'_y & -B'_x & 0 & -E'_z \\ E'_x & E'_y & E'_z & 0 \end{pmatrix}$$

маємо перетворення Лоренца для поля:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z), & E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y), \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z) & B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y). \end{aligned}$$

Отримані перетворення збігаються з перетвореннями, що виведено у §45.

Додаток А. Метричний простір

Метричний простір – це пара (X, d) , яка складається з деякої множини X -елементів і відстані d , визначеної для будь-якої пари елементів цієї множини. А саме однозначної, невід’ємної, дійсної функції $d(x, y)$, визначеної для $x, y \in X$, яка задовольняє такі 3 аксіоми:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксіома тотожності),
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (аксіома симетрії),
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (нерівність трикутника).

Невід’ємність доводиться за допомогою міркувань:

$$0 = d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

Приклади метричних просторів

1. Простір ізольованих точок:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

2. Множина дійсних чисел утворює метричний простір R^1 :

$$d(x, y) = |x - y|.$$

3. Множина впорядкованих груп n дійсних чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ з відстанню $d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2}$ називається n -вимірним арифметичним евклідовим простором R^n .

Додаток Б. Евклідовий простір. Евклідова метрика

Евклідовий простір – це скінченновимірний дійсний векторний простір E із скалярним добутком. Векторний (лінійний) простір – основне поняття лінійної алгебри, узагальнення множини всіх векторів на площині чи в просторі з операціями додавання векторів і множення вектора на скаляр. Елементи лінійного простору називаються векторами, але не робиться жодних припущень стосовно природи чи походження елементів. Наприклад, у функціональному аналізі розглядаються топологічні векторні простори, утворені з функцій однієї чи кількох змінних, а вектори стану в квантовій механіці описують стан квантової механіки. Матриці заданого розміру також утворюють векторний простір.

Нехай декартові координати в тривимірному просторі такі, що точці P відповідають три її координати (x_1, x_2, x_3) , а точці Q – координати (y_1, y_2, y_3) . Якщо квадрат довжини прямолінійного відрізка, що з'єднує P та Q , дорівнює:

$$l^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2,$$

то такий простір називають евклідовим простором, а декартові координати з такими властивостями називають евклідовими координатами.

Узагальнюючи на випадок n -вимірів, отримуємо:

$$l^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2.$$

Функція відстані між двома точками має назву метрики, а наведений вид такої функції для евклідового простору має назву евклідової метрики.

Додаток В. Вимірювання відстані в координатах

Розглянемо для початку прямокутну декартову систему координат $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ в n -вимірному просторі. Квадрат відстані між двома точками A і B дається такою формулою:

$$|AB|^2 = \sum_{i=1}^n (x_B^i - x_A^i)^2, \quad (1)$$

де $x_A^i = x_A^i(x_A^1, x_A^2, \dots, x_A^n)$, $x_B^i = x_B^i(x_B^1, x_B^2, \dots, x_B^n)$.

Ми не можемо безпосередньо поширити формулу (1) на вимірювання довжини кривих (позаяк довжина залежить не тільки від положення двох крайніх точок, а й від положення усіх проміжних точок). Аналогічну формулу ми можемо написати для двох нескінченних близьких точок. Позначимо їх. Нехай точка P має координати $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$, а точка P^1 має такі координати: $\{x^1 + dx^1, x^2 + dx^2 + \dots, x^n + dx^n\}$. Квадрат відстані між цими точками (позначимо ds) у нових позначеннях перепишеться так:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2. \quad (2)$$

Якщо від прямокутної декартової системи координат перейти в будь-яку іншу, в загальному випадку, криволінійну, то вигляд формули (2) як суми квадратів не збережеться. Позначимо координати точки для нової системи $\{u^1, u^2, \dots, u^n\}$. Тоді диференціали старих і нових координат пов'язані формулами:

$$dx^i = \sum_{j=1}^n \frac{dx^i}{du^j} du^j, \quad du^i = \sum_{j=1}^n \frac{du^i}{dx^j} dx^j \quad (3)$$

і для квадрата відстані (2) ми одержуємо квадратичну форму щодо диференціації нових координат:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{dx^i}{du^j} du^j \right) \left(\frac{dx^i}{du^k} du^k \right) = \\ &= \sum_{j,k=1}^n g_{jk} du^j du^k, \end{aligned} \quad (4),$$

