Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка

кафедра фізики

Ігор БІЛИНСЬКИЙ, Роман ЛЕШКО

АКТУАЛЬНІ ПИТАННЯ АСТРОНОМІЇ ТА МЕТОДИКИ ЇЇ НАВЧАННЯ

Збірник задач з прикладами розв'язування

Дрогобич
2021

УДК 52.523

Ігор Білинський, Роман Лешко. Актуальні питання астрономії та методики її навчання. Збірник задач з прикладами розв'язування. – Дрогобич : Видавничий відділ ДДПУ ім. І. Франка, 2021. – 50 с.

Навчально-методичний посібник **"Актуальні питання астрономії та методики її навчання. Збірник задач з прикладами розв'язування"** написаний відповідно до робочої програми навчальної дисципліни "**Актуальні питання астрономії та методики її навчання**" для підготовки фахівців другого рівня вищої освіти спеціальностей 014 Середня освіта (Фізика) та 104 Фізика та астрономія, затвердженої вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

У посібнику зібрані задачі з вибраних розділів астрономії. На початку кожного параграфу викладено короткі теоретичні відомості та приклади розв'язування типових задач. До більшості задач наведено відповіді.

Бібліографія 15 назв

Рецензенти:

- доцент кафедри технологічної та професійної освіти Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, кандидат фізико-математичних наук **Павловський Юрій Вікторович**;
- доцент кафедри фізики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, кандидат фізико-математичних наук **Угрин Юрій Орестович**.

Відповідальний за випуск: Гольський В.Б., к. ф.-м. н., доцент кафедри фізики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка як навчальний посібник
(протокол № ___ від __________ р.)

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА

Щоб урахувати світоглядну та пізнавальну мету астрономії при лімітованому числу годин на її вивчення, перед студентами ставляться узагальнені проблеми й питання. Відповіді на ці питання потребують не тільки відтворення готових суджень і висновків з підручників або оголошених викладачем, а й творчих пошуків і зусиль, глибинного розуміння суті явищ, уміння практично застосовувати отримані знання. Самостійно опрацьовуючи завдання та питання, студент зможе порівняти власні результати й висновки з готовими відповідями, що подані у збірнику.

Широко застосовуються завдання, що пов'язані з вимірюваннями на рисунках, задачі-рисунки та різноманітний ілюстративний матеріал. У зв'язку з цим навчальний процес безпосередньо зближує студентів до реальних об'єктів пізнання, допомагає сформувати сучасний науковий світогляд, унаочнюючи всі теоретичні висновки. Цей посібник сприятиме закріпленню і перевірці знань, створення проблемних ситуацій на занятті виступатиме засобом мотивації до поглибленого самостійного вивчення астрономії.

Значна увага у посібнику приділено таким поняттям як мале космічне тіло, планета, зоря, галактика.

Метою запропонованого посібника є розширення та поглиблення знань студентів про базові поняття астрономії шляхом розв'язування задач з відповідних розділів астрономі.

На початку кожного параграфу подано основні відомості теоретичного характеру, які дають змогу пригадати важливі закони та поняття відповідного розділу астрономії, виписано головні формули, які застосовуються при розв'язуванні конкретних задач. Далі йдуть приклади розв'язування типових задач. Кожний параграф закінчується задачами для самостійного розв'язування. До більшості задач подано відповіді.

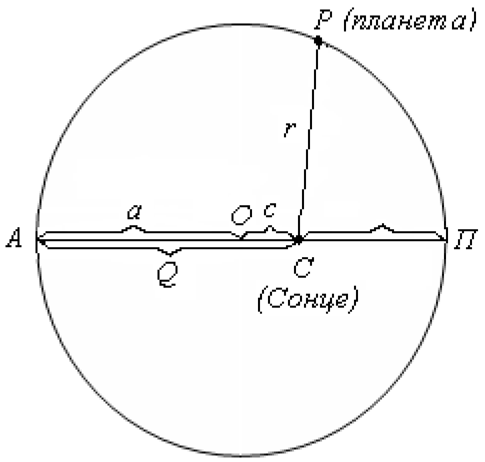
Рух та конфігурації планет

1. Перший закон Кеплера

Теоретичні відомості та основні формули

Планети обертаються навколо Сонця по еліптичним орбітах, одним з фокусів яких є центр Сонця. У першому наближенні можна вважати, що орбіти великих планет лежать приблизно в одній площині.

Велика піввісь a орбіти (рис. 1) визначає розміри, а ексцентриситет e – степінь витягу орбіти. Радіус-вектор r планети змінюється в межах від перигейної відстані q=*СП* до афелійної відстані Q=*СА*.



(Рис.1)

Оскільки $q=a–c$ та $Q=a+c$, ексцентриситет орбіти $e=\dfrac{c}{a}$ (по визначенню), то

$$q = a\,(1 – e) \qquad (1)$$

та

$$Q = a\,(1 + e). \qquad (2)$$

Велика піввісь a орбіти є середньою відстанню планети від Сонця, оскільки

$$a = \frac{q+Q}{2}. \qquad (3)$$

Відстані між планетами та відстані планет від Сонця завжди виражаються в астрономічних одиницях (а.о.), тобто в середніх відстанях Землі від Сонця. При необхідності (яка рідко трапляється) ці відстані можуть бути подані в *км* за умови, що 1 а.о. = 149,5 10^6 *км.*

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Для планети Нептун обчислити перигелійну та афелій ну відстані, за умови, що велика піввісь й ексцентриситет орбіти Нептуна дорівнюють 30,1 а.о. та 0,008 відповідно.

Розв'язування

Згідно з формулами (1) та (2) перигейна відстань:

$q = a\,(1 - e) = 30{,}1\ (1 - 0{,}008\ ) = 29{,}86$ а.о;

афелійна відстань:

$Q = a\,(1 + e) = 30{,}1\ (1 + 0{,}008) = 30{,}34$ а.о.

Приклад 2. Для планети Плутон перигелійна відстань дорівнює 29,66 а.о., а Q = 49,34 а.о. Визначіть ексцентриситет орбіти Плутона та велику піввісь.

Розв'язування

Згідно з формулою (3),

$$a = \frac{q+Q}{2} = \frac{29{,}66 + 49{,}34}{2} = \frac{79{,}00}{2} = 39{,}5 \text{ а.о.}$$

З формули (1)

$$e = 1 - \frac{q}{a} = 1 - \frac{29{,}66}{39{,}5} = 1 - 0{,}751 = 0{,}249 .$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Для найближчої планети від Сонця та Землі обчислити перигелійну та афелійну віддаль. У першої з них велика піввісь орбіти дорівнює 0,387 а.о. і ексцентриситет орбіти дорівнює 0,206, а в Землі – ексцентриситет орбіти дорівнює 0,017. Вказати, яка з планет обертається навколо Сонця по менше витягнутій орбіті.

Відповідь: Меркурій, $q = 0{,}307$ а.о., $Q = 0{,}467$ а.о.; Земля, $q = 0{,}983$ а.о., $Q = 1{,}017$ а.о. Орбіта Землі менше витягнута.

2. Для Сутурна і малої планети Колхіда визначити перигелійну та афелійну віддалі, якщо велика піввісь орбіти Сатурна дорівнює 9,54 а.о. і e=0,056, а Колхіди a=2,67 а.о. і e=0,115. Вкажіть, яка з цих планет має менш витягнуту орбіту.

Відповідь: Сатурн, , $q = 9{,}01$ а.о., $Q = 10{,}07$ а.о.; Колхіда, $q = 2{,}36$ а.о., $Q = 2{,}98$ а.о. Орбіта Сатурна менше витягнута.

3. Обчислити a та e орбіти Урану та орбіти карликової планети Ялта. Перегелійна відстань Урану 18,29 а.о., його афелійна відстань 20,09 а.о., а в Ялти q=1,95а.о. і Q=2,75а.о.

Відповідь: Ялта, a=2,35 а.о., e=0,170; Уран, a=19,19 а.о., e=0,047.

4. Обчислити e і перегелійну відстань «червоної планети» та малої планети Адоніс. У першої планети велика піввісь орбіти дорівнює 1,52 а.о. і найбільша відстань від Сонця 1,66 а.о., а в іншої планети $a =$ 1,97 а.о. і Q =3,50 а.о. Яка з цих двох планет наближається ближче до Сонця. Яка з них віддаляється далі від Сонця?
Відповідь: Адоніс, e=0,779 і q=0,44 а.о.; Марс, e=0,093, q=1,38 а.о. Відстань Адоніса до Сонця змінюється у більших межах, ніж відстань до Сонця Марса.

5. Для планети Венера й карликової планети Аполон обчислити ексцентриситет орбіти і перегелійну відстань. У першої планети велика піввісь орбіти дорівнює 0,723 а.о. і найбільша відстань до Сонця 0,728 а.о. Інша планети характеризується такими значеннями $a =$ 1,49 а.о. і Q =2,33 а.о. Яка з цих двох планет наближається ближче до Сонця і віддаляється далі від Сонця?
Відповідь: Венера, e=0,007, q=0,718 а.о.; Аполон, e=0,566, і q=0,647 а.о. Відстань Аполона від Сонця змінюється у більших межах, ніж відстань Венери.

2. Другий та третій закони Кеплера

Теоретичні відомості та основні формули

Лінійна швидкість υ планети у довільній точці її орбіти на відстані r від Сонця визначається інтегралом енергії

$$\upsilon^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \tag{4}$$

де a – велика піввісь орбіти, а

$$\mu = f\ (M + m\,), \tag{5}$$

де f – гравітаційна стала, M – маса Сонця і m – маса планети.

Але для визначення лінійної швидкості планет можна обійтись без знання величини μ. Справді написавши (4) для середньої відстані a планети від Сонця (для великої півосі орбіти), тобто припустивши, що $r = a$, отримаємо лінійну швидкість планети на середній відстані від Сонця, що називається коловою швидкістю планети:

$$\upsilon_0^2 = \mu\left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\mu}{a} \ . \qquad (6)$$

Поділивши (4) на (6), отримаємо

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2\left(\frac{2a}{r} - 1\right)$$

або

$$\upsilon = \upsilon_0 \sqrt{\frac{2a}{r} - 1} \ , \qquad (7)$$

Причому υ і υ_0 виражені в однакових одиницях вимірювання. Як правило, лінійні швидкості небесних тіл виражаються в *км/сек*.

Підставляючи у вираз (7) різні значення *r*, можна обчислити лінійну швидкість планети у будь-якій точці її орбіти . Так, при $r = q$ отримаємо лінійну швидкість υ_q планети в перигелії, а при $r = Q$ – лінійну швидкість υ_Q в апогеї.

Лінійна швидкість планети υ_0, що відповідає середній відстані планети від Сонця, називається *середньою* чи *коловою* швидкістю і обчислюється за періодом обертання *T* планети навколо Сонця:

$$\upsilon_0 = \frac{2\,\pi\,a}{T} \ . \qquad (8)$$

Щоб отримати υ_0 в *км/сек*, треба подати *a* в *км*, а *T* – с. Як правило *a* задається в а.о. і *T* – в год. Оскільки 1 а.о. = $149{,}5 \times 10^6$ *км*, а 1 год = $31{,}56 \times 10^6$ *сек*, то

$$\upsilon_0 = \frac{2\,\pi\,a \cdot 149{,}5 \cdot 10^6}{T \cdot 31{,}56 \cdot 10^6} = 29{,}8 \cdot \frac{a}{T} \ , \qquad (9)$$

де *a* – в а.о. і *T* – в годинах .

Зв'язок між періодами обертання *T* планет і їх середніми відстанями *a* від Сонця встановлюється третім законом Кеплера :

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \ , \qquad (10)$$

причому індекси «1» відносяться до однієї планет, а індекси «2» – до іншої. У формулі (10) періоди обертання *T* і великі півосі орбіт *a* можуть бути відповідно виражені в будь-яких, але обов’язково в однакових одиницях вимірювання.

Якщо ж T виражено у год. і a – в а.о., то, поклавши в формулі (10) для Землі $T_2 = 1$ год і $a_2 = 1$ а.о., отримаємо співвідношення для будь-якої планети:

$$T^2 = a^3 . \tag{11}$$

Формулу (11) можна використовувати тільки тоді, коли T виражено в год. і a – в а.о.

Усі три закони Кеплера справедливі також для руху комет навколо Сонця і руху супутників навколо планет, але формула (11) до руху супутників не можна застосовувати, бо маси планет не дорівнюють масі Сонця.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Велика піввісь Плутона дорівнює 39,5 а.о. Обчисліть період обертання цієї планети навколо Сонця.

