Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка

кафедра фундаментальних дисциплін початкової освіти

Білецька Л.С., Стасів Н.І.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ
ПОЧАТКОВОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Розділ 3
Відповідності. Відношення. Відображення. Функції

Дрогобич, 2025

Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка

кафедра фундаментальних дисциплін початкової освіти

Білецька Л.С., Стасів Н.І.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ
ПОЧАТКОВОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Розділ 3
Відповідності. Відношення. Відображення. Функції

Навчально-методичний посібник для підготовки здобувачів
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
галузі знань 01 Освіта/ Педагогіка
спеціальності 013 Початкова освіта
Освітні програми: Початкова освіта та інформатика.
Початкова освіта та англійська мова

Дрогобич, 2025

УДК 510 (08)
Б. 61

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (протокол № 3 від 26 березня 2025 року)

Рецензенти:

Війчук Тарас Іванович, доцент, завідувач кафедри математики та економіки факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій, кандидат педагогічних наук (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка)

Комарницька Леся Іванівна, доцент кафедри математики та економіки факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій, кандидат фізико-математичних наук (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка)

Білецька Л.С., Стасів Н.І.

Теоретичні основи початкового курсу математики. Розділ 3. Відповідності. Відношення. Відображення. Функції. Дрогобич: Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, 2025. 148 с.

Навчально-методичний посібник написано відповідно до програми курсу «Теоретичні основи початкового курсу математики» для підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань 01 Освіта / Педагогіка спеціальності 013 Початкова освіта. Освітні програми: Початкова освіта та інформатика. Початкова освіта та англійська мова денної та заочної форм здобуття освіти. У ньому вміщено теоретичний та практичний блоки з розділу «Відповідності. Відношення. Відображення. Функції». Посібник містить виклад основних положень розділу, які розкриваються через конкретні приклади. Запропонована у виданні система вправ підібрана відповідно до вимог програми дисципліни з метою забезпечення високого рівня сформованості компетентностей студентів.

Бібліографія: 8 назв.

Зміст

Вступ

Навчальна дисципліна «Теоретичні основи початкового курсу математики» передбачена як обов'язковий компонент освітньо-професійної програми для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань 01 Освіта / Педагогіка спеціальності 013 Початкова освіта (Освітні програми: Початкова освіта та інформатика. Початкова освіта та англійська мова) денної та заочної форм здобуття освіти.

Відповідно до затвердженої робочої програми вивчення цієї дисципліни передбачає вивчення розділу 3 «Відповідності. Відношення. Відображення. Функції». У ньому розглядаються поняття відповідності між множинами (означення, область відправлення і область прибуття, образ і прообраз елемента, множина визначення, множина значень, способи задання, протилежна та обернена відповідності, взаємно однозначна відповідність, рівнопотужні множини); поняття відношення на множині (означення, область відправлення і область прибуття, способи задання, протилежне й обернене відношення, властивості відношення, відношення еквівалентності, класи еквівалентності, відношення порядку, упорядковані множини); поняття відображення множин (означення, способи задання, основні властивості та типи, зчисленна множина, множина потужності континууму); поняття функції (означення, область визначення, множина значень, способи задання функції, властивості функції, обернена функція, основні елементарні функції (лінійна, прямої та оберненої пропорційності, квадратична), їх властивості та побудова графіків). Теоретичні положення ілюструються типовими прикладами та поданим розв'язанням.

У запропонованому навчально-методичному посібнику подано тексти та тематику лекцій, теми практичних занять, завдання для практичних занять та самостійної роботи, методичні рекомендації щодо написання двох контрольних робіт, типові варіанти цих контрольних робіт, перелік питань для самоконтролю, список використаної літератури, предметний покажчик.

ТЕКСТИ ЛЕКЦІЙ

1. Відповідності

1.1. Означення поняття «відповідність між множинами»

У математиці вивчають не лише самі поняття, об'єкти (число, геометричні фігури, величини тощо), але і різні взаємозв'язки між ними. Наприклад, у початковій школі вивчаються такі взаємозв'язки між двома натуральними числами:

число 5 більше числа 2;

число 4 менше числа 7;

число 5 безпосередньо слідує за числом 4;

число 6 знаходиться перед числом 7;

число 8 більше на 2 від числа 6;

число 10 менше на 3 від числа 13;

число 10 більше у 2 рази від числа 5;

число 3 менше у 5 разів від числа 15;

число 18 кратне 9;

число 7 є дільником числа 21.

У геометрії вивчають різні взаємозв'язки між геометричними фігурами – належність точки прямій чи площині, належність прямої площині, паралельність і перпендикулярність прямих та площин, рівність і подібність геометричних фігур тощо.

Під час вимірювання довжин відрізків встановлюється зв'язок між множиною відрізків і додатними дійсними числами, які виражають їх довжини.

Під час вимірювання площ фігур встановлюється зв'язок між множиною геометричних фігур і додатними дійсними числами, які виражають їх площі.

Під час вимірювання об'ємів тіл встановлюється зв'язок між множиною геометричних тіл і додатними дійсними числами, які виражають їх об'єми.

Під час вимірювання маси тіл встановлюється зв'язок між множиною геометричних тіл і додатними дійсними числами, які виражають їх маси.

На координатній площині встановлюється зв'язок між точками площини й упорядкованими парами дійсних чисел, які є їх координатами.

Взаємозв'язки між елементами довільних двох множин приводять до нового математичного поняття, яке має назву **«відповідність між елементами двох множин».** Йому можна дати чітке математичне означення, спираючись на неозначуване поняття множини та зв'язок між елементами двох множин.

Нехай маємо дві множини: $X = \{1; 3; 5; 7\}$ і $У = \{2; 4; 8\}$.
Знайдемо декартовий добуток $X \times У$ цих множин – множину всіх можливих упорядкованих пар вигляду $(x; y)$, де $x \in X$, $y \in У$. Це буде множина дванадцяти упорядкованих пар елементів з множин X та У:

$$X \times У = \{(1;2), (1;4), (1;8), (3;2), (3;4), (3;8), (5;2), (5;4), (5;8), (7;2), (7;4), (7;8)\}.$$

Нехай елементи множин X і У пов'язані між собою взаємозв'язком «більше». Це означає, що серед усіх упорядкованих пар $(x; y)$ декартового добутку множин X і У треба вибрати тільки такі, в яких перша компонента є більшою від другої компоненти, тобто $x > y$. Ці упорядковані пари утворюють множину, яку позначимо R:

$$R = \{(3;2), (5;2), (5;4), (7;2), (7;4)\}.$$

Бачимо, що множина R містить п'ять упорядкованих пар з дванадцяти усіх можливих упорядкованих пар декартового добутку $X \times У$, тобто множина R є частиною (підмножиною) декартового добутку $X \times У$.

Означення. ***Відповідністю між двома множинами X і У*** *називається підмножина декартового добутку множин X і У, елементи якої пов'язані між собою заданим взаємозв'язком.*

Відповідності позначають великими буквами латинського алфавіту: R, P, Q, S, T, … .

Якщо упорядкована пара елементів (x, y) належить відповідності R, тобто (x, y) $\in$ R, то це скорочено можна записати ще так: **xRy**. Цей запис ще можна прочитати так: **елемент x перебуває у відповідності R з елементом y**.

$$\mathbf{(x, y) \in R} \quad \text{означає} \quad \mathbf{xRy}, \quad \text{і навпаки.}$$

Враховуючи нові позначення, означення відповідності R між елементами множин X і У можна записати символічно так:

$$\mathbf{R \subseteq X \times У},$$

$$\mathbf{R = \{(x, y) |\ x \in X,\ \ y \in У,\ \ xRy\}}.$$

1.2. Область відправлення. Область прибуття. Прообраз і образ елемента множини. Множина визначення. Множина значень

Означення 1. *Нехай R є відповідністю між елементами множин X і У, тобто R$\subseteq$ X$\times$У. Множина X називається* ***областю відправлення*** *відповідності R, а множина У називається* ***областю прибуття*** *відповідності R.*

Означення 2. *Нехай між елементами множин X і У задана відповідність R. Якщо xRy, то елемент x називається* ***прообразом*** *елемента y, а елемент y називається* ***образом елемента x****.*

Означення 3. *Нехай R є відповідністю між елементами множин X і У, тобто R $\subseteq$ X$\times$У. Сукупність A всіх елементів з множини X, які мають образи у множині У, називається* ***множиною визначення*** *відповідності R, причому* $\boldsymbol{A \subseteq X}$*.*

Множина визначення відповідності **є множиною всіх прообразів**.

Означення 4. *Нехай R є відповідністю між елементами множин X і У, тобто R $\subseteq$ X$\times$У. Сукупність B всіх елементів із множини У, які мають прообрази у множині X, називається* ***множиною значень*** *відповідності R, причому* $\boldsymbol{B \subseteq У}$*.*

Множина значень відповідності є **множиною всіх образів**.

У вище наведеному прикладі було задано відповідність R: «більше» між елементами множин Х = {1; 3; 5; 7} і У ={2; 4; 8}. Ми знайшли, що

$$R = \{(3;2), (5;2), (5;4), (7;2), (7;4)\}.$$

Звідси бачимо, що:

Областю відправлення відповідності R є множина Х.

Областю прибуття відповідності R є множина У.

Елемент 3 є прообразом для елемента 2.

Елемент 5 є прообразом для елементів 2 і 4.

Елемент 7 є прообразом для елементів 2 і 4.

Елемент 1 не є прообразом для жодного елемента.

Елемент 2 є образом для елементів 3, 5 і 7.

Елемент 4 є образом для елементів 5 і 7.

Елемент 8 не є образом для жодного елемента.

Множиною визначення відповідності R є множина $A = \{3; 5; 7\}$, $A \subset X$.

Множиною всіх прообразів відповідності R є множина $A = \{3; 5; 7\}$.

Множиною значень відповідності R є множина $B = \{2; 4\}$, $B \subset У$.

Множиною всіх образів відповідності R є множина $B = \{2; 4\}$.

1.3. Способи задання відповідності

Згідно з означенням відповідність R між елементами множин Х і У є певною множиною, тому способи задання відповідностей є такі ж, як і способи задання множин, але є ще й інші.

Способи задання відповідності між елементами двох множин є такі:

1) Словесний спосіб описує відповідність за допомогою певних слів або словосполучень. Наприклад, *«менше», «бути дільником», «безпосередньо слідувати за», «коротше», «вище», «вужче»*. Це коротка форма словесного способу задання відповідностей. Повна форма словесного способу задання відповідностей така: *«х менше у», «х є дільником у», «х безпосередньо слідує за у», «х коротше у», «х вище у», «х вужче у».*

У вище наведеному прикладі задання відповідності за допомогою словесного способу є таким:

R: *«більше» (коротка форма),* R: *«х більше у» (повна форма).*

2) Спосіб задання відповідності **за допомогою переліку елементів** описує відповідність за допомогою <u>переліку</u> <u>всіх упорядкованих пар</u> з елементів множин Х і У, пов'язаних між собою відповідністю R.

У вище наведеному прикладі задання відповідності за допомогою переліку елементів є таким:

$$R = \{(3;2), (5;2), (5;4), (7;2), (7;4)\}.$$

3) Спосіб задання відповідності **за допомогою характеристичних властивостей** описує відповідність за допомогою всіх <u>характеристичних властивостей зв'язку</u> між елементами двох множин Х і У.

Означення 1. ***Характеристичною властивістю відповідності R*** *називається властивість, якою володіють всі елементи упорядкованих пар заданої відповідності, та якою не володіють всі елементи упорядкованих пар, які не належать заданій відповідності.*

Задання відповідності за допомогою характеристичних властивостей у загальному випадку записують так:

$$\mathbf{R = \{ (x, y) \mid x \in X, \ y \in У, \ xRy \}.}$$

У вище наведеному прикладі задання відповідності за допомогою характеристичної властивості має такий вигляд:

$$R = \{ (x, y) \mid x \in X, y \in У, \ x > y\}.$$

4) Аналітичний спосіб задання відповідності полягає у заданні відповідності за допомогою <u>знаків, символів, формули</u>. Наприклад, «$x \geq y$», «$x \vdots y$», «$x \parallel y$», «$x \perp y$», «$x + y = 5$» тощо.

У вище наведеному прикладі задання відповідності за допомогою аналітичного способу є таким:

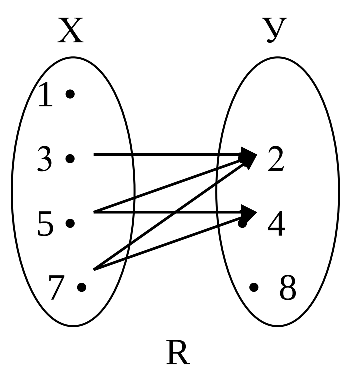
$$R: «x > y».$$

5) Задання відповідності **за допомогою графа** подає відповідність між двома множинами за допомогою <u>побудови схеми</u>.

Означення 2. ***Граф відповідності*** *– це схема, на якій елементи двох множин зображено точками, які за законом відповідності з'єднані між собою стрілками.*

Для побудови графа відповідності елементи обох множин зображують точками і розміщують їх <u>у стовпчики паралельно один одному,</u> а потім проводять стрілки від елементів першої множини до елементів з другої множини, які перебувають у заданій відповідності між собою.

У вище наведеному прикладі задання відповідності за допомогою графа є таким:

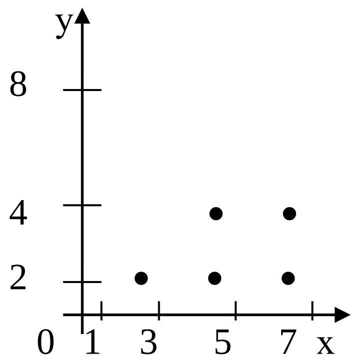


6) Графічний спосіб задання відповідності полягає у <u>побудові графіка.</u>

Означення 3. ***Графіком відповідності R*** *називається множина всіх точок (x, y) координатної площини, координати яких задовольняють умову xRy.*

Для побудови графіка відповідності елементи <u>області відправлення X</u> наносять на <u>вісь абсцис OX</u>, а елементи <u>області прибуття У</u> – на <u>вісь ординат OУ</u>. Далі треба на координатній плошині зобразити усі точки з координатами (x, y), які задовольняють умову xRy.

У вище наведеному прикладі задання відповідності за допомогою графічного способу є таким:



7) Табличний спосіб задання відповідності полягає у побудові таблиці з елементами множини Х у стовпці та з елементами множини У у рядку і упорядкованих пар (х,у), які задовольняють умову хRу.

У вище наведеному прикладі задання відповідності за допомогою табличного способу є таким:

Х \ **У**	2	4	8
1			
3	(3; 2)		
5	(5; 2)	(5; 4)	
7	(7; 2)	(7; 4)	

Одну і ту ж відповідність можна задавати усіма цими способами.

1.4. Протилежна відповідність

Означення. *Нехай між елементами двох множин X і У задана відповідність R.* ***Протилежною відповідністю*** *до заданої відповідності R називається така відповідність* $\overline{R}$ *між множинами X і У, що графіки цих відповідностей не перетинаються, а їх об'єднання є декартовим добутком* $X \times У$.

З цього означення випливає:

$$\mathbf{R} \cap \overline{R} = \varnothing, \quad \mathbf{R} \bigcup \overline{R} = \mathbf{X} \times \mathbf{У},$$

$$\text{звідси} \quad \overline{R} = (\mathbf{X} \times \mathbf{У}) \setminus \mathbf{R}.$$

У відповідностей R і $\overline{R}$ немає жодної спільної упорядкованої пари.

Наприклад, на множині дійсних чисел протилежною до відповідності «х кратне у» буде відповідність «х **не** кратне у» , протилежною до відповідності «х більше у» буде відповідність «х **не** більше у», тобто «х $\leq$ у».

Для словесного способу задання протилежної відповідності до заданої, треба у словесному способі заданої відповідності вставити слово «не». Наприклад, задана відповідність R: «х менше у», а протилежна до неї відповідність $\overline{R}$: «х не менше у», тобто «х більше або дорівнює у».

Задання протилежної відповідності до заданої за допомогою переліку елементів містить усі ті упорядковані пари декартового добутку двох множин, які не є у переліку упорядкованих пар заданої відповідності.

Для побудови графа протилежної відповідності до заданої, треба зобразити множини X і У і зобразити всі стрілки між їх елементами, яких не містив граф заданої відповідності.

Для побудови графіка протилежної відповідності до заданої треба зобразити всі точки декартового добутку множин X і У, яких не містив графік заданої відповідності. Об'єднання графіків заданої і протилежної відповідностей між множинами X і У є зображенням декартового добутку множин X і У.

Для <u>табличного задання</u> протилежної відповідності до заданої, треба <u>записати всі упорядковані пари на вільних місцях</u> у таблиці заданої відповідності, а <u>упорядковані пари заданої відповідності вилучити</u>.

Приклад. *Між множинами X = {1; 3; 5; 7} і У ={2; 4; 8} задано відповідність R: «більше». Побудувати протилежну відповідність до неї і задати її всіма способами.*

Розв'язання. Задано множини X = {1; 3; 5; 7}, У ={2; 4; 8}. Між ними задана відповідність R: «більше».

Протилежна відповідність $\overline{R}$ буде між тими ж множинами X і У і її можна задати різними способами так:

1) **словесний спосіб**

R: «більше»

$\overline{R}$: «**не** більше» (коротка форма);

$\overline{R}$: «х **не** більше у» (повна форма);

$\overline{R}$: «менше або дорівнює» (коротка форма) ;

$\overline{R}$: «х менше або дорівнює у» (повна форма) .

2) **за допомогою переліку елементів**

R = {(3;2), (5;2), (5;4), (7;2), (7;4)},

$\overline{R}$ = {(1;2), (1;4), (1;8), (3;4), (3;8), (5;8), (7;8)}.

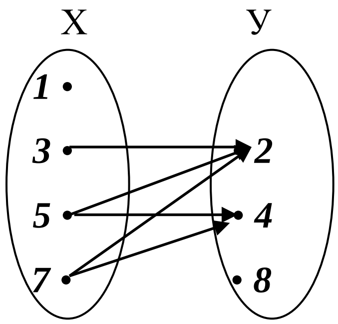
3) **за допомогою характеристичної властивості**

$$R = \{ (x, y) \mid x \in X, y \in У, x > y\},$$

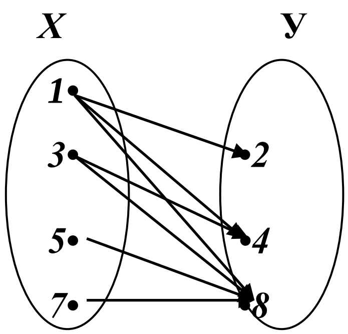
$$\overline{R} = \{ (x, y) \mid x \in X, y \in У, x \le y\}.$$

4) аналітичний спосіб R: «x > y», $\overline{R}$: «x ≤ y».

5) за допомогою графа

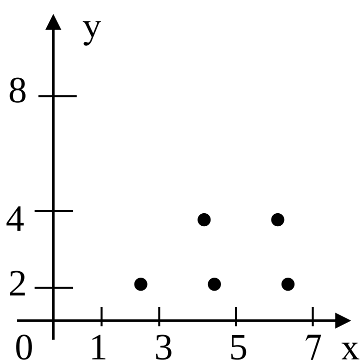


R

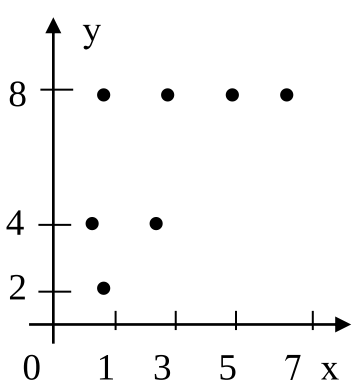


$\overline{R}$

6) графічний спосіб



R



$\overline{R}$

7) табличний спосіб

R

У / Х	2	4	8
1			
3	(3; 2)		
5	(5; 2)	(5; 4)	
7	(7; 2)	(7; 4)	

$\overline{R}$

У / Х	2	4	8
1	(1; 2)	(1; 4)	(1; 8)
3		(3; 4)	(3; 8)
5			(5; 8)
7			(7; 8)

1.5. Обернена відповідність

Означення. *Нехай між елементами множин X і У задана відповідність R.* ***Оберненою відповідністю*** *до відповідності R називається така відповідність* $\boldsymbol{R^{-1}}$ *між множинами У і X, що* $yR^{-1}x$ *, тоді і тільки тоді, коли xRy.*

Наприклад, на множині натуральних чисел оберненою до відповідності «x⋮y» буде відповідність «у є дільником х».

Для словесного способу задання оберненої відповідності до заданої, треба зв'язок між елементами х і у виразити так, щоб зміст зв'язку залишився тим самим, але цей зв'язок треба виразити вже між елементами у і х. Наприклад, на множині дійсних чисел оберненоною до відповідності «х більше у» буде відповідність «у менше х».

Задання оберненої відповідності до заданої за допомогою переліку елементів містить усі ті ж упорядковані пари, які є у переліку пар заданої відповідності, але компоненти міняються місцями.

Щоб отримати граф оберненої відповідності до заданої, треба змінити напрям усіх стрілок у графі заданої відповідності на протилежний між тими ж елементами.

Графік оберненої відповідності до заданої складається з точок, симетричних до точок графіка заданої відповідності відносно прямої у=х (бісектриса І і ІІІ координатних кутів).

Для табличного задання оберненої відповідності до заданої, треба поміняти місцями у стовпцях і рядках множини Х і У і записати пари заданої відповідності, але компоненти у парах поміняти місцями.

Приклад. *Між множинами Х = {1; 3; 5; 7} і У ={2; 4; 8} задано відповідність R: «більше». Побудувати обернену відповідність до неї і задати її всіма способами.*

Розв'язання. Х = {1; 3; 5; 7}, У ={2; 4; 8}. Між ними задана відповідність R: «більше».

Обернена відповідність R^{-1} буде між множинами У і Х і її можна задати різними способами так:

1) **словесний спосіб**

R: «більше»

R^{-1}: «менше» (коротка форма);

R^{-1}: «у менше х» (повна форма).

2) **за допомогою переліку елементів**

R = {(3;2), (5;2), (5;4), (7;2), (7;4)},

$R^{-1} = \{(2;3), (2;5), (4;5), (2;7), (4;7)\}.$

3) за допомогою характеристичної властивості

$$R = \{ (x, y) \mid x \in X, y \in У, x > y\},$$

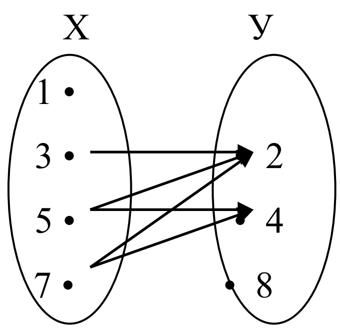
$$R^{-1} = \{ (y, x) \mid y \in У, x \in X, y < x\}.$$

4) аналітичний спосіб

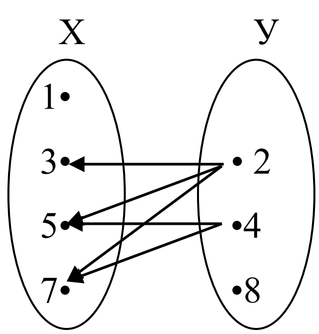
$$R: «x > y»,$$

$$R^{-1} : «y < x».$$

5) за допомогою графа

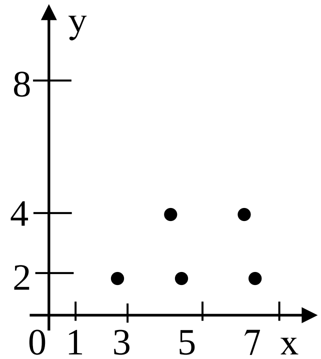


R

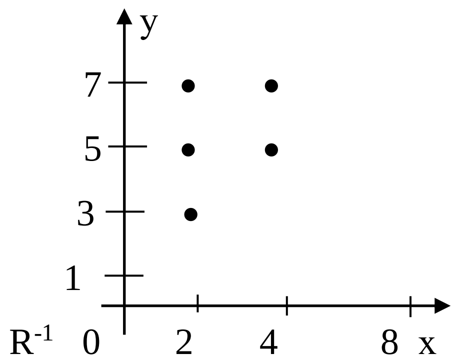


R^{-1}

6) графічний спосіб



R



7) табличний спосіб

R

Y \ X	2	4	8
1			
3	(3; 2)		
5	(5; 2)	(5; 4)	
7	(7; 2)	(7; 4)	

R^{-1}

X \ Y	1	3	5	7
2		(2; 3)	(2; 5)	(2; 7)
4			(4; 5)	(4; 7)
8				

1.6. Типи відповідностей

Розрізняють такі основні типи відповідностей:

Означення 1. *Відповідність R між множинами X і У називається **повною**, якщо вона співпадає з усім декартовим добутком X×У,* тобто для повної відповідності виконується умова: **R = X×У.**

Наприклад, відповідність R: «бути кратним», задана між елементами множин X = {4; 6; 8} і У = {1; 2}, є повною, бо всі числа з множини X є кратними для всіх чисел з множини У, тобто

$$R = \{(4;1), (4;2), (6;1), (6;2), (8;1), (8;2)\} = X \times У.$$

Означення 2. *Відповідність R між множинами X і У називається **порожньою**, якщо вона співпадає з порожньою множиною,* тобто для порожньої відповідності виконується умова: $\boldsymbol{R = \varnothing}$.

Наприклад, відповідність R: «бути дільником», задана між елементами множин X = {4; 6; 8} і У = {1; 2}, є порожньою, бо жодне з чисел множини X не є дільником для жодного з чисел множини У. Жодної пари утворити не можна.

Означення 3. *Відповідності xPy і xQy називаються **несумісними**, якщо не існує жодної пари елементів (x, y), для якої одночасно виконувалися б умови xPy і xQy.*

Наприклад, для множини прямих на площині несумісними є відповідності «a ∥ b» і «a ⊥ b», бо дві прямі не можуть бути одночасно і паралельними, і перпендикулярними.

Означення 4. *Відповідності xPy і xQy називаються **сумісними**, якщо знайдеться хоча б одна упорядкована пара елементів (x, y), для якої одночасно виконуються умови xPy і xQy.*

Наприклад, для множини натуральних чисел відповідності *P*: «більше» і *Q*: «більше або дорівнює» є сумісними.

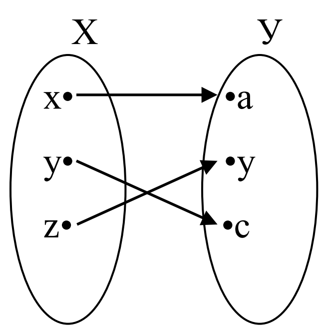
Означення 5. *Якщо графік відповідності хРу є підмножиною графіка відповідності хQу, то відповідність хQу називається* ***наслідком*** *відповідності хРу.*

Наприклад, на множині натуральних чисел відповідність «х ≥ у» є наслідком відповідності «х кратне у», бо якщо х кратне у, то х ≥ у; на множині геометричних фігур відповідність «бути подібними» є наслідком відповідності: «бути рівними».

1.7. Взаємно однозначна відповідність. Рівнопотужні множини

Означення 1. *Відповідність між множинами Х і У називається* ***взаємно однозначною****, якщо <u>кожному</u> елементу множини Х відповідає <u>єдиний</u> елемент множини У, і навпаки, <u>кожному</u> елементу множини У відповідає <u>єдиний</u> елемент з множини Х.*

Наприклад, взаємно однозначною відповідністю між елементами множин Х і У є відповідність, задана таким графом:



Означення 2. *Множини Х і У, між якими встановлено взаємно однозначну відповідність, називаються* ***рівнопотужними***.

Позначають рівнопотужні множини так: **Х ~ У**.

У вище наведеному прикладі множини Х і У є рівнопотужними, бо відповідність між ними є взаємно однозначною.

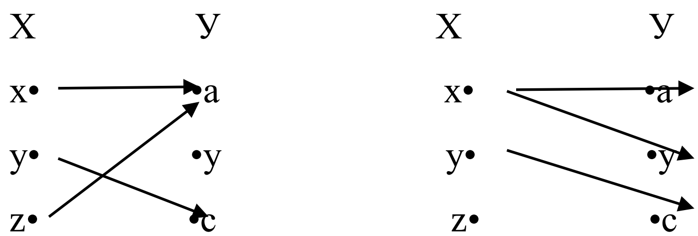
Нагадаємо, що **кількість елементів множини** Х позначають через **n(X).**

Якщо між елементами двох скінченних множин встановлена взаємно однозначна відповідність, то множини Х і У є рівнопотужними, **Х ~ У.**

Рівнопотужні множини завжди мають однакову кількість елементів, тобто для рівнопотужних множин X і У виконується умова **n(X) = n(У).**

Але обернене твердження не є істинним, тобто якщо дві множини мають однакову кількість елементів, то це ще не означає, що множини є рівнопотужними, бо відповідності між елементами цих двох скінченних множин можуть бути не взаємно однозначними.

Наприклад, не є взаємно однозначними відповідностями відповідності, які задані графами, тому множини X і У не є рівнопотужними, хоча множини X і У мають однакову кількість елементів:



Отже, поняття «рівнопотужні множини», «множини з однаковими потужностями» і «рівні множини» є різними. Рівнопотужні множини є множинами з однаковими потужностями, але можуть бути як рівними, так ві нерівними. Рівні множини завжди мають однакову потужність і складаються з одних і тих же елементів, але можуть не бути рівно потужними, бо між ними може бути не встановленою взаємно однозначна відповідність. Множини з однаковими потужностями не завжди є рівними.

Приклад. *Встановити, чи є множини X і У рівнопотужними, рівними чи мають однакову кількість елементів, якщо:*

а) X – множина букв у слові «сир», У – множина букв у слові «рис»;

б) X – множина пір року, У – множина вершин квадрата;

в) X – множина вершин трикутника, У – множина вершин ромба.

Розв'язання.

Про рівнопотужність множин Х і У не можемо говорити, бо невідомо, чи відповідність між ними є взаємно однозначною.