де коефіцієнти g_{jk} дорівнюють сумі:

$$g_{jk} = \sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{du^j} \frac{dx^i}{du^k}.$$

У формулах (3), (4) всі суми беруться за індексами, які повторюються у межах від 1 до n . Тому для спрощення вигляду формул доцільно у цих самих формулах не писати знак суми (правило Ейнштейна). З використанням правила Ейнштейна формула (4) набуде вигляду:

$$ds^2 = g_{jk} du^j du^k.$$

Матриця простору-часу – 4-тензор, який визначає властивості простору-часу в загальній теорії відносності. Просторово-часовий інтервал виражається через метрику простору-часу за формулою:

$$ds^2 = g_{jk} dx^j dx^k,$$

де g_{jk} — метричний тензор.

В інерціальній системі відліку матриця метричного тензора простору-часу має вигляд:

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad \hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

залежно від того, як уводиться квадрат інтервалу між двома подіями.

У неінерціальних системах відліку вигляд метрики простору-часу змінюється і загалом залежить від точки простору і моменту часу. Метрика простору-часу задає викривлення простору, яке відчуває спостерігач, що рухається з прискоренням. Оскільки за принципом еквівалентності спостерігач жодним чином не може відрізнити неінерційність зв'язаної з ним системи відліку від гравітаційного поля, то метрика простору-часу визначає також викривлення простору-часу у полі масивних тіл.

Метрика простору-часу використовується для встановлення зв'язку між коваріантними і контраваріантними записами будь-якого 4-вектора:

$$A_i = g_{ij}A^j.$$

Додаток Г. Простір Мінковського

Чотиривимірний псевдопростір, запропонований Германом Мінковським у 1908 році, як геометрична інтерпретація простору-часу спеціальної теорії відносності.

Кожній події відповідає точка простору Мінковського, де три координати є декартовими координатами тривимірного евклідового простору, а четверта – координата ct , де c – швидкість світла, t – час події.

Зв'язок між просторовими відстанями та проміжками часу, що розділяють події, характеризується квадратом інтервалу:

$$s^2 = c^2(t_1 - t_0)^2 - (x_1 - x_0)^2 - (y_1 - y_0)^2 - (z_1 - z_0)^2.$$

Інтервал у просторі Мінковського відіграє роль аналогу відстані у геометрії евклідових просторів. Він інваріантний при заміні однієї інерціальної системи відліку іншою, так само як відстань інваріантна при повороті, відображеннях і зсувах початку координат у евклідовому просторі. Роль, що аналогічна ролі обертання координат у випадку евклідового простору, відіграють грають для простору Мінковського перетворення Лоренца.

В інерціальній системі відліку матриця матричного тензора простору Мінковського має вигляд:

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4-тензор

4-тензор – це математичний об'єкт, який використовується для описання поля у релятивістській фізиці. Цей тензор визначений у чотиривимірному просторі-часі, повороти системи відліку в якому включають як звичні повороти тривимірного простору, так і перехід між системами відліку, які рухаються з різними швидкостями одна щодо іншої.

У загальному випадку 4-тензор є об'єктом з набором індексів:

$$A_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{j_1, j_2, \dots, j_m}$$

При зміні системи відліку компоненти цього об'єкта перетворюються за законом:

$$A'_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{j_1, j_2, \dots, j_m} = \beta_{j_1, k_1} \beta_{j_2, k_2} \dots \beta_{j_m, k_m} \alpha_{i_1, l_1} \alpha_{i_2, l_2} \dots \alpha_{i_n, l_n} A_{l_1, l_2, \dots, l_n}^{k_1, k_2, \dots, k_m},$$

де α_{ij} – матриця повороту, β_{ij} – обернена їй. Верхні індекси називаються контраваріантними, нижні – коваріантними. Сумарна кількість індексів задає ранг тензора. 4-вектор є 4-тензором першого рангу.

Зазвичай у фізиці тензори однакової природи з різною кількістю коваріантних і контраваріантних індексів вважаються спорідненими (дуальними). Опускання чи піднімання індексу здійснюється за допомогою метричного тензора \hat{g} , наприклад, для 4-тензора другого рангу:

$$A^{ij} = g^{ij} A_k^i.$$

Приклади

Рівняння теорії відносності особливо зручно записувати, використовуючи 4-вектори і 4-тензори. Головною перевагою такого запису є те, що в цій формі рівняння автоматично Лоренц-інваріантні, тобто не змінюються при переході від однієї інерціальної системи координат до іншої.