Розв'язування

Оскільки велика піввісь орбіти Плутона подана в а.о., то слід використати третій закон Кеплера у найпростішій формі, тобто формулою (11):

$$T = a\sqrt{a} = 39{,}5 \cdot \sqrt{39{,}5} = 248 \text{ років.}$$

Приклад 2. Для малої планети Полігімнія обчислити лінійну швидкість при її середній перигелійній і афелійній відстанях, якщо a = 2,87 а.о., ексцентриситет орбіти – 0,334

Розв'язування

Згідно з формулою (7), лінійна швидкість планети Полігімнії

$$\upsilon = \upsilon_0 \sqrt{\frac{2a}{r} - 1}$$

Колову швидкість планети υ_0, згідно з (9) і (11), зручно подати як функції середньої відстані планети до Сонця:

$$\upsilon_0 = 29{,}8\,\frac{a}{T} = 29{,}8\,\frac{a}{a\sqrt{a}} = \frac{29{,}8}{\sqrt{a}} .$$

Звідси

$$\upsilon_0 = \frac{29{,}8}{\sqrt{2{,}87}} = 17{,}6\ км/сек\ .$$

Перигейна відстань $q = a\ (1 - e)$ =2,87 (1 – 0,334) = 1,91 а.о. і афелійна відстань $Q = a\ (1 + e)$= 3,83. а.о. Відповідно, швидкість планети в перигеї

$$\upsilon_q = \upsilon_0 \sqrt{\frac{2a}{q} - 1} = \upsilon_0 \sqrt{\frac{2a - q}{q}} = \upsilon_0 \sqrt{\frac{Q}{q}}\ ,$$

або

$$\upsilon_q = 17{,}6\sqrt{\frac{3{,}83}{1{,}91}} = 24{,}8\quad км/сек\ ,$$

а швидкість планети в афелії

$$\upsilon_Q = \upsilon_0 \sqrt{\frac{2a}{Q} - 1} = \upsilon_0 \sqrt{\frac{2a - Q}{Q}} = \upsilon_0 \sqrt{\frac{q}{Q}}\ ,$$

або

$$\upsilon_Q = 17{,}6\sqrt{\frac{1{,}91}{3{,}83}} = 12{,}5\quad км/сек\ .$$

Задачі для самостійного розв’язування

1. Обчисліть період обертання найближчої планети до Сонця і планети Уран навколо Сонця. Середня відстань цих планет до Сонця дорівнює 0,387 а.о. і 19,19 а.о. відповідно
Відповідь: Меркурій, T=0,241 року = 88 діб; Уран, T=84 років.

2. Для найбільшої планети сонячної системи та Нептуна визначіть величину великих півосей орбіт, якщо періоди обертання зазначених планет навколо Сонця дорівнюють 11,86 року і 164,79 року відповідно
Відповідь: для Юпітера велика піввісь a=5,20 а.о.; a=30,1 а.о. для Нептуна.

3. Який період обертання навколо Сонця комет Галлея й Енке? Велика піввісь орбіти першої комети дорівнює 17,94 а.о., а середня відстань другої комети від Сонця становить 2,23 а.о.
Відповідь: Комета Галлея T=76 років; комета Енке T=3,33 років.

4. Перший супутник Юпітера, Іо, обертається навколо нього за час $42^{г}28^{хв}$ на середній відстані 42 800 *км*. Визначити період обертання четвертого супутника Юпітера, Каллісто, велика піввісь орбіти якого дорівнює 1 884 000 *км*.

Відповідь: . T=16 діб $16^{г}32^{хв}$.

5. Для Венери і Марса обчисліть колові швидкості та їхні швидкості в перигелії і афелії. Дайте пояснення наявної різниці у зміні швидкості цих планет. Велика піввісь планети Венери дорівнює 0,723 а.о., ексцентриситет орбіти становить 0,007. Середня відстань Марса від Сонця дорівнює 1,52 а.о., e = 0,093.

Відповідь:

Венера,

$\upsilon_0 = 35{,}0 \quad км/сек, \quad \upsilon_q = 35{,}2 \quad км/сек, \quad \upsilon_Q = 34{,}8 \quad км/сек$.

Різниця 0,4 *км/сек*;

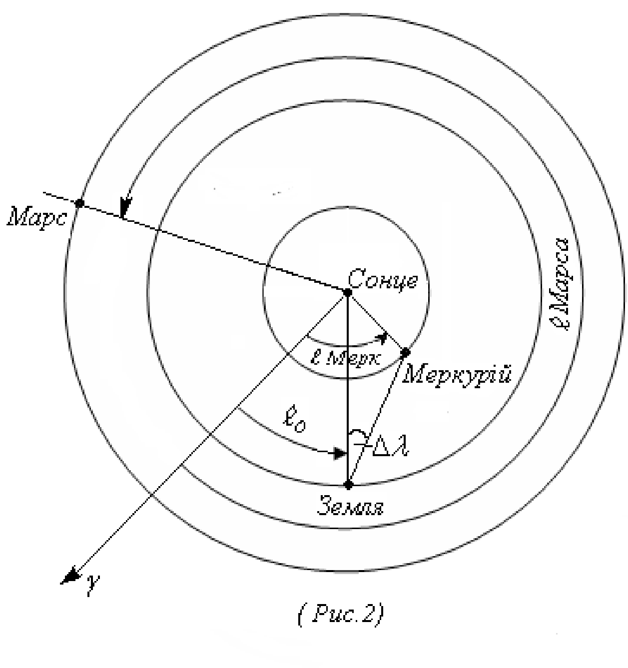
Марс, $\upsilon_0 = 24{,}1 \quad км/сек, \quad \upsilon_q = 26{,}5 \quad км/сек, \quad \upsilon_Q = 21{,}9 \quad км/сек$.

Різниця 4,6 *км/сек.*

3. Конфігурації планет

Теоретичні відомості та основні формули

Видимі з Землі розміщення планет відносно Сонця називаються їхніми *конфігураціями*. Конфігурації планет можуть бути визначені по їх геліоцентричній довготі l, обчисленій у площині екліптики від точки весняного рівнодення γ проти стрілки годинника (рис. 2). Видима з Землі кутова відстань $\Delta\lambda$ планети від Сонця називається її *елонгацією*. У нижніх планет Меркурія і Венери найбільша елонгації визначається напрямом дотичної до їх орбіт. У верхніх



(Рис.2)

планет елонгація може змінюватися від 0 до 180°.

Проміжок часу між двома послідовними однойменними конфігураціями планети називається *синодичним періодом* обертання планети. Внаслідок руху Землі навколо Сонця синодичний період обертання S планет не дорівнює їх періоду обертання T навколо Сонця, що називається зоряним періодом обертання. Зв'язок між двома періодами S і T встановлюється через рівність синодичного руху:

для нижніх планет

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}, \qquad (12)$$

для верхніх планет

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}, \qquad (13)$$

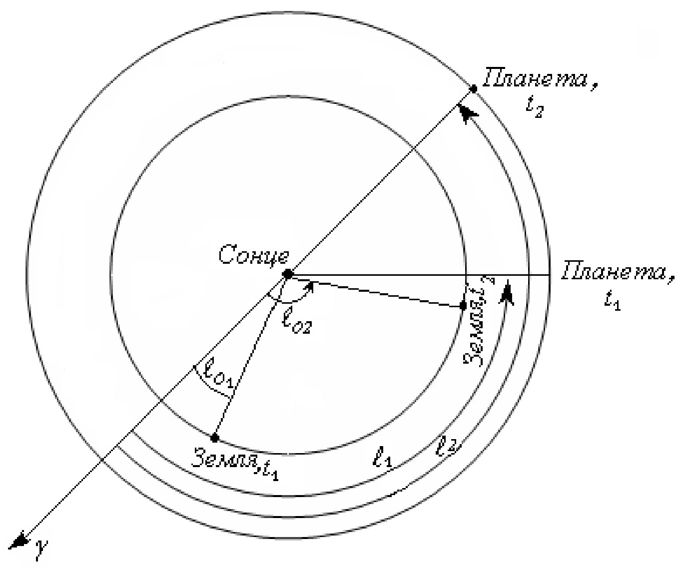
де T_0 – синодичний період обертання Землі, що дорівнює 1 року.

Обчислення за формулами (12) і (13) легше всього проводити у роках, приймаючи $T_0 = 1$, а потім, при необхідності, переводити у доби з розрахунком, що 1 рік = 365,25 діб.

Синодичний період обертання планети дозволяє обчислити дату t_2 чергового настання певної конфігурації планети за відомою датою t_1 такої ж конфігурації. Очевидно,

$$t_2 = t_1 + S \qquad (14)$$

Дати настання будь-яких конфігурацій планет можуть бути визначені по їхній геліоцентричній довготі. Нехай у деякий день року t_1 геліоцентрична довгота верхньої планети l_1, а геліоцентрична довгота Землі – l_{01} (рис. 3). Планета за добу описує по орбіті



(Рис. 3)

дугу $n = 360° / T$ (середньо добові кутові рухи планети), а Земля – $n_0 = 360° / T_0$ (середньо добові кутові рухи Землі), де T – синодичний період обертання планети і T_0– синодичний період обертання Землі (зоряний час), причому T і T_0 виражені в середніх добах.

Оскільки верхня планета рухається повільніше ніж Земля ($T > T_0$) то $n < n_0$. В якийсь день року t_2 настане шукана конфігурація планети, при якій геліоцентрична довгота Землі – l_{02}. Тоді

$$l_2 = l_1 + n\,(t_2 - t_1) = l_1 + n \cdot \Delta t \tag{15}$$

і

$$l_{02} = l_{01} + n_0\,(t_2 - t_1) = l_{01} + n_0 \cdot \Delta t\,. \tag{16}$$

Звідси, позначивши $l_2 - l_1 = \Delta l$, $l_{02} - l_{01} = \Delta l_0$ і $n_0 - n = \Delta n$, отримаємо

$$\Delta t = \frac{\Delta l_0 - \Delta l}{\Delta n} = \frac{L}{\Delta n} \tag{17}$$

і знайдемо

$$t_2 = t_1 + \Delta t\,. \tag{18}$$

Зрозуміло, що $L = \Delta l_0 - \Delta l$ визначає кутовий шлях Землі по орбіті відносно планети, що проходить Земля з кутовою швидкістю $\Delta n = n_0 - n$ за проміжок часу Δt. Цей шлях L легко визначити з розміщення планет по схемі.

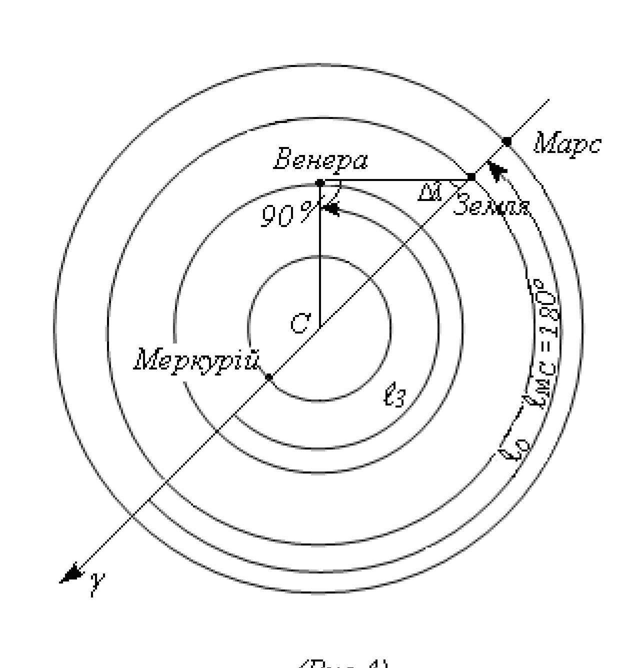
Формули (15)–(18) використовуються і для визначення конфігурацій нижніх планет, але ці планети рухаються швидше Землі. Тому $\Delta n = n_0 - n$ і дуга L визначається за рухом планети відносно Землі.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Визначіть геліоцентричну довготу Землі і планет 21 березня, якщо у цей день Меркурій є у верхньому сполученні, Венера – у найбільшій західній елонгації ($\Delta\lambda = 47°$) і Марс – у протистоянні.

Розв'язування

Будуємо схему (рис. 4), зображаючи орбіти планет колами, у центрі яких є Сонце. З Сонця проводимо промінь, який показує напрямок на точку весняного рівнодення γ. Оскільки 21 березня Сонце з Землі видно в точці весняного рівнодення γ, то Земля (З)



(Рис 4)

буде перебувати у діаметрально протилежній точці своєї орбіти, геліоцентрична довжина Землі $l_0 = 180°$.