а) Множини Х і У складаються з одних і тих же елементів, тому вони і рівні, і мають однакову кількість елементів.

б) Множини мають по чотири елементи, які є різними, тому вони мають однакову кількість елементів, але не є рівними.

в) Множини мають три і чотири елементи відповідно, тому вони не мають однакову кількість елементів, і тим більше не є рівними.

2. Відношення на множині

2.1. Означення поняття «відношення на множині». Область відправлення і область прибуття

Попередньо ми розглядали відповідності між двома множинами X і У.

Якщо множини X і У будуть рівними, тобто X = У, то відповідність між ними задає бінарне (латин. «між двома») відношення між двома елементами з однієї і тієї ж множини X.

Нехай маємо множину X = {2; 4; 6; 8}. Знайдемо декартовий добуток множини X на множину X, тобто декартовий квадрат X × X. Це буде множина, яка складається з шістнадцяти упорядкованих пар, тобто:

$$X\times X = \{(2;2), (2;4), (2;6), (2;8), (4;2), (4;4), (4;6), (4;8), (6;2), (6;4), (6;6), (6;8), (8;2), (8;4), (8;6), (8;8)\}.$$

Нехай на множині X задана відповідність R: *«бути дільником».*

Серед усіх упорядкованих пар (x; y) декартового квадрата X × X треба вибрати тільки такі пари, в яких перша компонента *є дільником* другої компоненти. Ці упорядковані пари утворюють множину, яку позначимо R:

$$R = \{(2;2), (2;4), (2;6), (2;8), (4;4), (4;8), (6;6), (8;8)\}.$$

Бачимо, що ця множина містить вісім упорядкованих пар з шістнадцяти упорядкованих пар декартового квадрата X × X, тобто множина R є підмножиною декартового квадрата X×X.

Означення 1. ***Відношенням між елементами множини X****, або* ***відношенням на множині X****, називається підмножина декартового квадрата X×X, елементи якої пов'язані між собою заданим взаємозв'язком.*

Відношення позначають великими буквами латинського алфавіту.

Якщо упорядкована пара елементів (x, y) належить відношенню R, тобто **(x, y)** $\in$ **R**, то це скорочено записують так: **xRy**. Цей запис ще можна прочитати так: *елемент x перебуває у відношенні R з елементом y, причому* x $\in$ X і y $\in$ X.

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R} \quad \text{означає} \quad \mathbf{xRy}$$

Враховуючи нові позначення, означення відношення R на множині X можна записати символічно так:

$$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{X}\times\mathbf{X},$$

$$\mathbf{R} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})|\ \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{y} \in \mathbf{X},\ \mathbf{xRy}\}.$$

Означення 2. *Нехай $R \subseteq X\times X$ (R є відношенням на множині X). Множину X називають* ***областю відправлення і областю прибуття*** *відношення R.*

Означення 3. *Сукупність A перших компонент x упорядкованих пар (x, y) відношення R на множині X називають* ***множиною визначення відношення*** *R, причому* $\boldsymbol{A \subseteq X}$*.*

Множина визначення відношення є множиною всіх прообразів.

Означення 4. *Сукупність B других компонент y упорядкованих пар (x, y) відношення R на множині X називають* ***множиною значень відношення*** *R, причому* $\boldsymbol{B \subseteq X}$*.*

Множина значень відношення є множиною всіх образів.

У вище наведеному прикладі було задано на множині X = {2; 4; 6; 8}. відношення R: «бути дільником». Ми знайшли, що R = {(2;2), (2;4), (2;6), (2;8), (4;4), (4;8), (6;6), (8;8)}. Звідси бачимо, що:

<u>Областю відправлення</u> відношення R є множина X.

<u>Областю прибуття</u> відношення R є множина X.

Елемент 2 є <u>прообразом</u> для елементів 2, 4, 6, 8.

Елемент 4 є <u>прообразом</u> для елементів 4 і 8.

Елемент 6 є <u>прообразом</u> для елемента 6.

Елемент 8 є <u>прообразом</u> для елемента 8.

Елемент 2 є <u>образом</u> для елемента 2.

Елемент 4 є <u>образом</u> для елементів 2 і 4.

Елемент 6 є образом для елементів 2 і 6.

Елемент 8 є образом для елементів 2, 4 і 8.

Множиною визначення відношення R є множина A = {2, 4, 6, 8}, A=X.

Множиною значень відношення R є множина B = {2, 4, 6, 8}, B=X.

2.2. Способи задання відношення

Способи задання відношення на множині є такі ж, як способи задання відповідності між двома множинами, але вони мають деякі відмінності:

1) Словесний спосіб описує відношення за допомогою певних слів або словосполучень. Наприклад, «менше», «бути кратним», «безпосередньо слідувати за», «довше», «нижче», «ширше». Це коротка форма словесного способу задання відношень. Повна форма словесного способу задання відношень така: «x менше y», «x є кратним y», «x безпосередньо слідує за y», «x довше y», «x нижче y», «x ширше y». Елементи x і y вибирають з множини X.

У вище наведеному прикладі задання відношення за допомогою словесного способу є таким:

R: *«бути дільником» (коротка форма)*,

R: *«x є дільником y» (повна форма)*.

2) Спосіб задання відношення **за допомогою переліку елементів** описує відношення за допомогою переліку всіх упорядкованих пар з елементів множини X, пов'язаних між собою відношенням R.

У вище наведеному прикладі задання відношення за допомогою переліку елементів є таким:

$$R = \{(2;2), (2;4), (2;6), (2;8), (4;4), (4;8), (6;6), (8;8)\}.$$

3) Спосіб задання відношення **за допомогою характеристичних властивостей** описує відношення за допомогою всіх характеристичних властивостей зв'язку між двома елементами з множини X, тобто

$$R = \{ (x, y) \mid x \in X, y \in X, xRy\}.$$

У вище наведеному прикладі задання відношення за допомогою характеристичної властивості має такий вигляд:

$$R = \{ (x, y) \mid x \in X, y \in X, y \vdots x \}.$$

4) Аналітичний спосіб задання відношення полягає у заданні відношення за допомогою знаків, символів, формул. Наприклад, «$x \geq y$», «$x \vdots y$», «$x \parallel y$», «$x \perp y$», «$x + y = 5$» тощо.

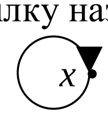
У вище наведеному прикладі задання відношення за допомогою аналітичного способу є таким:

$$R: «y \vdots x».$$

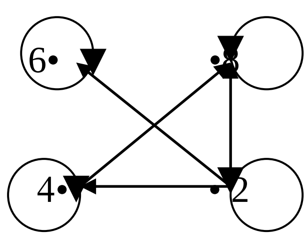
5) Спосіб задання відношення **за допомогою графа** описує відношення на множині за допомогою побудови схеми.

Для побудови **графа відношення** елементи множини X зображують точками і розміщують їх по колу, а потім проводять стрілки від елементів x з множини X до елементів y з тієї ж множини X, які перебувають у заданому відношенні. Точки називаються **вершинами графа.**

Якщо початок і кінець стрілки співпадає (елемент перебуває у відношенні сам з собою, тобто xRx), то таку стрілку називають **петлею**:



У вище наведеному прикладі задання відношення за допомогою графа є таким:



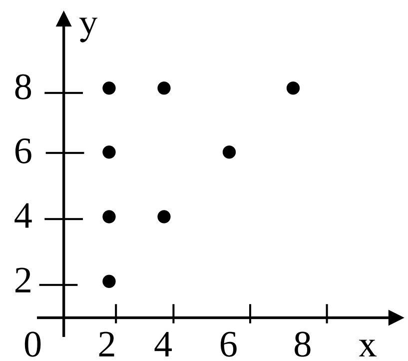
R

6) Графічний спосіб задання відношення полягає у його заданні за допомогою побудови графіка.

Означення. ***Графіком відношення R*** *на множині X називається множина всіх точок (x, y) координатної площини, координати яких задовольняють умову xRy, де x і y є елементами множини X.*

Для побудови графіка відношення елементи множини X наносять і на вісь абсцис Ох, і на вісь ординат Оу. Далі треба на координатній площині ХОУ зобразити всі точки з координатами (х, у), які перебувають у зв’язку R.

У вище наведеному прикладі задання відношення за допомогою графічного способу є таким:



7) Табличний спосіб задання відношення полягає у його заданні за допомогою побудови таблиці з елементами множини X і у стовпці, і у рядку та упорядкованих пар (х, у), які задовольняють умову xRy.

У вище наведеному прикладі задання відношення за допомогою табличного способу є таким:

X \ X	2	4	6	8
2	(2; 2)	(2; 4)	(2; 6)	(2; 8)
4		(4; 4)		(4; 8)
6			(6; 6)	
8				(8; 8)

Одне і те ж відношення можна задавати усіма цими способами.

Приклад. *На множині X = {3; 6; 9; 12} задане відношення R: «більше на 3». Задати його всіма іншими способами.*

Розв'язання. X = {3; 6; 9; 12}. R: «більше на 3».

Способи задання відношення R:

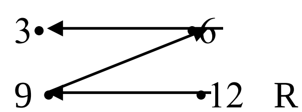
1) В умові завдання відношення задане словесним способом R: «більше на 3» (коротка форма); «x більше на 3 від y» (повна форма).
2) Задамо відношення переліком елементів: R = {(6;3), (9;6), (12;9)}.
3) Задамо відношення за допомогою характеристичної властивості:

$$R = \{(x, y) \mid x \in X, y \in X, \ x = y + 3\}.$$

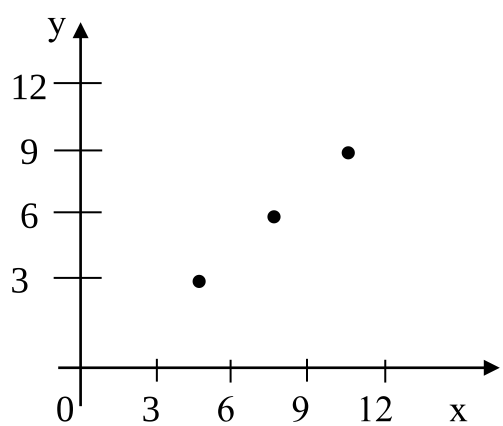
4) Аналітичний спосіб задання заданого відношення має вигляд:

«x = y + 3», або «y = x – 3», або «x – y = 3».

5) Побудуємо граф заданого відношення:



6) Задамо задане відношення графіком:



7) Задамо задане відношення таблицею:

X \ X	3	6	9	12
3				
6	(6; 3)			
9		(9; 6)		
12			(12; 9)	

2.3. Протилежне відношення. Обернене відношення

Означення 1. *Відношення* $\overline{R}$ *називається* ***протилежним*** *до відношення R, заданого на множині X, якщо воно є заданим на множині X і є різницею декартового квадрата X×X і відношення R, тобто виконується рівність:*

$$\overline{R} = (X \times X) \setminus R .$$

Наприклад, протилежним до відношення «x<y» на множині натуральних чисел є відношення «x$\geq$y».

Для формулювання протилежного відношення до заданого, треба вставити у формулювання заданого відношення слово «не».

Означення 2. *Нехай на множині X задано відношення R.* ***Оберненим*** *до нього називається відношення* R^{-1} *таке, що* $yR^{-1}x$ *тоді і тільки тоді, коли xRy, яке теж задане на множині X.*

Наприклад, до відношення «x > y», яке задане на множині натуральних чисел, оберненим є відношення «y < x», яке задане на цій же множині.

Для формулювання оберненого відношення до заданго, треба зв'язок між елементами x і y виразити так, щоб зміст зв’язку залишився тим самим, але цей зв'язок треба виразити вже між елементами y і x.

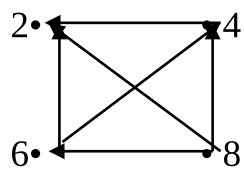
Приклад. *На множині X = {2; 4; 6; 8} задане відношення R: «більше». Задати переліком елементів та побудувати граф відношення R.*

Сформулювати та задати переліком елементів протилежне та обернене відношення до заданого. Побудувати їх графи.

Розв'язання. На множині X = {2; 4; 6; 8} задано відношення R: «більше». Задамо відношення R переліком елементів:

$$R = \{(4;2), (6;2), (6;4), (8;2), (8;4), (8;6)\}.$$

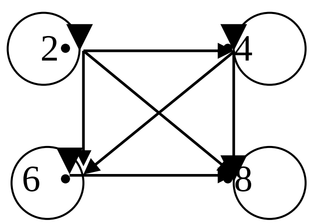
Побудуємо граф відношення R:



R

Протилежним відношенням до заданого відношення є відношення $\overline{R}$: «x не більше y», тобто «x $\leq$ y».

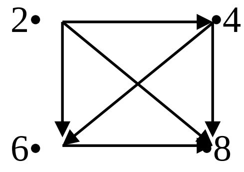
$$\overline{R} = \{(2;2), (2;4), (2;6), (2;8), (4;4), (4;6), (4;8), (6;6), (6;8), (8;8)\}.$$



$\overline{R}$

Оберненим відношенням до заданого відношення є відношення R^{-1}: «менше», тобто «y < x».

$$R^{-1} = \{(2;4), (2;6), (2;8), (4;6), (4;8), (6;8)\}.$$



R^{-1}

2.4. Властивості відношень

Відношення на множині мають такі властивості:

Означення 1. *Відношення R на множині X називається* ***рефлексивним****, якщо кожен елемент з множини X перебуває у відношенні R сам з собою, тобто для всіх елементів x з множини X виконується умова xRx.*

Прикладами рефлексивного відношення є відношення «бути кратним», «бути дільником» на множині натуральних чисел.

У кожній вершині графа рефлексивного відношення є ***петля***.

Означення 2. *Відношення R на множині X називається* ***антирефлексивним****, якщо жоден елемент з множини X не перебуває у відношенні R сам з собою, тобто для всіх елементів x з множини X не виконується умова xRx.*

Прикладами антирефлексивного відношення є відношення «менше», «більше» на множині натуральних чисел; відношення «бути перпендикулярними» на множині прямих.

Граф антирефлексивного відношення не містить жодної петлі.

Означення 3. *Відношення R на множині X називається* ***арефлексивним****, якщо деякі елементи з множини X перебувають у відношенні R самі з собою, а деякі – ні, тобто для деяких елементів x з множини X виконується умова xRx, а для деяких – ні.*

Прикладами арефлексивного відношення є відношення «кратне» на множині цілих невід'ємних чисел (натуральні числа і число нуль).

На графі арефлексивного відношення в деяких вершинах є петлі, а в інших вершинах немає петель.

Означення 4. *Відношення R на множині X називається* ***симетричним****, якщо для всіх елементів множини X виконується умова: якщо елемент x перебуває у відношенні R з елементом y, то елемент y перебуває у відношенні R з елементом x, тобто якщо xRy, то yRx для всіх елементів множини X.*

Прикладами симетричного відношення є відношення «бути паралельними», «бути перпендикулярними» на множині прямих.

Граф будь-якого симетричного відношення має особливість: разом з кожною стрілкою, яка напрямлена від елемента *х* до елемента *у*, граф містить стрілку, яка напрямлена від елемента *у* до елемента *х*. Така стрілка називається **подвійною** і має вигляд:

$$x \longleftrightarrow y$$

Граф симетричного відношення містить лише подвійні стрілки.

Означення 5. *Відношення R на множині X називається* ***антисиметричним****, якщо для всіх різних елементів х і у з множини X з того, що елемент х перебуває у відношенні R з елементом у, випливає, що елемент у не перебуває у відношенні R з елементом х.*

Прикладами антисиметричного відношення є відношення «більше», «менше» на множині натуральних чисел; «довше», «коротше» на множині відрізків.

Граф будь-якого антисиметричного відношення має особливість: дві вершини графа з'єднюються стрілкою лише в одному напрямі, яка називається **одинарною**:

$$x \longrightarrow y$$

Граф антисиметричного відношення містить лише одинарні стрілки.

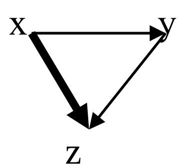
Означення 6. *Відношення R на множині X називається* ***асиметричним****, якщо воно не є ні симетричним, ні антисиметричним.*

На графі асиметричного відношення є пари елементів, сполучені подвійними стрілками, а є пари елементів, сполучені одинарними стрілками.

Означення 7. *Відношення R на множині X називається* ***транзитивним****, якщо для всіх елементів множини X виконується умова: якщо елемент х перебуває у відношенні з елементом у і елемент у перебуває у відношенні з* *елементом z, то елемент x перебуває у відношенні з елементом z, тобто якщо xRy і yRz, то xRz для всіх елементів множини X.*

Прикладами транзитивного відношення є відношення «більше», «менше», «кратне», «бути дільником» на множині натуральних чисел; «довше», «коротше» на множині відрізків.

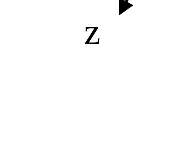
Граф будь-якого транзитивного відношення має особливість: разом з кожною парою двох послідовних стрілок, які напрямлені від елемента x до елемента y і від елемента y до елемента z, граф містить **третю** стрілку, яка напрямлена від елемента x до елемента z:



Означення 8. *Відношення R на множині X називається* ***антитранзитивним****, якщо для всіх різних елементів x, y і z із множини X виконується умова: якщо елемент x перебуває у відношенні з елементом y і елемент y перебуває у відношенні з елементом z, то елемент x* ***не перебуває*** *у відношенні з елементом z.*

Прикладами антитранзитивного відношення є відношення «на 3 більше», «на 5 менше», «у 2 рази більше», «у 4 рази менше» на множині натуральних чисел.

Граф будь-якого антитранзитивного відношення має особливість: разом з кожною парою двох послідовних стрілок, які напрямлені від елемента x до елемента y і від елемента y до елемента z, граф **не містить** жодної стрілки, яка напрямлена від елемента x до елемента z:



Означення 9. *Відношення R на множині X називається* ***атранзитивним****, якщо воно не є ні транзитивним, ні антитранзитивним*.

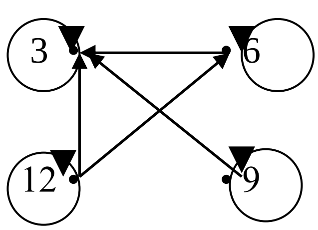
Граф будь-якого атранзитивного відношення має особливість: разом з кожною парою двох послідовних стрілок, які напрямлені від елемента x до елемента y і від елемента y до елемента z, граф містить **деякі стрілки**, які напрямлені від елемента x до елемента z.

Означення 10. *Відношення R на множині X називається* ***зв'язним****, якщо або елемент x перебуває у відношенні з елементом y, або елемент y перебуває у відношенні з елементом x*.

Граф будь-якого зв'язного відношення має особливість: всі елементи множини X пов'язані між собою хоча б однією стрілкою; на графі немає жодного ізольованого елемента.

Приклад. *На множині X = {3; 6; 9; 12} задане відношення «бути кратним». Якими властивостями воно володіє?*

Розв'язання. Оскільки властивості відношень наочно ілюструються на графі, то для встановлення властивостей заданого відношення на множині X побудуємо його граф:



Оскільки у кожній вершині графа є петля, то задане відношення є рефлексивне.

На графі усі елементи з'єднані між собою стрілками лише в одному напрямі (є одинарними), то задане відношення є антисиметричне.

Граф має дві послідовні стрілки, які йдуть від 12 до 6 і від 6 до 3, а також має третю стрілку, яка йде від 12 до 3, то задане відношення є транзитивне.

Усі елементи множини X з'єднані між собою хоча б однією стрілкою, тобто ізольованих елементів немає, тому відношення є зв'язним.

Отже, відношення «бути кратним», задане на множині X = {3; 6; 9; 12}, є рефлексивне, антисиметричне, транзитивне, зв'язне.

2.5. Відношення еквівалентності. Розбиття множини на класи еквівалентності

Означення 1. *Відношення R, задане на множині X, називається* ***відношенням еквівалентності****, якщо воно одночасно рефлексивне, симетричне і транзитивне.*

Прикладами відношення еквівалентності є відношення «бути паралельними» на множині прямих, «бути рівними» на множині дробів, «бути подібними» на множині геометричних фігур тощо.

Означення 2. *Систему підмножин заданої множини X називають* ***розбиттям множини X****, якщо:*

1) *всі підмножини непорожні;*
2) *будь-які дві підмножини попарно не перетинаються;*
3) *об'єднанням всіх підмножин є множина X.*

Наприклад, множину X студентів університету денної форми здобуття освіти можна розбити на підмножини за відношенням R: «бути однокурсником». Ці підмножини є непорожні; всі підмножини попарно не перетинаються; об'єднанням всіх підмножин є множина X. Система цих підмножин утворює розбиття множини X відношенням R: «бути однокурсником», бо виконуються всі умови означення.

Теорема. *Якщо на множині X задано відношення еквівалентності, то воно здійснює розбиття цієї множини на підмножини, які називаються* ***класи еквівалентності.***

У кожному класі еквівалентності знаходяться лише ті елементи, які перебувають між собою у заданому відношенні. Тому вважають, що клас еквівалентності визначається довільним одним своїм елементом (представником). Це дає можливість замість всіх елементів множини вивчати сукупність окремих представників з класів еквівалентності.

Якщо відношення еквівалентності має назву, то відповідна назва дається і класам еквівалентності. Наприклад, множина трикутників площини за допомогою відношення «бути подібними» розбивається на класи еквівалентності, у яких будуть усі подібні між собою трикутники; кожен клас еквівалентності буде називатися класом подібних трикутників.

Розбиття множин на класи еквівалентності лежить в основі здійснення **класифікації понять**. Поняття «клас» і його синоніми «рід», «вид», «тип», «сорт» широко використовуються в різних сферах діяльності людини. Так, у біології всі живі організми розподіляють на типи; у сільському господарстві фрукти і овочі сортують за видами; слова у словниках розбивають на підмножини, розміщуючи їх у алфавітному порядку тощо.

Прикладами класифікації у математиці є:

1. множина натуральних чисел поділяється її за подільністю на 2 на дві підмножини – множина парних чисел і множина непарних чисел;

2. множина всіх трикутників поділяється за сторонами на три підмножини – множина рівносторонніх трикутників, множина рівнобедрених трикутників і множина різносторонніх трикутників;

3. множина всіх трикутників поділяється за кутами на три підмножини – множина гострокутних трикутників, множина прямокутних трикутників і множина тупокутних трикутників.

Приклад. *На множині відрізків площини задане відношення R: «мати одинакову довжину». Чи є задане відношення відношенням еквівалентності? Якщо так, то вказати класи еквівалентності.*

Розв'язання.

Це відношення є рефлексивним, бо кожен відрізок має певну задану довжину, яка виражається додатним дійсним числом, і є рівним сам собі.

Це відношення є симетричним, бо серед відрізків площини завжди можна знайти хоча б два відрізки, які мають одинакову довжину.

Це відношення є транзитивним, бо якщо АВ = ВС і ВС = СД, то АВ = СД.

Отже, відношення «мати одинакову довжину» на множині відрізків є відношенням еквівалентності.

Тому це відношення розбиває множину відрізків площини на класи еквівалентності. Кожен з них містить усі відрізки, які мають однакову довжину, яка виражається певним додатним дійсним числом. Цих класів еквівалентності є безліч.

2.6. Відношення порядку. Упорядковані множини. Дискретна множина. Щільна множина

Означення 1. *Відношення R на множині X називається **відношенням порядку**, якщо воно транзитивне і антисиметричне.*

Розрізняють відношення строгого і нестрогого порядку.

Означення 2. *Відношення R на множині X називається **відношенням строгого порядку**, якщо воно є відношенням порядку і антирефлексивним, тобто воно є транзитивним і антисиметричним, антирефлексивним.*

Наприклад, відношення «менше», «більше» на множині натуральних чисел; «довше», «коротше» на множині відрізків; «вищий», «нижчий», «старший», «молодший» на множині людей є відношеннями строгого порядку.

Означення 3. *Відношення R на множині X називається* ***відношенням нестрогого порядку****, якщо воно є відношенням порядку і рефлексивним, тобто воно є транзитивним і антисиметричним, рефлексивним*.

Наприклад, відношення «менше або дорівнює», «більше або дорівнює» на множині натуральних чисел є відношеннями нестрогого порядку.

Означення 4. *Множина X із заданим на ній відношенням порядку (строгого або нестрогого) називається* ***частково упорядкованою.***

Наприклад, множина натуральних чисел із заданим на ній відношенням «менше», «більше», «менше або дорівнює», «більше або дорівнює» є частково упорядкованою.

Означення 5. *Зв'язне відношення порядку на множині X називається відношенням* ***лінійного порядку***.

Відношення порядку упорядковує упорядковану множину по-різному. Відношення «х менше у» упорядковує множину натуральних чисел лінійно. А відношення «х кратне у» упорядковує множину натуральних чисел нелінійно (на графі є вершини, які не з'єднані між собою хоча б однією стрілкою).

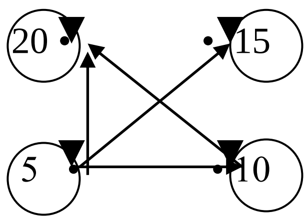
Означення 6. *Множина X із заданим на ній відношенням лінійного порядку називається* ***лінійно упорядкованою***.

Для лінійно упорядкованої множини характерна така властивість:

нехай a, b, c – елементи лінійно упорядкованої множини X. Якщо aRb і bRc, то елемент b знаходиться між елементами a і c (наприклад, з того, що $1 < 3$ і $3 < 5$ випливає, що 3 знаходиться між числами 1 і 5, тобто $1 < 3 < 5$).

Приклад. *На множині X = {5; 10; 15; 20} задане відношення R: «бути дільником». Чи є воно відношенням порядку? Чи є множина X впорядкованою?*

Розв'язання. Для відповіді на поставлене запитання побудуємо граф заданого відношення:



Оскільки у кожній вершині графа міститься петля, то задане відношення є рефлексивним.

На графі елементи з'єднані між собою одинарними стрілками (лише в одному напрямі), то задане відношення є антисиметричним.

Задане відношення є транзитивним, бо побудований граф з кожною парою стрілок, які ідуть від 5 до 10 і від 10 до 20, містить третю стрілку, яка йде від 5 до 20.

За означенням, задане відношення є відношенням нестрогого порядку. Множина X є частково упорядкованою.

Задане відношення на множині X є зв'язним відношенням порядку, тому воно є відношенням лінійного порядку. Множина X є лінійно упорядкованою.

Означення 7. *Лінійно упорядкована множина називається* ***дискретною****, якщо між двома довільними різними її елементами лежить лише скінченна кількість її елементів.*

Прикладом дискретної множини є множина натуральних чисел.

Означення 8. *Лінійно упорядкована множина називається* ***щільною****, якщо для довільних двох різних її елементів існує безліч елементів, які лежать між ними.*

Прикладами щільних множин є множина раціональних та множина дійсних чисел.

3. Відображення множин

3.1. Означення поняття «відображення множин». Образ і прообраз елемента

Частковим випадком поняття відповідності між двома множинами є поняття відображення множин.

Означення 1. ***Відображенням множин Х і У*** *називається така відповідність між елементами цих множин, при якій* *<u>кожному</u>* *елементу множини Х відповідає* *<u>тільки один</u>* *елемент множини У.*

Відображення множин позначають малими буквами латинського алфавіту. Якщо між елементами двох множин Х і У задано відображення f, то це позначають так:

$$\mathbf{f:\ X \rightarrow У;} \qquad \mathbf{X \xrightarrow{f} У},$$

де f – символ цього відображення.

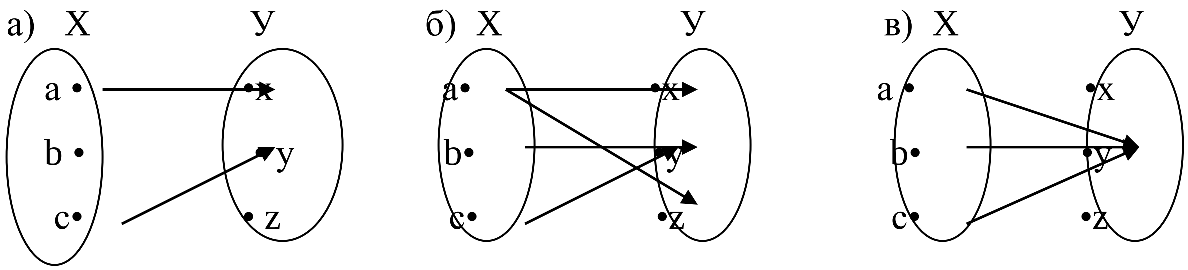
Якщо при відображенні f елемент х з множини Х відображається на елемент у з множини У, то це записують так: **у = f(х).**

Відображення є частковим видом відповідності і тому може бути задана усіма сімома відомими способами.

Щоб перевірити, чи вона є відображенням, треба згідно з означенням перевірити, чи кожному елементу з множини Х відповідає єдиний елемент з множини У.

Для **графів відображення** між множинами Х і У характерно, що з <u>кожної точки</u> <u>множини Х виходить одна і тільки одна стрілка.</u> До точок множини У може входити одна, дві і більше стрілок, а в деякі з них може не входити і жодна стрілка (такі елементи називаються вільними). Якщо у множині Х є вільний елемент або з якогось її елемента виходять дві або більше стрілок, то така відповідність не буде відображенням.

Приклад. *Серед графів, зображених на рисунку, знайти графи відображень:*



Розв'язання.

У випадку а) з елемента b множини X не виходить стрілка до жодного елемента множини У. Отже, ця відповідність не є відображенням.

У випадку б) з елемента а виходять дві стрілки до елементів множини У. Отже, ця відповідність не є відображенням.

У випадку в) з кожного елемента множини X виходить по одній стрілці до елементів множини У. Отже, ця відповідність є відображенням.

Означення 2. *Якщо при відображенні f елемент x відображається на елемент y, то елемент y називається **образом** елемента x, а елемент x – **прообразом** елемента y при відображенні f.*

Наприклад, відповідність «студент x сидить на стільці y» задає відображення множини X в множину У, де X – множина студентів у аудиторії, У – множина стільців у аудиторії. Образом студента при такому відображенні є стілець, на якому він сидить. Прообразом для стільця є студент, який на ньому сидить.