Тензор електромагнітного поля

Відповідний 4-тензор існує також і для опису електромагнітного поля. Це 4-тензор другого рангу. При його використанні основні рівняння для електромагнітного поля (рівняння Максвелла і рівняння руху зарядженої частинки в полі) мають особливо просту й елегантну форму.

Визначення через 4-потенціал

4-тензор виражається через похідні від 4-потенціалу:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$

Визначення через тривимірні вектори

4-тензор визначається через звичайні тривимірні складові векторів напруженості та індукції:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & E_x \\ -B_z & 0 & B_x & E_y \\ B_y & -B_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Перша форма – це контраваріантний тензор, друга – коваріантний тензор.

Предметний покажчик

В

вектор.....	43
вектор струму чотиримірний	42
власний час.....	15

Г

градієнт чотиримірний.....	26
----------------------------	----

Д

дивергенція чотиримірна.....	27
------------------------------	----

Е

ефект Доплера.....	37
ефект Доплера поперечний	38

З

закон збереження заряду	43
-------------------------------	----

І

інваріанти електромагнітного поля	53
інтервал.....	8

К

коваріантна величина.....	22
контраваріантна величина	22

Л

лоренцеве скорочення	17
----------------------------	----

М

метричний тензор.....	25
-----------------------	----

П

перетворення Лоренца.....	10, 11
перетворення Галілея.....	5
принцип відносності	7
просторовоподібний інтервал....	14

С

світлоподібний інтервал	14
сила Мінковського	34
система рівнянь Максвелла- Лоренца в коваріантній формі ...	49
спеціальна теорія відносності.....	4

Т

тензор електромагнітного поля .	45
тензор енергії-імпульсу	54

Ч

часоподібний інтервал.....	13
червоний зсув	40
чотирьохвимірний вектор	22

Основні та додаткові літературні джерела

1. Алексеев А. И. Сборник задач по классической электродинамике : учеб. пособие. — М. : Наука, 1977. — 318 с.
2. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике. — М. : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. — 640 с.
3. Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н. Классическая электродинамика : учебное пособие / под редакцией . И. Н. Топтыгина. — М. : Наука, 1985. — 400 с.
4. Векштейн Е. Г. Сборник задач по электродинамике. — М. : Высшая школа, 1966. — 286 с.
5. Гречко А. Г. Сугаков В. И., Томасевич О. Ф., Федорченко А. М. Сборник задач по теоретической физике : учеб. пособие [для вузов]. — М. : Высшая школа, 1972. — 336 с.
6. Джексон Дж. Классическая электродинамика. — М. : Мир, 1965. — 702 с.
7. Измайлов С. В. Курс электродинамики. — М. : Учпедгиз, 1962. — 440 с.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : учеб. пособие: в 10 т. Т. II. Теория поля. — 7-е изд. испр. — М. : Наука, 1988. — 512 с.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : учеб. пособие: в 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. — 2-е изд. испр. — М. : Наука, 1982. — 620 с.
10. Левич В. Г. Курс теоретической физики. Т.1. Теория электромагнитного поля. Теория относительности. Статистическая физика. Электромагнитные процессы в веществе. — М. : Наука, 1969. — 910 с.
11. Мултановский А. В., Василевский А. С. Курс теоретической физики. Классическая электродинамика : учеб. пособие [для студентов физ.-мат. фак. пед. ин.-тов]. — М. : Просвещение, 1990. — 272 с.
12. Новожилов Ю. В., Яппа Ю. А. Электродинамика : учеб. пособие. — М. : Наука, 1978 — 352 с.
13. Савельев И. В. Основы теоретической физики : учеб. руководство [для вузов]: в 2 т. Т. 1. Механика и электродинамика. — 2-е изд., испр. — М. : Наука, 1991. — 496 с.
14. Сугаков В. Й. Теоретична фізика. Електродинаміка. — К. : Ви-

- ща школа, 1974. — 271 с.
15. Тамм И. Е. Основы теории электричества : учеб. пособие [для вузов]. — 11-е изд., испр. и доп. — М. : Физматлит, 2003. — 616 с.
 16. Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П. Электродинамика : учеб. пособие [для студентов физ. спец. университетов]. — 2-е изд., перераб. — М. : Высшая школа, 1990. — 352 с.
 17. Федорченко А. М. Теоретична фізика. Класична механіка та електродинаміка. — К. : Вища школа, 1992. — 535 с.