Планету Меркурій (М) зображаємо у верхньому сполученні, тобто на прямій «Земля – Сонце» (за Сонцем).Його геліоцентрична довжина $l_M = 0°$. Провівши з Землі дотичну до орбіти Венери, знайдемо положення Венери (В) на орбіті. Оскільки Венера перебуває у найбільшій західній елонгації, то дотична проводиться вправо (до заходу) від Сонця, спостерігаючи з Землі. Тоді геліоцентрична довгота Венери

$$l_B = 180° + (90° - \Delta\lambda) = 270° - 47° = 223°$$

Марс (Мс) перебуває у протистоянні, тобто на прямій «Земля – Сонце», за Землею (у точці орбіти, протилежній Сонцю), і його геліоцентрична довжина $l_{Mc}=180°$.

Приклад 2. Синодичний періодом обертання планети Нептун становить 368 діб. Визначіть велику піввісь орбіти цієї планети.

Розв'язування

Зі спостережень отримано, що синодичний період обертання Нептуна становить S=368 діб. Його виразимо у роках

$$S = 368 / 365,25 = 1,0061 \text{ року.}$$

За формулою (13) визначимо синодичний період обертання планети, при T_0 = 1 р.

$$\frac{1}{1,0061} = \frac{1}{1} - \frac{1}{T},$$

або

$$\frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{1,0061} = \frac{1,0061 - 1}{1,0061} = \frac{0,0061}{1,0061}.$$

Звідси

$$T = \frac{10061}{61} \approx 165 \text{ років.}$$

За третім законом Кеплера (11) отримаємо

$$T^2 = a^3$$

або

$$165^2 = a^3$$

Звідси a=30,1 а.о.

Приклад 3. Визначіть день настання наступного протистояння карликової планети Цербера. Попереднє протистояння відбулося 08.03.1963. Велика піввісь орбіти Цербери становить 2,77 а.о.

Розв'язування

За третім законом Кеплера зоряний період обертання Цербери

$$T = a\sqrt{a} = 2{,}77 \cdot \sqrt{2{,}77} = 4{,}598 \text{ року.}$$

З формулою (13) знайдемо синодичний період S:

$$\frac{1}{S} = 1 - \frac{1}{4{,}598} = \frac{4{,}598 - 1}{4{,}598} = \frac{3{,}598}{4{,}598}.$$

Звідси S = 1,278 року = 1 рік 102 доби.

Попереднє протистояння відбулося 08.03.1963, що запишеться так:

$$t_1 = 1963,\ III,\ 8$$

і тоді, згідно з (14) чергове протистояння відбудеться у день

$$t_2 = 1963,\ III,\ 8 + 1\ \textit{рік}\ 102\ \textit{доби} = 1964,\ III,\ 110.$$

Пам'ятаємо, що березень містить 31 день, квітень – 30 днів, травень – 31 и т.д., отримаємо:

Березень	110
	–31
Квітень	79
	–30
Травень	49
	–31
Червень	18

Чергове протистояння Цербери відбулося 18.07.1964 р.

Приклад 4. 16.05.2021 геліоцентрична довгота Землі була 234°, а Юпітера – 328°. Визначіть геліоцентричну довготу цих планет 12.11.2021. Період обертання Юпітера становить 11,88 року.

Розв'язування

$l_{01} = 234°$; $T_0 = 365{,}25$ діб; $l_1 = 328°$; $T = 11{,}88$ року.

Знаходимо середній добовий рух Землі (n_0) і Юпітера (n) :

$$n_0 = \frac{360°}{365{,}2} = 0°{,}99\,,$$

$$n = \frac{360°}{11{,}88 \cdot 365{,}2} = 0°{,}08\,.$$

Оскільки t_1 =2021,V, 16 і t_2 = 2021, XI, 12, то інтервал часу

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 180 \text{ діб.}$$

Тоді, згідно з (15) і (16), для Юпітера

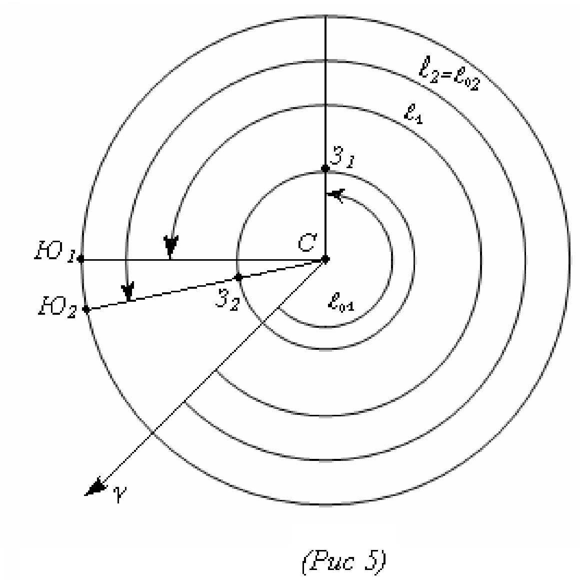
$$l_2 = 328° + 0°{,}08 \cdot 180 = 342°$$

для Землі

$$l_{02} = 234° + 0°{,}99 \cdot 180 = 412° - 360° = 52°\,.$$

Приклад 4. Геліоцентрична довгота Землі 16.05.2021 р. була 234°, а Юпітера – 328°. Визначіть день протистояння Юпітера. Середньодобові рухи Землі по орбіті $n_0 = 0°{,}99$, а Юпітера – $n = 0°{,}08$.

Розв'язування



(Рис 5)

t_1=16.V.2021 р.;

$l_{01} = 234°$; $n_0 = 0°{,}99$

$l_1 = 328°$; $n = 0°{,}08$.

У день протистояння Юпітера його геліоцентрична довгота l_2 дорівнює геліоцентричній довготі Землі l_{02} (рис. 5). Тоді з (15) і (16) матимемо:

$$l_1 + n \cdot \Delta t = l_{01} + n_0 \cdot \Delta t\,.$$

Звідси

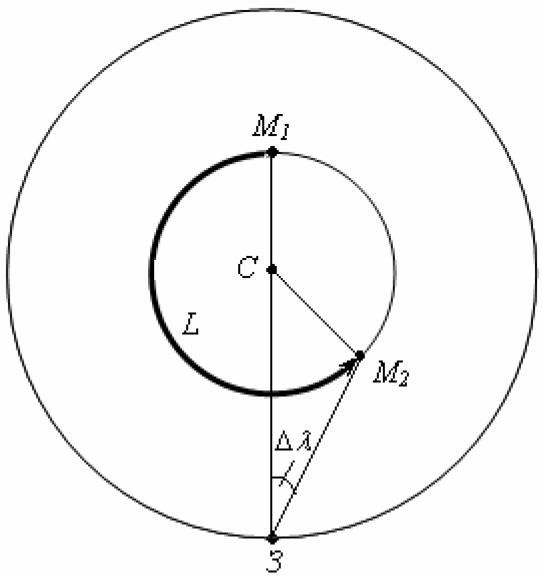
$$\Delta t = \frac{l_1 - l_{01}}{n_0 - n} = \frac{328° - 234°}{0°,99 - 0°,08} = 103 \text{ дня.}$$

Відповідно, протистояння Юпітера настане в день t_2 = 16 травня 2021 р. + 103 дня = 119 травня 2021 р.

Послідовно віднімаючи з t_2 число днів в різних місяцях, отримаємо t_2 = 27.08.2021.

Приклад 5. 30.03.2020 відбулося верхнє сполучення Меркурія. Знайти день настання найбільшої найближчої західної елонгації планети ($\Delta\lambda = 23°$), якщо середній добовий рух Меркурія становить 4°,09, а Землі $-\ n_0 = 0°,99$.

Розв'язування



(Рис 6)

t_1 =30. III. 2020 р.; $\Delta\lambda = 23°$, $n = 4°,09$; $n_0 = 0°,99$.

Складаємо просту схему (рис. 6), на якій зобразимо розташування Землі (З) і Меркурія у день верхнього сонцестояння (M_1) і в день чергової найбільшої західної елонгації (M_2). Оскільки Меркурій рухається швидше Землі ($n > n_0$), то можна вважати Землю нерухомою і рахувати, що Меркурій за проміжок часу Δt пройшов дугу L = M_1 M_2 з відносною кутовою швидкістю $\Delta n = n - n_0$ за добу. З схеми (рис. 6) видно , що

$$L = 180° + (90° - \Delta\lambda) = 270° - 23° = 247°.$$

Оскільки $\Delta n = 4°,09 - 0°,99 = 3°,10$, то згідно з (17)

$$\Delta t = \frac{247°}{3°,10} = 80 \text{ діб}$$

і найбільша західна елонгація Меркурія настане в день t_2 = 30.03.2020 +80 діб = 110 березня 2020 р. або t_2 = 18.06.2020.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Визначіть геліоцентричну довготу Землі і планет 23 вересня, якщо у цей день Меркурій перебуває у найбільшій західній елонгації ($\Delta\lambda = 28°$), а Венера – у найбільшій східній елонгації ($\Delta\lambda = 47°$) і Юпітер – у сполученні.
Відповідь: Земля, l_0=0°; Меркурій, l_M=62°; Венера l_B=317°; Юпітер, l_B=180°.

2. Визначіть синодичний період обертання найближчої планети до Сонця, якщо середня відстань від Сонця до цієї планети становить 0,387 а.о.
Відповідь: 116 діб.

3. Карликова планета Лідія потрапляє у протистоянні кожні 469 діб. У скільки раз ця планета в середньому дальше від Сонця, ніж Земля?
Відповідь: T=4,521 р., a=2,73 а.о.

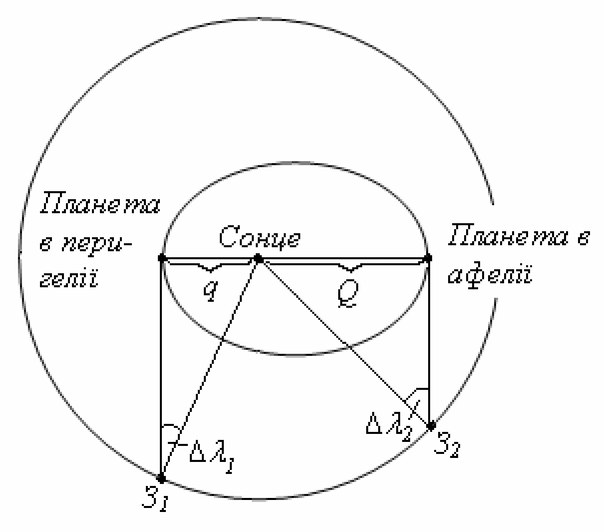
4. Визначіть день настання наступного нижнього сполучення другої планети сонячної системи, якщо її найбільша західна елонгація ($\Delta\lambda = 47°$) відбулася 23.01. 2022.
Відповідь: 16.06.2022 р.

5. Знайдіть день настання чергового протистояння зовнішньої планети Марс. Його сполучення з Сонцем відбулося 14.12.2022. Середній добовий рух Марса становить 0°,52, а Землі – 0°,99.
Відповідь: 04.02.2022.

4. Ексцентриситети планетних орбіт

Теоретичні відомості та основні формули

Ексцентриситети планетних орбіт визначаються із спостережень різноманітними способами. Ексцентриситет *e* орбіти нижньої планети можна розрахувати за значенням найбільшої елонгації, яка залежить від величини радіус-вектора *r* планети у цей момент. Очевидно, що значення найбільшої елонгації $\Delta\lambda_1$ планети (рис. 7) при проходженні нею перигею ($r = q < a$) буде менше значення найбільшої елонгації $\Delta\lambda_2$ при проходженні планетою афелію своєї орбіти ($r = Q > a$). Тоді



(Рис.7)

$$q = a_0 \cdot \sin \Delta\lambda_1 \qquad (19)$$

$$Q = a_0 \cdot \sin \Delta\lambda_2 \qquad (20)$$

де a_0 =1 а.о. – середня відстань Землі від Сонця (орбіта Землі приймається коловою).

Оскільки

$$\frac{q}{Q} = \frac{a(1-e)}{a(1+e)} = \frac{1-e}{1+e}, \qquad (21)$$

тоді з (19) – (20) випливає:

$$\frac{1-e}{1+e} = \frac{\sin \Delta\lambda_1}{\sin \Delta\lambda_2}. \qquad (22)$$

Звідси обчислюється ексцентриситет орбіти внутрішньої планети.