При відображенні $X \xrightarrow{f} У$ кожен елемент множини X відображається лише в один елемент з множини У. На елементи множини У жодних обмежень не накладається – в деякі з них не відображається жоден елемент з X, в інші відображається лише один, а в деякі – по кілька елементів.

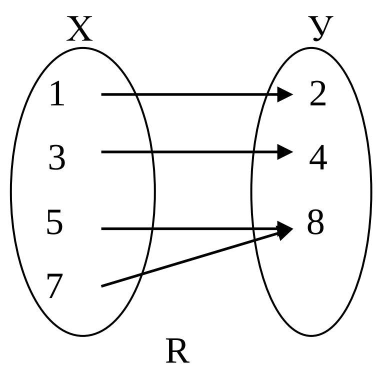
Отже, при відображенні f множина визначення A є множиною пробразів і співпадає з множиною відправлення X, тобто A=X; множина значень B є множиною образів і може як співпадати з множиною прибуття У, так і бути її підмножиною.

Приклад. *Відповідність xRy між елементами множин X і У задана переліком елементів: R = {(1;2), (3;4), (5;8), (7;8)}. Визначити множини X і У. Побудувати граф відповідності. Чи є ця відповідність відображенням множин X і У? Вказати образи і прообрази елементів.*

Розв'язання. Відповідність R задана переліком елементів R={(1;2), (3;4), (5;8), (7;8)}. Визначимо за цими парами множини X і У:

X={1; 3; 5; 7}; У={2; 4; 8}.

Для відповіді на поставлене питання побудуємо граф заданої відповідності:



Кожному елементу множини X відповідає єдиний елемент з множини У. Тому відповідно до означення відповідність між множинами X і У є відображенням.

Образом елемента 1 є елемент 2.

Образом елемента 3 є елемент 4.

Образом елемента 5 є елемент 8.

Образом елемента 7 є елемент 8.

Прообразом елемента 2 є елемент 1.

Прообразом елемента 4 є елемент 3.

Прообразом елемента 8 є елементи 5 і 7.

3.2. Основні властивості та типи відображень

Означення 1. *Відображення, при якому жоден елемент множини У не може бути образом більше ніж одного елемента множини Х, називається* ***ін'єктивним*** *відображенням множин Х і У.*

Відображення є ін'єктивним, якщо будь-які два різні прообрази мають два різні образи.

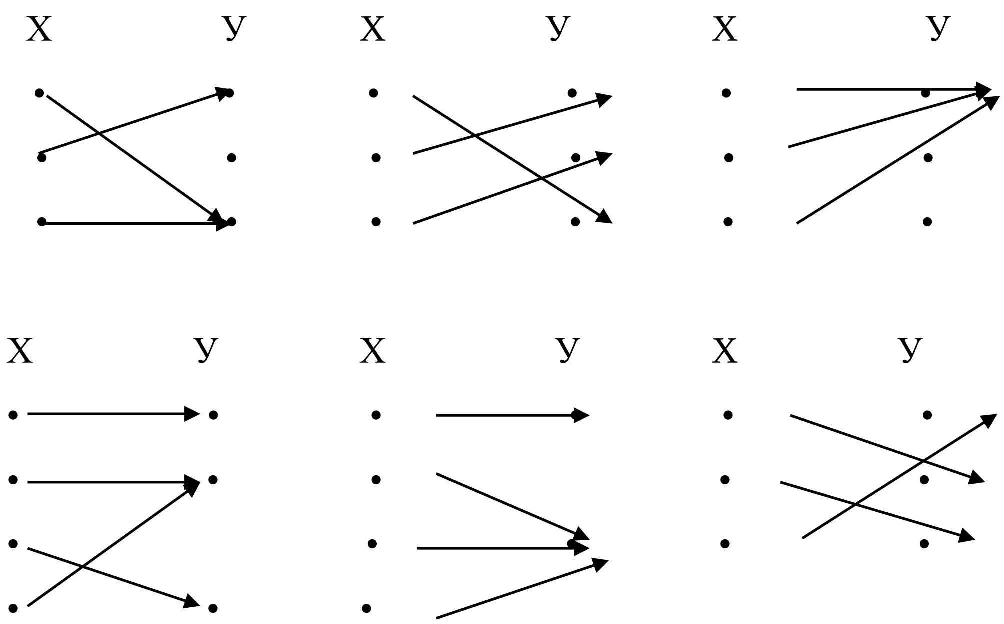
Означення 2. *Відображення, при якому кожен елемент множини У є образом хоча б одного елемента множини Х, називається* ***сюр'єктивним*** *відображенням множин Х і У.*

Відображення є сюр'єктивним, якщо у множині У немає жодного вільного елемента.

Є два **типи відображень**:

1. Відображення **Х в У** (воно не є сюр'єктивне, у множині У є хоча б один вільний елемент, множина значень В є підмножиною множини У);
2. Відображення **Х на У** (воно є сюр'єктивне, у множині У немає жодного вільного елемента, множина значень В співпалає з множиною У)**.**

Приклад. *На рисунку зображені графи відображень. Які з них є графами ін'єктивних відображень? Які з них є графами сюр'єктивних відображень?*

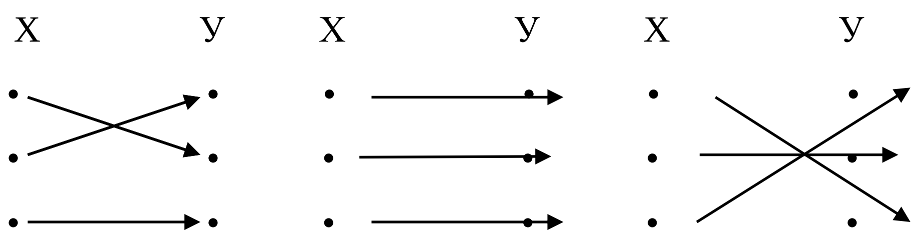


Розв'язання. Згідно з означенням ін'єктивного відображення граф такого відображення повинен містити стрілки від кожного елемента множини Х до єдиного елемента множини У, при чому образи повинні бути різними. Отже, лише на другому та шостому рисунках зображено граф ін'єктивного відображення множин Х і У.

Згідно з означенням сюр'єктивного відображення граф такого відображення повинен бути таким, що у множині У немає жодного вільного елемента. Отже, лише на другому, четвертому, пятому та шостому рисунках зображено граф сюр'єктивного відображення множин Х і У.

Означення 3. *Взаємно однозначне відображення множини Х на У, при якому кожному елементу множини Х відповідає тільки один елемент множини У, і навпаки, називається* ***бієктивним,*** *тобто воно є одночасно і ін'єктивним, і сюр'єктивним.*

Приклади графів бієктивних відображень зображені на рисунках:



Якщо $Х \xrightarrow{f} У$ є взаємно однозначним відображенням множини Х на множину У, то і обернене відображення f^{-1} множини У на множину Х також є взаємно однозначним відображенням.

3.3. Скінченна множина. Нескінченна множина. Зчисленна множина. Потужність континууму

Означення 1. *Множина X називається* ***скінченною****, якщо не існує взаємно однозначного відображення цієї множини на деяку свою підмножину* X_1*, таку, що* $X_1 \neq X$.

Означення 2. *Множина X називається* ***нескінченною****, якщо вона рівнопотужна з деякою своєю власною підмножиною* X_1*, тобто якщо* $X_1 \sim X$*, де* $X_1 \subset X$ *і* $X_1 \neq X$*,* $X_1 \neq \varnothing$.

Наприклад, X – множина парних натуральних чисел, У – множина натуральних чисел, кратних 6. Ці множини пов'язані між собою: $У \subset X$. Між множинами X і У можна встановити взаємно однозначну відповідність: $2 \to 6$, $4 \to 12$, $6 \to 18$, … . Множини є рівнопотужними: X~У. За означенням множина X – нескінченна множина.

Як відомо, кожна множина характеризується потужністю. Потужність скінченної множини дорівнює кількості її елементів. Наприклад, множина X = {a, b, c, p, e} має 5 елементів, тому її потужність дорівнює 5, це записують символами так: n(A) = 5. Ця множина рівнопотужна множині вершин п'ятикутника.

Означення 3. *Множина, яка має ту ж потужність, що і множина натурального ряду чисел, називається* ***зчисленною****.*

Множина натуральних чисел, множина цілих чисел, множина раціональних чисел є зчисленними, тобто їх елементи можна пронумерувати.

Множина дійсних чисел не є зчисленною. Це вперше довів Георг Кантор. Він показав, що навіть множина дійсних чисел з проміжка (0; 1) має більшу потужність, ніж множина натуральних чисел.

Означення 4. *Потужність множини дійсних чисел називають* ***потужністю континууму****.*

4. Функції

4.1. Поняття функції. Область визначення. Множина значень

Означення 1. *Відповідність між елементами двох множин X і У, при якій* <u>*кожному*</u> *елементу множини X відповідає* <u>*не більше одного елемента (один або жоден)*</u> *множини У, називається* ***функцією.***

Термін «функція» запровадив німецький математик Георг Лейбніц.

Нехай маємо дві числові множини D і G і кожному елементу множини D за якимось правилом f відповідає не більше одного елемента множини G. Елементи множини D позначимо буквою x, а елементи множини G, які поставлені у відповідність елементам $\boldsymbol{x \in D}$ за правилом f, позначимо буквою y або символом $f(x)$.

Часто використовують такі записи для функцій:

$$1)\ \boldsymbol{f : x \to f(x)}; \qquad 2)\ \boldsymbol{x \xrightarrow{f} y}; \qquad 3)\ \boldsymbol{y = f(x)}.$$

При цьому букву x, яка вибирається з множини D, називають ***аргументом (незалежною змінною)***, а букву y, що позначає ті елементи з множини E, які за правилом f знаходяться для цього x, називають ***функцією (залежною змінною).***

Функцію з областю визначення D і областю значень E називають також *відображенням множини D на множину E.* Елементи y називаються ***образами*** цього відображення, а елементи x – ***прообразами.***

Означення 2. *Множина всіх значень змінної x, при яких функція має зміст, називається* ***областю визначення функції (областю допустимих значень, скорочено ОДЗ)*** *і позначається* **D.**

Практично, щоб знайти область визначення функції, треба розглянути, чи всі дії для знаходження значення функції є можливими для виконання, тобто чи немає певних **застережливих умов для змінної х** через неможливість виконання певної дії, і якщо вони є, то такі значення х треба знайти і вилучити.

Приклад. *Знайти область визначення функції:*

1. $y = 2x$,
2. $y = \frac{3}{x}$,
3. $y = -4x + 20$,
4. $y = \frac{1}{4 - x}$,
5. $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$,
6. $y = \frac{1}{x+5} + \frac{4x}{x-2}$,
7. $y = \frac{5x^2}{x(x+6)}$,
8. $y = 2x^2 - 8$.

Розв'язання.

1. $y = 2x$, застережливих умов нема, тому $D = (-\infty; +\infty) = R$.
2. $y = \frac{3}{x}$, застережлива умова $x \neq 0$, тому $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
3. $y = -4x + 20$, застережливих умов нема, тому $D = (-\infty; +\infty) = R$.
4. $y = \frac{1}{4 - x}$, застережлива умова $x \neq 4$, тому $D = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.
5. $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$, застережлива умова $x \neq 0$, тому $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
6. $y = \frac{1}{x+5} + \frac{4x}{x-2}$, дві застережливі умови $x \neq -5$, $x \neq 2$, тому $D = (-\infty; -5) \cup (-5; 2) \cup (2; +\infty)$.
7. $y = \frac{5x^2}{x(x+6)}$, дві застережливі умови $x \neq 0$, $x \neq -6$, тому $D = (-\infty; -6) \cup (-6; 0) \cup (0; +\infty)$.
8. $y = 2x^2 - 8$, застережливих умов нема, тому $D = (-\infty; +\infty) = R$.

Означення 3. *Множина всіх значень змінної у, які поставлені у відповідність до елементів* $\boldsymbol{x \in D}$ *за правилом* ***f****, тобто яких набуває функція, називається* ***множиною значень функції*** *і позначається* ***Е.***

Приклад. *Знайти множину значень функції:*

1. $y = 3x + 7$, $E = (-\infty; +\infty) = R$.
2. $y = \frac{3}{x}$, $E = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
3. $y = -2x^2 - 8$, $E = (-\infty; -8]$.
4. $y = 3x^2 + 4$, $E = [4; +\infty)$.

4.2. Способи задання функції

Як видно з означення функції, з теоретичної точки зору неістотно, яким саме конкретно способом встановлюється відповідність між елементами з області визначення *D* функції і з множини її значень *E*. Істотним є лише те, щоб така відповідність була цілком певною і однозначною, тобто кожному елементу області визначення *D* мусить за правилом *f* відповідати один і лише один елемент множини значень *E* або ж може і не відповідати жоден елемент множини *E*.

Оскільки функція є частковим випадком відповідності між двома множинами, то всі способи задання відповідності, які вивчалися у попередньому розділі, використовуються і для функцій. Серед них є мало ефективні способи у випадку задання функцій (за допомогою переліку елементів, характеристичної властивості, графа) та ефективні способи (словесний, аналітичний, графічний, табличний).

Розглянемо найпоширеніші **способи задання функції**:

1. Словесний спосіб описує функціональну залежність між х і у за допомогою певних слів. Наприклад, функція може бути заданою словесно так: «число *у* є кубом числа *х*», «*у* на 3 більше *х*», «у менше у 5 разів від х» тощо.

2. Аналітичний спосіб описує функціональну залежність між х і у за допомогою рівняння, що містить змінні *х* і *у* та вказує на кількість і послідовність виконання певних дій над аргументом *х*, які необхідні для того, щоб отримати значення $y = f(x)$ цієї функції.

Прикладами аналітичного способу задання функцій є:

$$y = 5x, \quad y = \frac{1}{4 - x}, \quad y = x^2 + 2x, \quad y = x^3, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = lgcosx, \quad y = \sqrt[4]{1 - 2x}.$$

Варто зазначити, що не кожна формула, що містить змінні *х* і *у,* обов’язково задає функцію, адже серед них є такі, за якими певному значенню змінної *х* можуть відповідати два і більше значень змінної *у*, що суперечить означенню функції. Наприклад, не задає функцію формула $y^2=x^2$.

Якщо у формулі функції змінна *у* виражена через змінну *х*, то кажуть, що функція задана у **явному аналітичному вигляді**. Наприклад, $y = –5x + 3$, $y=x^2$.

Якщо ж це не так, то кажуть, що функція задана у **неявному аналітичному вигляді**, і щоб від неявного аналітичного вигляду задання функції перейти до явного, треба у формулі функції виконати такі тотожні перетворення, щоб змінну *у* виразити через змінну *х.* Наприклад, формула $4x + 2y = 15$ задає функцію у неявному аналітичному вигляді. Звідси $2y = 15 – 4x$, $y = 7,5 – 2x$. Формула $y = 7,5 – 2x$ задає функцію вже в явному аналітичному вигляді.

Від явного до неявного вигляду однієї і тієї ж функції легко можна переходити за допомогою тотожних перетворень рівняння. Наприклад,

у = –х + 5 (явний вигляд), –х –у + 5 = 0 (неявний вигляд),

3х –2у + 6 = 0 (неявний вигляд), у = –3/2 х + 3 (явний вигляд).

За аналітичним способом задання функції можна легко **шукати**:

1. ***область визначення функції***

Якщо для формули функції не зазначається область її визначення *D(f)*, то це означає, що вона збігається з множиною усіх тих значень змінної *x*, для яких формула функції має зміст, тобто є областю існування формули функції.

Для функції $y = -2x^3 + 4$ жодних обмежень для виконання дій над значеннями змінної *x* немає, тому вона визначена для всіх дійсних значень змінної *x,* тобто *D(f) = R.*

Для функції $y = \frac{4x}{x+1}$ область визначення збігається з множиною тих значень змінної *x*, для яких існують дійсні значення виразу $\frac{4x}{x+1}$. Оскільки дріб існує тоді і тільки тоді, коли знаменник не дорівнює нулю, то ставимо застережливу умову $x+1 \neq 0$, звідки $x \neq -1$. Отже, областю визначення функції є множина $D(f) = (-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$. Кажуть, що функція $y = \frac{4x}{x+1}$ у точці $x = -1$ є невизначеною, тобто не існує.

Для функцій вигляду $y = \sqrt[2n]{f(x)}$ (містять корінь парного степеня) область визначення задається нерівністю $f(x) \geq 0$.

Функції вигляду $y = \sqrt[2n+1]{f(x)}$ (містять корінь непарного степеня) визначені при всіх дійсних значеннях змінної *x,* тобто *D(f) = R.*

2. ***множина значень функції***

За формулою функції можна визначити, які значення може набувати змінна y, тобто знаходити множину її значень *E(f).*

Для функції $y = -2x^3 + 4$ у результаті виконання всіх зазначених дій над значеннями змінної *x* можна отримати будь-які дійсні значення змінної *y,* тобто *E(f) = R.*

Для функції $\boldsymbol{y} = \dfrac{4\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}+1}$ область значень збігається з множиною тих значень змінної *y*, які є значеннями виразу $\dfrac{4\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}+1}$. Оскільки цей дріб може набувати будь-яких значень, то *E(f) = R*.

Для функцій вигляду $y = \sqrt[2n]{f(x)}$ (містять корінь парного степеня) область значень є всі невідємні значення.

Функції вигляду $y = \sqrt[2n+1]{f(x)}$ (містять корінь непарного степеня) мають множину значень *E(f) = R*.

3. ***значення функції у певній точці,*** *тобто значення функції для певного значення аргументу х з області визначення функції*

Наприклад, для функції, заданої рівнянням *y = 4x + 2*, виберемо декілька значень аргументу *x* і, підставивши їх у рівняння функції, знайдемо відповідні для них значення функції *y:*

якщо х = 0, то у = 4 · 0 + 2 = 2;

якщо х = –1, то у = 4 · (–1) + 2 = –4 + 2 = –2;

якщо х = 11, то у = 4 · 11 + 2 = 44 + 2= 46.

Ці значення функції у точках можна записати так:

у(0) = 2; у(–1) = –2; у(11) = 46.

4.значення аргумента х з області визначення функції для заданого значення функції у

Наприклад, знайдемо, для якого значення аргументу х функція *y = 4x + 2* набуде значення –6. Для цього треба підставити *y = –6* у рівняння функції і розв’язати його:

–6 = 4х + 2,

4х = –8,

х = –2.

Отже, y(–2) = –6, тобто функція набуває значення – 6 при значенні аргументу x= –2.

5. точки перетину графіка з осями координат

Щоб знайти <u>точки перетину з віссю ОХ</u>, треба у рівнянні функції покласти y = 0, розв’язати його відносно змінної x. Отримані значення x будуть абсцисами точок перетину з віссю ОХ, а ординати точок перетину з віссю ОХ будуть дорівнювати 0.

Щоб знайти <u>точку перетину з віссю ОУ</u>, треба знайти значення функції у точці x=0. Отримане значення y буде ординатою точки перетину з віссю ОУ, а її абсциса буде дорівнювати 0.

Наприклад, для функції $\boldsymbol{y} = -\dfrac{\boldsymbol{x}}{2} + 1$ точки перетину з осями координат будуть точки А (0; 1) з віссю ОУ і В (2; 0) з віссю ОХ.

Особливим прикладом аналітичного задання функції є **розгалужена функція,** яка має різний вигляд при різних значеннях аргумента:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ -1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Ця функція визначена для всіх дійсних чисел, тобто *D(y) = R*.

Множина значень цієї функції містить лише три значення: –1, 0, 1, тобто *E(y)* = $\{-1, 0, 1\}$.

Функція набуває лише якесь одне з них залежно від того, якому інтервалу з області визначення функції належить певне значення аргументу.

Тому для знаходження значень функції для певного значення *x*, треба визначити спочатку, яку з умов задовольняє *x*, наприклад:

y(–5) = –1, бо –5 < 0;

y(–2) = –1, бо –2 < 0;

$y(0) = 0$, бо $x = 0$;

$y(3) = 1$, бо $3 > 0$;

$y(34) = 1$, бо $34 > 0$.

3. Графічний спосіб

Наочно залежність $y = f(x)$ між аргументом х та значенням функції у подає графік функції.

Означення*. *Графіком функції* $y = f(x)$, $x \in D$*, називається множина М всіх упорядкованих пар (х;у) елементів х і у, таких, що* $x \in D$*, а* $y = f(x)$*, тобто

$$M = \{(x; y) | x \in D, y = f(x)\}.$$

Оскільки графіком функції $y = f(x)$, $x \in D$, є множина упорядкованих пар *(х; у),* таких, що $x \in D$, $y = f(x) \in E$, а пара чисел *(х; у)* є координатою певної точки М *(х, f(х))* на координатній площині ХОУ, то графік функції зображають у прямокутній (декартовій) системі координат.

У загальному випадку графіком функції $y = f(x)$ є довільна крива лінія.

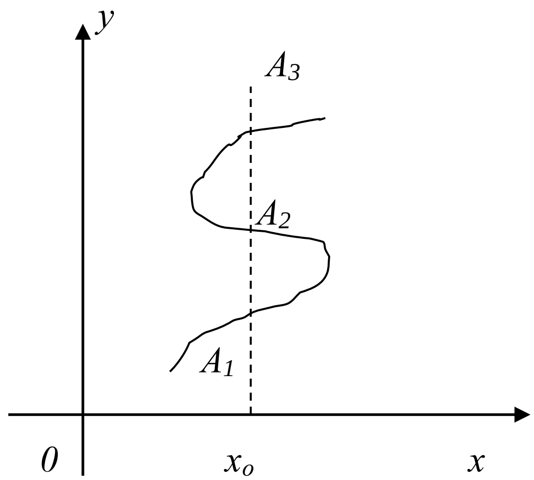
Обернене твердження не є завжди істинним: не кожна крива є графіком функції. Для того щоб перевірити, чи є лінія на координатній площині ХОУ є графіком функції, треба здійснити алгоритм дій:

1) на осі ОХ вибрати декілька довільних точок;

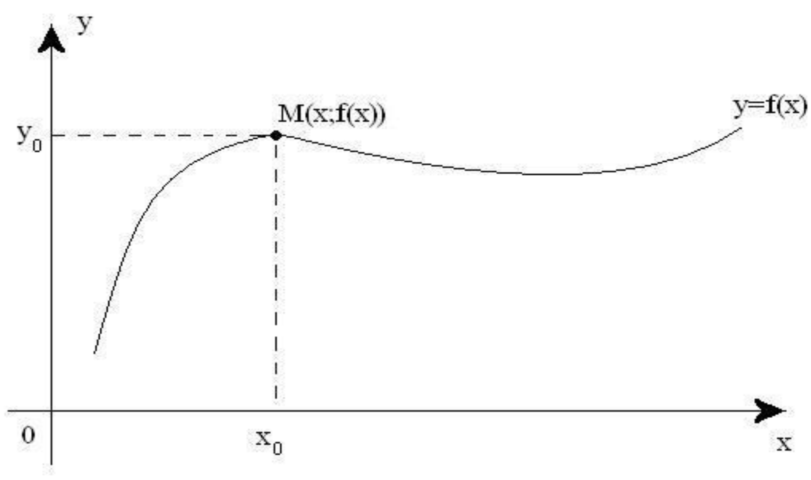
2) через ці точки провести вертикальні прямі;

3) якщо хоча б одна з вертикальних прямих перетне задану лінію більше, ніж в одній точці, то ця лінія не є графіком функції.

Наприклад, подана лінія не може бути графіком функції, бо на зображеній кривій знайдеться аж три точки A_1, A_2, A_3 з абсцисою x_o, тобто вибравши x_o і провівши вертикальну пряму, ми отримали три точки її перетину з кривою.



Якщо точка М належить графіку функції *y = f(x),* то щоб знайти її координати, треба опустити перпендикуляри на вісь абсцис та вісь ординат відповідно і отримаємо М (x_0; y_0).



Якщо весь графік функції спроектувати на вісь абсцис ОХ, то отримаємо область визначення функції D(y).

Якщо весь графік функції спроектувати на вісь ординат ОУ, то отримаємо область значень функції Е(у).

Для <u>того щоб перевірити, чи належить певна точка з конкретними координатами графіку функції, треба підставити ці координати у рівняння функції</u>:

- якщо отримаємо правильну числову рівність, то точка належить графіку функції;
- якщо отримаємо неправильну числову рівність, то точка не належить графіку функції.

Приклад. *Чи належать точки А (1; 8), В (–2; 0) графіку функції $y = 3x + 5$?*

Розв'язання. Щоб дати відповідь на це питання, графік функції будувати не обов'язково. Треба у рівняння функції підставити координати точок і перевірити чи отримаємо правильні числові рівності:

$8 = 3 \cdot 1 + 5$, $8 = 8$ (1), тому точка А (1; 8) належить графіку функції;

$0 = 3 \cdot (-2) + 5$, $0 = -1$ (0), тому точка В (–2; 0) не належить графіку функції;

За графіком функції можна знаходити:

1. значення функції y_0 у певній точці x_0.

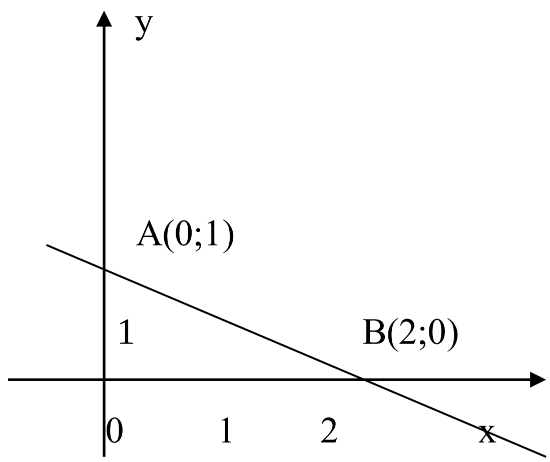
Для цього достатньо взяти на осі ОХ значення x_0, через нього провести вертикально перпендикуляр до перетину з графіком функції і спроєктувати цю точку на вісь ОУ. Отримаємо відповідне значення y_0.

2. значення аргумента x_0, при якому функція набуває значення y_0.

Для цього достатньо взяти на осі ОУ значення y_0, через нього провести горизонтально перпендикуляр до перетину з графіком функції і спроектувати цю точку на вісь ОХ. Отримаємо відповідне значення x_0.

Варто зазначити, що не кожна лінія на координатній площині ХОУ є графіком якої-небудь функції. Це позв'язано з тим, що ми розглядаємо лише однозначні функції, тобто для кожного значення аргументу *x* має відповідати не більше одного значення функції *y*.

Маючи аналітичне задання функції $y = f(x)$, можна побудувати графік функції. Так, наприклад, графіком функції $y = -\frac{x}{2} + 1$ є пряма, для побудови якої треба мати дві точки – точки перетину з осями координат – А (0; 1) і В (2; 0).



Зворотний перехід не завжди можливий, бо маючи графічну залежність між x та $y = f(x)$, аналітично залежність здебільшого можна знайти лише наближено. Найзручніше вивчати функціональну залежність, користуючись одночасно аналітичним і графічним способами.

4.Табличний спосіб

Дуже часто на практиці внаслідок якого-небудь досліду чи спостереження дістають результати у вигляді пар чисел. Так, наприклад, залежність шляху S, пройденого автомобілем за час t, можна задати такою таблицею:

t	1 год	2 год	3 год	4 год	5 год	6 год
S	60 км	135 км	210 км	280 км	375 км	450 км

Таблиця подає певне уявлення про залежність змінної S від змінної t. Щоб мати більш наочну картину, часто точки з координатами (t, S) наносять на координатну площину tOS і з’єднують їх неперервною лінією, яку вважають графіком функції S = S(t).

Табличний мспосіб задання функції передбачає таблицю з двох рядків: у першому подано значення незалежної змінної, а у другому рядку – відповідні значення залежної змінної.

Принцип побудови таблиці не дає змоги знайти точне значення функції для значень аргументу, що лежить між двома будь-якими табличними. Табличний спосіб задання функції буває дуже корисним під час наближених обчислень. Широко відомі і часто використовуються таблиці тригонометричних функцій, таблиці квадратів та кубів дійсних чисел тощо.

Зі шкільного курсу математики відомі **основні елементарні функції** та їх рівняння і графіки:

№ з/п	**Назва функції**	**Рівняння функції**	**Назва графіка**
1	функція прямої пропорційності	$y = kx$	пряма
2	функція оберненої пропорційності	$y = \frac{k}{x}$	гіпербола
3	лінійна функція	$y = kx + b$	пряма
4	квадратична функція	$y = ax^2 + bx + c$	парабола
5	степенева функція	$y=x^n$	крива
6	показникова функція	$y = a^x$	крива
7	логарифмічна функція	$y = \log_a x$	крива
8	тригонометричні функції	y=sinx y=cosx y=tgx y=ctgx	синусоїда косинусоїда тангенсоїда котангенсоїда
9	обернені тригонометричні функції	y=arcsinx y=arccosx y=arctgx y=arcctgx	крива крива крива крива

4.3. Основні властивості функції

I. <u>Парність функції</u>

Означення 1. *Функція $y = f(x)$ називається* ***парною*** *на множині D, якщо для будь-якого $x \in D$ виконується рівність, яка називається* ***умовою парності функції:***

$$f(-x) = f(x).$$

Властивості парної функції:

1. Графік парної функції є симетричним відносно осі ординат ОУ.
2. Область визначення парної функції є симетричною відносно початку координат т. О (0; 0).

Прикладами парної функції є: $y = ax^2,\ y = \cos x,\ \mathrm{y} = \mathrm{x}^4$.

Означення 2. *Функція $y=f(x)$ називається* ***непарною*** *на множині D, якщо для будь-якого $x \in D$ виконується рівність, яка називається* ***умовою непарності функції:***

$$f(-x) = -f(x).$$

Властивості непарної функції:

1. Графік непарної функції є симетричним відносно початку координат т. О (0; 0).
2. Область визначення непарної функції є симетричною відносно початку координат т. О (0; 0).

