

Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка

*Леся Комарницька,
Юрій Матурін*

ПРАКТИКУМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Частина 2

Дрогобич
2025

УДК 512.72(072)
К66

*Рекомендовано вченою радою Дрогобицького державного педагогічного
університету імені Івана Франка
(протокол № 4 від 30 04. 2025 р.)*

Рецензенти:

Дільний В.М., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Національного університету «Львівська Політехніка»;

Хаць Р.В., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та економіки Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Відповідальний за випуск— Війчук Т.І., кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики та економіки Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Комарницька Леся, Матурін Юрій.

**К 66 Практикум розв'язування задач з лінійної алгебри.
Частина 2.** Дрогобич : Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, 2025. 92 с.

Посібник написано відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Лінійна алгебра» для підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр», затвердженої науково-методичною радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (протокол № 7 від 19.09.2023 р.). Посібник містить приклади розв'язування задач і вправ та завдання для самостійної роботи.

Розрахований на студентів педагогічних закладів вищої освіти, які вивчають курс «Лінійна алгебра», викладачів вищої математики.

Бібліографія 7 назв.

© Комарницька Леся, Матурін Юрій, 2025
© Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, 2025

ЗМІСТ

Вступ.....	5
Розділ I. ВЕКТОРНІ ПРОСТОРИ. УНІТАРНІ ТА ЕВКЛІДОВІ ПРОСТОРИ.....	6
Тема 1. Базис і розмірність векторного простору. Координати вектора. Зв'язок між базисами. Перетворення координат вектора при переході до іншого базису	6
Завдання для самостійної роботи до теми 1	12
Тема 2. Лінійна оболонка множини векторів. Перетин, сума і пряма сума підпросторів.....	12
Завдання для самостійної роботи до теми 2	19
Тема 3. Векторний простір із скалярним добутком. Процес ортогоналізації системи векторів.....	19
Завдання для самостійної роботи до теми 3	23
Тема 4. Ортогональний та ортонормований базиси	24
Завдання для самостійної роботи до теми 4	28
Тема 5. Ортогональне доповнення підпростору. Ізоморфізм векторних та евклідових просторів.....	28
Завдання для самостійної роботи до теми 5	33
Розділ II. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ	35
Тема 6. Лінійні оператори. Матриця лінійного оператора	35
Завдання для самостійної роботи до теми 6	39
Тема 7. Зв'язок між матрицями лінійного оператора в різних базисах. Подібні матриці	40
Завдання для самостійної роботи до теми 7	44
Тема 8. Операції над лінійними операторами. Область значень і ядро, ранг і дефект лінійного оператора. Обернений лінійний оператор.....	45
Завдання для самостійної роботи до теми 8	51
Тема 9. Власні вектори і власні значення лінійного оператора. Лінійні оператори з простим спектром. Зведення матриці до діагонального вигляду	52
Завдання для самостійної роботи до теми 9	60
Розділ III. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ НА ЕВКЛІДОВОМУ ТА УНІТАРНОМУ ПРОСТОРАХ	61
Тема 10. Ортогональні, спряжені і самоспряжені (симетричні) лінійні оператори.....	61
Завдання для самостійної роботи до теми 10	69
Розділ IV. КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ.....	71
Тема 11. Квадратичні форми. Матриця квадратичної форми. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду методом ортогональних перетворень.....	71

Завдання для самостійної роботи до теми 11	79
Тема 12. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду методом Лагранжа. Ранг квадратичної форми.....	79
Завдання для самостійної роботи до теми 12	83
Тема 13. Нормальний вигляд квадратичної форми. Еквівалентні квадратичні форми. Додатно визначені форми.....	83
Завдання для самостійної роботи до теми 13	84
Література	91

ВСТУП

Цей посібник охоплює матеріал із тем «Векторні простори. Унітарні та евклідові простори. Лінійні оператори. Лінійні оператори на евклідовому та унітарному просторах. Квадратичні форми» курсу «Лінійна алгебра». Він побудований за принципом задачника-практикуму: кожна тема містить ряд типових задач з детальними розв'язаннями або вказівками та відповідями до них і завдання для самостійної роботи. Нумерацію більшості завдань, що використовується тут, взято із збірника [2] та із збірників, які вказані в літературі, а нумерація формул ведеться заново у кожній темі.

Посібник призначений для студентів, які вивчають пропоновані теми в курсі «Лінійна алгебра». Він допоможе студентам у підготовці до практичних занять та самостійному вивченні даного матеріалу.