Рівняння (21) дає змогу обчислити ексцентриситет орбіти планети за вимірами її видимого (кутового) діаметру d сонячного диску, оскільки d обернено пропорційне величині радіус-вектору r планети. Найбільше значення $d(d_{\max})$ буде при проходженні планетою перигею ($r = q$), а найменше значення $d(d_{\min})$ – при проходженні планетного апогею ($r = Q$), що дає вираз

$$\frac{d_{\min}}{d_{\max}} = \frac{q}{Q}. \qquad (23)$$

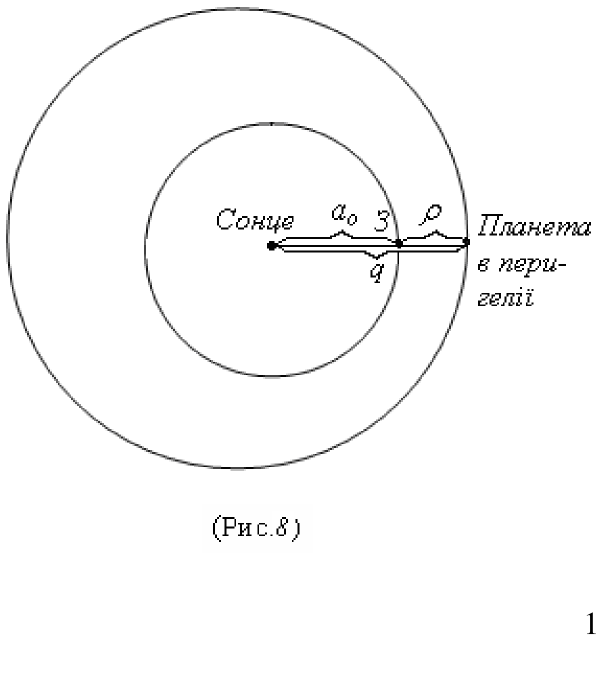
Ексцентриситет орбіти верхньої планети визначається за виміряною геліоцентричною відстанню ρ планети в епоху її найбільш близького (великого) протистояння (рис. 8), для якого

$$q = a_0 + \rho. \qquad (24)$$

Тоді ексцентриситет орбіти

$$e = 1 - \frac{q}{a}, \qquad (25)$$

де a – велика піввісь планетної орбіти.



(Рис.8)

За значенням ексцентриситету орбіти планети і нахилу осі її обертання можна вияснити степінь їхнього впливу на зміну пір року на планеті. Кількість теплоти I, яку отримує планета від Сонця, Обернено пропорційна квадрату радіус-вектора планети. Для днів проходження планетою перигею і афелію

$$\frac{I_q}{I_Q} = \frac{Q^2}{q^2} = \frac{(1+e)^2}{(1-e)^2}. \qquad (26)$$

Відносна зміна кількості теплоти через зміну схилення Сонця (внаслідок нахилу осі планети) можна підрахувати для різних місць поверхні планети за зенітною віддаллю Сонця z_1 і z_2 о півдні, в дні літнього і зимового сонцестояння.

У першому випадку

$$E_1 = E_0 \cdot \cos z_1. \qquad (27)$$

У другому випадку

$$E_2 = E_0 \cdot \cos z_2. \qquad (28)$$

Це дає

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\cos z_1}{\cos z_2}. \qquad (29)$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Найбільша елонгація у деякої гіпотетичної нижньої планети змінюється в межах від 16° до 30°. Визначіть найбільшу піввісь і *e* орбіти цієї планети, її перигелійну і афелійну відстань, а також сидеричний та синодичний період її обертання.

Розв'язування

$\Delta\lambda = 16°$, $\Delta\lambda = 30°$.

За формулами (19)–(20) знаходимо:

$$q = 1 \cdot \sin 16° = 0{,}276 \text{ а.о.}$$

і

$$Q = 1 \cdot \sin 30° = 0{,}500 \text{ а.о.}$$

Далі,

$$a = \frac{q+Q}{2} = \frac{0{,}276 + 0{,}500}{2} = 0{,}388 \text{ а.о.}$$

і

$$T = \sqrt{a^3} = 0{,}388 \cdot \sqrt{0{,}388} = 0{,}242 \textit{ року} = 88 \textit{ діб}.$$

Оскільки планета нижня, то

$$\frac{1}{S}=\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}=\frac{1}{0{,}242}-1=\frac{0{,}758}{0{,}242},$$

або

$$S = 0{,}319\ \textit{року} = 116\ \textit{діб}.$$

Ексцентриситет орбіти e може бути знайденим або за формулою (21), або за формулою (25). За формулою (21)

$$\frac{1-e}{1+e}=\frac{0{,}276}{0{,}500}=0{,}552$$

і

$$1{,}552e = 0{,}448.$$

Звідси

$$e=0{,}289.$$

За формулою (25)

$$e=1-\frac{q}{a}=1-\frac{0{,}276}{0{,}388}=1-0{,}711=0{,}289\ .$$

Приклад 2. Видимий діаметр сонячного диску за спостереженнями з планети Венера змінюється в межах від 43'55" до 44'32", а нахил осі обертання планети становить, приблизно 32°. Визначити ексцентриситет орбіти Венери та вплив ексцентриситету орбіти і нахилу осі обертання на зміну пір року на цій планеті.

Розв'язування

$$d_{\min} = 43'55'' = 2635'',\ d_{max} = 44'32'' = 2672'';\ \varepsilon = 32°$$

Використовуючи формули (21) і (23), знайдемо

$$\frac{q}{Q}=\frac{d_{\min}}{d_{\max}}=\frac{2635''}{2672''}=\frac{1-e}{1+e},$$

$$2635 + 2635e = 2672 - 2672e,$$

або

$$5307e = 37.$$

Звідси

$$e=0{,}007.$$

Згідно з формулою (26), відношення кількості теплоти, отриманої в перигеї і афелії,

$$\frac{I_q}{I_Q}=\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2=\left(\frac{1,007}{0,993}\right)^2=1,014^2=1,028\ ,$$

тобто змінюється всього лише на 2,8 %.

Для будь-якої географічної широти планети $\varphi>\varepsilon$ зенітна віддаль Сонця у південь у дні сонцестоянь буде:

у день літнього сонцестояння

$$z_1=\varphi-\varepsilon\,,$$

у день зимового сонцестояння

$$z_2=\varphi+\varepsilon\,,$$

де $\varepsilon=32°$ – нахил площини екватора планети до площини її орбіти.

Проведемо розрахунок для середньої широти $\varphi=45°$. Тоді

$$z_1=45°-32°=13°,$$

$$z_2=45°+32°=77°\quad,$$

і за формулою (29) знайдемо:

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{\cos 13°}{\cos 77°}=\frac{0,9744}{0,2250}=4,331,$$

тобто внаслідок нахилу осі обертання ступінь нагрівання Сонцем поверхні планети в області середніх широт змінюється у 4,33 рази, тобто на 333%. Відповідно, ексцентриситет орбіти Венери абсолютно не впливає на зміну пір року на планеті.

Приклад 3. Виміряна відстань Сатурна від Землі (геоцентрична віддаль) в епоху найближчого протистояння виявилась 8,01 а.о. Визначити ексцентриситет орбіти Сатурна, якщо його синодичний період обертання дорівнює 378 діб.

Розв'язування

$\rho=8{,}01$ а.о., $S=378$ діб = 1,035 року; $a_0=1$ а.о.

Знайдемо зоряний період T обертання Сатурна:

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{T_0}-\frac{1}{S}=1-\frac{1}{1,035}=\frac{0,035}{1,035}$$

і

$$T=29{,}5\ \text{років}$$

За третім законом Кеплера

$$a^3=T^2$$

і

$$a = \sqrt[3]{29{,}5^2} = 9{,}54 \text{ а.о.}$$

Тоді, за формулою (24), перигей на відстань Сатурна

$$q = 1 + 8{,}01 = 9{,}01 \text{ а.о.}$$

і, за формулою (25), ексцентриситет орбіти

$$e = 1 - \frac{9{,}01}{9{,}54} = 1 - 0{,}944 = 0{,}056.$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Для уявної планети найбільша елонгація є у межах [27°, 36°]. Визначіть a та ексцентриситет орбіти планети, її перигелійну і афелійну віддаль, зоряний період обертання та S.

Відповідь: a=0,521 а.о., e=0,129, q=0,454 а.о. і Q=0,588 а.о., T=0,376 р. = 137 діб, S=0,603 р. = 220 діб.

2. Для сьомої планети сонячної системи найменша геліоцентрична віддаль становить 18,29 астнономічні одиниці. Обчисліть ексцентриситет орбіти планети, її найменшу віддаль від Сонця та найбільшу, якщо більша піввісь орбіти становить 19,19 а.о.

Відповідь: Уран, e=0,047, q=18,29 а.о. і Q=20,09 а.о.

3. Обчисліть вплив e та нахилу осі обертання найбільшої планети сонячної системи на зміну пір року на цій планеті, якщо ексцентриситет орбіти дорівнює 0,048, а нахил осі планети 3°07'.

Відповідь: $\frac{I_1}{I_2} = 1{,}21$; для $\varphi = 45°$ $\frac{E_1}{E_2} = 1{,}12$. Ексцентриситет сильніше впливає, ніж нахил осі обертання. Зміна пір року відсутня, оскільки зміна E та I незначні.

4. З планети Марс при середній відстані від Сонця видимий діаметр становить 1,52а.о. Знайдіть межі його зміни. Сонце виглядає диском з діаметром 21'03". Ексцентриситет орбіти 0,093.

Відповідь: q=1,38 а.о. і Q=1,66 а.о., $d_{\max} = 23'13''$, $d_{\min} = 19'16''$

5. Який вплив *e* земної орбіти і нахилу земної осі (дорівнює 23°27') на зміну пір року на Землі. Дайте пояснення про причини зміни пір року.

Відповідь: $I_1 / I_2 = 1,07$ для $\phi = 45°$ $E_1 / E_2 = 2,28$ Вплив нахилу осі значніший, ніж впливу ексцентриситету. Зміна пір року зумовлена нахилом земної осі обертання.

Закон всесвітнього тяжіння

1. Визначення мас небесних тіл

Теоретичні відомості та основні формули

Маси небесних тіл визначаються за третім узагальненим законом Кеплера, який виведений Ньютоном:

$$\frac{T_1^2\left(M_1+m_1\right)}{a_1^3}=\frac{T_2^3\left(M_2+m_2\right)}{a_2^3}=\frac{4\pi^2}{f}=const. \qquad (1)$$

Цей закон застосовується до будь-якої системи тіл з масами m_1 *і* m_2, які обертаються з періодами T_1 *і* T_2 навколо своїх центральних тіл (з масами M_1 *і* M_2) по орбітах, великі півосі яких дорівнюють відповідно a_1 *і* a_2. Маси планет і їх супутників виражаються, як правило, у масах Землі (значно рідше – у масах Сонця). Маси зірок завжди виражаються у масах Сонця. Великі півосі орбіт небесних тіл виражаються в астрономічних одиницях (рідше – у кілометрах), а періоди обертання – у роках та добах.

Якщо використати третій узагальнений закон Кеплера у вигляді:

$$\frac{T_1^2\left(M_1+m_1\right)}{a_1^3}=\frac{T_2^2\left(M_2+m_2\right)}{a_2^3}, \qquad (2)$$

тоді вибір системи одиниць вимірювання не має значення, лише б однорідні величини були виражені в однакових одиницях.

Якщо ж цей закон використовується у вигляді

$$\frac{T^2\left(M+m\right)}{a^3}=\frac{4\pi^2}{f}, \qquad (3)$$

тоді розв'язок задач проводиться обов'язково у визначеній системі одиниць, бо у різних системах числове значення гравітаційної сталої різне. Наприклад, у системі одиниць Ф. Гауса (маси – а масах Сонця, віддаль – в астрономічних одиницях і час – у середніх добах) $f=295{,}9\cdot10^{-6}$, а $k=\sqrt{f}=0{,}0172$ називається гаусовою сталою. При вираженні мас небесних тіл у масах Землі, часу – у роках і віддалі – в а.о. $f=118{,}4\cdot10^{-6}$. Значно рідше (тільки у теоретичних розрахунках) масу небесних тіл виражають у грамах ($г$). Тоді час виражається у секундах, віддаль – у сантиметрах і $f = 6{,}668\cdot10^{-8}$. Міжнародна система одиниць (СІ) в астрономії використовується досить рідко. У цій системі маси вимірюються у кілограмах, відстані – у метрах, час – у секундах і $f = 6{,}668\cdot10^{-11}$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Яка маса Нептуна, якщо рух його супутника Тритон відбувається з періодом 5,88 діб на середній відстані 353,7 тис. км? Період обертання Місяця навколо Землі становить 27,32 діб, велика піввісь орбіти Місяця дорівнює $384{,}4\cdot10^{3}$ *км*.