Прикладами непарної функції є:

$$y = kx,\ y = ax^3,\ y = \sin x,\ y = tgx,\ \mathrm{y} = \mathrm{ctgx},\ y = \frac{k}{x}.$$

Означення 3. *Якщо не виконується ні умова парності, ні умова непарності функції, то функція називається* ***ні парною, ні непарною****.*

Властивості ні парної, ні непарної функції:

1. Графік ні парної, ні непарної функції не є симетричним ні відносно осі ординат ОУ, ні відносно початку координат т. О (0; 0).

2. Область визначення ні парної, ні непарної функції не є симетричною відносно початку координат т. О (0; 0).

Прикладами ні парних, ні непарних елементарних функцій є: $y = kx + b, y = ax^2 + bx + c, y = a^x, y = \log_a x.$

Для того щоб дослідити функцію *y=f(x)* на парність (непарність), треба здійснити алгоритм дій:

1. у рівнянні функції y = f(x) замість x підставити – x;
2. спростити утворений вираз;
3. використовуючи означення 1-3, зробити відповідний висновок.

Приклад 1. *Дослідити функції* $\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{x}^2 - 5$, $\boldsymbol{f(x)} = 4\boldsymbol{x}^3$, $f(x) = \sqrt{x+2}$ *на парність.*

Розв'язання. Виконаємо дії алгоритму:

$\boldsymbol{f(-x)} = (-\boldsymbol{x})^2 - 5 = \boldsymbol{x}^2 - 5 = \boldsymbol{f(x)}$. Виконується умова парності, тому функція $\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{x}^2 - 5$ є парною.

$f(-x) = 4(-x)^3 = -4x^3 = -f(x)$**.** Виконується умова непарності, тому функція $\boldsymbol{f(x)} = 4\boldsymbol{x}^3$ є непарною.

$f(-x) = \sqrt{-x+2} \neq f(x) \neq -f(x)$. Не виконується ні умова парності, ні умова непарності , тому функція $f(x) = \sqrt{x+2}$ є ні парною, ні непарною.

Класифікація функцій щодо парності така:

Функції		
парні	**непарні**	**ні парні, ні непарні**

II. Періодичність функції

Означення 4. *Функція y = f(x), визначена на множині D, називається* ***періодичною****, якщо існує таке число T≠0, що для будь-якого x на множині D справджується рівність, яка називається* ***умовою періодичності функції:***

$$f(x+T)=f(x).$$

Чисел Т, які задовольняють умову періодичності для заданої функції, може бути багато: Т, 2Т, 3Т, …, nТ, … . Тому з усіх можливих чисел вибирають найменше додатне число Т і називають його ***періодом функції*** *y = f(x)*.

Властивість періодичної функції полягає у тому, що графік періодичної функції містить нескінченне повторення графіка цієї функції, побудованого на відрізку довжиною Т.

Прикладами періодичної функції є тригонометричні функції:

y=sinx, *y=cosx*, *y=secx*, *y=cosecx* періодичні з періодом Т = 2π = 360°;

y=tgx, *y=ctgx* періодичні з періодом Т = π = 180°.

Найменшим додатним періодом для функцій вигляду ***y = a sin(kx+b)*** та ***y = acos(kx+b)*** є число $\mathbf{T}=\dfrac{2\pi}{|k|}$.

Найменшим додатним періодом для функцій вигляду ***y = a tg(kx+b)*** та ***y = a ctg(kx+b)*** є число $\mathbf{T}=\dfrac{\pi}{|k|}$.

На періоди складених тригонометричних функцій коефіцієнти *a* та *b* не впливають, а впливає лише коефіцієнт *k* (біля змінної *x*), тому період відповідної тригонометричної функції треба поділити на число $|k|$.

Приклад 2. *Знайти найменший додатний період для функцій* $y=4\cos\left(\dfrac{3}{2}x+2\right)$, $y=5ctg\left(-\dfrac{1}{4}x-3\right)$

Розв'язання.

Для функції $y=4\cos\left(\dfrac{3}{2}x+2\right)$ найменшим додатним періодом є число

$$\text{Т} = \frac{2\pi}{|k|}=\frac{2\pi}{\left|\frac{3}{2}\right|}=\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{3}=240°.$$

Для функції $y = 5ctg\left(-\frac{1}{4}x - 3\right)$ найменшим додатним періодом є число

$$T = \frac{\pi}{|k|} = \frac{\pi}{\left|-\frac{1}{4}\right|} = \frac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi = 720^\circ.$$

Класифікація функцій щодо періодичності така:

Функції	
періодичні	**неперіодичні**

<u>III. Монотонність функцій</u>

Означення 5. *Функція y = f(x) називається* ***монотонною на всій області визначення,*** *якщо довільним різним значенням аргументу x відповідають різні значення функції y.*

Означення 6. *Функція y = f(x) називається* ***зростаючою на інтервалі*** (a,b)***,*** *якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тобто для будь-яких двох значень аргументу* x_1 *і* $x_2 \in (a,b)$ *виконуються умови:*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Інтервал (a,b) *називають* ***інтервалом зростання функції*** *y=f(x).*

Означення 7. *Функція y=f(x) називається* ***спадною на інтервалі*** (a,b)***,*** *якщо меншому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тобто для будь-яких двох значень аргументу* x_1 *і* $x_2 \in (a,b)$ *виконуються умови:*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Інтервал (a,b) *називають* ***інтервалом спадання функції*** *y = f(x).*

Означення 8. *Функція y = f(x) називається* ***сталою на інтервалі*** (a,b)***,*** *якщо будь-яким різним значенням аргументу відповідає однакове значення функції, тобто для будь-яких двох значень аргументу* x_1 *і* $x_2 \in (a,b)$ *виконуються умови:*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Означення 9. *Інтервали зростання і спадання функції називають* ***інтервалами монотонності функції*** *y = f(x)****.***

Означення 10. *Якщо інтервали зростання (спадання) функції y = f(x) співпадають з усією областю визначення функції, то функція y = f(x) є* ***монотонно зростаючою (спадною) на всій області визначення функції.***

Прикладами монотонно зростаючих елементарних функцій на всій області визначення є:

$y = kx + b$ при $k > 0$; $y = \frac{k}{x}$ при $k < 0$; $y = a^x, y = \log_a x$ при $a>1$;

$y=x^{2n+1}$, $y = \sqrt[2n]{x}$, $y=tgx$.

Прикладами монотонно спадних елементарних функцій на всій області визначення є:

$y = kx + b$ при $k<0$; $y = \frac{k}{x}$ при $k>0$; $y = a^x, y = \log_a x$ при $0<a<1$; $y=ctgx$.

Прикладами немонотонних елементарних функцій на всій області визначення є функції $y = ax^2 + bx + c$, $y=x^{2n}$, $y=sinx$, $y=cosx$, але їх області визначення можна розбити на проміжки монотонності.

Наприклад, функція $y = ax^2$ на всій області визначення не є монотонною, але при $x < 0$ функція є монотонно спадною, а при $x > 0$ функція є монотонно зростаючою.

Для того щоб дослідити функцію *y = f(x)* на монотонність, треба здійснити алгоритм дій:

1. знайти область визначення функції y = f(x);
2. вибрати з області визначення два значення аргументу $x_1 < x_2$;
3. знайти значення функції для цих аргументів $f(x_1)$ і $f(x_2)$;
4. знайти їх різницю $f(x_1) – f(x_2)$;
5. використовуючи означення 6 – 8, зробити відповідні висновки.

Приклад 3. *Дослідити функцію $y = 4x + 3$ на монотонність.*

Розв'язання. Областю визначення цієї функції $y = 4x + 3$ є множина R. Вибравши з множини R два значення $x_1 < x_2$, знаходимо відповідні значення функції у цих точках $f(x_1) = 4x_1+3$ і $f(x_2) = 4x_2+3$ і обчислюємо їх різницю $f(x_1) – f(x_2) = (4x_1 + 3) – (4x_2+3) = 4(x_1 – x_2)$. Оскільки $x_1 < x_2$, то $f(x_1) – f(x_2) < 0$, тобто $f(x_1) < f(x_2)$. Отже, для всіх значень $x \in R$ виконуються умови $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Тому ця функція є зростаючою на всій області визначення $D = R = (-\infty;+\infty)$.

Означення 11. *Число x_o називають* ***точкою максимуму функції $y=f(x)$,*** *якщо при всіх значеннях аргументу x, що лежать довкола числа x_o, виконується умова* $f(x) \le f(x_o)$. Значення $f(x_o)$ називають ***максимальним значенням функції***, тобто ***максимумом функції***: $y_{max} = f(x_o)$.

Означення 12. *Число x_o називають* ***точкою мінімуму функції $y=f(x)$,*** *якщо при всіх значеннях аргументу x, що лежать довкола числа x_o, виконується умова* $f(x) \ge f(x_o)$. Значення $f(x_o)$ називають ***мінімальним значенням функції***, тобто ***мінімумом функції***: $y_{min} = f(x_o)$.

Максимуми і мінімуми функції називають її ***екстремумами функції***.

Класифікація функцій щодо монотонності така:

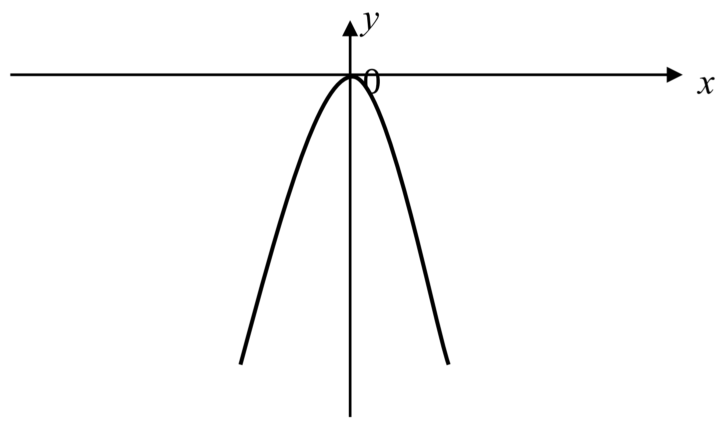
<table>
<tr><th colspan="3">Функції</th></tr>
<tr><th colspan="2">монотонні
на всій області визначення</th><th rowspan="2">немонотонні
на всій області визначення
(мають проміжки монотонності)</th></tr>
<tr><th>зростаючі</th><th>спадні</th></tr>
</table>

<u>IV. Обмеженість функцій</u>

Означення 13. *Функція $y = f(x)$, визначена на множині D, називається* ***обмеженою зверху****, якщо існує таке число M, що для всіх $x \in D$ виконується нерівність* $f(x) \le M$.

Графіком такої функції є крива, розташована <u>під прямою $y = M$.</u>

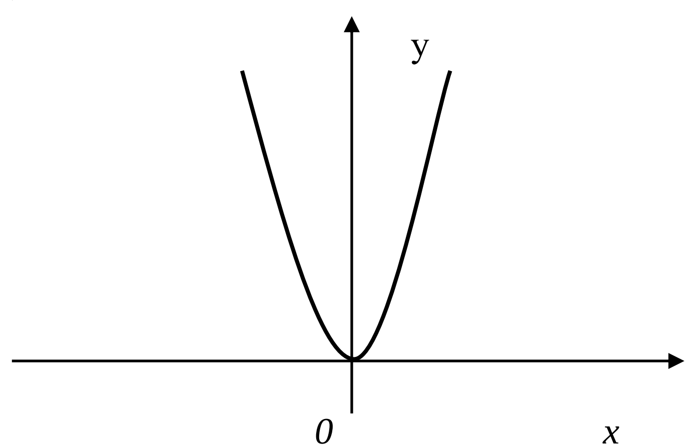
Наприклад, функція $y = -x^2$ є обмеженою зверху. Її графік розташований під прямою $y = 0$ (віссю OX).



Означення 14. *Функція y = f(x), визначена на множині D, називається* ***обмеженою знизу****, якщо існує таке число m, що для всіх $x \in D$ виконується нерівність* $f(x) \geq m$.

Графіком такої функції є крива, розташована <u>над прямою y = m.</u>

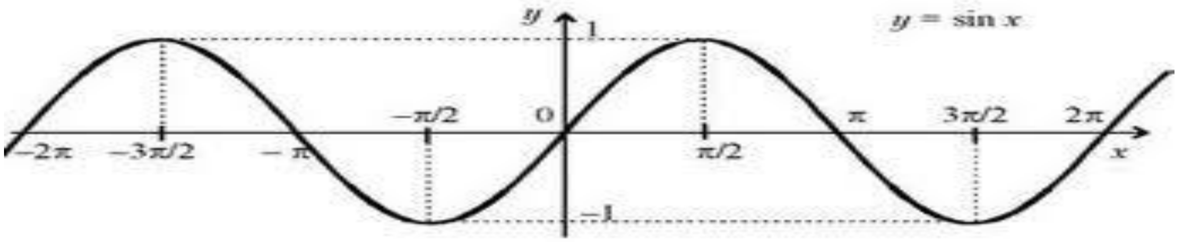
Наприклад, функція $y = x^2$ є обмеженою знизу. Її графік розташований над прямою $y=0$ (віссю OX).



Означення 15. *Функція y = f(x), визначена на множині D, називається* ***обмеженою і зверху, і знизу****, якщо існують такі числа m і M, що для всіх $x \in D$ виконується нерівність* $m \leq f(x) \leq M$.

Графіком такої функції є крива, розташована <u>між прямими y = M і y = m.</u>
Наприклад, функція $y = sinx$ є обмеженою і зверху, і знизу на всій числовій

прямій, бо існують числа $M = 1$ і $m = -1$ такі, що $-1 \le \sin \boldsymbol{x} \le 1$ для будь-якого дійсного значення x.



Означення 16. *Функція y = f(x), визначена на множині D, називається **необмеженою**, якщо не існують такі числа m і M, що для всіх $x \in D$ виконується нерівність $m \le f(x) \le M$.*

Наприклад, функція $y = -4x + 3$ є необмеженою на всій області визначення.

Класифікація функцій щодо обмеженості така:

Функції			
обмежені зверху	**обмежені знизу**	**обмежені і зверху, і знизу**	**необмежені**

Означення 17. Нулями функції *y = f(x) називаються ті значення змінної x з області визначення функції, для яких виконується умова f(x) = 0.*

Означення 18. *Якщо при всіх значеннях аргументу x, що належать інтервалу (a,b) функція y = f(x) набуває значень того самого знаку (тільки додатних або тільки від'ємних), то інтервал (a,b) називають **проміжком знакосталості функції** y = f(x).*

Означення 19. *Значення змінної x, у яких функція невизначена, тобто не має значення, називаються **точками розриву функції.***

Означення 20. *Функція, яка не має точок розриву, називається **неперервною.***

Означення 21. *Прямі, до яких графік функції наближаються, але ніколи їх не перетинають, називаються* ***асимптотами функції****.*

Приклад 4. *Знайти нулі функцій, проміжки їх знакосталості. Вказати, чи мають вони точки розриву та асимптоти.*

Розв'язання.

1. $y = 3x + 9$

Щоб знайти нулі функції, треба у її рівнянні покласти у = 0, тобто 0 = 3х + 9, звідси 3х = –9, х = –3. Функція має один нуль – точка (–3; 0).

Проміжки знакосталості: у > 0 при х € (–3; +∞), у < 0 при х € (–∞; –3).

Множиною визначення функції є множина дійсних чисел, застережливих умов нема, тому точок розриву функція не має і є неперервною функцією.

Асимптот графік функції не має.

2. $y = \frac{3}{x}$

Щоб знайти нулі функції, треба у її рівнянні покласти у = 0, тобто $\frac{3}{x} = 0$. Таких значень х нема. Функція нулів не має.

Проміжки знакосталості: у > 0 при х € (0; +∞), у < 0 при х € (–∞; 0).

Множиною визначення функції є множина дійсних чисел, крім числа х = 0, тому функція має одну точку розриву х = 0, і є перервною функцією.

Графік функції має дві асимптоти: горизонтальну – вісь ОХ, вертикальну – вісь ОУ.

3. $y = x^2 – 4$

Щоб знайти нулі функції, треба у її рівнянні покласти у = 0, тобто $0 = x^2 – 4$, звідси $x^2 = 4$, $x_1 = –2$, $x_2 = 2$. Функція має два нулі – точки (–2; 0) і (2; 0).

Проміжки знакосталості: у > 0 при х € (–∞; –2) U (2; +∞), у < 0 при х € (–2; 2).

Множиною визначення функції є множина дійсних чисел, застережливих умов нема, тому точок розриву функція не має і є неперервною функцією.

Асимптот графік функції не має.

Властивості будь-якої функції описують за встановленою **схемою**:

1. Побудова графіка функції.
2. Область визначення.
3. Область значень.
4. Точки перетину з осями координат.
5. Перевірка на парність.
6. Перевірка на періодичність.
7. Перевірка на монотонність (зростання, спадання). Проміжки монотонності.
8. Перевірка на обмеженість. Найбільше і найменше значення.
9. Нулі функції.
10. Проміжки знакосталості.
11. Наявність точок розриву. Неперервність.
12. Наявність асимптот графіка.

4.4. Обернена функція

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка має властивість монотонності (різним значенням аргументу x відповідають різні значення функції y). Тоді можна стверджувати, що, і навпаки, кожному допустимому значенню змінної y відповідає цілком певне єдине значення змінної x. А тому змінну x можна розглядати теж як деяку функцію $x = f^{-1}(y)$ від аргумента y.

Означення 1. *Функція $x=f^{-1}(y)$ називається **оберненою** до функції $y = f(x)$.*

Під час вивчення функціональної залежності не є істотним те, якими буквами позначати аргумент і функцію (істотним є комплекс операцій, які визначають відповідність між значеннями аргументу і функції). Тому у залежності робимо заміну $\boldsymbol{x \leftrightarrow y}$ і отримуємо $y = f^{-1}(x)$.

З попередніх міркувань бачимо, що обернена функція існує не для кожної функції. Наступна теорема визначає ***умову існування оберненої функції до заданої.***

Теорема. *Функція y = f(x), задана на множині $X \subset D$, має обернену функцію, тоді і тільки тоді, коли вона є монотонною на множині X.*

Функції, які не є монотонними на всій множині *D*, не мають оберненої функції. Але у такому випадку, можливо, можна область визначення *D* ***розбити на проміжки монотонності функції*** і вже на них знаходити обернену функцію.

Означення 2. *Функція, яка має обернену функцію, називається* ***оборотною.***

Означення 3. *Функції f і f^{-1} називаються* ***взаємно оберненими.***

Властивості взаємно обернених функцій:

1) Якщо функція f^{-1} є оберненою до функції f, то функція f є оберненою до функції f^{-1}.
2) Область визначення D і множина значень E взаємно обернених функцій міняються місцями.
3) Графіки взаємно обернених функцій є симетричними відносно прямої y = x, що є бісектрисою I і III координатних кутів.

Для того щоб записати аналітично функцію, обернену до функції *y = f(x),* треба здійснити <u>алгоритм дій:</u>

1) виразити з рівняння функції змінну x через змінну y;
2) в утвореній рівності зробити заміну $\boldsymbol{x \leftrightarrow y}$;
3) записана функція є оберненою до заданої.

Приклад. *Знайти обернену функцію до заданої функції* $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{2} + 1$.

Побудувати їх графіки.

Розв'язання.

1) Виразимо змінну x через y у рівнянні заданої функції $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{2} + 1$:

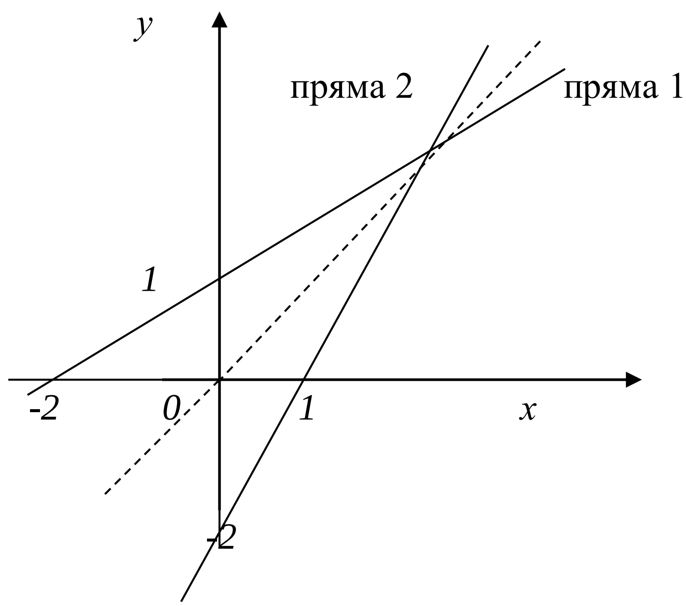
$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{2} + 1, \qquad y - 1 = \frac{x}{2}, \qquad 2y - 2 = x, \qquad x = 2y - 2.$$

2) В отриманому рівнянні зробимо заміну змінних $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{x} - 2.$$

Ця функція є оберненою до заданої.

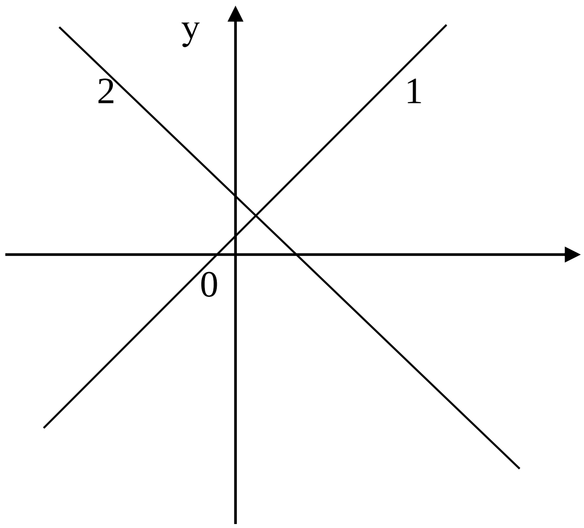
Побудуємо графіки взаємно обернених функцій $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{2} + 1$ *(пряма 1)* і $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{x} - 2$ (пряма 2) у одній системі координат.



Як бачимо, графік заданої функції (пряма 1) і графік оберненої до неї функції (пряма 2) є симетричними відносно бісектриси I і III координатних кутів, що проведена пунктирною лінією. Для цих функцій *D* = *E* = *R*.

4.5. Лінійна функція, її графік та властивості

Означення. *Функція вигляду y = kx + b, де x, y – змінні, k, b – дійсні числа, називається* ***лінійною.***



Графіком лінійної функції є **пряма.**

Для побудови прямої достатньо двох точок – точок перетину з осями координат: (0; b) і (– b/k; 0).

k – кутовий коефіцієнт прямої.

Якщо $k > 0$, то кут нахилу прямої до осі ОХ – **гострий** (пряма 1).

Якщо $k < 0$, то кут нахилу прямої до осі ОХ – **тупий** (пряма 2).

Властивості лінійної функції:

1. Область визначення – множина дійсних чисел: $D(y) = R$.
2. Область значення – множина дійсних чисел: $E(y) = R$.
3. Точки перетину з осями координат: (0; b) і (– b/k; 0).
4. Функція ні парна, ні непарна, бо

   $f(-x) = k(-x) + b = -kx + b$, а тому $f(-x) \neq -f(x)$ і $f(-x) \neq f(x)$.

   Графік функції не є симетричним ні відносно початку координат, ні відносно осі ОУ.
5. Функція неперіодична, тобто $f(x + T) = f(x)$, якщо $T = 0$.
6. Функція є монотонною на всій області визначення.

   Якщо $k > 0$, то функція монотонно зростає на всій числовій прямій.

   Нехай $x_2 > x_1$. Доведемо, що $y_2 > y_1$, $y_1 = k\,x_1 + b$, $y_2 = k\,x_2 + b$. Знайдемо різницю $y_2 - y_1$: $y_2 - y_1 = k\,x_2 + b - k\,x_1 - b = k(x_2 - x_1)$. Оскільки $k > 0$ і $x_2 > x_1$, то $k\,(x_2 - x_1) > 0$. Тобто $y_2 > y_1$.

   Якщо $k < 0$, то функція монотонно спадає на всій числовій прямій.

   Нехай $x_2 > x_1$. Доведемо, що $y_2 < y_1$, $y_1 = k\,x_1 + b$, $y_2 = k\,x_2 + b$. Знайдемо різницю $y_2 - y_1$: $y_2 - y_1 = k\,x_2 + b - k\,x_1 - b = k(x_2 - x_1)$. Оскільки $k < 0$ і $x_2 > x_1$, то $k\,(x_2 - x_1) < 0$. Тобто $y_2 < y_1$.

7. Функція необмежена на всій області визначення. Вона не має ні найбільшого, ні найменшого значення, тобто екстремумів функція не має.

8. Нулі функції: $y = 0$ при $\boldsymbol{x} = -\frac{b}{k}$.

9. Проміжки знакосталості функції:

для $k > 0$: $y > 0$ при $x > -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{k}}$; $y < 0$ при $x < -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{k}}$.

для $k < 0$: $y > 0$ при $x < -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{k}}$; $y < 0$ при $x > -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{k}}$.

10. Графік функції точок розриву не має. Функція неперервна.

11. Графік функції асимптот не має.

Часткові випадки лінійної функції

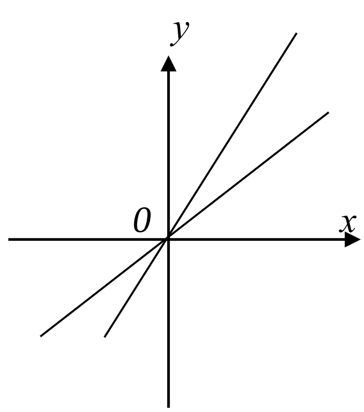
1) Якщо b = 0, то y = kx – функція прямої пропорційності

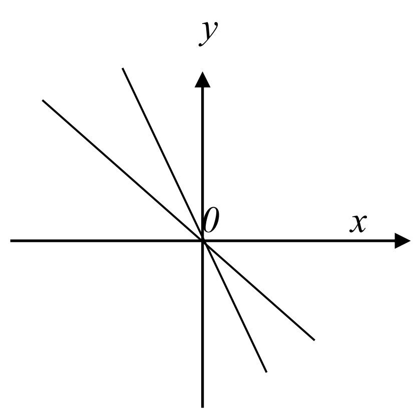
Графіком прямої пропорційності є **пряма, яка проходить через початок координат т.О (0; 0).**

Для побудови прямої достатньо двох точок – т. О (0; 0) і ще однієї точки.

Якщо $k > 0$, то кут нахилу прямої до осі ОХ є гострим, а пряма розміщена у 1 і 3 чвертях.

Якщо $k < 0$, то кут нахилу прямої до осі ОХ є тупим, а пряма розміщена у 2 і 4 чвертях.





Властивості прямої пропорційності $y = kx$:

1. Область визначення – множина дійсних чисел: $D(y) = R$.
2. Область значення – множина дійсних чисел: $E(y) = R$.
3. Точка перетину з осями координат одна – початок координат (0; 0).
4. Функція непарна, бо

$$f(-x) = k(-x) = -kx, \text{ а тому } f(-x) = -f(x).$$

Графік функції є симетричним відносно початку координат.

5. Функція неперіодична, тобто $f(x + T) = f(x)$, якщо $T = 0$.
6. Функція є монотонною на всій області визначення.

Якщо $k > 0$, то функція монотонно зростає на всій числовій прямій.

Нехай маємо, що $x_2 > x_1$. Знайдемо різницю значень функції для цих значень аргумента відповідно: $y_2 - y_1 = k x_2 - k x_1 = k(x_2 - x_1)$. Оскільки $k > 0$ і $x_2 > x_1$, то $k (x_2 - x_1) > 0$. Ми отримали, що $y_2 - y_1 > 0$, тобто $y_2 > y_1$. Доведено, що функція є зростаючою.

Якщо $k < 0$, то функція монотонно спадає на всій числовій прямій.

Нехай маємо, що $x_2 > x_1$. Знайдемо різницю значень функції для цих значень аргумента відповідно: $y_2 - y_1 = k x_2 - k x_1 = k(x_2 - x_1)$. Оскільки $k < 0$ і $x_2 > x_1$, то $k (x_2 - x_1) < 0$. Ми отримали, що $y_2 - y_1 < 0$, тобто $y_2 < y_1$. Доведено, що функція є спадною.

7. Функція необмежена на всій області визначення. Вона не має ні найбільшого, ні найменшого значення, тобто екстремумів у функції нема.
8. Нулі функції: $y = 0$ при $x = 0$.
9. Проміжки знакосталості функції:

для $k > 0$: $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$.

для $k < 0$: $y > 0$ при $x < 0$; $y < 0$ при $x > 0$.

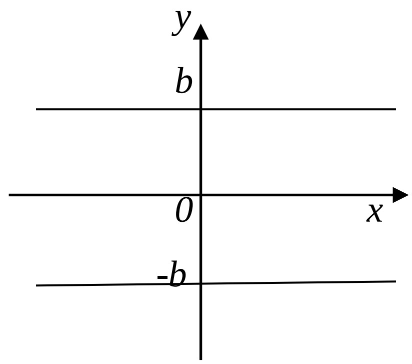
10. Графік функції точок розриву не має. Функція неперервна.
11. Графік функції асимптот не має.

2) Якщо k = 0, то y = b – стала функція.

У цьому випадку графіком функції є **пряма, яка паралельна до осі ОХ** і **проходить через точку (0; b).**

Якщо b > 0, то графік розміщений у 1 і 2 чвертях.

Якщо b < 0, то графік розміщений у 3 і 4 чвертях.



Властивості сталої функції y = b:

1. Область визначення – множина дійсних чисел: $D(y) = R$.
2. Множина значень – єдине число b: $E(y) = \{ b \}$.
3. Точка перетину з осями координат одна: (0; b).
4. Функція парна, бо $f(-x) = b$, а тому $f(-x) = f(x)$.