Розв'язування

Дані: $T_1 = 5{,}88\ діб$; $a_1 = 353{,}7\cdot10^{3}\ км$; $T_2 = 27{,}32\ діб$; $a_2 = 384{,}4\cdot10^{3}\ км$.
Використаємо формулу (2)

$$\frac{T_1^2(M_1 + m_1)}{a_1^3} = \frac{T_2^2(M_2 + m_2)}{a_2^3}.$$

M_1 – маса Нептуна, m_1– маса Тритона, T_1– період обертання Тритона, a_1 – середня відстань Тритона від Нептуна (велика піввісь орбіти тритона), M_2 – маса Землі, m_2 – маса Місяця, T_2 – період обертання Місяця, a_2 – велика піввісь орбіти Місяця.

Нехтуючи масами m_1 *і* m_2 в порівнянні з M_1 *і* M_2 і приймаючи $M_2 = 1$, одержуємо:

$$M_1 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{353{,}7}{384{,}4}\right)^3 \cdot \left(\frac{27{,}32}{5{,}88}\right)^2 = 17{,}2.$$

Приклад 2. Визначити масу Нептуна за рухом Тритона.

Розв'язування

Дані: $T = 5{,}88\ діб$; $a_1 = 353{,}7\cdot10^{3}\ км$.

Задача може бути розв'язана у різних системах одиниць. При визначенні маси планети у масах Землі вважаємо $f = 118{,}4\cdot10^{-6}$ і тоді виражаємо T у роках і a - в а. о.:

$$T = \frac{5,88}{365,2}\,\textit{роки}, \qquad a = \frac{353,7\cdot 10^3}{149,5\cdot 10^6}\,\textit{а. о.}, \qquad f = 118,4\cdot 10^{-6}.$$

Нехтуючи масою супутника в формулі (3), одержуємо:

$$M = \frac{4\pi^2}{f}\cdot\frac{a^3}{T^2} = \frac{4\cdot 3,142^2}{118,4\cdot 10^{-6}}\cdot\left(\frac{353,7}{149,5\cdot 10^3}\right)^3\cdot\left(\frac{365,2}{5,88}\right)^2 = 17,2.$$

При обчисленні маси планети в грамах вважаємо $f = 6,668\cdot 10^{-8}$ і тоді виражаємо *T* у секундах і *a* – у сантиметрах:

$$T = 5,88\cdot 86400\,\textit{сек},\quad a = 353,7\cdot 10^8\,\textit{см},\quad f = 6,68\cdot 10^{-8}.$$

Тоді

$$M = \frac{4\pi^2}{f}\cdot\frac{a^3}{T^2} = \frac{4\cdot 3,142^2}{6,668\cdot 10^{-8}}\cdot\frac{\left(353,7\cdot 10^8\right)^3}{\left(5,88\cdot 86400\right)^2},$$

або

$$M = 103\cdot 10^{27}\ \textit{г}.$$

Приклад 2. Визначити який би був період обертання Місяця навколо Землі за умови збільшення маси Землі у 4 рази. Вважайте, що Місяць залишався на тій самій відстані.

Розв'язування

Дані: $M_1 = 1; M_2 = 4; m_1 = m_2 \approx 0; a_1 = a_2; T_1 = 27,32\ \textit{діб}.$

Із формули (2) маємо

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \frac{M_1}{M_2}\cdot\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3 = \frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{4}$$

$$T_2 = \sqrt{1/4}\cdot 27,32 = 13,66\ \textit{діб}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Супутник Марса Деймос перебуває на середній відстані від планети ($23,5\cdot 10^3$ *км*), а його період обертання становить 1,26 діб. Період обертання Місяця навколо Землі дорівнює 27,32 доби, а велика піввісь орбіти Місяця становить $384,4\cdot 10^3$ *км*. Яка маса Марса у масах Землі.

Відповідь**:** 0,11.

2. Визначити масу найбільшої планети сонячної системи у масах Землі, якщо рух її другого супутника (Європи) відбувається за 3,55 доби на середній відстані 671,4 тис. км. Місяць ж обертається навколо Землі за 27,32 доби на середній відстані 384,4 тис. км.
Відповідь: 317.

3. Сьомий Сатурна супутник, Гіперон, перебуває від планети на середній віддалі 1 481 000 км і обертається навколо Сатурна з періодом 21,28 діб. Обчисліть масу Сатурна у масах Землі. Гравітаційна стала $f = 118,4 \cdot 10^{-6}$.
Відповідь: 95,1.

4. Визначіть масу Урану у масах нашої планети за рухом його супутника Оборона, що обертається навколо планети з періодом 13,46 діб на середній відстані 587000 км. Гравітаційна стала $f = 118,4 \cdot 10^{-6}$.
Відповідь: 14,6.

5. Яка маса Сонця у масах Землі.
Відповідь: 333 400.

2. Притягання і тяжіння

Теоретичні відомості та основні формули

Центробіжне (доцентрове) прискорення тіла g масою m, яке обертається навколо тіла маси M визначається формулою

$$g = f\frac{M+m}{r^2}, \tag{4}$$

де r – відстань між центрами цих тіл.

Якщо маса m мала у порівнянні з M (наприклад, маси планет малі у порівнянні з масою Сонця, маси супутників планет малі у порівнянні з масою самих планет), то в формулі (4) величиною m можна знехтувати і тоді

$$g = f\frac{M}{r^2}. \qquad (5)$$

Унаслідок однакової фізичної природи сили притягання і сили тяжіння, величина прискорення сили тяжіння g_R на поверхні небесного тіла визначається за тією же формулою (5), з заміною в ній *r* радіусом *R* небесного тіла :

$$g_R = f\frac{M}{R^2}. \qquad (6)$$

Поділивши вираз (5) на (6), одержимо:

$$g = g_R\left(\frac{R}{r}\right)^2, \qquad (7)$$

тобто гравітаційне по своїй природі центробіжне прискорення тіла, яке обертається, обчислюється за прискоренням сили тяжіння на поверхні центрального тіла.

Величина g_R легко визначається за прискоренням g_0 сили тяжіння на земній поверхні. Для поверхні Землі

$$g_0 = f\frac{M_0}{R_0^2}, \qquad (8)$$

де M_0 – маса Землі і R_0 – радіус Землі, то, ділячи (6) на (8), знаходимо

$$g_R = g_0\frac{\frac{M}{M_0}}{\left(\frac{R}{R_0}\right)^2},$$

або просто

$$g_R = g_0\frac{M}{R^2}, \qquad (9)$$

де M і R – маса і радіус небесного тіла, які виражені у масах і радіусах Землі.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Обчисліть масу планети Нептун, якщо середня кутова швидкість руху його супутника Тритона складає $61^{\circ},26$ у добу, середня відстань супутника від планети становить 353,7 тис. км.

Розв'язування

Центробіжне прискорення Тритона $g = \omega^2 r = \omega^2 a$, і оскільки воно має гравітаційну природу, то використовуючи (6), отримаємо

$$g = f\frac{M}{a^2}.$$

Відповідно

$$\omega^2 a = f\frac{M}{a^2}.$$

Звідси

$$M = \frac{\omega^2 a^3}{f}.$$

Для визначення маси Нептуна а масах Землі необхідно виразити ω в радіанах за рік, a – у а.о. і $f = 118{,}4 \cdot 10^{-6}$ (1 радіан = $57^\circ{,}3$)

Дані : $\omega = 61^\circ{,}26$ в добу = 22375° в рік = 390,5 радіан в рік;

$a = 353{,}7 \cdot 10^3$ *км* $= 2{,}366 \cdot 10^{-3}$ *а.о.*; $f = 118{,}4 \cdot 10^{-6}$.

Тоді

$$M = \frac{390{,}5^2 \cdot \left(2{,}366 \cdot 10^{-3}\right)^3}{118{,}4 \cdot 10^{-6}} = 17{,}2.$$

Якщо потрібно визначити масу Нептуна у кілограмах, то ω виражається в радіанах на секунду, a – у метрах і $f = 6{,}66810^{-11}$ (1 доба = 86 400 сек.)

Дані : $\omega = 61^\circ{,}26 \; \textit{в доби} = \dfrac{61^\circ{,}26}{57^\circ{,}3 \cdot 86400} = 1{,}237 \cdot 10^{-5} \; \textit{рад/сек}$;

$a = 353{,}7 \cdot 10^3$ *км* $= 353{,}7 \cdot 10^6$ *м.* $\quad f = 6{,}66810^{-11}$

Тоді

$$M = \frac{\left(1{,}237 \cdot 10^{-5}\right)^2 \cdot \left(353{,}7 \cdot 10^6\right)^3}{6{,}668 \cdot 10^{-11}} = 103 \cdot 10^{24} \; \textit{кг}.$$

Приклад 2. На Землі дорівнює людина важить 70 кг. Скільки важить ця людина на Юпітері, якщо маса цієї планети у 317 раз більша від маси Землі. Радіус Юпітера у 11,2 раза перевищує земний.

Розв'язування

Дані: $P_0 = 70\,кг$; M=317; R=11,2.

Вага тіла $P = mg_R$, де m – маса тіла і g_R – прискорення сили тяжіння на поверхні планети. На Землі $P_0 = mg_0$, а на Юпітері вага того ж тіла буде $P = mg_R$. Звідси

$$P = P_0 \frac{g_R}{g_0}.$$

Відповідно до (9)

$$\frac{g_R}{g_0} = \frac{M}{R^2}$$

і тому

$$P = P_0 \frac{M}{R^2} = 70 \cdot \frac{317}{11{,}2^2} = 70 \cdot 2{,}53 = 177\ кг.$$

Приклад 3. Знайти гравітаційне доцентрове прискорення, яке надає Юпітер своєму другому супутнику Європі, що перебуває від планети на середній відстані $671{,}4 \cdot 10^3\ км$. Маса Юпітера к 317 разів більша від маси Землі, а радіус Землі становить 6370 км.

Розв'язування

Дані: $a = 671{,}4 \cdot 10^3\ км; M = 317; R_0 = 6370\,км.$

За формулами (7) і (9) маємо:

$$g = g_R \frac{R^2}{r^2},\ g_R = g_0 \frac{M}{R^2},$$

де $g_0 = 981\,см/сек^2$ – прискорення сили тяжіння на земній поверхні. Тоді $g = g_0 \frac{M}{r^2}$, причому відстань r має бути обов'язково виражена у радіусах Землі, а маса M – у масах Землі, тобто у тих же одиницях вимірювання, що і у формулі (9). Відповідно

$$g = 981 \cdot \frac{317}{\left(\frac{671{,}4 \cdot 10^3}{6370}\right)^2} = 27{,}8\ см/сек^2.$$

Приклад 4. Визначіть прискорення сили тяжіння на поверхні найближчої планети до Сонця і на відстані 7155 км від її поверхні. Маса цієї планети дорівнює 0,0543 мас Землі, а радіус становить 2385 км.

Розв'язування

Дані: $r = 7155\,км + 2385\,км = 9540\,км; R = 2385\,км; M = 0{,}0543.$

Виражаємо радіус R планети у радіусах Землі:

$$R = \frac{2385}{6370} = 0{,}374\,.$$

За формулою (9) знаходимо:

$$g_R = \frac{0{,}0543}{0{,}374^2} \cdot g_0 = 0{,}388\ g_0$$

або

$$g_R = 0{,}388 \cdot 981 = 381\,см/сек^2\,.$$

Відстань 7155 км від поверхні планети відповідає відстані $r = 7155\,км + 2385\,км = 9540\,км$ від її центра або

$$r = \frac{9540}{2385} = 4R.$$

Тоді, відповідно (7), маємо:

$$g = g_R\left(\frac{R}{4R}\right)^2 = \frac{1}{16}g_R = \frac{0{,}388}{16}g_0 = 0{,}024\,g_0\,,$$

або

$$g = \frac{381}{16} = 23{,}8\ см/сек^2\,.$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Середня швидкість руху Землі по орбіті дорівнює 1° у добу. Обчисліть масу Сонця в масах Землі і в грамах.

Відповідь: 333 400 мас Землі або $2 \cdot 10^{33}\ г$.

2. Другий супутник Марса Деймос рухається зі середньою кутовою швидкістю $285^\circ{,}3$ у добу. Велика піввісь орбіти Деймоса становить $23{,}5 \cdot 10^3\ км$. Знайдіть масу Марса.