   Графік функції є симетричним відносно осі ОУ.
5. Функція неперіодична, тобто $f(x + T) = f(x)$, якщо $T = 0$.
6. Функція є сталою на всій області визначення.
7. Функція обмежена на всій області визначення і приймає лише єдине значення b. Вона не має ні найбільшого, ні найменшого значення, тобто екстремумів функція не має.
8. Нулів функція не має.
9. Проміжки знакосталості функції:

   для b > 0 y > 0 на всій області визначення.

   для b < 0 y < 0 на всій області визначення.
10. Графік функції точок розриву не має. Функція неперервна.
11. Графік функції асимптот не має.

3) ***Якщо k = 0, b =0, то у = 0.***

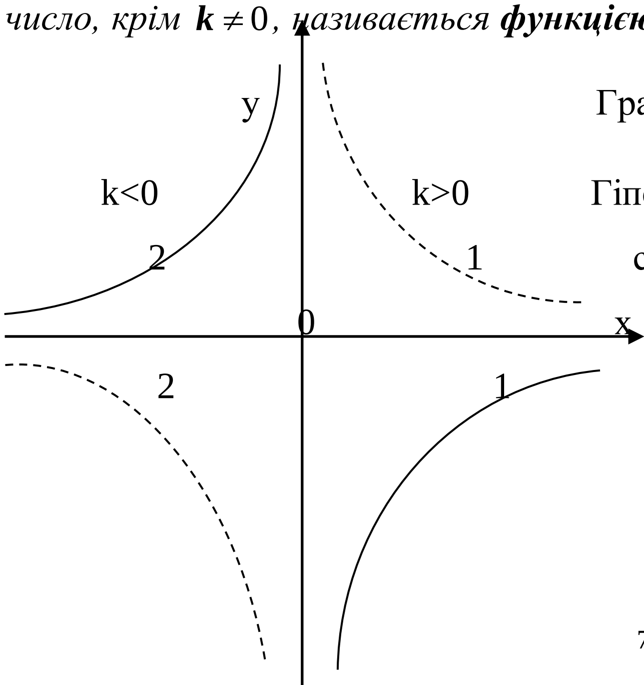
У цьому випадку графіком функції є **пряма, яка є віссю ОХ**.

Властивості функції у = 0:

1. Область визначення – множина дійсних чисел: *D(y) = R*.
2. Область значення – єдине число 0: *E(y)* = { 0 }.
3. Точка перетину з осями координат: (0; 0).
4. Функція парна, бо *f(–x)* = 0*,* а тому *f(–x)* = *f(x).* Графік функції є симетричним відносно осі Оу.
5. Функція неперіодична, тобто *f(x + T) = f(x)* , якщо Т = 0.
6. Функція є сталою на всій області визначення.
7. Функція обмежена на всій області визначення і приймає лише єдине значення – 0. Вона не має ні найбільшого, ні найменшого значення, тобто функція екстремумів не має.
8. Функція має безліч нулів.
9. Графік функції точок розриву не має. Функція неперервна.
10. Графік функції асимптот не має.

4.6. Функція оберненої пропорційності, її графік та властивості

Означення*. Функція вигляду* $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$*, де x, y – змінні, k – будь-яке дійсне число, крім* $\boldsymbol{k} \neq 0$*, називається* ***функцією оберненої пропорційності****.*



Графіком функції $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$ є **гіпербола.**

Гіпербола складається з двох **віток**, які симетричні відносно початку координат.

Якщо $k > 0$, то гіпербола розташована у 1 і 3 чвертях (крива 1).

Якщо $k < 0$, то гіпербола розташована у 2 і 4 чвертях (крива 2).

Для побудови віток гіперболи треба скласти таблицю з багатьма парами значень змінних x і y (чим більше, тим точніший графік).

Властивості функції оберненої пропорційності:

1. Область визначення функції: $D(y) = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.
2. Область значення функції: $E(y) = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.
3. Точок перетину з осями координат нема, бо змінні не можуть дорівнювати 0.
4. Функція є непарною, бо $f(-x) = -\frac{\kappa}{x} = -f(x)$.

   Графік функції є симетричним відносно початку координат.
5. Функція неперіодична, тобто $f(x + T) = f(x)$, якщо $T = 0$.
6. Функція є монотонною на всій області визначення.

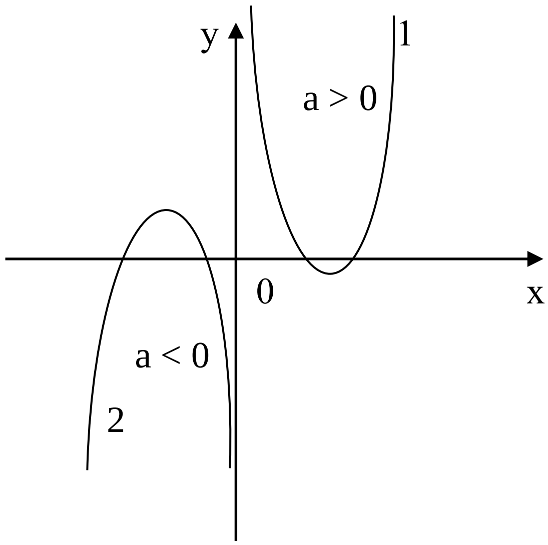
   Якщо $k < 0$, то функція зростає. Нехай $x_1 < x_2$. Порівняємо значення функції $f(x_1) = \frac{\kappa}{x_1}$ і $f(x_2) = \frac{\kappa}{x_2}$. Знайдемо їх різницю $f(x_1) - f(x_2) = k\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) = k\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}$. Оскільки $x_2 - x_1 > 0$, то знак виразу $k\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}$ залежить від знаку числа k. Якщо $k < 0$, то $f(x_1) - f(x_2) < 0$. Тому $f(x_1) < f(x_2)$, функція зростає. Якщо $k > 0$, то $f(x_1) - f(x_2) > 0$ і $f(x_1) > f(x_2)$, функція спадає.
7. Функція необмежена на всій області визначення. Вона не має ні найбільшого, ні найменшого значення, тобто вона екстремумів не має.
8. Нулів функція не має.
9. Проміжки знакосталості функції:

   якщо $k > 0$: $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$.

   якщо $k < 0$: $y > 0$ при $x < 0$; $y < 0$ при $x > 0$.
10. Функція перервна в точці x = 0, графік функції має точку розриву $x = 0$.
11. Функція має дві асимптоти: $x = 0$ *(вісь ОУ)* і $y = 0$ *(вісь ОХ)*.

4.7. Квадратична функція, її графік та властивості

Означення. *Функція вигляду* $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$*, де х, у – змінні,* $\boldsymbol{a, b, c}$ *– дійсні числа, а ≠ 0, називається* ***квадратичною.***



Графіком квадратичної функції є **парабола**. Якщо а > 0, то **вітки параболи** напрямлені <u>вверх</u> (крива 1). Якщо а < 0, то **вітки параболи** напрямлені <u>вниз</u> (крива 2).

Алгоритм побудови параболи:

1. За знаком коефіцієнта а визначають напрям **віток параболи** (вверх або вниз).
2. Знаходять **точку перетину параболи з віссю ОУ**. Для цього знаходять значення функції у точці 0. Отримують точку (0; с).
3. Знаходять **точки перетину параболи з віссю ОХ**. Для цього знаходять значення х, для яких у = 0. Їх може бути або дві; або одна; або жодної.
4. Знаходять **вершину параболи** т. М$\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

Властивості квадратичної функції:

1. Множина визначення – множина дійсних чисел: $D(y) = R$.
2. Множина значень функції залежить від знаку коефіцієнта a:

якщо $a > 0$, то $E(y) = \left[\frac{4ac-b^2}{4a}; +\infty\right)$;

якщо $a < 0$, то $E(y) = \left(-\infty; \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$.

3. Точки перетину з осями координат:

з віссю ОУ точка перетину одна (0; с);

з віссю ОХ точок перетину може бути різна кількість.

$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, у = 0, $ax^2 + bx + c = 0$ – квадратне рівняння.

Воно може мати різну кількість коренів залежно від значення дискримінанта

$\mathbf{D = b^2 - 4ac}$:

1) якщо **D > 0**, то рівняння має два різні корені:

$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$, $\boldsymbol{x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$, дві точки перетину ($x_1$, 0), ($x_2$, 0);

2) якщо **D = 0**, то рівняння має один корінь:

$\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$, одна точка перетину ($-\frac{b}{2a}$, 0);

3) якщо **D < 0**, то рівняння коренів не має, точок перетину нема.

4. Функція є ні парною, ні непарною, бо

$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, , $\boldsymbol{f(-x) = ax^2 - bx + c}$, $f(-x) \neq -f(x)$ і $f(-x) \neq f(-x)$.

Парабола $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ не є симетричною ні відносно початку координат, ні відносно осі ОУ.

5. Функція неперіодична, тобто $f(x + T) = f(x)$, якщо $T = 0$.

6. Функція не є монотонною на всій області визначення.
Але вона має проміжки монотонності:

якщо $a > 0$, то функція спадає на проміжку $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ і

зростає на проміжку $x \in \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$;

якщо $a < 0$, то функція зростає на проміжку $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ і

спадає на проміжку $x \in \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

7. Якщо a > 0, то функція обмежена знизу прямою $\boldsymbol{y}=\frac{4\boldsymbol{ac}-\boldsymbol{b}^2}{4\boldsymbol{a}}$ і має точку мінімуму – вершину параболи.

Якщо a < 0, то функція обмежена зверху прямою $\boldsymbol{y}=\frac{4\boldsymbol{ac}-\boldsymbol{b}^2}{4\boldsymbol{a}}$ і має точку максимуму – вершину параболи.

8. Нулі функції:

якщо **D > 0**, то y = 0 при $\boldsymbol{x}_1=\frac{-\boldsymbol{b}+\sqrt{\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{ac}}}{2\boldsymbol{a}}$; $\boldsymbol{x}_2=\frac{-\boldsymbol{b}-\sqrt{\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{ac}}}{2\boldsymbol{a}}$;

якщо **D = 0**, то y = 0 при x= $-\frac{b}{2a}$.

якщо **D < 0**, то функція нулів не має.

9. Проміжки знакосталості:

a	D	y > 0	y < 0
a > 0	D>0	$\boldsymbol{x}<\frac{-\boldsymbol{b}-\sqrt{\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{ac}}}{2\boldsymbol{a}}$ або $\boldsymbol{x}>\frac{-\boldsymbol{b}+\sqrt{\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{ac}}}{2\boldsymbol{a}}$	$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<x<\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
a > 0	D=0	всі значення, крім x= $-\frac{b}{2a}$.	немає
a > 0	D<0	всі значення	немає
a < 0	D>0	$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<x<\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$\boldsymbol{x}<\frac{-\boldsymbol{b}-\sqrt{\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{ac}}}{2\boldsymbol{a}}$ або $\boldsymbol{x}>\frac{-\boldsymbol{b}+\sqrt{\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{ac}}}{2\boldsymbol{a}}$
a < 0	D=0	нема	всі значення, крім x= $-\frac{b}{2a}$.
a < 0	D<0	нема	всі значення

10. Графік функції точок розриву не має. Функція неперервна.

11. Графік функції асимптот не має.

Часткові випадки квадратичної функції

1. Якщо $\boldsymbol{a} \neq 0, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} = 0$, то $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2$.

1) Якщо c > 1

При одній і тій же абсцисі *x* ордината *y* стає в *c* разів більшою, а значить графік функції ***y = cf(x)*** отримується з графіка функції ***y = f(x)*** шляхом звуження (стиску) до осі ОУ у *c* разів, тобто графік функції стає більш стрімким.

2) Якщо 0 < c < 1

При одній і тій же абсцисі *x* ордината *y* стає у *c* разів меншою, тому графік функції ***y = cf(x)*** отримується з графіка функції ***y = f(x)*** шляхом стиску до осі ОХ в *c* разів, тобто графік функції стає більш розлогим.

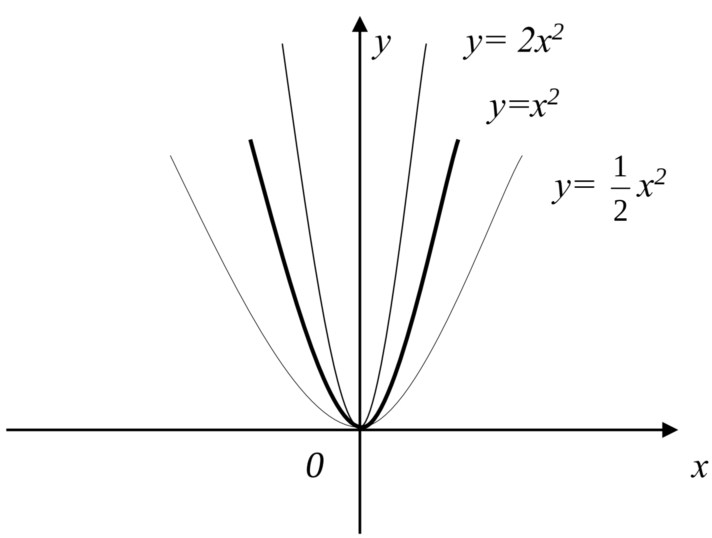
Наприклад, побудуємо графіки функцій $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$.

Побудову проводимо так:

1. $y = f(x)$, $\quad y = x^2$;

2. $y = cf(x)$, $\quad y = 2x^2$, $\quad c>1$;

$$y = \frac{1}{2}x^2; \quad 0<c<1.$$

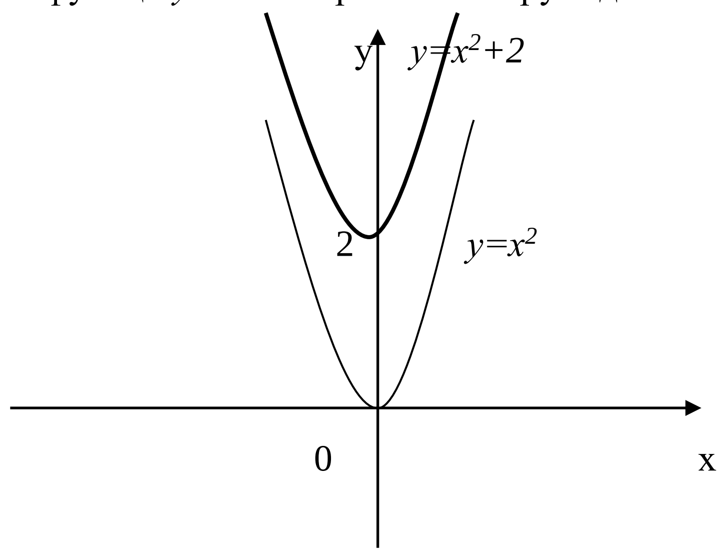


2. Якщо $\boldsymbol{a} \neq 0, \boldsymbol{b} = 0, \boldsymbol{c} \neq 0$, то $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{c}$.

Якщо а > 0, то графік функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ *треба перенести на а одиниць вверх вздовж осі ОУ.*

Якщо а < 0, то графік функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ *треба перенести на а одиниць вниз вздовж осі ОУ.*

Наприклад, побудуємо графік функції $y = x^2 + 2$. Спершу треба побудувати графік функції $y = x^2$ і перенести вгору вздовж осі ОУ на 2 одиниці.



3. Якщо $\boldsymbol{a} \neq 0, \boldsymbol{b} \neq 0, \boldsymbol{c} = 0$, то $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x}$.

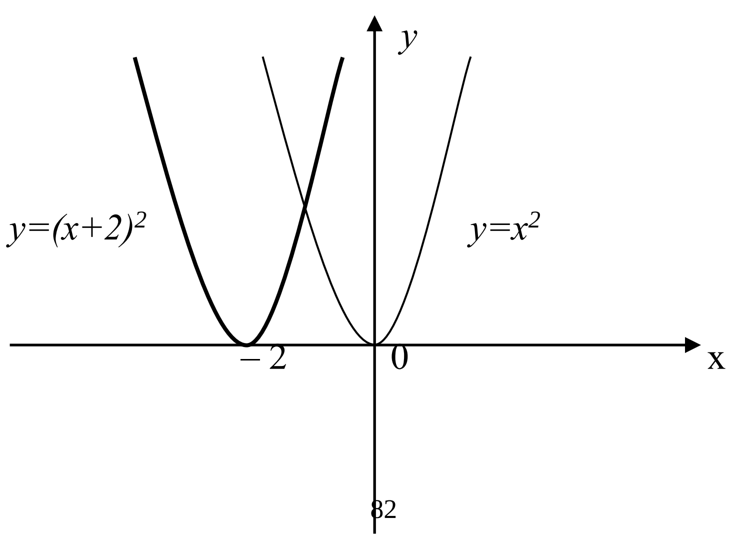
Наприклад, побудуємо графік функції $y=(x+2)^2$.

Побудову проводимо так:

1. $y = f(x)$, $\quad$ $y = x^2$;

2. $y = f(x + b)$, $\quad$ $y = (x + 2)^2$.

Графік функції $y = x^2$ треба змістити вліво вздовж осі ОХ на 2 одиниці.



4.8. Побудова графіків рівнянь

Для побудови **графіка функції вигляду** $y=\frac{f(x)}{g(x)}$**,** де *f(x)* і *g(x)* – многочлени різних порядків треба:

1) розкласти (по можливості) на множники многочлени f(x) і g(x);

2) скоротити утворений дробовий вираз на спільні множники;

3) побудувати графік утвореної функції і виключити з нього точки з абсцисами, які задовольняють умову g(x) = 0.

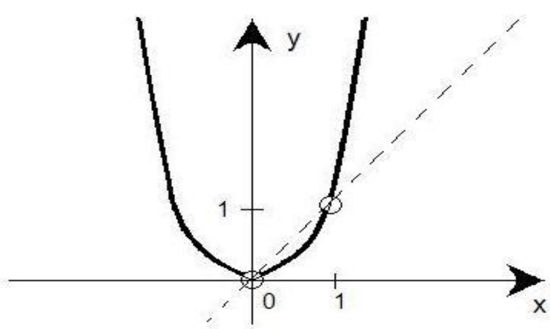
Наприклад, для побудови графіка функції y = $\frac{4x-8}{x^2-2x}$ здійснюємо такі міркування: y = $\frac{4x-8}{x^2-2x}$ = $\frac{4(x-2)}{x(x-2)}=\frac{4}{x}$, але $x-2\neq 0$, $x\neq 2$. Тому графіком функції y=$\frac{4x-8}{x^2-2x}$ є гіпербола y=$\frac{4}{x}$ з виколотою точкою, яка має абсцису 2.

Для побудови **графіка рівняння** $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=0$**,** де *f(x, y)* і *g(x, y)* – вирази відносно змінних *x* і *y,* треба:

1) *побудувати в одній координатній площині графіки рівнянь f(x,y)=0 (суцільною лінією) і g(x,y)=0 (штриховою лінією);*

2) *виколоти точки перетину цих ліній.*

Наприклад, для побудови графіка рівняння $\frac{y-x^2}{y-x}=0$ спочатку треба побудувати графіки рівнянь $y-x^2=0$ і $y-x=0$, виколоти точки їх перетину. Утвориться парабола з двома виколотими точками (0; 0) і (1; 1).



Тематика лекцій

1. **Відповідність між елементами двох множин.** Означення поняття відповідності між двома множинами. Область відправлення і область прибуття. Прообраз і образ елемента множини. Множина визначення і множина значень. Способи задання відповідностей.
2. **Основні види і типи відповідностей**. Протилежна відповідність. Обернена відповідність. Повна відповідність, порожня відповідність, несумісні і сумісні відповідності. Наслідок відповідності. Взаємно однозначна відповідність. Рівнопотужні множини.
3. **Відношення на множині та їх властивості.** Означення поняття відношення на множині. Область відправлення і область прибуття. Множина визначення і множина значень. Способи задання відношення. Протилежне відношення. Обернене відношення. **Властивості відношень:** рефлексивність, симетричність, транзитивність, зв'язність. Відношення еквівалентності. Класи еквівалентності. Відношення порядку (строгого і нестрогого, лінійного). Упорядковані множини (частково, лінійно). Дискретна множина. Щільна множина.
4. **Відображення множин.** Означення поняття відображення множин. Образ і прообраз елемента. Основні властивості відображень: ін'єктивне, сюр'єктивне, бієктивне. Типи відображень. Скінченні і нескінченні множини. Зчисленна множина. Потужність континууму.
5. **Поняття функції**. Область визначення і множина значень функції. Способи задання функції. Графік функції. Знаходження значення функції у точці. Знаходження значення аргументу за відомим значенням функції. Точки перетину з осями координат.

6-7.Основні властивості функції. Парність, періодичність, монотонність, обмеженість. Нулі функції. Точки розриву. Асимптоти. Неперервність функції. Обернена функція та її властивості.

8-9.Основні елементарні функції, їх графіки та властивості. Лінійна функція, її графік та властивості. Функція прямої пропорційності, її графік та властивості. Функція оберненої пропорційності, її графік та властивості. Квадратична функція, її графік та властивості. Часткові випадки квадратичної функції. Побудова графіків рівнянь.

ТЕМАТИКА ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

№ з/п	**Тема практичного заняття**
1.	Відповідність між множинами. Область відправлення і область прибуття. Прообраз і образ елемента. Множина визначення та множина значень. Способи задання відповідності.
2.	Протилежна відповідність. Обернена відповідність. Типи відповідностей: повна, порожня, сумісні і несумісні. Наслідок відповідності. Взаємно однозначна відповідність. Рівнопотужні множини.
3.	Відношення на множині. Область відправлення і область прибуття. Способи задання відношення. Протилежне відношення. Обернене відношення.
4.	Властивості відношень. Відношення еквівалентності. Відношення порядку. Упорядковані множини. Відображення множин. Способи задання. Властивості відображень. Типи відображень
5.	**КР 1**
6.	Поняття функції. Область визначення та множина значень функції. Способи задання функції. Графік функції.
7.	Основні властивості функції. Нулі функції. Точки розриву. Асимптоти. Неперервність функції. Обернена функція.
8.	Лінійна функція, її графік і властивості. Пряма пропорційність. Функція оберненої пропорційності. її графік і властивості.
9.	Квадратична функція, її графік і властивості. Часткові випадки квадратичної функції. Побудова графіків розгалужених функцій. Побудова графіків рівнянь.
10.	**КР 2**
11.	Підсумкове заняття

Завдання для практичних занять та самостійної роботи

1. Відповідності

Відповідність. Область відправлення і область прибуття. Прообраз і образ елемента. Множина визначення та множина значень. Способи задання відповідності

1. Нехай Х – множина точок площини, У – множина прямих площини. Сформулювати відповідності, які можна задати між цими множинами.
2. Нехай Х – множина прямих площини, У – множина точок площини. Сформулювати відповідності, які можна задати між цими множинами.
3. Дано множину Х = {ракета, автомобіль, людина, літак} і множину У = {5км/год, 6 км/с, 850 км/год, 100 км/год}. Встановити і задати словесно відповідність між множинами Х і У. Задати відповідність за допомогою переліку пар. Вказати область відправлення і область прибуття, множину визначення і множину значень. Вказати образ елемента «ракета», прообраз елемента «100 км/год».
4. Дано множину Х = {Л.Українка, Т.Шевченко, І.Франко} і множину У = {«Гайдамаки», «Лісова пісня», «Борислав сміється»}. Встановити і задати словесно відповідність між множинами Х і У. Задати відповідність за допомогою переліку пар. Вказати область відправлення і область прибуття, множину визначення і множину значень. Вказати образ елемента «Л.Українка», прообраз елемента «Гайдамаки».
5. Дано множину Х = {лютий, березень, квітень} і множину У = {27; 28; 29; 30; 32}. Встановити і задати словесно відповідність між множинами Х і У. Вказати область відправлення і область прибуття, множину визначення і множину значень. Вказати образ елемента «квітень». Вказати прообраз

елемента «29». Який елемент не має образу? Який елемент не має прообразу?

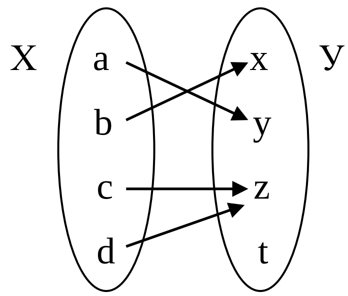
6. Дано множину Х = {Україна, Німеччина, Японія, Франція, Польща} і множину У = {Берлін, Париж, Київ, Варшава, Пекін}. Встановити і задати словесно відповідність між множинами Х і У. Вказати область відправлення і область прибуття, множину визначення і множину значень. Вказати образ елемента «Україна». Вказати прообраз елемента «Париж». Який елемент не має образу? Який елемент не має прообразу?
7. Нехай Х = {мама, тато, рама, яма}, У = {а, м, р, п, я}. Між елементами цих множин задана відповідність «слово х містить букву у». Побудувати граф відповідності. Чи співпадає множина визначення відповідності з множиною Х? Чи співпадає множина значень відповідності з множиною У?
8. Нехай Х = {кава, сито, тост, вата, мир}, У = {а, к, в, б, о, с}. Між елементами цих множин задана відповідність «слово х містить букву у». Побудувати граф відповідності. Чи співпадає множина визначення відповідності з множиною Х? Чи співпадає множина значень відповідності з множиною У?
9. Відповідність xRy задана переліком елементів. Вказати множину визначення і множину значень відповідності. Побудувати граф і графік відповідності. Які елементи є образом елемента 3? Які елементи є прообразом елемента 8?

   а) R={(1;2), (1;4), (1;6), (1;8), (3;4), (3;6), (3;8), (5;6), (5;8), (7;8)};

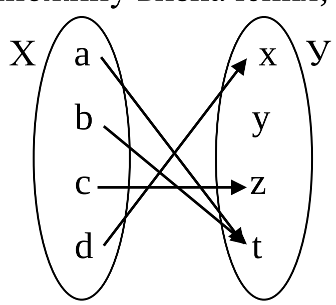
   б) R={(–1;2), (–1;–4), (–1;6), (3;–4), (3;6), (3;8), (–5;6), (–5;8)};

   в) R={(1;4), (1;6), (1;8), (3;4), (3;6), (3;–8), (5;6), (5;–8), (7;–8)};

   г) R={(2;4), (2;6), (2;8), (3;4), (3;6), (7; 6), (7;8), (8;8)}.
10. На рисунку зображений граф відповідності між множинами X={a, b, c, d} і У={x, y, z, t}. Визначити: область відправлення; область прибуття; множину визначення; множину значень.



11. На рисунку зображений граф відповідності між множинами X = {a, b, c, d} і У = {x, y, z, t}. Визначити: область відправлення; область прибуття; множину визначення; множину значень.



12. Дано множини X = {12; 23; 34; 21; 52} і У = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10}. Кожному числу з множини X поставлено у відповідність число з множини У, яке дорівнює:

    а) сумі його цифр;

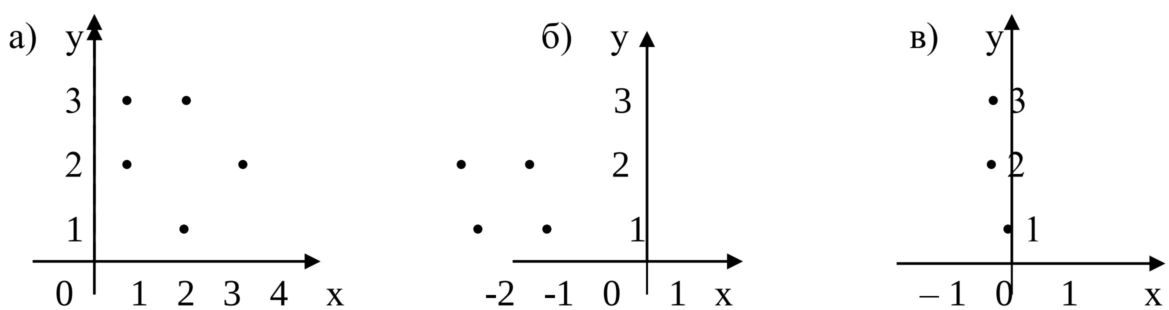
    б) різниці його цифр;

    в) добутку його цифр;

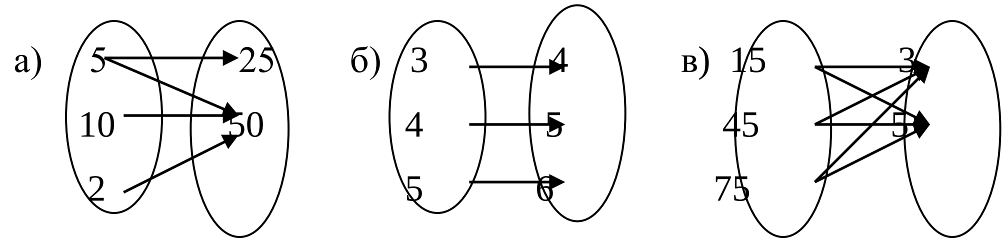
    г) його останній цифрі.

    Вказати множини А і В. Побудувати граф і графік, таблицю відповідності.
13. Кожному числу з множини $X = \{x|\ x \in N;\ 20 \le x \le 30\}$ відповідає остача від ділення його на 3. Визначити множину У. Задати відповідність між множинами X і У за допомогою переліку пар. Побудувати граф і графік, таблицю. Назвати прообраз числа 2. Назвати образ числа 22.
14. Кожному числу з множини $X = \{x|\ x \in N;\ 10 \le x \le 25\}$ відповідає остача від ділення його на 5. Визначити множину У. Задати відповідність між множинами X і У за допомогою переліку пар. Побудувати граф і графік, таблицю. Назвати прообраз числа 4. Назвати образ числа 17.

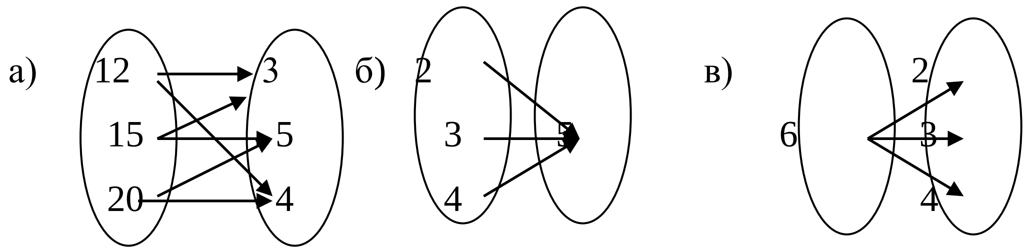
15. Між множинами $X = \{x \mid x \in N,\ x \le 8\}$, $У = \{y \mid y \in N,\ y \le 9\}$ задано відповідність $R = \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in У,\ x + y = 10\}$. Задати відповідність аналітичним і табличним способами, переліком пар. Побудувати граф та графік відповідності.
16. Між множинами $X = \{x \mid x \in N,\ x \le 10\}$, $У = \{y \mid y \in N,\ y \le 8\}$ задано відповідність $R = \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in У,\ x - y = 2\}$. Задати відповідність аналітичним і табличним способами, переліком пар. Побудувати граф та графік відповідності.
17. Між множинами $X = \{x \mid x \in Z,\ |x| \le 2\}$, $У = \{y \mid y \in Z,\ |y| \le 4\}$ задано відповідність R: «$y = x^2$». Задати відповідність за допомогою характеристичних властивостей, переліком пар. Побудувати граф і графік, таблицю відповідності. Якою є множина значень відповідності?
18. Між множинами $X = \{x \mid x \in N,\ x \le 6\}$, $У = \{y \mid y \in N,\ y \le 20\}$ задано відповідність R: «$y = 3x$». Задати відповідність за допомогою характеристичних властивостей, переліком пар. Побудувати граф і графік, таблицю відповідності. Якою є множина значень відповідності?
19. На рисунках зображені графіки відповідностей між елементами множин X і У. Назвати множину визначення і множину значень. Задати відповідності переліком пар, графом, таблицею:



20. Між елементами множин X і У задані відповідності, графи яких зображені на рисунках. Задати їх усіма іншими способами:



21. Між елементами множин Х і У задані відповідності, графи яких зображені на рисунках. Задати їх усіма іншими способами:



22. Між елементами множин Х і У задано відповідність R за допомогою таблиці. Вказати множини А і В. Задати її усіма іншими способами, якщо:

Х \ **У**	2	4	6
1	(1; 2)		
3		(3; 4)	
5			(5; 6)
7			

23. Між елементами множин Х і У задано відповідність R за допомогою таблиці. Вказати множини А і В. Задати її усіма іншими способами, якщо:

Х \ **У**	2	4	6
1			
3	(3; 2)		
5		(5; 4)	
7			(7; 6)

24. Між елементами множин Х = $\{x|x\in N,\ x\le 6\}$ і У = $\{y|y\in N,\ y\le 12\}$ задана відповідність «менше у 2 рази». Вказати множини А і В. Задати її усіма іншими способами.
25. Між елементами множин Х = $\{x|x\in N,\ x\le 12\}$ і У = $\{y|y\in N,\ y\le 6\}$ задана відповідність «більше у 3 рази». Вказати множини А і В. Задати її усіма іншими способами.

Протилежна відповідність

26. Для поданих відповідностей сформулювати протилежну відповідність:

а) «число х більше числа у»;
«число х менше на 3 від числа у»;
«число х безпосередньо слідує за числом у»;
«точка Х лежить на прямій у»;
«пряма х перетинає пряму у»;
«число х є розв'язком рівняння у»;
«число х більше у 2 рази від числа у»;
«число х кратне у»;

б) «число х менше числа у»;
«число х більше на 2 від числа у»;
«число х менше у 5 разів від числа у»;
«число х знаходиться перед числом у»;
«пряма х перетинає коло у»;
«елемент х належить множині У»;
«число х є розв'язком нерівності у»;
«число х є дільником числа у».

27. Для поданих відповідностей сформулювати протилежну відповідність аналітично:

а) «$x < y$»;

«$x \geq y$»;

«$y = 5x$»;

«$x + y = 15$»;

б) «$x > y$»;

«$x \leq y$»;

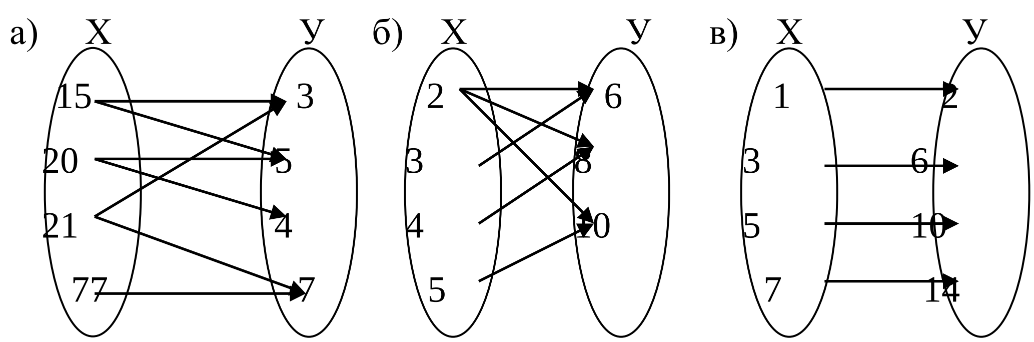
«$y = x + 3$»;

«$x - y = 1$».

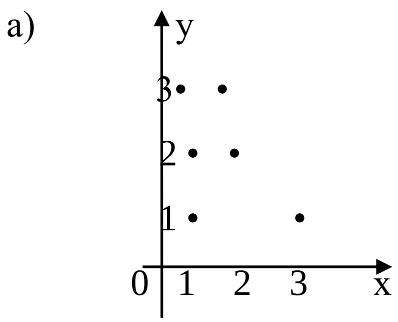
28. Між елементами множин $X = \{x|x \in N,\ x \leq 4\}$ і $У = \{y|y \in N,\ y \leq 4\}$ задана відповідність $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$. Задати переліком пар протилежну відповідність до відповідності R.

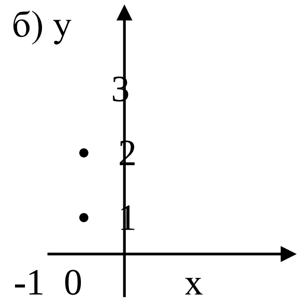
29. Між елементами множин $X = \{x|x \in N,\ x \leq 5\}$ і $У = \{y|y \in N,\ y \leq 5\}$ задана відповідність $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$. Задати переліком пар протилежну відповідність до відповідності R.

30. Розглянути відповідності між елементами множин X і У, графи яких зображені на рисунках. Встановити, за якими законами утворено ці відповідності. Побудувати графи протилежних відповідностей до заданих.



31. Побудувати графік протилежної відповідності, якщо графік заданої відповідності такий:





32. Відповідність R між множинами Х і У задано таблицею:

У / **Х**	2	5	8
1	(1; 2)	(1; 5)	(1; 8)
2	(2; 2)		
3			
4			(4; 8)

Побудувати таблицю протилежної відповідності до заданої.

33. Відповідність R між множинами Х і У задано таблицею:

У / **Х**	2	3	5
6	(6; 2)	(6; 3)	
8	(8; 2)		
10	(10; 2)		(10; 5)
12	(12; 2)	(12; 3)	

Побудувати таблицю протилежної відповідності до заданої.

34. Між елементами множин Х = {3; 5; 9} і У = {4; 6; 8} задана відповідність R: «менше». Сформулювати протилежну відповідність до даної. Задати її всіма іншими способами. Вказати область відправлення і область прибуття, множину визначення і множину значень.

35. Між елементами множин Х = {3; 5; 9} і У = {4; 6; 8} задана відповідність R: «більше». Сформулювати протилежну відповідність до даної. Задати її всіма

іншими способами. Вказати область відправлення і область прибуття, множину визначення і множину значень.

36. Між елементами множин Х = {–6; – 4; –2; 0; 2; 4} та У = {0; 1; 2; 4} задано відповідність R: «y = $|x|$». Сформулювати протилежну відповідність до заданої. Задати її всіма іншими способами. Вказати область відправлення і область прибуття, множину визначення і множину значень.
37. Між елементами множин Х = {-4; -2; 0; 2; 4; 6} та У = {0; 2; 4; 6} задано відповідність R: «y = $|x|$». Сформулювати протилежну відповідність до заданої. Задати її всіма іншими способами. Вказати область відправлення і область прибуття, множину визначення і множину значень.

Обернена відповідність

38. Для поданих відповідностей сформулювати обернену відповідність:

а) «число х менше числа у»;
«число х більше на 2 від числа у»;
«число х менше у 5 разів від числа у»;
«число х знаходиться перед числом у»;
«пряма х перетинає коло у»;
«елемент х належить множині У»;
«число х є розв’язком нерівності у»;
«число х є дільником числа у»;

б) «число х більше числа у»;
«число х менше на 3 від числа у»;
«число х безпосередньо слідує за числом у»;
«точка Х лежить на прямій у»;
«пряма х перетинає пряму у»;
«число х є розв’язком рівняння у»;
«число х більше у 2 рази від числа у»;

«число x кратне y».

39. Для поданих відповідностей задати обернену відповідність аналітично:

а) «$x < y$»;

«$x \geq y$»;

«$x = 5y$»;

«$x + y = 15$»;

«$2x – y = 6$»;

б) «$x > y$»;

«$x \leq y$»;

«$x = 3y$»;

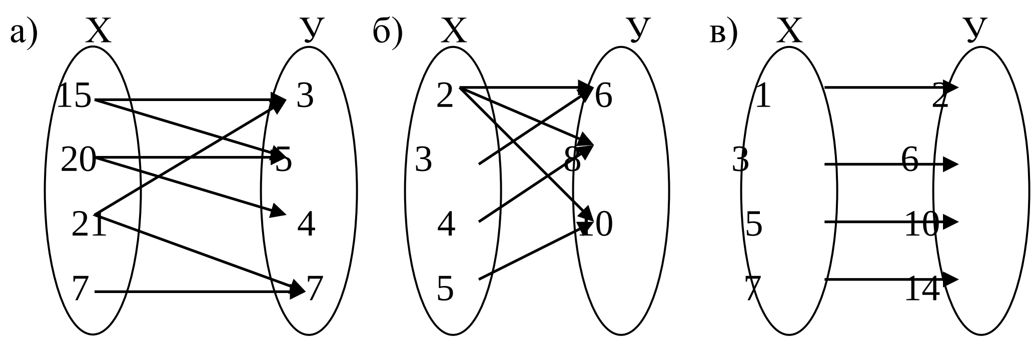
«$x – y =1$»;

«$x – 3y = 9$».

40. Між елементами множин $X = \{x|\ x\in N,\ x\leq 5\}$ і $У = \{y|\ y\in N,\ y\leq 5\}$ задана відповідність $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$. Задати переліком пар обернену відповідність до відповідності R.

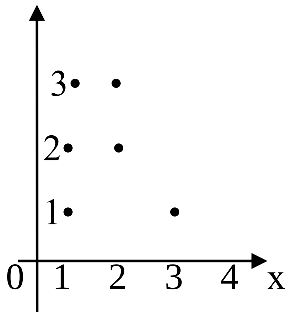
41. Між елементами множин $X = \{x|\ x\in N,\ x\leq 4\}$ і $У = \{y|\ y\in N,\ y\leq 4\}$ задана відповідність $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$. Задати переліком пар обернену відповідність до відповідності R.

42. Розглянути відповідності між елементами множин X і У, графи яких зображені на рисунках. Встановити, за якими законами утворено ці відповідності. Побудувати графи обернених відповідностей до заданих:

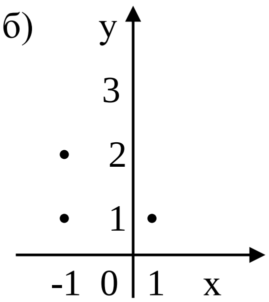


43. Побудувати графіки обернених відповідностей, якщо задано графіки заданих відповідностей:

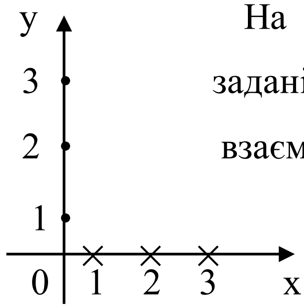
а)



б)



44. На рисунку зображено графіки відповідностей R і S, задані на множинах Х і У. Чи є ці відповідності взаємно обернені?



45. Відповідність R між множинами Х і У задано таблицею:

Х / **У**	2	5	8
1	(1; 2)	(1; 5)	(1; 8)
2	(2; 2)		(2; 8)
3			
4			(4; 8)

Побудувати таблицю оберненої відповідності до заданої.

46. Відповідність R між множинами Х і У задано таблицею:

Х / **У**	2	3	5
6	(6; 2)	(6; 3)	
8	(8; 2)		
10	(10; 2)		(10; 5)
12	(12; 2)	(12; 3)	

Побудувати таблицю оберненої відповідності до заданої.

47. Між елементами множин Х = {3; 5; 9} і У = {4; 6; 8} задана відповідність «більше». Сформулювати обернену відповідність до заданої. Задати її всіма іншими способами. Вказати область відправлення і область прибуття, множину визначення і множину значень.
48. Між елементами множин Х = {3; 5; 7} і У = {4; 6; 8} задана відповідність «менше». Сформулювати обернену відповідність до заданої. Задати її всіма іншими способами. Вказати область відправлення і область прибуття, множину визначення і множину значень.
49. Між елементами множин Х = {–4; –2; 0; 2; 4; 6} та У = {0; 2; 4; 6} задано відповідність «$|x| = y$». Сформулювати обернену відповідність до заданої. Задати її всіма іншими способами. Вказати область відправлення і область прибуття, множину визначення і множину значень.
50. Між елементами множин Х = {–6; –4; –2; 0; 2; 4} та У = {0; 1; 2; 4} задано відповідність «$|x| = y$». Сформулювати обернену відповідність до заданої. Задати її всіма іншими способами. Вказати область відправлення і область прибуття, множину визначення і множину значень.

Типи відповідностей

51. Між елементами множин $X = \{x|\ x \in N,\ x \le 5\}$ і $У = \{y|\ y \in Z,\ -4 \le y \le 0\}$ задана відповідність R: «більше». Чи є вона повною? Чи є вона порожньою?
52. Між елементами множин $X = \{x|\ x \in N,\ x \le 4\}$ і $У = \{y|\ y \in Z,\ -3 \le y \le 0\}$ задана відповідність R: «менше». Чи є вона повною? Чи є вона порожньою?
53. Між множинами Х і У задана відповідність R: «менше». Множина Х – множина натуральних чисел, менших 6. Підібрати множину У так, щоб відповідність була повною. Побудувати граф.
54. Між множинами Х і У задана відповідність R: «більше». Множина Х – множина натуральних чисел, менших 8. Підібрати множину У так, щоб відповідність була повною. Побудувати граф.

55. Між множинами Х і У задана відповідність R: «більше». Множина Х – множина натуральних чисел, менших 4. Підібрати множину У так, щоб відповідність була порожньою.
56. Між множинами Х і У задана відповідність R: «менше». Множина Х – множина натуральних чисел, менших 7. Підібрати множину У так, щоб відповідність була порожньою.
57. Утворити множину Х так, щоб відповідність R: «бути кратним» між множинами Х і У = {3; 5} була повною. Побудувати граф.
58. Утворити множину Х так, щоб відповідність R: «бути кратним» між множинами Х і У = {2; 7} була повною. Побудувати граф.
59. Утворити множину Х так, щоб відповідність R: «бути дільником» між множинами Х і У = {12, 15} і У була порожньою.
60. Утворити множину Х так, щоб відповідність R: «бути дільником» між множинами Х і У = {11, 21} була порожньою.
61. Між множинами Х і У задані відповідності R: «більше» і Т: «кратне». Х = У = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Чи є вони сумісними? Чи є вони несумісними?
62. Між множинами Х і У задані відповідності R: «більше» і Т: «менше». Х = У = {11, 12, 13, 14, 15, 16}. Чи є вони сумісними? Чи є вони несумісними?
63. Чи є відповідність «$x^2 \neq y^2$» на множині цілих чисел наслідком відповідності «$x \neq y$».
64. Чи є відповідність «$x^2 = y^2$» на множині цілих чисел наслідком відповідності «$x = y$».

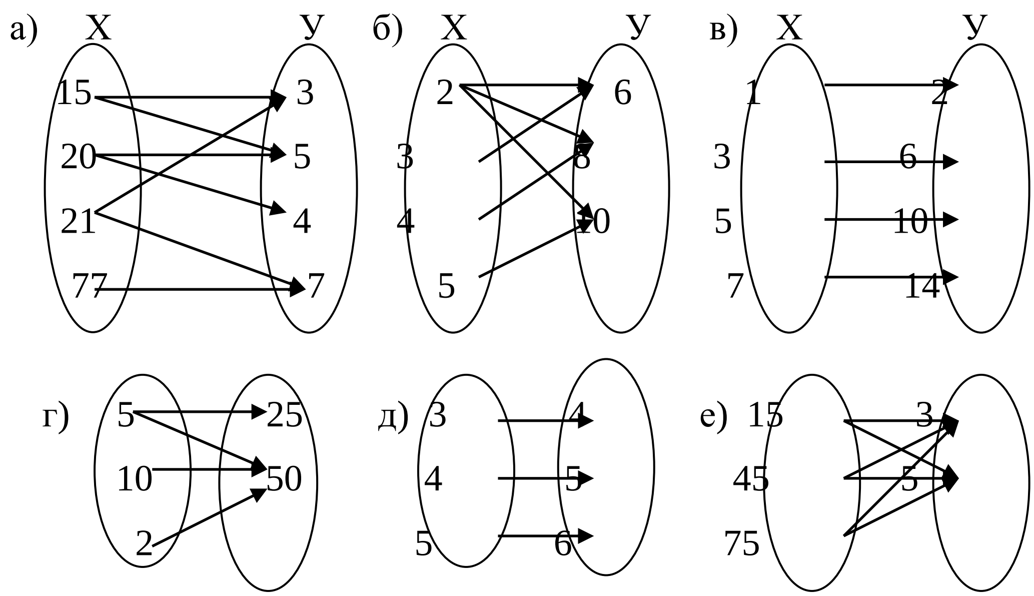
Взаємнооднозначна відповідність. Рівнопотужні множини

65. Дано множини Х={до, мі, соль} і У={ре, фа, ля}. Кожній ноті з множини Х відповідає нота з множини У, яка йде за нею у звукоряді. Побудувати граф

цієї відповідності. Чи є ця відповідність взаємно однозначною? Чи є множини Х і У рівнопотужними?

66. Дано множини Х={11, 12, 13, 14, 15} і У={1, 2, 3, 4, 5}. Кожному числу з множини Х відповідає число з множини У, яке дорівнює останній цифрі у його записі. Побудувати граф цієї відповідності. Чи є ця відповідність взаємно однозначною? Чи є множини Х і У рівнопотужними?

67. Чи є серед відповідностей, заданих за допомогою графів, взаємно однозначні відповідності? Чи є множини Х і У рівнопотужними?



68. Чи є рівними множинами або множинами з однаковою потужністю множини Х і У:

а) Х – множина вершин чотирикутника,

У – множина розв'язків рівняння: $x^2-7x+10=0$;

б) Х – множина вершин паралелограма;

У – множина сторін паралелограма;

в) Х – множина сторін трикутника,

У – множина букв у слові «міст»;

г) Х – множина днів тижня,

У – множина букв українського алфавіту;

д) Х = $\{x| x\in Z, x^2 = 16\}$;

У = $\{x| x\in Z, |x| = 4\}$;

е) Х – множина цифр у записі числа 30;

У – множина розв’язків рівняння $x^2 + 6x = 0$;

є) Х = $\{x| x\in N, x\leq 10\}$;

У– множина цифр у записі натуральних чисел у межах 100;

ж) Х – множина сторін чотирикутника,

У – множина кутів чотирикутника;

з) Х – множина коефіцієнтів многочлена $3x^3 + x^2 + 2x + 5$;

У = $\{y| y\in N, y<4\}$;

и) Х – множина букв у слові «мир»;

У = {р, и, м}.

Розв’язування типових вправ теми «Відповідності»

69. Між множинами Х = {1, 2, 3, 4, 5} і У = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} задано відповідність R: «х менше на 3 від у». Задати її всіма іншими способами. Вказати область відправлення, область прибуття, множину визначення, множину значень. Знайти образ елемента 3, прообраз елемента 5. Чи є ця відповідність повною, порожньою, взаємно однозначною? Чи є множини Х і У рівнопотужними? Сформулювати протилежну відповідність та задати її всіма способами. Вказати область відправлення, область прибуття, множину визначення, множину значень. Сформулювати обернену відповідність та задати її всіма способами. Вказати область відправлення, область прибуття, множину визначення, множину значень.
70. Між множинами Х = {1, 2, 3, 4, 5} і У = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} задано відповідність R: «х менше на 2 від у». Задати її всіма іншими способами. Вказати область відправлення, область прибуття, множину визначення, множину значень. Знайти образ елемента 3, прообраз елемента 5. Чи є ця

відповідність повною, порожньою, взаємно однозначною? Чи є множини X і Y рівнопотужними? Сформулювати протилежну відповідність та задати її всіма способами. Вказати область відправлення, область прибуття, множину визначення, множину значень. Сформулювати обернену відповідність та задати її всіма способами. Вказати область відправлення, область прибуття, множину визначення, множину значень.

2.Відношення на множині

Відношення на множині та способи їх задання

71. Які відношення можна задати на множині учнів класу?

72. Які відношення можна задати на множині натуральних чисел?

73. Які відношення можна задати на множині відрізків на площині?

74. Які відношення можна задати на множині прямих на площині?

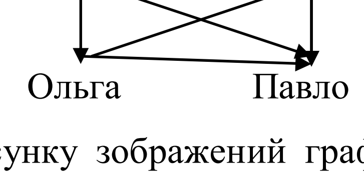
75. Які з математичних символів: $>$, $=$, $\leq$, $+$, $-$, $\perp$, $\notin$, $\bigcup$, $\subset$, $\Rightarrow$, використовуються для задання відношень?

76. Які з математичних символів: $<$, $\neq$, $\geq$, $\cdot$, $:$, $\|$, $\in$, $\bigcap$, $\subseteq$, $\Leftrightarrow$ використовуються для задання відношень?

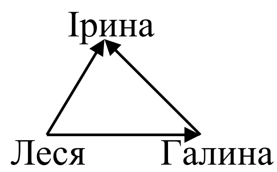
77. Ми спостерігаємо за вертольотом, орлом, дирижаблем, літаком. Орел летить вище вертольота, вертоліт – нижче літака, але вище дирижабля, а орел – нижче літака. Побудувати граф відношення «вище» на множині цих об’єктів. У якому порядку розташовані за висотою вертоліт, дирижабль, орел і літак? Хто літає найвище? Хто літає найнижче?

78. Ми спостерігаємо за комахами з множини X = {комар, муха, павук, мураха, джміль}. Яка комаха найважча? Яка комаха найлегша? Побудувати граф відношення «важче» на множині цих об’єктів.

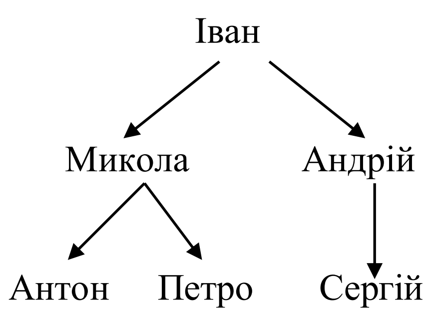
79. На рисунку зображений граф відношення «молодше», заданого на множині дітей. З яких елементів складається множина X? Хто наймолодший? Хто найстарший?



80. На рисунку зображений граф відношення «нижче», заданого на множині дівчат. З яких елементів складається множина X? Яка з дівчат найнижча? Яка з дівчат найвища?

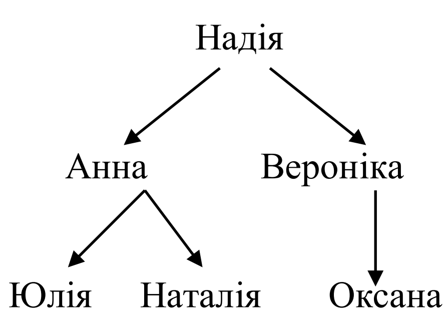


81. Відомо, що Ольга – мати Марії, а Марія – мати Олени. Вказати множину і відношення, яким пов'язані між собою згадані родичі. Ким доводиться Ольга Олені? Ким доводиться Марія Ользі? Ким доводиться Олена Ользі? Побудувати граф відношення.
82. Відомо, що Олег – батько Юрія, а Юрій – батько Петра. Вказати множину і відношення, яким пов'язані між собою згадані родичі. Ким доводиться Олег для Петра? Ким доводиться Юрій для Олега? Ким доводиться Петро для Олега? Побудувати граф відношення.
83. На рисунку зображений граф відношення «бути батьком»:

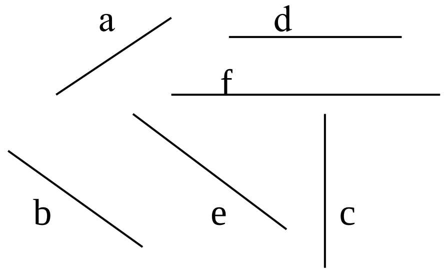


Чи істинні наступні висловлювання: «Микола і Андрій – рідні брати»; «Антон і Сергій – рідні брати»; «Іван – дідусь Петра»; «Іван і Микола – двоюрідні брати»; «Іван – батько Миколи»; «Іван – не є батько Андрія»; «Андрій – батько Сергія»; «Микола – син Івана»?

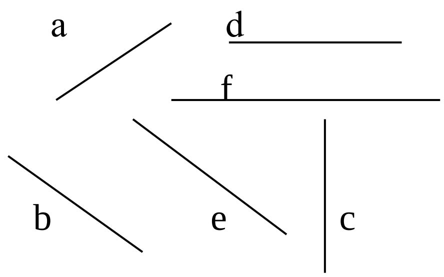
84. На рисунку зображений граф відношення «бути мамою»:



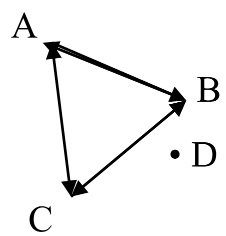
Чи істинні наступні висловлювання: «Юлія і Наталія – рідні сестри»; «Анна і Оксана – рідні сестри»; «Надія – бабуся Юлії»; «Наталія і Оксана – двоюрідні сестри»; «Надія – мама Вероніки»; «Надія – не є мама Анни»; «Анна – мама Оксани»; «Юлія – дочка Надії»?

85. 

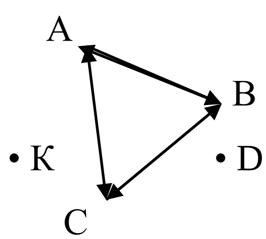
На множині прямих, зображених на рисунку, задано відношення S: «x║y». Побудувати граф відношення.

86. 

На множині прямих, зображених на рисунку, задано відношення P: «x⊥y». Побудувати граф відношення.

87. 

На рисунку подано граф відношення «бути сестрою» на множині дітей однієї сім'ї. Діти позначені буквами A, B, C, D. Доповнити граф стрілками. Визначити, хто з них є хлопцем, а хто – дівчиною?

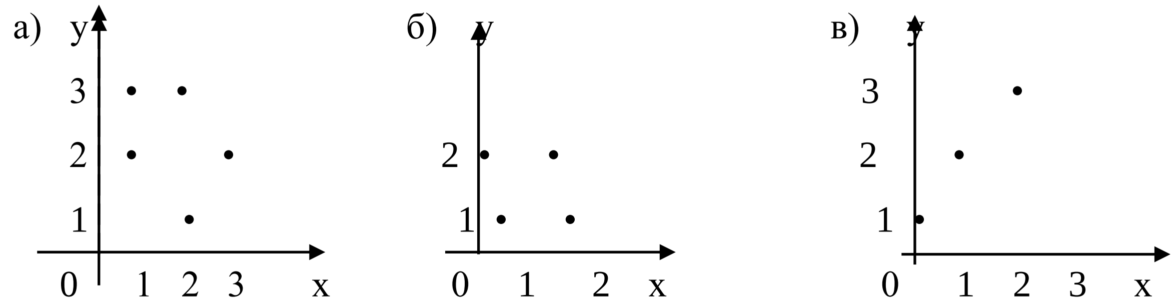
88. 

На рисунку подано граф відношення «бути братом» на множині дітей однієї сім'ї. Діти позначені буквами A, B, C, D, К. Доповнити граф стрілками. Визначити, хто з них є хлопцем, а хто – дівчиною?

89. На множині X задане відношення R = {(a,c), (a,b), (b,c), (a,d), (b,d)}. З яких елементів складається множина X? Вказати образ елемента a. Вказати прообраз елемента c. Побудувати граф і таблицю заданого відношення.

90. На множині X задане відношення R = {(1,1), (2,1), (1,3), (3,4), (2,2)}. З яких елементів складається множина X? Вказати образ елемента 1. Вказати прообраз елемента 2. Побудувати граф і таблицю заданого відношення.

91. На рисунках зображені графіки відношень на множині Х. Назвати множину Х, множину А, множину В. Задати відношення переліком пар, графом, таблицею:



92. На множині $X=\{x|\ x\in N,\ x\leq 8\}$ задано відношення R: «менше у 2 рази». Задати його усіма іншими способами. Вказати множини А і В.

93. На множині $X=\{x|\ x\in N,\ x\leq 12\}$ задано відношення R: «більше у 3 рази». Задати його усіма іншими способами. Вказати множини А і В.

94. На множині $X=\{x|\ x\in N,\ x\leq 7\}$ задане відношення R={(2;1), (3;2), (4;3), (5;4), (6;5), (7;6)}. Задати його всіма іншими способами. Вказати множини А і В.