Відповідь: 0,107 мас Землі або $0{,}64 \cdot 10^{27}\ г$.

3. Скористайтеся результатами попередньої задачі та визначіть середню кутову швидкість руху першого супутника Марса Фобоса, який обертається навколо планети на середній відстані 9400 км (або 2,77 радіуса планети).

Відповідь: 1128° в добу, т.д. більше трьох обертів.

4. Визначіть середню кутову швидкість руху Нереїди (супутника Нептуна). Її велика піввісь орбіти становить $5570 \cdot 10^3$ *км* (або 200 радіусів Нептуна), а маса Нептуна дорівнює 17,2 мас Землі.

Відповідь: 1° у добу.

5. Знайдіть прискорення сили вільного падіння на поверхні Місяці і Сонця. Маса Сонця становить $333 \cdot 10^3$, його радіус – 109, маса Місяця – 0,012 і його радіус – 0,27. Тут маси подано у масах Землі, радіуси – у радіусах Землі.

Відповідь: на Сонці прискорення вільного падіння у 28 раз більше земного, або 275 $см/сек^2$; на Місяці – 0,164 (в 6 раз менше) земного або 162 $см/сек^2$.

3. Задача двох тіл. Штучні небесні тіла

Теоретичні відомості та основні формули

Задача визначення орбіти одного небесного тіла відносно іншого зводиться до класичної задачі двох тіл. У цій задачі розглядається рух тіла меншої маси m відносно тіла з більшою масою M, яке вважається нерухомим і називається центральним тілом. Лінійна швидкість υ, тіла яке рухається відносно центрального визначається інтегралом енергії

$$\upsilon^2 = f\,(M+m)\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right) = \mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right), \qquad (10)$$

де $\mu = f\,(M+m)$, a – велика піввісь орбіти тіла меншої маси, r – модуль радіус-вектора цього ж тіла, f – гравітаційна стала.

Якщо маса m рухомого тіла дуже мала в порівнянні з масою M центрального тіла, то $\mu = f\,M$. Відповідно до інтегралу енергії, кожній відстані від центрального тіла відповідає ряд значень швидкості υ, які визначають тип орбіти рухомого тіла. Щоб тіло оберталось навколо центрального тіла по коловій орбіті радіусом $r = a$, воно повинне на цій відстані обов'язково мати швидкість

$$\upsilon = \upsilon_0 = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}, \qquad (11)$$

або

$$\upsilon_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r}}. \qquad (12)$$

Тому швидкість υ_0 називається коловою. Ексцентриситет колової орбіти $e = 0$. Колова швидкість υ_0 як середня швидкість руху тіла може бути також підрахована за періодом T і великою піввіссю a орбіти тіла:

$$\upsilon_0 = \frac{2\pi a}{T}. \qquad (13)$$

Якщо рухоме тіло на відстані r від центрального тіла має швидкість

$$\upsilon_n = \upsilon_0\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}, \qquad (14)$$

то орбітою буде парабола (ексцентриситет e=1), так як при $\upsilon = \upsilon_n$ із рівняння (10) одержуємо $a = \infty$. Тому швидкість υ_n називається параболічною.

При швидкості υ, яка визначається нерівністю

$$\upsilon_0 < \upsilon < \upsilon_n,$$

орбітою рухомого тіла буде еліпс (0<e<1), тим більше витягнутий, ніж ближче υ до $\upsilon_П$. При $\upsilon > \upsilon_П$ рухомого тіла орбіта пройде поблизу центрального тіла по гіперболі (e>1).

Всі закони небесної механіки застосовуються і до руху штучних небесних тіл. При запуску штучних супутників, космічних кораблів-супутників і космічних ракет їм надається швидкість запуску $\upsilon_н$ в залежності від призначеної (вибраної) орбіти. Ця швидкість надається штучним небесним тілам ракетою-носієм на деякій висоті $h_н$ над поверхнею планети при

$$r = R + h_н, \qquad (15)$$

де R – радіус небесного тіла, з якого відбувається запуск. Зокрема, при запуску з Землі $R = R_0 = 6370\,км$, колова швидкість υ_0 супутника і параболічна швидкість $\upsilon_П$ космічної ракети визначається формулами (12), (13) і (14), у яких $\mu = f\,M$, де M – маса небесного тіла.

При запуску штучних тіл безпосередньо поблизу поверхні небесного тіла можна вважати $h_н$ =0, $r = R$ і тоді колова швидкість

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{f\,M}{R}} = \sqrt{g_R \cdot R} \qquad (16)$$

і параболічна швидкість

$$\omega_П = \sqrt{\frac{2f\,M}{R}} = \sqrt{2g_R \cdot R} = \omega_0 \cdot \sqrt{2}\,. \qquad (17)$$

Колова швидкість ω_0 на поверхні небесного тіла називається першою космічною швидкістю, а параболічна швидкість $\omega_П$ – другою космічною швидкістю. У астрономії ще швидкість $\omega_П$ називається критичною швидкістю або швидкістю виходу. Очевидно , що на висоті h над поверхнею небесного тіла

$$r = R + h,$$

$$\upsilon_0 = \omega_0 \sqrt{\frac{R}{r}} \qquad (18)$$

$$\upsilon_П = \omega_П \sqrt{\frac{R}{r}} \qquad (19)$$

але завжди $\upsilon_П = \upsilon_0 \cdot \sqrt{2}$.

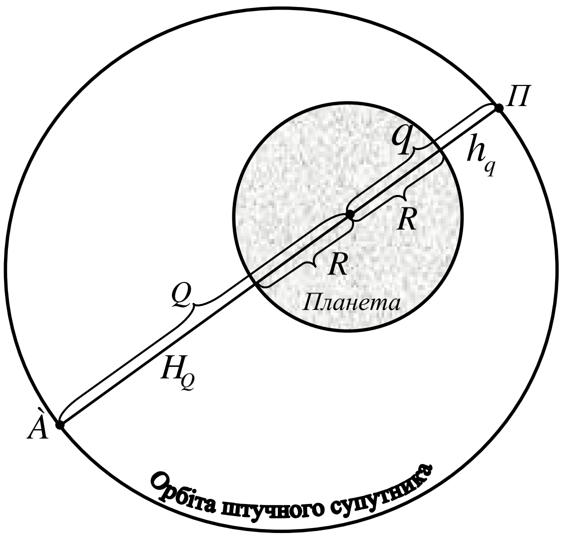


Рис.1

При запуску штучного супутника по еліптичній орбіті (рис.1) йому надається швидкість $\upsilon > \upsilon_0$, але менша від $\upsilon_П$. Центр С небесного тіла визначає один із фокусів еліптичної орбіти, велика піввісь якої

$$a = \frac{q + Q}{2}, \qquad (20)$$

причому

$$q = R + h_q \qquad (21)$$

$$Q = R + H_Q \qquad (22)$$

де R – радіус небесного тіла, h_q – найменша висота і H_Q – найбільша висота штучного супутника над поверхнею небесного тіла. Зокрема, для штучних супутників Землі $R = R_0 = 6370\ км$ – радіус Землі, h_q – висота перигею П і H_Q – висота апогею А супутника.

Швидкість космічних тіл завжди виражається у кілометрах за секунду і, відповідно до (10) – (14), обчислюється за формулами:

$$\upsilon = B\sqrt{M\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)} \tag{23}$$

$$\upsilon_0 = B\sqrt{\frac{M}{r}}, \tag{24}$$

$$\upsilon_П = B\sqrt{\frac{2M}{r}}, \tag{25}$$

де $B = \sqrt{f}$ має різне числове значення у різних системах одиниць. Так, якщо маси M виражені в масах Землі, відстані r і a – у радіусах Землі, то $B = 7{,}91$. При вираженні M у масах Землі, r і a – у кілометрах , $B = 631{,}2$. Якщо ж маси вираженні у масах Сонця , r і a – у астрономічних одиницях, то $B = 29{,}8$.

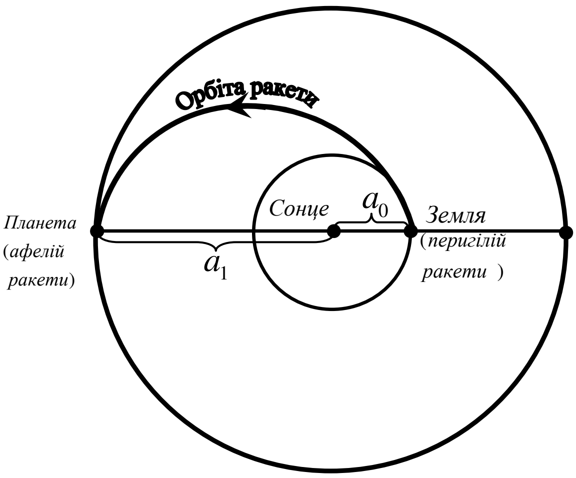
Періоди обертання T штучних супутників звичайно задаються у хвилинах, а відстані їх r і a від центрального тіла – у кілометрах. Тому для штучних супутників третій закон Кеплера має вигляд:

$$T^2 = 275{,}2 \cdot 10^{-10}\frac{a^3}{M}\ , \tag{26}$$

$$T = 16{,}59 \cdot 10^{-5}\ \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{M}}, \tag{27}$$

де M – маса центрального тіла, виражена в масах Землі.

Швидкість штучних супутників в перигеї υ_q і апогеї υ_Q обчислюється за формулою (23) при підстановці у неї відповідно $r = q = r + h_q$ і $r = Q = R + H_Q$.



$Рис.2$

Оскільки штучні супутники виводяться на орбіту, як правило, у перигеї, то початкова швидкість запуску $\upsilon_н$ може бути

$$\upsilon_H = \upsilon_q. \tag{28}$$

Космічним ракетам надається при запуску початкова швидкість $\upsilon_H \geq \upsilon_П$ на поверхні планети, інакше космічна ракета стане штучним супутником планети. Покинувши планету, ракета стає штучним супутником Сонця і рухається за законами руху планет. У загальному випадку, якщо ракета запущена з Землі до верхньої планети, яка перебуває на орбіті з великою піввіссю a_1 (рис.2), тоді перигелійна відстань ракети

$$q = a_0 = 1 a.o.,$$

афелійна відстань $Q = a_1$ і велика піввісь орбіти ракети

$$a = \frac{a_0 + a_1}{2}. \tag{29}$$

Тривалість польоту ракети до планети

$$t = T / 2 , \tag{30}$$

де T – період обертання ракети, який визначається за a із третього закону Кеплера. Швидкість ракети відносно Сонця у довільній точці її орбіти визначається формулою (23) при $B = 29{,}8$.

Залежно від положення планети, з якої відбувається запуск ракети, початкова швидкість ракети V_H відносно Сонця вважається такою, що дорівнює її швидкості V_q у перигелії або швидкості V_Q в афелії, причому V_q і V_Q визначаються із рівняння (23) при підстановці у нього відповідно $r = q$ і $r = Q$.

Швидкість запуску ракети υ_H з Землі або з іншої планети визначається за формулою:

$$\upsilon_H = \sqrt{\upsilon_П^2 + \upsilon_Д^2} , \tag{31}$$

де $\upsilon_н$ – параболічна швидкість на поверхні планети і $\upsilon_Д$ – додаткова швидкість, причому

$$\upsilon_Д = V_H - V_p \tag{32}$$

де V_p – швидкість планети відносно Сонця, яка називається орбітальною швидкістю. У першому наближенні вона може бути прийнята такою, що дорівнює коловій швидкості планети.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти колову та параболічну швидкість на середній відстані 2,98 а.о карликової планети Гесперії від Сонця.

Розв'язування

Дані : $a = 2{,}98\ a.\,o.$

Оскільки планети рухаються навколо Сонця, то використовуємо формули (24) і (25), у яких маса Сонця вважається $M = 1$, а $B = 29{,}8$.

$$\upsilon_0 = \frac{29{,}8}{\sqrt{a}} = \frac{29{,}8}{\sqrt{2{,}98}} = 17{,}2\ км/сек,$$

$$\upsilon_П = \frac{42{,}0}{\sqrt{a}} = \frac{42{,}0}{\sqrt{2{,}98}} = 24{,}4\ км/сек.$$

*Приклад 2***.** Яка колова та параболічну швидкості на відстанях $450 \cdot 10^6\ км\ і\ 900 \cdot 10^6\ км$ від Сонця.

Розв'язування

Дані: $r_1 = 450 \cdot 10^6\ км \approx 3\ а.\,о.$; $r_2 = 900 \cdot 10^6\ км \approx 6\ а.\,о.$

Використовуємо формули (24) і (25) при $B = 29{,}8$:

для $r_1 = 3\ а.\,о.$

$$\upsilon_0 = \frac{29{,}8}{\sqrt{3}} = 17{,}2\ км/сек;$$

$$\upsilon_П = 17{,}2 \cdot \sqrt{2} = 24{,}3\ км/сек,$$

для $r_2 = 6\ а.\,о.$

$$\upsilon_0 = \frac{29{,}8}{\sqrt{6}} = 12{,}2\ км/сек;$$

$$\upsilon_П = 12{,}2 \cdot \sqrt{2} = 17{,}2\ км/сек.$$

*Приклад 3***.** У 1910 році **к**омета Галілея пройшла свій перигелій на геліоцентричній відстані 0,59 а.о. зі швидкістю 54,1 км/сек., а комета 1930 VII пройшла свій перигелій на відстані 0,41 а.о. від Сонця, зі швидкістю 71,2 км/сек.. Якими орбітами рухались ці коменти?

Розв'язування

Дані: комета Галілея , $q_1 = 0{,}59\ а.\,о.$, $\upsilon_{q1} = 54{,}1\ км/сек$;

комета 1930 VII , $q_2 = 0{,}41\ а.\,о.$, $\upsilon_{q2} = 71{,}2\ км/сек.$

Щоб визначити вид орбіти, необхідно підрахувати колову швидкість υ_0 і параболічну швидкість $\upsilon_П$ відносно Сонця на заданих відстанях q_1 і q_2 від нього і співставити визначенні швидкості з реальними.

Комета Галілея: колова швидкість υ_0 на відстані q_1 знаходиться за формулою (3.15) при $r_1 = q_1 = 0{,}59\ а.\,о.$:

$$\upsilon_0 = \frac{29{,}8}{\sqrt{q_1}} = \frac{29{,}8}{\sqrt{0{,}59}} = 38{,}7\ км\,/\,сек.$$

За формулою (14) знаходиться параболічна швидкість на цій ж відстані:

$$\upsilon_П = \upsilon_0 \cdot \sqrt{2} = 38{,}7 \cdot \sqrt{2} = 54{,}6\ км/сек.$$

Оскільки $\upsilon_0 < \upsilon_{q1} < \upsilon_П$ і в цей же час υ_{q1} близька до $\upsilon_П$, то комета Галілея обертається навколо Сонця по дуже витягнутій еліптичній орбіті.

Комета 1930 VII : на відстані $r_2 = q_2 = 0{,}41\ а.\,о.$ колова швидкість

$$\upsilon_0 = \frac{29{,}8}{\sqrt{q_2}} = \frac{29{,}8}{\sqrt{0{,}41}} = 46{,}6\ км/сек.$$

Параболічна швидкість

$$\upsilon_П = \frac{42{,}0}{\sqrt{q_2}} = \frac{42{,}0}{\sqrt{0{,}41}} = 65{,}6\ км/сек,$$

тобто швидкість комети у перигелії $\upsilon_{q2} > \upsilon_П$ і, відповідно, комета пройшла поблизу Сонця по гіперболічній орбіті і більше до Сонця не повернеться.

*Приклад 4***.** Знайдіть середню швидкість для двох малих планет Фотографіки й Ікара у перигеї і в апогеї, а також колову і параболічну швидкість на тих самих відстанях від Сонця. Порівняйте отримані результати між собою і зробити висновок про зв'язок швидкостей обох планет з ексцентриситетом їхній орбіт. Велика піввісь Фотографіки дорівнює 2,22 а.о. і 0,040, а ці ж величини для Ікара – 1,08 а.о. і 0,827.

Розв'язування

Дані : Фотографіка, $a_1 = 2{,}22$ а.о., $e_1 = 0{,}040$;

Ікар, $a_2 = 1{,}08$ а.о., $e_2 = 0{,}827$.

Використовуємо формули (23), (24) і (25) при масі Сонця $M = 1$ і $B = 29{,}8$.

Відповідно з (23), середня швидкість планети

$$\upsilon_0 = 29,8\sqrt{\frac{2}{a}-\frac{1}{a}} = \frac{29,8}{\sqrt{a}},$$

тобто одержуємо формулу (24) для колової швидкості планети.
Для Фотографіки :

$$\upsilon_0 = \frac{29,8}{\sqrt{a}} = \frac{29,8}{\sqrt{2,22}} = 20,0\ \textit{км / сек}.$$

Перигельна відстань $q_1 = a_1(1-e_1) = 2,22 \cdot 0,960 = 2,13\ \textit{а.о.}$; швидкість планети в перигелії, відповідно (23),

$$\upsilon_q = 29,8\sqrt{\frac{2}{q_1}-\frac{1}{a_1}} = 29,8\sqrt{\frac{2}{2,13}-\frac{1}{2,22}} = 20,9\ \textit{км/сек.}$$

На тій же відстань $q_1 = 2,13\ \textit{а.о.}$ від Сонця, за формулами (24) і (3.16), знаходимо колову швидкість

$$\upsilon_{0\,q_1} = \frac{29,8}{\sqrt{q_1}} = \frac{29,8}{\sqrt{2,13}} = 20,4\ \textit{км/сек}$$

і параболічна швидкість

$$\upsilon_{П\,q_1} = \frac{42,0}{\sqrt{q_1}} = \frac{42,0}{\sqrt{2,13}} = 28,8\ \textit{км / сек}.$$

Афелійна відстань $Q_1 = a_1(1+e) = 2,22 \cdot 1,040 = 2,31\textit{а.о.}$; швидкість планети в афелії, відповідно до (23) становить

$$\upsilon_Q = 29,8\sqrt{\frac{2}{Q}-\frac{1}{a_1}} = 29,8\sqrt{\frac{2}{2,31}-\frac{1}{2,22}} = 19,2\ \textit{км / сек.}$$

На тій же відстані $Q = 2,31\ \textit{а.о.}$ від Сонця знаходимо колову швидкість

$$\upsilon_{0\ Q_1} = \frac{29,8}{\sqrt{Q_1}} = \frac{29,8}{\sqrt{2,31}} = 19,6\ \textit{км / сек}$$

і параболічна швидкість

$$\upsilon_{П\ Q_1} = \frac{42,0}{\sqrt{Q_1}} = \frac{42,0}{\sqrt{2,31}} = 27,6\ \textit{км / сек.}$$

Для Ікара :

$$\upsilon_0 = \frac{29,8}{\sqrt{a_2}} = \frac{29,8}{\sqrt{1,08}} = 28,6\ \textit{км / сек.}$$

Перигілійна відстань $q_2 = a_2(1-e_2) = 1,08 \cdot 0,173 = 0,187\ \textit{а.о.}$; швидкість в перигелії

$$\upsilon_q = 29{,}8\sqrt{\frac{2}{q_2} - \frac{1}{a_2}} = 29{,}8\sqrt{\frac{2}{0{,}187} - \frac{1}{1{,}08}} = 93{,}1\ км/сек.$$

На відстані $q_2 = 0{,}187\ а.о.$ від Сонця колова швидкість

$$\upsilon_{0\,q_2} = \frac{29{,}8}{\sqrt{q_2}} = \frac{29{,}8}{\sqrt{0{,}187}} = 69{,}0\ км/сек$$

і параболічна швидкість

$$\upsilon_{П\,q_2} = \frac{42{,}0}{\sqrt{q_2}} = \frac{42{,}0}{\sqrt{0{,}187}} = 97{,}2\ км/сек.$$

Афелійна відстань $Q_2 = a_2(1 + e_2) = 1{,}08 \cdot 1{,}827 = 1{,}97\,а.о.$ і швидкість в перигелії

$$\upsilon_Q = 29{,}8\sqrt{\frac{2}{Q_2} - \frac{1}{a_2}} = 29{,}8\sqrt{\frac{2}{1{,}97} - \frac{1}{1{,}03}} = 8{,}9\ км/сек.$$

На відстані $Q_2 = 1{,}97\ а.о.$ від Сонця колова швидкість

$$\upsilon_{0Q_2} = \frac{29{,}8}{\sqrt{Q_2}} = \frac{29{,}8}{\sqrt{1{,}97}} = 21{,}3\ км/сек$$

і параболічна швидкість

$$\upsilon_{ПQ_2} = \frac{42{,}0}{\sqrt{Q_2}} = \frac{42{,}0}{\sqrt{1{,}97}} = 30{,}0\ км/сек.$$

Для Фотографіки: $\upsilon_0 = 20{,}0\ км/сек,\ \upsilon_q = 20{,}9\ км/сек\ і\ \upsilon_Q = 19{,}2\ км/сек$, тобто всі три швидкості мало відрізняються одна від одної із-за порівняно невеликого ексцентриситету орбіти ($e = 0{,}040$) .

Для Ікара: $\upsilon_0 = 28{,}6\ км/сек,\ \upsilon_q = 93{,}1\ км/сек\ і\ \upsilon_Q = 8{,}9\ км/сек$; швидкість різко міняється із-за великого ексцентриситету орбіти ($e = 0{,}827$).

*Приклад 5***.** Яку швидкість має мати і на якій висоті повинен бути запущений штучний супутник Марса, щоб він міг обертатися навколо планети по коловій орбіті з періодом у дві земні середні доби? Маса Марса дорівнює 10,7 % маси Землі, а радіус – у 1,89 рази менше земного.

Розв'язування

Дані: T=2 доби; M=0,107; $R = 1/1{,}89 = 0{,}529.$

За формулою (26) знаходимо:

$$a = \sqrt[3]{\frac{MT^2}{275,2 \cdot 10^{-10}}} \,,$$

де M – маса Землі ($M_0 = 1$), a – у кілометрах і T – у хвилинах. Одні доби містять 1440 хвилин; тому $T = 2 \cdot 1440 = 2880^M$ *і* $T^2 = 8294 \cdot 10^3$. Відповідно,

$$a = \sqrt[3]{\frac{0,107 \cdot 8294 \cdot 10^3 \cdot 10^{10}}{275,2}} = \sqrt[3]{32,25 \cdot 10^{12}} = 3,183 \cdot 10^4$$

або

$$a = 31\,830\ км.$$

Так як супутник рухається по коловій орбіті при $r = a$, то для визначення його колової швидкості використовуємо формулу (24) при $B = 631,2$:

$$\upsilon_0 = 631,2 \cdot \sqrt{\frac{M}{r}} = 631,2 \cdot \sqrt{\frac{0,107}{31\,830}} = 6,312\sqrt{\frac{0,107}{3,183}} = 0,97\ км/сек\,,$$

або біля $1\ км/сек$.

Радіус Землі $R_0 = 6370\ км$, а радіус Марса $R = 0,529 \cdot R_0 = 0,529 \cdot 6370 = 3370\ км.$ Тому висота супутника над поверхнею Марса $h = a - R$=31 830 – 3370=28 460 км.

*Приклад 6***.** Обчисліть велику піввісь і *e* орбіти, висоту апогею, швидкість у перигеї і швидкість в апогеї корабля-супутника «Восток», пілотом якого був Ю.А. Гагарін (12 квітня 1961), якщо висота перигею корабля дорівнювала 181 км, а період його обертання навколо Землі складав $1^h 29^m,1$, радіус Землі $R_0 = 6370\ км$.

Розв'язування

Дані: $h_a = 181\ км$; $T = 1^h 29^m,1 = 89^m,1$.