95. На множині $X=\{x|\ x\in N,\ x\leq 8\}$ задане відношення R={(1;3), (2;4), (3;5), (4;6), (5;7), (6;8)}. Задати його всіма іншими способами. Вказати множини А і В.

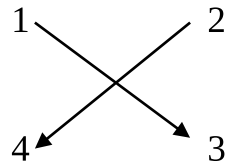
96. На множині $X=\{x|\ x\in N,\ x\leq 8\}$ задане відношення R: «x + y = 8». Задати його всіма іншими способами. Вказати множини А і В.

97. На множині $X=\{x|\ x\in N,\ x\leq 6\}$ задане відношення R: «x + y = 6». Задати його всіма іншими способами. Вказати множини А і В.

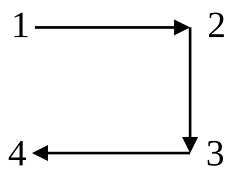
98. На множині $X=\{x|x\in N, x\leq 10\}$ задано відношення $R=\{(x,\ y)|x\in X,\ y\in X,\ x-y=4\}$. Задати відношення іншими способами. Вказати множини А і В.

99. На множині $X=\{x|x\in N,\ x\leq 9\}$ задано відношення $R=\{(x,\ y)|\ x\in X,\ y\in X,\ x-y=3\}$. Задати відношення іншими способами. Вказати множини А і В.

100. На рисунку зображений граф відношення R, заданого на множині $X=\{x|x\in N,\ x\leq 4\}$. Задати це відношення всіма іншими способами. Вказати множини А і В.



101. На рисунку зображений граф відношення R, заданого на множині $X=\{x|x\in N,\ x\le 4\}$. Задати це відношення всіма іншими способами. Вказати множини A і B.



102. На множині X задано відношення R за допомогою таблиці. Задати його усіма іншими способами. Вказати множини X, A і B.

X \ **X**	1	3	5
1	(1; 1)	(1; 3)	(1; 5)
3		(3; 3)	(3; 5)
5			(5; 5)

103. На множині X задано відношення R за допомогою таблиці. Задати його усіма іншими способами. Вказати множини X, A і B.

X \ **X**	1	3	5
1	(1; 1)		
3	(3; 1)	(3; 3)	
5	(5; 1)	(5; 3)	(5; 5)

Протилежне відношення. Обернене відношення

104. На множині X = {3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 13, 16, 24, 25, 26, 39} задане відношення «бути кратним». Які з пар (12;4), (16;3), (5;5), (7;7), (6;24),

(13;26), (39;13), (4;10), (4;8), (25;5), (25;15) належать заданому відношенню, а які – протилежному чи оберненому?

105. На множині X = {3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 13, 16, 24, 25, 26, 39} задане відношення «бути дільником». Які з пар (12;4), (16;3), (5;5), (7;7), (6;24), (13;26), (39;13), (4;10), (4;8), (25;5), (25;15) належать заданому відношенню, а які – протилежному чи оберненому?

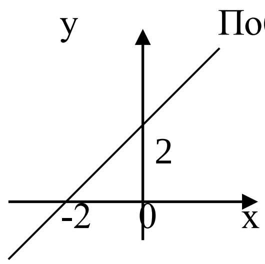
106. На множині $X=\{x|\ x\in N,\ x\leq 6\}$ задане відношення R: «бути дільником». Побудувати граф і графік заданого, протилежного і оберненого відношень до заданого.

107. На множині $X=\{x|\ x\in N,\ x\leq 8\}$ задане відношення R: «бути кратним». Побудувати граф і графік заданого, протилежного і оберненого відношень до заданого.

108. На множині $X = \{x|\ x\in N,\ x\leq 9\}$ задане відношеня R: «x+y=8». Побудувати граф, графік і таблицю для протилежного і оберненого відношень до заданого.

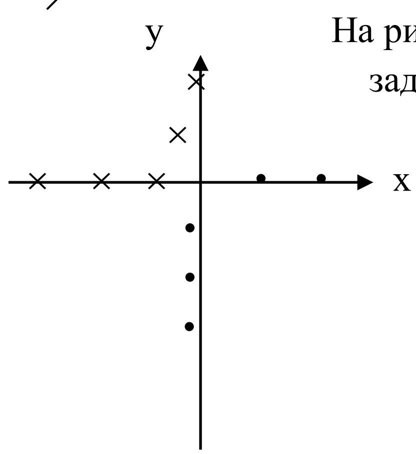
109. На множині $X = \{x|\ x\in N,\ x\leq 10\}$ задане відношеня R: «x+y=9». Побудувати граф, графік і таблицю для протилежного і оберненого відношень до заданого.

110.



Побудувати графік відношення, оберненого до заданого. Задати аналітично задане відношення та відношення, обернене до заданого.

111.



На рисунку зображені графіки відношень R і S, задані на множині X. Чи є ці відношення обернені?

112. На множині $X = \{x \mid x \in N,\ 3 \le x \le 7\}$ задано відношення Q: «на 2 менше». Сформулювати протилежне відношення до нього і задати його всіма способами. Вказати множини A і B.

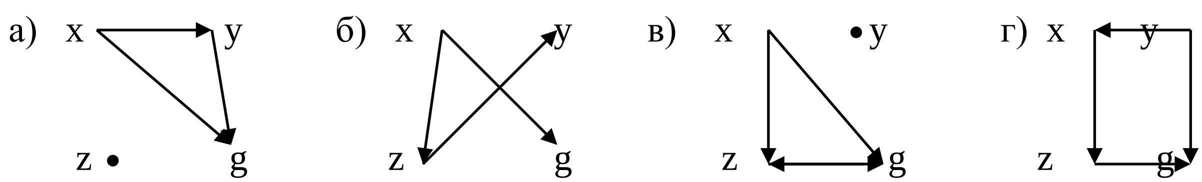
113. На множині $X = \{x \mid x \in N,\ 2 \le x \le 6\}$ задано відношення Q: «на 2 більше». Сформулювати протилежне відношення до нього і задати його всіма способами. Вказати множини A і B.

114. На множині $X = \{x \mid x \in N,\ x \le 8\}$ задано відношення Q: «на 3 більше». Сформулювати обернене відношення до нього і задати його всіма способами. Вказати множини A і B.

115. На множині $X = \{x \mid x \in N,\ x \le 9\}$ задано відношення Q: «на 3 менше». Сформулювати обернене відношення до нього і задати його всіма способами. Вказати множини A і B.

Властивості відношень

116. Якими властивостями володіють відношення, графи яких зображені на рисунках:



117. На множині X задане відношення $Q = \{(a, c), (a, b), (b, c), (a, d), (b, d)\}$. З яких елементів складається множина X? Побудувати граф відношення. Якими властивостями воно володіє?

118. На множині $X = \{x \mid x \in N,\ x \le 4\}$ задане відношення $S = \{(1;1), (1;2), (1;3), (4;2)\}$. Побудувати граф відношення. Якими властивостями воно володіє?

119. На множині $X=\{x \mid x \in N,\ x \le 10\}$ задане відношення «бути дільником». Побудувати граф відношення. Якими властивостями воно володіє?

120. На множині $X = \{x \mid x \in N,\ x \le 12\}$ задане відношення «бути кратним». Побудувати граф відношення. Якими властивостями воно володіє?

121. На множині $X = \{x \mid x \in N, x \leq 9\}$ задані відношення. Побудувати графи цих відношень і вказати їх властивості, якщо:

а) P: «більше»,

S: «менше або дорівнює»,

R: «більше на 2»,

R: «менше у 2 рази»,

C: «безпосередньо слідує»,

E: «кратне»,

H: «x + y = 8».

б) P: «менше»,

S: «більше або дорівнює»,

R: «менше на 2»,

R: «більше у 2 рази»,

C: «стоїть попереду»,

E: «є дільником»,

H: «x – y = 3».

Відношення еквівалентності

122. На множині відрізків задані відношення R: «коротше» і S: «мати однакову довжину». Яке з них є відношенням еквівалентності? Чому?

123. На множині відрізків задані відношення R: «довше» і S: «бути паралельними». Яке з них є відношенням еквівалентності? Чому?

124. Між елементами множини X = {садівник, сніговик, садити, сніжок, посадила, садочок} задано відношення «слова x і y мають один і той самий корінь». Побудувати граф відношення. Чи є воно відношенням еквівалентності?

125. Між елементами множини X = {яблуко, мед, медовий, яблучко, яблуневий, медівник} задано відношення «слова x і y мають один і той

самий корінь». Побудувати граф відношення. Чи є воно відношенням еквівалентності?

126. На множині звичайних дробів задане відношення «бути рівними». Чи є воно відношенням еквівалентності?

127. На множині прямих задано відношення «бути паралельним». Чи є воно відношенням еквівалентності?

128. На множині $X = \{x|\ x \in N,\ 3 \le x \le 10\}$ задане відношення Т: «мати одну і ту ж остачу при діленні на 2». Чи є воно відношенням еквівалентності? Якщо так, то вказати класи еквівалентності.

129. На множині $X = \{x|\ x \in N,\ 2 \le x \le 10\}$ задане відношення Т: «мати одну і ту ж остачу при діленні на 3». Чи є воно відношенням еквівалентності? Якщо так, то вказати класи еквівалентності.

130. Відомо, що відношення К, задане на множині X = {2; 3; 4}, є відношенням еквівалентності. Яка з множин є відношенням К:

а) К={(2;2), (2;3), (2;4), (3;4), (3;3), (4;4)};

б) К={(2;2), (2;3), (3;2), (3;3)};

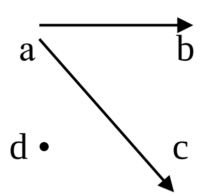
в) К={(2;2), (2;3), (3;2), (3;3), (4;4).

131. Відомо, що відношення Р, задане на множині X = {k, l, m, n}, є відношенням еквівалентності. Яка з множин є відношенням Р:

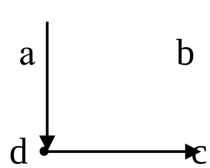
а) P = {(k,k), (l,l), (m,m), (n,n), (k,l), (l,k), (l,m), (m,l), (k,m), (m,k)};

б) P = {(k,k), (l,l), (m,m), (n,n), (k,l), (l,k), (m,n), (n,m)};

в) P = {(k,k), (l,l), (m,m), (n,n), (k,n), (n,k)}.

132. 

На рисунку зображений спрощений вигляд графа відношення, заданого на множині X = {a, b, c, d}. Добудувати його так, щоб він відповідав відношенню еквівалентності. Вказати класи еквівалентності.

133. 

На рисунку зображений спрощений вигляд графа відношення, заданого на множині X = {a, b, c, d}. Добудувати його так, щоб він відповідав відношенню еквівалентності. Вказати класи еквівалентності.

Відношення порядку. Упорядковані множини

134. На множині відрізків задано відношення R: «довше» і S: «бути рівними». Яке з них є відношенням порядку? Чому?

135. На множині відрізків задано відношення R: «коротше» і S: «мати однакову довжину». Яке з них є відношенням порядку? Чому?

136. На множині натуральних чисел задане відношення «менше». Чи є воно відношенням порядку?

137. На множині натуральних чисел задано відношення «більше». Чи є воно відношенням порядку?

138. Відомо, що відношення К, задане на множині X = {2; 3; 4}, є відношенням порядку. Яка з наступних множин є відношенням К:

а) {(2;2), (2;3), (2;4), (3;4), (3;3), (4;4)};

б) {(2;2), (2;3), (3;2), (3;3)};

в) {(2;2), (2;3), (3;2), (3;3), (4;4)}.

139. Відомо, що відношення Р, задане на множині X = {k, l, m, n}, є відношенням порядку. Яка з наступних множин є відношенням Р:

а) P = {(k,k), (l,l), (m,m), (n,n), (k,l), (l,k), (l,m), (m,l), (k,m), (m,k)};

б) P = {(k,k), (l,l), (m,m), (n,n), (k,l), (l,k), (m,n), (n,m)};

в) P = {(k,k), (l,l), (m,m), (n,n), (k,n), (n,k)}.

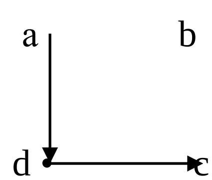
140. Чи є відношення М, задане на множині X = {a, b, c}, відношенням порядку, якщо:

а) M = {(a,b), (b,c), (a,a), (b,b), (c,c)};

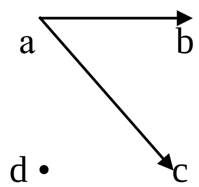
б) M = {(a,b), (a,a), (b,c), (a,c)};

в) M = {(a,a), (b,b), (c,c), (a,c), (c,a)}.

141. На рисунку зображений спрощений вигляд графа



відношення, заданого на множині X = {a, b, c, d}. Добудувати його так, щоб він відповідав відношенню строгого порядку; нестрогого порядку.

142. 

На рисунку зображений спрощений вигляд графа відношення, заданого на множині X = {a, b, c, d}. Добудувати його так, щоб він відповідав відношенню строгого порядку; нестрогого порядку.

143. На множині X = {2; 4; 6; 8; 10} задане відношення «бути дільником». Чи впорядковує воно множину X?

144. На множині X = {2; 4; 6; 8; 10} задане відношення «бути кратним». Чи впорядковує воно множину X?

145. На множині X = {–4; –2; 0; 2; 4} задано відношення. Побудувати його граф. Чи є воно відношенням строгого порядку? відношенням нестрогого порядку? відношенням лінійного порядку?

а) «більше»,

«бути протилежними числами»,

«менше або дорівнює»,

«добуток чисел x і y є додатним числом»,

б) «менше»,

«модуль числа x дорівнює y»,

«більше або дорівнює»,

«x = – y».

Розв'язування типових вправ теми «Відношення»

146. На множині $X=\{x|\ x\in N,\ x\leq 10\}$ задано відношення R: «x=y+3».

1) Задати відношення R всіма способами.
2) Вказати область відправлення, область прибуття, множину визначення, множину значень.
3) Знайти образ елемента 3, прообраз елемента 5.
4) Вказати всі властивості відношення R. Вказати, чи впорядковує це відношення множину X.
5) Сформулювати протилежне відношення, побудувати його граф і вказати властивості.
6) Сформулювати обернене відношення, побудувати його граф і вказати властивості.

3. Відображення

Поняття відображення. Способи задання відображення

147. Між елементами множин $X=\{x|\ x\in N,\ 2\le x\le 10\}$ і $У=\{y|\ y\in N,\ y\le 5\}$ задана відповідність «кратне». Побудувати її граф. Чи є ця відповідність відображенням?

148. Між елементами множин $X=\{x|\ x\in N,\ 2\le x\le 5\}$ і $У=\{y|\ y\in N,\ y\le 4\}$ задана відповідність «бути дільником». Побудувати її граф. Чи є ця відповідність відображенням?

149. Нехай X = {липень, серпень, вересень}, У = {28; 30; 31}. Яку відповідність можна задати між елементами цих множин? Чи буде вона відображенням?

150. Нехай X = {лютий, березень, квітень}, У = {28; 30; 31}. Яку відповідність можна задати між елементами цих множин? Чи буде вона відображенням?

151. Чи є відображеннями відповідності, задані аналітично:

а)	б)
$y = 3x$,	$y = -5x$,
$y = x^2 - 4$,	$y = x^2 + 4$,
$y = -3x^3$,	$y = 2x^3$,
$y = \|x\|$,	$y = -\|x\|$,
$y = \sqrt{x}$,	$y = -\sqrt{x}$,
$x^2 - y^2 = 9$,	$y^2 = x^2$.

152. Між множинами $X=\{6;\ 7;\ 8\}$ і $У=\{3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ задано відповідність «більше на 2». Побудувати її граф. Чи є ця відповідність відображенням?

153. Між множинами $X=\{6;\ 7;\ 8\}$ і $У=\{8;\ 9;\ 10;\ 11\}$ задано відповідність «менше на 2». Побудувати її граф. Чи є ця відповідність відображенням?

154. Дано дві множини: $X = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ і $У = Z$ і між ними відповідність «$y = 3 - x^2$». Довести, що ця відповідність є відображенням і побудувати його графік, записати множину значень цього відображення.

155. Дано дві множини: $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ і $У = N$ і між ними відповідність «$y = x^2$». Довести, що ця відповідність є відображенням і побудувати його графік, записати множину значень цього відображення.

156. Чи є відповідність, задана таблицею, відображенням?

x	a	b	c	d
0	5	2	5	6

157. Чи є відповідність, задана таблицею, відображенням?

1	2	3	4	5
1	4	2	5	6

158. Відповідності задані переліком елементів. Вказати множини X і У. Які з них є відображеннями між X і У?

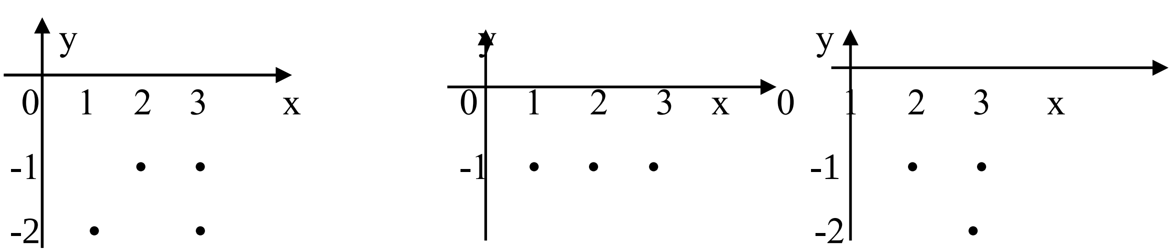
а) R= {(5;x), (5;y), (7;z)};

б) R= {(5;x), (7;y), (9;y)};

в) R= {(5;x), (7;y), (9;y), (9;z)};

г) R= {(5;y), (7;y), (9;y)}.

159. Нижче наведені відповідності задані своїми графіками. Які з них є відображеннями?

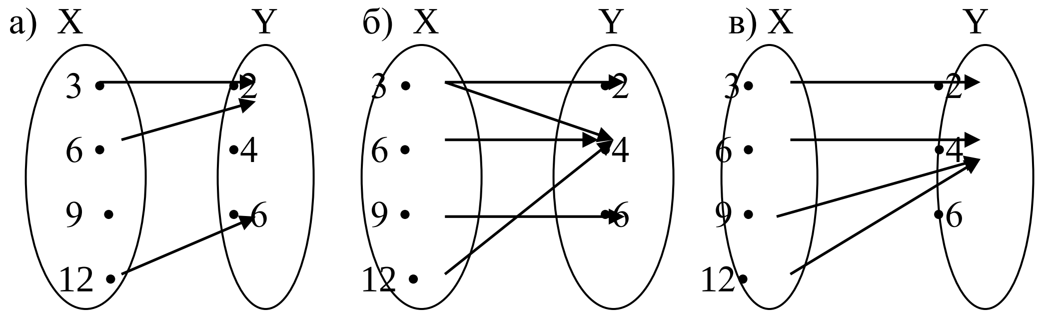


160. Сторона квадрата x см; площа – y см^2. Задайте за допомогою рівняння залежність між x і y. Чи буде ця залежність відображенням?

161. Площа квадрата x см^2; його сторона – y см^2. Задайте за допомогою рівняння залежність між x і y. Чи буде ця залежність відображенням?

Основні властивості та типи відображень. Зчисленна множина

162. Відповідності між елементами множин X і У задані за допомогою графів. Які з них є відображеннями? Якщо так, то якими?



163. Кожному елементу множини X = $\{x|\ x\in N,\ 6\le x\le 18\}$ поставили у відповідність остачу від ділення його на 5. Вказати множину У. Задайте цю відповідність за допомогою таблиці. Чи є вона відображенням? Якщо так, то вказати його вид.

164. Кожному елементу множини X = $\{x|\ x\in N,\ 4\le x\le 12\}$ поставили у відповідність остачу від ділення його на 3. Вказати множину У. Задайте цю відповідність за допомогою таблиці. Чи є вона відображенням? Якщо так, то вказати його вид.

165. Між елементами множин X=$\{0; 1; 2; 3; 4\}$ і У=Z задана відповідність у = $\frac{x-3}{2}$. Чи є ця відповідність відображенням? Яким?

166. Між елементами множин X=$\{2; 3; 4; 5; 6\}$ і У=Z задана відповідність у = $\frac{x-4}{3}$. Чи є ця відповідність відображенням? Яким?

167. Відповідність між множинами X=$\{x|x\in Z,\ -2\le x\le 1\}$ і У=$\{y|y\in N,\ 5\le y\le 10\}$ задана за допомогою рівняння $3x - y + 2 = 0$. Побудувати графік цієї відповідності. Чи є ця відповідність відображенням? Якщо так, то яким?

168. Відповідність між множинами X=$\{x|x\in Z,\ -3\le x\le 2\}$ і У=$\{y|y\in N,\ 3\le y\le 12\}$ задана за допомогою рівняння $x - 2y + 4 = 0$. Побудувати графік цієї відповідності. Чи є ця відповідність відображенням? Якщо так, то яким?

169. Нехай $X = \{a, b, c\}$, $У = \{x, y\}$. Побудувати графи так, щоб вони відповідали:

а) ін'єктивному;

б) сюр'єктивному;

в) бієктивному.

170. Нехай $X = \{a, b, c\}$, $У = \{x, y, e\}$. Побудувати графи так, щоб вони відповідали:

а) ін'єктивному;

б) сюр'єктивному;

в) бієктивному.

171. Чи є відображенням відповідність, задана рівнянням $y = -x^3 + 1$. Якщо так, то вказати множини X і У та його властивості.

172. Чи є відображенням відповідність, задана рівнянням $y = x^3 - 4$. Якщо так, то вказати множини X і У та його властивості.

173. Відповідність між елементами множин X і У така: «$y=x+1$». Побудувати граф цієї відповідності, якщо: $X = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $У = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Чи є ця відповідність бієктивним відображенням?

174. Відповідність між елементами множин X і У така: «$y=x-1$». Побудувати граф цієї відповідності, якщо: $X = \{1; 2; 3; 4\}$, $У = \{0; 1; 2; 3\}$. Чи є ця відповідність бієктивним відображенням?

175. Відповідність між елементами множини X усіх трикутників і множини У усіх додатних дійсних чисел така: «трикутник x має площу y». Чи є ця відповідність бієктивним відображенням? Яким?

176. Відповідність між елементами множини X усіх трикутників і множини У усіх додатних дійсних чисел така: «трикутник x має периметр y». Чи є ця відповідність бієктивним відображенням? Яким?

177. Відомо, що відповідність S, задана між множинами $X = \{-1; -2; -3\}$ і $У = \{0; 1\}$, є відображенням X в У. Чи є нею множина:

а) {(-1;0), (-2;0), (-2;1), (-3;1)};

б) {(-1;0), (-2;0), (-3;0), (-3;1)};

в) {(-1;0), (-2;0), (-3;1)}?

178. Нехай X – множина учнів класу, У – множина парт у класі. Поставимо у відповідність кожному учню класу парту, за якою він сидить. Чи буде ця відповідність відображенням? Для відображень встановити їх тип. Назвати властивості, якщо:

а) за кожною партою сидять два учні і вільних парт у класі немає,

б) за кожною партою сидять два учні і у класі є одна вільна парта,

в) за кожною партою сидить один учень і вільних парт у класі немає.

179. Які з поданих множин зчисленні:

а) множина парних натуральних чисел;

б) множина непарних натуральних чисел;

в) множина цілих невід'ємних чисел;

г) множина квадратів натуральних чисел.

180. Чи є подані множини нескінченними? зчисленними?

а) $A = \{x \mid x=2n + 1, n \in N\}$;

б) $A = \{x \mid x=2n, n \in N\}$;

в) $A = \{x \mid x=7n, n \in N\}$;

г) $A = \{x \mid x=2^n, n \in N\}$.

4. Функції

Поняття функції. Область визначення. Множина значень

181. Множина Х складається з додатних чисел, а множина У – з трикутників. Чи є відповідність “число х є периметром трикутника у” функціональною?

182. Множина Х складається з відрізків, а множина У – з додатних чисел. Чи є відповідність “відрізок х має довжину у” функціональною?

183. Кожному студенту групи поставлено у відповідність число, яке дорівнює його віку у роках. Встановити, чи є ця відповідність функцією. Яка її область визначення? Яка її множина значень? Який повний прообраз числа 18? 20?

184. Кожному студенту групи поставлено у відповідність число, яке дорівнює його росту у сантиметрах. Встановити, чи є ця відповідність функцією. Яка її область визначення? Яка її множина значень? Який повний прообраз числа 165? 170?

185. Одна сторона прямокутника 6 м, а друга х м. Чому дорівнює площа у ($м^2$) цього прямокутника? Чи є вона функціональною?

186. Одна сторона прямокутника 8 м, а друга х м. Чому дорівнює периметр у ($м^2$) цього прямокутника? Чи є вона функціональною?

187. Серед відповідностей, заданих переліком пар, визначити такі, що є функціями. Для функціональних відповідностей знайти область визначення і множину значень.

    1) R={(1;2), (3;4), (5;6), (7;8), (9;10)};

    2) R={(1;2), (1;3), (1;4), (1;5)};

    3) R={(1;0), (0;1), (–1;0), (2;–1)};

    4) R={(1;4), (2;4), (3;4), (5;4)}.

188. Кожному числу, що належить множині Х, поставили у відповідність протилежне число і їх множину позначили У. Чи є відповідність між множинами Х і У функцією?? Знайти множину У, якщо:

1) X = {–7, –6, –5, –4, –1}; 2) X = {1, –2, –3, 4, 5};

3) X = (–5; –2); 4) X = (1;12);

5) X = [0;5); 6) X = [–2;0);

7) X = [–6;6]; 8) X = [–3;3].

Способи задання функції

189. На множині X = {-1,5; –1; –0,5; 0; 0,5; 1; 1,5} задана функція y = 2x + 2. Запишіть множину значень цієї функції. Задайте її іншими способами.

190. На множині X = {-2; –1; 0; 1; 2} задана функція y = – 4x. Запишіть множину значень цієї функції. Задайте її іншими способами.

191. Функція задана рівнянням $\boldsymbol{y} = \dfrac{5}{\boldsymbol{x} - 3}$. Вона визначена на множині X = {–2; –1; 0; 1; 2}. Знайти її значення у точках 3, 4. Запишіть множину значень цієї функції. Побудуйте її графік. Задайте її іншими способами.

192. Функція задана рівнянням $y = \dfrac{3}{x+1}$. Вона визначена на множині X = {–2; –1; 0; 1; 2}. Знайти її значення у точках 3, 4. Запишіть множину значень цієї функції. Побудуйте її графік. Задайте її іншими способами.

193. На множині X = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3} задана функція y = x^2+1. Запишіть множину пар, що належать графіку цієї функції, у вигляді таблиці і зобразіть його у прямокутній системі координат.

194. На множині X = {–4, –2, –1, 0, 1, 2, 4} задана функція y = $\dfrac{4}{x}$. Запишіть множину пар, що належать графіку цієї функції, у вигляді таблиці і зобразіть його у прямокутній системі координат.

195. Між множинами X={x| x$\in$N, 3$\le$x$\le$20} і У={3; 5} встановлено відповідність: «якщо x – просте число, то йому відповідає число *y*=3». Побудуйте граф цієї відповідності і запишіть множину пар (*x, y*), що

належать графіку даної відповідності. Чи є вона функціональною? Якщо так, то знайдіть її область визначення та множину значень.

196. Між множинами Х={x| $x \in N$, $5 \le x \le 10$} і У={0; 1; 2; 3; 4; 5} встановлено відповідність: «число x на 5 більше числа *y*». Побудуйте граф цієї відповідності і запишіть множину пар (*x, y*), що належать графіку даної відповідності. Чи є вона функціональною? Якщо так, то знайдіть її область визначення та множину значень.

197. Знайти область визначення функцій:

1) y=3x; 2) y=–5x;

3) $y = \frac{2}{x+1}$; 4) $y = \frac{4}{x+3}$;

5) y = x^2+2; 6) y = x^2–4.

198. Знайти множину значень функцій:

1) y=3x; 2) y=–5x;

3) $y = \frac{2}{x+1}$; 4) $y = \frac{4}{x+3}$;

5) y=x^2+2; 6) y=x^2–4.

199. Знайти область визначення функцій, визначивши застережливі умови:

1) $y = \frac{2}{x+1}$; 2) $y = \frac{4}{x+3}$;

3) $y = \frac{3x}{x^2 - 4x + 4}$; 4) $y = \frac{2}{x^3 - x}$;

5) $y = \frac{\sqrt{x+5}}{x+4}$; 6) $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 - 1}$;

7) $y = \sqrt{(x-3)(x+4)}$; 8) $y = \sqrt{\frac{x-3}{x+2}}$;

9) $y = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2}$; 10) $y = \sqrt[4]{1 - 2x}$;

11) $y = \sqrt{x^2 - 1}\sqrt{x+2}$; 12) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$;

13) $y=\sqrt[5]{4-x}$;   14) $y=\sqrt[7]{2x+4}$.

200. Визначити, які з рівнянь задають функцію між змінними x і y? Якщо так, то задати її у явному вигляді:

1) $2x+4y=10$;
2) $xy+y=6$;
3) $x^4+4y=5$;
4) $x^2-y^2=10$;
5) $4x^4+9y^4=36$;
6) $xy=36-x$;
7) $xy=-4$;
8) $x-xy=3$;
9) $2x-y^4=12$;
10) $x^2+y^2=4$;
11) $x^4+y^4=2$;
12) $6+y=xy$.

201. Дано функцію:

1) $f(x)=x+\frac{1}{x}$. Знайти f(1), f(2), f(–0,3), f(–4), f(0);

2) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$. Знайти f(0), f(1), f(3), f(–2), f(–5);

3) $f(x)=\frac{3x}{x^2-9}$. Знайти f(0), f(–3), f(3), f(–1), f(2);

4) $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Знайти f(–1), f(0), f(2), f(–5), f(1).

202. Знайти значення аргумента, для якого функція набуде значення 5, якщо:

1) $y=3x$;   2) $y=-5x$;

3) $y=\frac{2}{x+1}$;   4) $y=\frac{4}{x+3}$;

5) $y=x^2+2$;   6) $y=x^2-4$.

203. Для заданих функцій знайти координати точок перетину графіка з осями координат:

1) $y=3x-6$;   2) $y=-4x+1$;

3) $y=x^2-5x+6$;   4) $y=x^2-2x+1$;

5) $y=-8$;   6) $x=-5$;

7) $y=\frac{1}{x}+2$;   8) $y=3-\frac{1}{x}$.

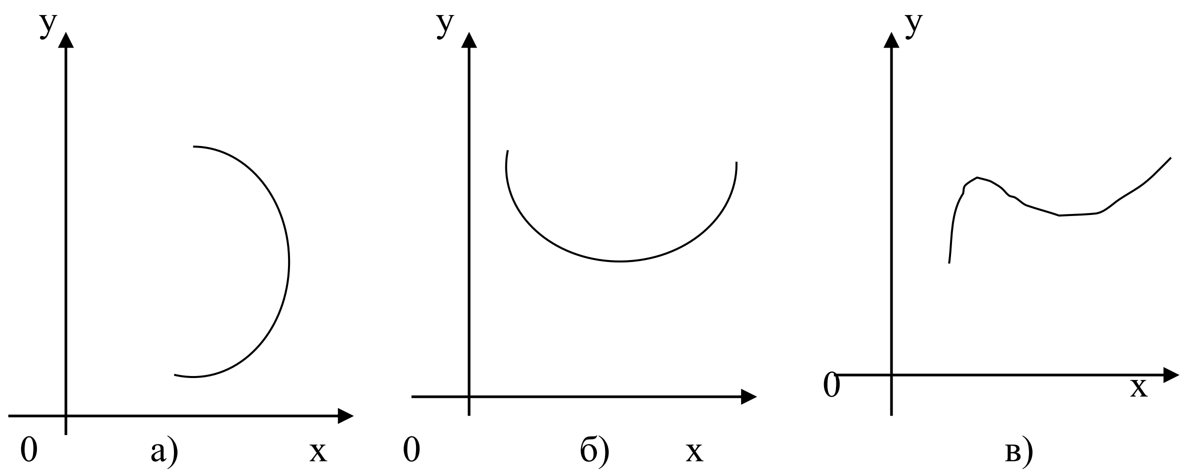
204. Дано функцію $f(x)=\begin{cases} -1, & -3 \le x \le 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 1, & 1 \le x \le 5. \end{cases}$. Знайти f(0), f(–2), $f\left(\frac{1}{3}\right)$, f(4), f(11).

Знайдіть її область визначення та множину значень.

205. Дано функцію $f(x)=\begin{cases} -2, & -2 \le x \le 1, \\ 2x, & 1 < x < 5, \\ 2, & 5 \le x \le 10. \end{cases}$. Знайти f(0), f(–3), $f\left(\frac{1}{3}\right)$, f(3), f(15).

Знайдіть її область визначення та множину значень.

206. Які з кривих, зображених на рисунках, є графіками функції, а які – ні?



207. Чи належать точки A(0,1), B(1,0), C(1,2), K(2,1), M(3,3), P(101,100) графіку функції $y=\frac{(x-1)^2}{1-x}$?

208. Чи належать точки A(2,1), B(2,0), C(2,2), K(–2,1), M(4,4), P(10,1) графіку функції $y=\frac{x+2}{4-x}$?

209. Побудуйте графік функції $y = x^2$, якщо x – дійсні числа і $1 \le x \le 3$. Запишіть множину значень цієї функції.

210. Побудуйте графік функції $y = -x^2$, якщо x – дійсні числа і $-3 \le x \le -1$. Запишіть множину значень цієї функції.

211. Функція *y = f(x)* задана таблицею. Вказати множину визначення та множину значень функції. Знайти значення функції для аргумента 5. Знайти значення аргумента для значення функції 10.

а)

x	1	4	5	7	9	10
y	7	9	10	12	13	14

б)

x	2	5	6	8	10	12
y	2	5	7	10	9	11

Основні властивості функції

212. Дослідити функцію на парність:

1) $y = x^3 - x$; 2) $y = x^2 + 2x^4$;

3) $y = x^2 - 3x + 1$; 4) $y = x^3 + 1$;

5) $y = \dfrac{1}{4 - x}$; 6) $y = \dfrac{3x}{2 - x}$.

7) $y = x^2 \cdot \sin x$; 8) $y = x^2 + \sin x$;

9) $y = \dfrac{x^3}{\cos 2x}$; 10) $y = \dfrac{x^2 - 1}{\cos^2 x}$;

11) $y = x^2 - \mathrm{tg}^2\, x$; 12) $y = x^4 - \mathrm{tg}^2\, x$;

13) $y = \dfrac{ctgx}{3x}$; 14) $y = \dfrac{x^3}{3ctgx}$.

15) $y = \cos x + \sin x$; 16) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$;

17) $y = \dfrac{x^4 + 1}{x \sin x}$; 18) $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$;

19) $y = \dfrac{1 + x^2}{tgx}$; 20) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 ctgx}$;

21) $y = \dfrac{ctgx}{\cos x + 1}$; 22) y = tg x · cos x;

23) $\boldsymbol{y} = \dfrac{1}{2 - 3\boldsymbol{x}}$; 24) $\boldsymbol{y} = \dfrac{1}{-\boldsymbol{x} - 3}$.

213. Знайти найменший додатний період функції:

1) $y = \frac{1}{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$; 2) $y = 3\sin(x + \frac{\pi}{4})$;

3) $y = \cos\frac{2}{3}x - 1$; 4) $y = 2ctg\frac{x}{5}$;

5) $y = \frac{1}{2}tg3x$; 6) $y = tg(x - \frac{\pi}{2})$;

7) $y = \frac{1}{3}ctg\frac{5x}{4}$; 8) $y = 2\cos\frac{3x}{2}$.

214. Дослідити функцію на монотонність:

1) y = 3x–2; 4) y = –4x+3;

2) $\boldsymbol{y} = \dfrac{1}{\boldsymbol{x}} + 2$; 5) $\boldsymbol{y} = 3 - \dfrac{1}{\boldsymbol{x}}$.

3) $y = 3x^2$; 6) $y = -2x^2$.

215. Дослідити функцію на обмеженість:

1) y = 3x–2; 8) y = –4x+3;

2) $\boldsymbol{y} = \dfrac{1}{\boldsymbol{x}} + 2$; 9) $\boldsymbol{y} = 3 - \dfrac{1}{\boldsymbol{x}}$;

3) $y = 3x^2$; 10) $y = -2x^2$,

4) $y = \frac{1}{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$; 11) $y = 3\sin(x + \frac{\pi}{4})$;

5) $y = \cos\frac{2}{3}x - 1$; 12) $y = 2ctg\frac{x}{5}$;

6) $y = \frac{1}{2}tg3x$; 13) $y = tg(x - \frac{\pi}{2})$;

7) $y = \frac{1}{3}ctg\frac{5x}{4}$; 14) $y = 2\cos\frac{3x}{2}$.

216. Знайти нулі функції та проміжки її знакосталості:

1) $y = (x-1)(x+1)$; 2) $y = x^3-1$;

3) $y = \sqrt{4-3x}$; 4) $y = \frac{x^2-4}{x+2}$;

5) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}$; 6) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$;

7) $y = \frac{1}{x-3}$; 8) $y = \frac{1}{x+3}$.

217. Знайти точки розриву графіків функцій:

1) $y = \frac{x-3}{6x+3}$; 2) $y = \frac{4}{3x}$;

3) $y = \frac{x-1}{x^2+5x}$; 4) $y = \frac{3x}{x^2-9}$;

5) $y = \frac{5}{x^2-2x+1}$; 6) $y = \frac{x^2+1}{x^2-5x+4}$;

7) $y = \frac{2x-1}{4x^2-16}$; 8) $y = \frac{x^3}{5x-3}$;

9) $y = \frac{3}{3+x}$; 10) $y = \frac{4}{x+2}$.

218. Серед наступних функцій знайти неперервні:

1) $y = 2x-1$; 2) $y = \frac{x}{3}-4$;

3) $y = x^3+4x$; 4) $y = x^2-5x$;

5) $y = \frac{5-x}{x+3}$; 6) $y = \frac{x-5}{x-3}$;

7) $y = \frac{4}{x^2-4}$; 8) $y = \frac{3}{x}+\frac{x}{4}$.

Обернена функція

219. Х – множина кіл на площині, У – множина точок площини. Відповідність, при якій кожному колу відповідає точка площини – її центр, є функцією. Чи є обернена відповідність функціональною?

220. Функція визначена так: кожному дійсному числу x ставиться у відповідність його квадрат: $x \to x^2$. Сформулюйте обернену відповідність. Чи буде вона функціональною?

221. Сторона квадрата дорівнює x м, а його площа – S м^2. Чи є функціональною відповідність між значеннями x і S? Знайдіть обернену відповідність між значеннями S і x. Чи функціональна вона?

222. Відповідність між множинами A = $\{1, 2, 3\}$ і B = $\{1, 2, 3, 4\}$ задано множиною пар $\{(1,1), (1,4), (2,2), (3,1)\}$. Чи є ця відповідність функцією? Побудуйте граф оберненої відповідності. Чи буде вона функціональною? Вкажіть її область визначення та область значень.

223. Знайдіть функції, обернені до даних, та їх область визначення:

1) $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{x} - 6$; 2) $\boldsymbol{y} = -3 - 2\boldsymbol{x}$;

3) $\boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{x}}{5} + 4$; 4) $\boldsymbol{y} = \dfrac{-2\boldsymbol{x} + 4}{4}$;

5) $\boldsymbol{y} = \dfrac{3}{\boldsymbol{x}} - 4$; 6) $\boldsymbol{y} = -6 + \dfrac{1}{\boldsymbol{x}}$;

7) $y = \sqrt{x} - 3$; 8) $\boldsymbol{y} = \sqrt{\boldsymbol{x}} + 2$;

9) $\boldsymbol{y} = \sqrt{7 - 3\boldsymbol{x}}$; 10) $\boldsymbol{y} = \sqrt{16 - \boldsymbol{x}^2}$.

Лінійна функція, її графік і властивості

224. Лінійну функцію задано формулою y = 0,5x+3. Яке значення функції відповідає значенню аргументу –2? При якому значенні аргументу значення функції дорівнює 6,5?

225. Лінійну функцію задано формулою y = 5x+5. Яке значення функції відповідає значенню аргументу –1? При якому значенні аргументу значення функції дорівнює 15?

226. Знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = -x+8$ з осями координат. Знайти проміжки знакосталості цієї функції. Зростаюча чи спадна ця функція?

227. Знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = 4x-12$ з осями координат. Знайти проміжки знакосталості цієї функції. Зростаюча чи спадна ця функція?

228. Не виконуючи побудов, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

1) $y = 4x+8$; 2) $y = - x+3$;

3) $y = 0{,}5-2x$; 4) $y = 2x+3$.

229. Дано функцію $y = -4x-2$, $x \in R$. Побудуйте її графік і вкажіть ті значення, при яких $y > 0$, $y < 0$, $y < -4$.

230. Графік функції – пряма, що проходить через точки A і B. Задайте функцію формулою, якщо:

1) $A(0;2)$ і $B(3;0)$; 2) $A(-4; 2{,}5)$ і $B(5; 0{,}5)$;

3) $A(1;-2)$ і $B(3;4)$; 4) $A(-3;0)$ і $B(2;-2)$.

231. Яка з функцій є прямою пропорційністю; вказати кутовий коефіцієнт та кут нахилу до осі OX її графіка:

1) $y = x$; 2) $y = -\frac{x}{3}$;

3) $y = \sqrt{2x}$; 4) $y = -3x$.

Побудуйте графіки цих функцій. Яка з них зростаюча, яка спадна? Знайдіть їх область визначення та область значень.

232. Побудуйте графік лінійної функції і опишіть її властивості:

1) $y = x$; 2) $y = -x$;

3) $y = 3x$; 4) $y = -5x$;

5) $y = 6-3x$; 6) $y = \frac{2}{3}x+1$;

7) $y = 3x+2$; 8) $y = -5x-3$;

9) $y = \frac{x+3}{2}$; 10) $y = \frac{9-3x}{3}$.

Функція оберненої пропорційності, її графік і властивості

233. Знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = \frac{-6}{x}$ з осями координат. Знайти проміжки знакосталості цієї функції. Зростаюча чи спадна ця функція?

234. Знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = \frac{8}{x}$ з осями координат. Знайти проміжки знакосталості цієї функції. Зростаюча чи спадна ця функція?

235. Функцію задано формулою $y = \frac{10}{x}$. Яке значення функції відповідає значенню аргументу 0,2? При якому значенні аргументу значення функції дорівнює –5?

236. Чи перетинає графік функції $y = \frac{2}{x}$ вісь абсцис? Вісь ординат? Чи має графік цієї функції асимптоти? Які? Точки розриву? Які?

237. Графік функції $y = \frac{к}{x}$ проходить через точку А(2;1). Чи проходить він через точки: В(1;2), С(–2;–1), К(–1;–2)?

238. Побудуйте в одній системі координат графіки $y = \frac{3}{x}$ і $y = -\frac{3}{x}$ для $x>0$. Як розміщені ці графіки?

239. Побудуйте графік функції оберненої пропорційності та опишіть її властивості:

1) $y = \frac{5}{x}$; 2) $y = \frac{-2}{x}$;

3) $y = \frac{3}{x}$; 4) $y = \frac{12}{x}$;

5) $\boldsymbol{y} = -\frac{2}{3\boldsymbol{x}}$; 6) $\boldsymbol{y} = \frac{5}{4\boldsymbol{x}}$.

Квадратична функція, її графік і властивості

240. Квадратичну функцію задано формулою $y = 2x^2 - 8$. Яке значення функції відповідає значенню аргументу 1? При якому значенні аргументу значення функції дорівнює 10?

241. На множині додатних дійсних чисел задано функцію $y = -x^2+4$. Вкажіть множину її значення. Чи є монотонною ця функція? Побудуйте її графік і вкажіть проміжки знакосталості.

242. Побудуйте графік функції $y = x^2$ для:

1) $-5 \le \boldsymbol{x} \le 2$; 2) $0 \le \boldsymbol{x} \le 4$;

3) $x \le 3$; 4) $x \le 0$.

243. Побудуйте графік квадратичної функції та опишіть властивості:

1) $y = -3x^2$; 2) $y = -2x^2$;

3) $y = 2x^2$; 4) $y = 3x^2$;

5) $y = x^2+2$; 6) $y = x^2+3$;

7) $y = x^2-4x$; 8) $y = -2x^2+6x$;

9) $y = x^2-2x+1$; 10) $y = x^2+4x+4$;

11) $y = 5-4x-x^2$; 12) $y = 7+6x-x^2$;

13) $y = 3x^2+4x+3$; 14) $y = x^2-2x+4$;

15) $y = x^2 - 9$; 16) $y = x^2 - 4$;

17) $y = 2x^2-4$; 18) $y = -3x^2+3$.

19) $y = x^2-2x-2$; 20) $y = x^2+x+1$;

21) $y = x^2+2x+3$; 22) $y = x^2+8x-2$.

Побудова графіків розгалужених функцій

244. Побудуйте графіки функцій та опишіть їх властивості:

1) $y=\left[\begin{array}{l}0{,}5x-3,\ \text{при x}<1,\\ -x^2+2,\ \text{при x}\geq 1.\end{array}\right.$

2) $y=\left[\begin{array}{l}x-3,\ \text{при x}<-1,\\ x^2-2,\ \text{при x}\geq -1.\end{array}\right.$

3) $\boldsymbol{y}=\left[\begin{array}{l}\boldsymbol{x}+2,\ \text{при x}<\text{-}3,\\ -2\boldsymbol{x}^2+4,\ \text{при x}\geq -3.\end{array}\right.$

4) $y=\left[\begin{array}{l}-3-x,\ \text{при x}<2,\\ 4x^2-2,\ \text{при x}\geq 2.\end{array}\right.$

5) $y=\left[\begin{array}{l}\frac{2}{x},\ \text{при x}<0,\\ x^2+2,\ \text{при x}\geq 0.\end{array}\right.$

6) $y=\left[\begin{array}{l}\frac{-4}{x},\ \text{при x}<0,\\ -x^2,\ \text{при x}\geq 0.\end{array}\right.$

7) $y=\left[\begin{array}{l}4,\ \text{при x}\leq -2,\\ x^2,\text{при -}2<\text{x}<1\\ 4x,\text{при } x\geq 1\end{array}\right.$

8) $y=\left[\begin{array}{l}2,\text{при x}\leq -1,\\ -x^2,\text{при}-1<\text{x}<2\\ 2x,\text{при } x\geq 2\end{array}\right.$

9) $y=\left[\begin{array}{l}3,\text{при x}<-2,\\ x^2-1,\text{при}-2\leq \text{x}\leq 2\\ 3,\text{при } x>2\end{array}\right.$

10) $y=\left[\begin{array}{l}2,\text{при x}<-1,\\ x^2+1,\text{при}-1\leq \text{x}\leq 1\\ 2,\text{при } x>1\end{array}\right.$

11) $y=\left[\begin{array}{l}\frac{6}{x},\ \text{при x}<-2,\\ -1{,}5x,\text{при}-2\leq \text{x}\leq 2\\ \frac{6}{x},\text{при } x>2\end{array}\right.$

12) $y=\left[\begin{array}{l}\frac{4}{x},\ \text{при x}<-2,\\ -2x,\text{при}-2\leq \text{x}\leq 2\\ \frac{4}{x},\text{при } x>2\end{array}\right.$

13) $y=\left[\begin{array}{l}2x+4,\ \text{при x}\leq -1,\\ -x+1,\text{при}-1<\text{x}\leq 3\\ 2x-8,\text{при } 3<x\leq 4\\ 0,\text{при } x>4\end{array}\right.$

14) $y=\left[\begin{array}{l}0,\ \text{при x}\leq -1,\\ x+1,\text{при}-1<\text{x}\leq 0\\ 1-x,\text{при } 0<x\leq 1\\ 0,\text{при } x>1\end{array}\right.$

245. Побудуйте графіки функцій, вказати їх область визначення:

1) y = $\frac{x^2+6x+9}{x+3}-\frac{x^2+5x}{x}$;

2) y = $\frac{x^2-4x+4}{x-2}-\frac{x^2-3x}{x}$;

3) y = $\frac{(x-3)^2}{x-3}$;

4) y = $\frac{(x+2)^2}{x+2}$;

5) y = $\frac{4x-8}{x^2-2x}$;

6) y = $\frac{3x+6}{x^2+2x}$;

7) y = $\frac{x^2-x}{8x-8}$;

8) y = $\frac{x^2-2x}{-3x+6}$;

9) $y = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x}$;

10) $y = \frac{x^3 + 4x^2 - 5x}{x}$;

11) $y = \frac{x^3 - 8}{x - 2} - 3$;

12) $y = \frac{x^3 + 8}{x + 2} - 3$.

246. Побудуйте графіки рівнянь:

1) $\frac{y - x^2}{y - x} = 0$;

2) $\frac{y + x^2}{x - y} = 0$;

3) $\frac{y - x^2}{(x+1)^2 (y-1)^2} = 0$;

4) $\frac{y + x^2}{(x-1)^2 (y+1)^2} = 0$.

Методичні рекомендації щодо написання контрольної роботи №1

Для виконання контрольної роботи з теми «Відповідності. Відношення. Відображення» студент повинен:

знати основні поняття: *відповідність; образ і прообраз елемента; область відправлення і область прибуття; множина визначення та множина значень; протилежна і обернена відповідність; відношення; властивості відношень; відображення, його види та властивості.*

вміти:

– *задавати відповідність між двома множинами різними способами;*
– *формулювати протилежну і обернену відповідності до заданої, будувати їх графи та графіки;*
– *визначати взаємно однозначну відповідність, рівно потужні множини;*
– *задавати відношення на множині різними способами;*
– *визначати властивості відношень;*
– *встановлювати, чи є відповідність між двома множинами відображенням, його тип та властивості.*

Контрольна робота містить **4 завдання** (3 комплексні практичні завдання, 1 теоретичне питання) і сумарно оцінюються **50 балами.**

Кожне завдання оцінюється:

1 завдання – 20 балів;

2 завдання – 15 балів;

3 завдання – 10 балів;

4 завдання – 5 балів.

Типовий варіант контрольної роботи №1

Розділ 3. Відповідності. Відношення. Відображення. Функції   Варіант – 35

1. Між елементами множин X = {2, 3, 4, 6, 8} і У = {0, 1, 2, 3, 4, 5} задано відповідність *«більше на 3»*.

1) *Задати її всіма способами.*
2) *Вказати її область відправлення, область прибуття, множину визначення, множину значень.*
3) *Знайти образ елемента 3, прообраз елемента 5.*
4) *Чи є ця відповідність повною, порожньою, взаємно однозначною?*
5) *Чи є множини X і У рівнопотужними?*
6) *Сформулювати протилежну відповідність до заданої, побудувати її граф та графік.*
7) *Сформулювати обернену відповідність до заданої, побудувати її граф та графік.*

2. На множині X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} задане відношення R: *«кратне»*.

1) *Задати це відношення всіма способами.*
2) *Визначити властивості заданого відношення.*
3) *Вказати обернене відношення до даного.*
4) *Побудувати граф і графік оберненого відношення.*
5) *Записати множини визначення і множини значень заданого і оберненого відношення.*

3. Між елементами множини X = R і У = R задано відповідність $y = 5x$.

1) *Обгрунтувати, чи є відображенням задана відповідність.*
2) *Якщо так, то вказати вид даного відображення та властивості.*
3) *Записати множину образів і множину прообразів цієї відповідності.*

4. *Рефлексивне відношення та особливості його графа. Приклади.*

Методичні рекомендації щодо написання контрольної роботи №2

Для виконання контрольної роботи з теми «Функції» студент повинен:

знати основні поняття: *функція; незалежна змінна; залежна змінна; графік функції; область визначення функції; множина значень функції; способи задання функції; основні властивості функцій; обернена функція; лінійна функція; функція оберненої пропорційності; квадратична функція*

вміти:

– *встановлювати, чи є відповідність функцією;*

– *знаходити область визначення та множину значень функції;*

– *знаходити значення функції у певній точці та значення аргументу за відомим значенням функції у ній;*

– *задавати функцію різними способами;*

– *перевіряти функції на парність, періодичність, монотонність, обмеженість;*

– *знаходити обернену функцію до заданої;*

– *будувати графіки та описувати властивості лінійної функції, функції оберненої пропорційності, квадратичної функції.*

Контрольна робота містить **10 завдань** (9 практичних завдань, 1 теоретичне питання) і сумарно оцінюється **50 балами.**

Кожне завдання оцінюється по 5 балів.

Типовий варіант контрольної роботи №2

Розділ 3. Відповідності. Відношення. Відображення. Функції **Варіант – 35**

1. Знайти область визначення функцій $y = \frac{x+3}{x^2+4x+4}$ та її значення у точці x = 1.
2. Дослідити функцію $y = x^2 + 8x - 2$ на парність.
3. Знайти найменший додатний період функції $y = 3\sin(5 + 4x)$.
4. Дослідити функцію $y = 8x - 2$ на монотонність. Знайти нулі та проміжки знакосталості цієї функції.
5. Дослідити функцію $y = -4x^2$ на обмеженість.
6. Знайти функцію, обернену до даної $y = \frac{2}{x+4} - 3$.
7. Дослідити властивості функції $y = -3x + 3$ і побудувати її графік.
8. Дослідити властивості функції $y = -3/x$ і побудувати її графік.
9. Дослідити властивості функції $y = x^2 + 3$ і побудувати її графік.
10. Табличний спосіб задання функції.

Перелік питань для самоконтролю

1. Відповідність між елементами двох множин. Прообраз елемента. Образ елемента. Прилади.
2. Область відправлення відповідності. Область прибуття відповідності. Множина визначення відповідності. Множина значень відповідності.
3. Словесний спосіб задання відповідності. Аналітичний спосіб задання відповідності. Приклади.
4. Задання відповідності за допомогою переліку елементів. Задання відповідності за допомогою характеристичних властивостей. Характеристична властивість відповідності.
5. Задання відповідності за допомогою графа. Граф відповідності.
6. Графічний спосіб задання відповідності. Графік відповідності.
7. Табличний спосіб задання відповідності.
8. Протилежна відповідність та її побудова.
9. Обернена відповідність та її побудова.
10. Типи відповідностей. Повна відповідність. Порожня відповідність. Несумісні відповідності. Сумісні відповідності. Наслідок відповідності.
11. Взаємно однозначна відповідність. Рівнопотужні множини. Рівні множини.
12. Відношення на множині. Приклади.
13. Область відправлення відношення. Область прибуття відношення. Множина визначення відношення. Множина значень відношення.
14. Словесний спосіб задання відношення. Аналітичний спосіб задання відношення. Приклади.
15. Задання відношення за допомогою переліку елементів. Задання відношення за допомогою характеристичних властивостей.
16. Задання відношення за допомогою графа. Граф відношення. Вершини графа. Петля графа. Подвійна стрілка. Одинарна стрілка.

17. Графічний спосіб задання відношення. Графік відношення.

18. Табличний спосіб задання відношення.

19. Протилежне відношення та його побудова.

20. Обернене відношення та його побудова.

21. Рефлексивне відношення. Антирефлексивне відношення. Арефлексивне відношення.

22. Симетричне відношення. Антисиметричне відношення. Асиметричне відношення.

23. Транзитивне відношення. Антитранзитивне відношення. Атранзитивне відношення.

24. Зв’язне відношення. Відношення еквівалентності. Розбиття множини. Класи еквівалентності. Приклади.

25. Відношення порядку. Відношення строгого порядку. Відношення нестрогого порядку.

26. Частково упорядкована множина. Відношення лінійного порядку. Лінійно упорядкована множина. Дискретна множина. Щільна множина.

27. Відображення двох множин. Особливість графів відображень.

28. Ін’єктивне відображення. Сюр’єктивне відображення. Бієктивне відображення.

29. Типи відображень. Відображення X в У. Відображення X на У. Приклади.

30. Скінченна множина. Нескінченна множина. Зчисленна множина. Потужність континууму.

31. Функція. Аргумент (незалежна змінна). Функція (залежна змінна).

32. Область визначення функції. Застережливі умови для змінної. Множина значень функції.

33. Способи задання функції. Словесний спосіб задання функції.

34. Аналітичний спосіб задання функції. Явний і неявний вигляд функції.

35. Значення функції у певній точці. Точки перетину графіка з осями координат. Розгалужена функція.

36.Графічний спосіб задання функції. Графік функції. Точка на графіку функції.

37.Табличний спосіб задання функції.

38.Парна функція. Умова парності функції.

39.Властивості парної функції.

40.Непарна функція. Умова непарності функції.

41.Властивості непарної функції.

42.Ні парна, ні непарна функція. Властивості ні парної, ні непарної функції.

43.Періодична функція. Умова періодичності функції.

44.Період функції. Властивість періодичної функції.

45.Монотонна функція на всій області визначення.

46.Зростаюча функція. Інтервал зростання функції.

47.Спадна функція. Інтервал спадання функції. Стала функція. Інтервали монотонності функції.

48.Точка максимуму функції. Точка мінімуму функції. Екстремум функції.

49.Функція обмежена зверху. Функція обмежена знизу.

50.Функція обмежена і зверху, і знизу. Необмежена функція.

51.Нулі функції. Проміжок знакосталості функції.

52.Точки розриву функції. Неперервна функція. Асимптоти функції.

53.Схема опису властивостей функції.

54.Обернена функція та її властивості. Умови існування оберненої функції.

55.Лінійна функція. Пряма. Кутовий коефіцієнт. Властивості лінійної функції.

56.Часткові випадки лінійної функції.

57.Функція прямої пропорційності. Властивості прямої пропорційності.

58.Функція оберненої пропорційності. Гіпербола. Властивості.

59.Квадратична функція. Парабола. Властивості квадратичної функції.

60.Часткові випадки квадратичної функції.

Список використаної літератури

1. Затула Н.І., Зуб А.М., Коберник Г.І., Нещадим А.Ф. Математика: навчальний посібник для педвузів. Київ: Кондор, 2006. 560 с.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика: навчальний посібник. 5-е вид. Київ: Центр учбової літератури, 2010. 448 с.
3. Коберник Г.І., Чирва Г.М. Математика. Практикум. Ч.І.: навчальний посібник для студентів спеціальності «Початкова освіта». Умань: ФОП Жовтий О.О., 2013. 193 с.
4. Коберник Г.І., Чирва Г.М. Математика. Практикум. Ч.ІІ.: навчальний посібник для студентів спеціальності «Початкова освіта». Умань: РВЦ «Софія», 2013. 185 с.
5. Кухар В.М., Білий Б.М. Теоретичні основи початкового курсу математики. Київ: Вища школа, 1987. 320 с.
6. Кухар В.М., Тадіян С.І., Тадіян В.П. Математика. Практикум. Київ: Вища школа, 1989. 333 с.
7. Романишин Р.Я. Множини, відповідності і відношення. Математичні твердження та їх структура: методичні рекомендації для студентів спеціальності «Початкове навчання». Івано-Франківськ: Видавець Кушнір Г.М., 2010. 36 с.
8. Сілков В.В. Математика. Курс лекцій. Ч.ІІ. Методичні вказівки до вивчення курсу математики для студентів спеціальності «Початкова освіта». Рівне: РДГУ, 2008. 104 с.

Предметний покажчик

Г

О

П

Р

С

Т

У

Електронне навчально-методичне видання

Білецька Л.С., Стасів Н.І.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПОЧАТКОВОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Розділ 3

Відповідності. Відношення. Відображення. Функції

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

Редактор
Ірина Невмержицька
Коректор
Ірина Артимко

Здано до набору 01.04.2025 р. Гарнітура Times. Ум. друк. арк. 9,25. Зам. 21.

Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої ДК № 5140 від 01.07.2016 р.) 82100, Дрогобич, вул. І. Франка, 24. К. 203.