Використовуючи формулу (26) і пам'ятаючи, що маса Землі приймається за одиницю, знаходимо велику піввісь орбіти корабля-супутника:

$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2}{275,2 \cdot 10^{-10}}} = \sqrt[3]{\frac{89,1^2 \cdot 10^{10}}{275,2}} = 6610\ км.$$

Перигійна відстань, відповідно до (21),

$$q = 6370\ км + 181\ км = 6550\ км.$$

Оскільки $q = a(1-e)$, то

$$e = 1 - \frac{q}{a} = 1 - \frac{6550}{6610} = 0{,}009.$$

Апогейна відстань $Q = a\,(1+e) = 6610 \cdot (1+0{,}009) = 6670\,км$ і за формулою (22) висота апогею

$$H_Q = Q - R_0 = 6670 - 6370 = 300\ км.$$

Використовуючи формулу (23) при M=1, знаходимо:

швидкість в перигеї, при $r = q$

$$\upsilon_q = 631{,}2\sqrt{\frac{2}{6550} - \frac{1}{6610}} = 7{,}83\ км/сек;$$

швидкість в апогеї, при $r = Q$

$$\upsilon_Q = 631{,}2\sqrt{\frac{2}{6670} - \frac{1}{6610}} = 7{,}69\ км/сек.$$

Ці ж швидкості можуть бути обчислені ще іншим шляхом. Написавши рівняння (24) для колової швидкості на відстані a і пам’ятаючи , що $M = 1$, знаходимо:

$$\upsilon_0 = \frac{631{,}2}{\sqrt{a}} = \frac{631{,}2}{\sqrt{6610}} = 7{,}76\ км/сек.$$

Поділивши на останнє значення формулу (23), одержимо:

$$\upsilon = \upsilon_0\sqrt{\frac{2\,a}{r} - 1}.$$

Підставляючи в останній вираз $r = q$ і $r = Q$, знаходимо:

$$\upsilon_q = \upsilon_0\sqrt{\frac{2\,a}{q} - 1} = \upsilon_0\sqrt{\frac{2\,a - q}{q}} = \upsilon_0\sqrt{\frac{Q}{q}}$$

$$\upsilon_Q = \upsilon_0\sqrt{\frac{2\,a}{Q} - 1} = \upsilon_0\sqrt{\frac{2\,a - Q}{Q}} = \upsilon_0\sqrt{\frac{q}{Q}}.$$

Звідси

$$\upsilon_q = 7{,}76\sqrt{\frac{6670}{6550}} = 7{,}83\ км/сек; \qquad \upsilon_Q = 7{,}76\sqrt{\frac{6550}{6670}} = 7{,}69\ км/сек.$$

Як правило запуск штучних небесних тіл відбувається на мінімальній висоті, і тому можна вважати висоту запуску $h_H = h_q$, тобто у перигеї орбіти. Звідси швидкість запуску $\upsilon_H = \upsilon_q = 7{,}83\ км/сек.$

*Приклад 7***.** Визначіть *a* і *e* найпростішої еліптичної орбіти ракети, тривалість її польоту від Землі до Юпітера і початкову швидкість запуску з Землі. Середня відстань Юпітера від Сонця становить 5,2 а.о. Середня орбітальна швидкість Землі $V_p = 29{,}8\ км/сек$.

Розв'язування

Дані: a_1=5,20 а.о.; a_0=1,00 а.о.; $V_p = 29{,}8\ км/сек$.

Побудувавши рисунок, аналогічний рисунку 2, знаходимо, що велика піввісь еліптичної орбіти ракети, відповідно до (29)

$$a = \frac{a_0 + a_1}{2} = \frac{1 + 5,20}{2} = 3{,}10\ \ а.о.$$

Тоді, згідно з третім законом Кеплера, період обертання ракети навколо Сонця

$$T = a\sqrt{a} = 3{,}10\sqrt{3{,}10} = 5{,}46\ \ років\ \mathbf{.}$$

За формулою (30), тривалість польоту ракети

$$t = \frac{T}{2} = \frac{5{,}46}{2} = 2{,}73\ років.$$

Оскільки перигелійна відстань ракети $q = a_0 = 1\ а.\,о.$, то ексцентриситет її орбіти

$$e = 1 - \frac{q}{a} = 1 - \frac{1}{3{,}10} = 0{,}677,$$

тобто орбіта має значну витягнутість.

Швидкість відносно Сонця в перигелії, відповідно до (23)

$$V_q = 29{,}8\sqrt{\frac{2}{q} - \frac{1}{a}} = 29{,}8\sqrt{\frac{2}{1} - \frac{1}{3{,}10}} = 38{,}7\ \ км/сек\,.$$

Оскільки запуск ракети відбувається у перигелії, то цю швидкість V_q можна вважати за початкову швидкість V_H відносно Сонця, тобто $V_H = V_q$ =38,7 км/сек.

Тоді, за формулою (32), додаткова швидкість ракети

$$\upsilon_Д = V_H - V_p = 38{,}7 - 29{,}8 = 8{,}9\ км/сек.$$

Оскільки швидкість виходу з Землі $\upsilon_П = 11{,}2\ км/сек$, то з (31) швидкість запуску з Землі буде

$$\upsilon_H = \sqrt{\upsilon_П^2 + \upsilon_Д^2} = \sqrt{11{,}2^2 + 8{,}9^2} = 14{,}3\ км/сек$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. На поверхні Сонці визначіть колову і параболічну швидкості. Знайдіть ці ж швидкості на відстані одного, трьох, восьми радіусів від його поверхні. Маса Сонця становить 333 400 мас Землі, а його радіус дорівнює 109,1 радіуса Землі.

Відповідь: на поверхні $\upsilon_0 = 439\ км/сек,\ \upsilon_П = 619\ км/сек$;

на відстані одного радіуса $\upsilon_0 = 311\ км/сек,\ \upsilon_П = 439\ км/сек$;

3-х радіусів $\upsilon_0 = 220\ км/сек,\ \upsilon_П = 310\ км/сек$;

8-х радіусів $\upsilon_0 = 145\ км/сек,\ \upsilon_П = 206\ км/сек.$

2. Визначити колову і параболічну швидкості на поверхні Місяця і Марса і на відстані трьох і восьми радіусів цих тіл від їх поверхні. Маса Місяця у 81 раз менша маси Землі, радіус Місяця дорівнює 0,27 земного радіуса, маса Марса становить 0,017 маси Землі і радіус Марса дорівнює 0,529 радіусів Землі.

Відповідь: Місяць: на поверхні $\upsilon_0 = 169\ км/сек,\ \upsilon_П = 2{,}38\ км/сек$;

на відстані 3-х радіусів $\upsilon_0 = 0{,}85\ км/сек,\ \upsilon_П = 1{,}19\ км/сек$;

8-х радіусів $\upsilon_0 = 0{,}56\ км/сек,\ \upsilon_П = 0{,}79\ км/сек$;

Марс: на поверхні $\upsilon_0 = 3{,}56\ км/сек,\ \upsilon_П = 5{,}02\ км/сек$;

3-х радіусів $\upsilon_0 = 1{,}78\ км/сек,\ \upsilon_П = 2{,}51\ км/сек$;

8-х радіусів $\upsilon_0 = 1{,}19\ км/сек,\ \upsilon_П = 1{,}67\ км/сек.$.

3. Маси планет Марса і Юпітера порівняно з масою Землі становлять 0,107 і 317, а їх радіуси – 0,529 і 11,2, відповідно. З якого із трьох небесних тіл: Землі, Марса чи Юпітера – легше стартувати космічному кораблю? Вивід підтвердити розрахунком.

Відповідь: Для старту швидкість корабля $\upsilon_Н \geq \upsilon_П$, на Марсі $\upsilon_П = 5{,}02\ км/сек,\ на\ Землі\ \upsilon_П = 11{,}2\ км/сек,\ на\ Юпітері\ \upsilon_П = 60{,}8\ км/сек.$ Легше стартувати з Марса.

4. Здайдіть пароболічну та колову швидкості відносно Сонця на середніх відстанях Марса та Юпітера. Великі півосі їх орбіт дорівнюють 1,52 а. о. і 5,20 а.о. відповідно.

Відповідь: На відстані Марса $\upsilon_0 = 24{,}2\ км/сек,\ \upsilon_П = 34{,}1\ км/сек$; на відстані Юпітера $\upsilon_0 = 13{,}1\ км/сек,\ \upsilon_П = 18{,}5\ км/сек.$.

5. Велика піввісь та ексцентриситет орбіти найближчої планети до Сонця становить 0,387 а.о. і 0,206, а в орбіти Марса – 1,52 а.о. і 0,093 відповідно. Обчисліть середню швидкість цих планет, їх швидкості у перигелії і афелії, колову і параболічну швидкості на цих же відстанях від Сонця.

Відповідь:

Меркурій: $\upsilon_0 = 47,8\ км/сек, \upsilon_q = 58,8\ км/сек,$;

$\upsilon_Q = 38,9\ км/сек, \upsilon_{0q} = 53,8\ км/сек, \upsilon_{Пq} = 75,9\ км/сек$.

Марс: $\upsilon_0 = 24,2\ км/сек, \upsilon_q = 36,7\ км/сек,$

$\upsilon_Q = 22,0\ км/сек, \upsilon_{0q} = 25,5\ км/сек, \upsilon_{Пq} = 35,9\ км/сек.$

Додаток

Таблиця 1. Орбітальні характеристики внутрішніх планет Сонячної системи

	Меркурій[1]	**Венера**[2]	**Земля**[3]	**Марс**[4]
Велика піввісь (км; а.о.)	57 909 100; 0,387098	108 208 930; 0,723332	149 598 261; 1,00000261	227 939 100; 1,523679
Перигелій (км; а.о.)	46 001 200; 0,307499	107 476 259; 0,71843270	147 098 290; 0,98329134	206 669 000; 1,381497
Афелій (км; а.о.)	69 816 900; 0,466697	108 942 109; 0,72823128	152 098 232; 1,01671388	249 209 300; 1,665861
Ексцентриситет	0,20563	0,068	0,01671123	0,093315
Орбітальний період (діб; юліанського року; зоряних діб планети)	87,9691; 0,240846; 0,5	224,70069; 0,6151970; 1,92	365,256363004; 1,000017421; 365,256363004	686,971; 1,8808; 668,5991
Синодичний період (діб)	115,88	583,92	365,256366004	779,96
Середня орбітальна швидкість (км/с)	47,87	35,02	29,785	24,077
Середня аномалія (°)	174,796	50,115	357,51716	
Нахил орбіти (° до екліптики; ° до сонячного екватора; ° до незмінної площини)	7,005; 3,38; 6,34	3,39471; 3,86; 2,19	0; 7,155; 1,58	1,850; 5,65; 1,67
Довгота висхідного вузла (°)	48,331	76,67069	348,73936	49,562
Аргумент перицентру (°)	29,124	54,85229	114,20783	286,537
Супутники	-	-	1; понад 16 000 штучних	2

Список використаних джерел

1. Климишин І.А. Астрономія: Підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів / І.А. Климишин, І.П. Крячко. – К. : Знання України, 2004. – 192 с.
2. Пришляк М.П. Астрономія: Підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів / М.П. Пришляк. – Київ : «Академперіодика», 2008. – 148 с.
3. Александров Ю.В. 11 клас: Книга для вчителя. / Ю.В. Александров, А.М. Грецький, М.П. Пришляк. – Х. : Веста : Видавництво «Ранок», 2005. – 256 с.
4. Збірник програм з профільного навчання для загальноосвітніх навчальних закладів: Фізика та астрономія, 10–12 кл. – Х. : Вид. група «Основа», 2010. – 112 с.
5. Крячко І.П. Астрономія: Орієнтовне поурочне календарно-тематичне планування курсу / І.П. Крячко. – К. : ВЦ Валентини Боровик «Наше небо», 2004. – 72 с.
6. Кузьменков С. Актуальні проблеми астрономічної освіти / Сергій Кузьменков // Фізика та астрономія в школі. – 2011. – № 7. – С. 27–32.
7. Кузьменков С.Г. Особливості астрономічного освітнього середовища, призначеного для підготовки вчителя астрономії / С.Г. Кузьменков // Збірник наукових праць. Педагогічні науки. Випуск 55. – Херсон : Видавництво ХДУ, 2010. С. 295–302.
8. Кузьменков С. Фундаменталізація астрономічної освіти. Стрижневі ідеї / С. Кузьменков // Фізика та астрономія в школі. – 2010. – № 11–12. – С. 27–31.
9. Кузьменков С. Фундаменталізація астрономічної освіти. Головні базові поняття / С. Кузьменков // Фізика та астрономія в школі. – 2011. – № 1. – С. 24–28.

10. Кузьменков С. Фундаменталізація астрономічної освіти. Периферія поля понять й основний зміст курсу астрономії / С. Кузьменков // Фізика та астрономія в школі. – 2011. – № 2. – С. 23–27.

11. Кузьменков С. Що таке час? Задачний підхід в астрономії / С. Кузьменков, І. Сокол // Фізика та астрономія в школі. – 2009. – № 6. – С. 17–20.

12. Кузьменков С. Йоганн Кеплер і революція в астрономії / С. Кузьменков // Фізика та астрономія в школі. – 2009. – № 3. – С. 3–6.

13. Кузьменков С. Що таке планети? / С. Кузьменков // Фізика та астрономія в школі. – 2010. – № 3. – С. 24–28.

14. Кузьменков С. Комети: історичний, методологічний, світоглядний та культурологічний аспекти / Сергій Кузьменков, К. Чурюмов // Фізика та астрономія в школі. – 2010. – № 1. – С. 3–7.

15. Кузьменков С. Як доказово викладати астрономію / С. Кузьменков // Фізика та астрономія в школі. – 1999. – № 2. – С. 34–37.

Предметний покажчик