Розділ І. ВЕКТОРНІ ПРОСТОРИ. УНІТАРНІ ТА ЕВКЛІДОВІ ПРОСТОРИ

Тема 1. Базис і розмірність векторного простору. Координати вектора. Зв'язок між базисами. Перетворення координат вектора при переході до іншого базису

№ 30.5 [2]. Що можна сказати про лінійну залежність: **а)** системи, яка складається із 49 векторів простору розмірності 50; **б)** системи, яка складається із 100 векторів простору розмірності 100; **в)** системи, яка складається із 1001 вектора простору розмірності 1000?

Розв'язання.

а) Нічого конкретного, бо можуть бути системи із 49 векторів як лінійно залежні (досить узяти 49 однакових векторів), так і лінійно незалежні (досить узяти 49 векторів з довільного базису розглядуваного простору); **б)** нічого конкретного, так само, як і в пункті а); **в)** така система обов'язково лінійно залежна.

№ 30.8 [2] (а). Знайти базис і розмірність підпростору L арифметичного векторного простору V_n , що складається з усіх векторів простору V_n , у кожного з яких перша і остання координати рівні між собою.

Розв'язання.

У випадку знаходження базису всіх підпросторів арифметичного векторного простору V_n швидкість виконання завдання залежить від нашого вміння змушувати “бігати одиничку”. Пояснимо докладніше цей вислів. Відомо, що найдоцільніше за базис простору V_n брати набір так званих одиничних векторів:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1).$$

При побудові базису довільного підпростору L простору V_n ми маємо те саме завдання.

Легко довести, що система векторів

$$\begin{aligned} \vec{c}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, 1), \\ \vec{c}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \\ \vec{c}_3 &= (0, 0, 1, \dots, 0, 0), \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{c}_{n-1} &= (0, 0, 0, \dots, 1, 0) \end{aligned}$$

є базисом розглядуваного підпростору L . А якщо у векторному просторі L є базис, що складається з n векторів, то простір L має розмірність n . Тому, як видно з базису, розмірність цього підпростору L дорівнює $n - 1$.

№ 1300 [6]. Знайти базис і розмірність векторного підпростору арифметичного векторного простору V_n , що складається з векторів вигляду $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta, \dots)$, де α і β – довільні числа.

Розв'язання.

За базис можна взяти систему векторів

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots).$$

Розмірність цього підпростору дорівнює 2.

Знайти базис і розмірність дійсного векторного простору L квадратних матриць 2-го порядку з дійсними елементами.

Розв'язання.

Зауважимо спочатку, що як при відшукуванні базису всіх підпросторів арифметичного векторного простору V_n , так і у випадку простору матриць, використаємо метод “біжучої одинички”.

Покажемо, що система векторів (матриць)

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

простору L лінійно незалежна. Складемо рівність

$$\lambda_1 E_{11} + \lambda_2 E_{12} + \lambda_3 E_{21} + \lambda_4 E_{22} = O$$

або

$$\begin{aligned} \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже, остання рівність можлива лише тоді, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

Крім того, будь-який вектор (матриця) простору L лінійно виражається через систему векторів $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$, а саме,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} E_{11} + a_{12} E_{12} + a_{21} E_{21} + a_{22} E_{22}.$$

Отже, $B = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ – базис простору L . Оскільки цей базис складається з чотирьох векторів, то розмірність розглядуваного простору дорівнює 4.

Зауваження. Аналогічно знаходиться базис простору квадратних матриць n -го порядку з дійсними елементами, причому його розмірність дорівнює n^2 .

№ 31.2 [2] (а). Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1,1,-1)$, $\vec{a}_2 = (1,2,1)$, $\vec{a}_3 = (3,2,1)$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{x} = (1,7,-1)$ у цьому базисі.

Розв'язання.

Оскільки розглядуваний простір має розмірність 3 (це видно з кількості координат у заданих векторах), то досить довести, що система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ лінійно незалежна. Для цього треба показати, що ранг матриці, складеної з координат цих векторів, дорівнює 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Координати вектора $\vec{x}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ знаходимо з рівності:

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3.$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 1, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 7, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3, \\ \lambda_2 = 4, \\ \lambda_3 = -2. \end{cases}$$

Отже, координатний рядок вектора $\vec{x}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$: $[3, 4, -2]$.

№ 31.3 [2]. Довести, що кожна з двох даних систем векторів є базисом, і знайти зв'язок між координатами того самого довільно вибраного вектора в цих двох базисах, якщо:

$$\text{а) } \vec{e}_1 = (1,1,1), \vec{e}_2 = (1,-1,2), \vec{e}_3 = (1,3,-1);$$

$$\vec{e}'_1 = (1,-1,1), \vec{e}'_2 = (1,2,-1), \vec{e}'_3 = (2,2,-1).$$

Розв'язання.

Те, що кожна з двох даних систем векторів є базисом, доводиться аналогічно, як і в № 31.2. Знайдемо зв'язок між координатами того самого довільно вибраного вектора $\vec{a}$ в цих двох базисах.

Якщо вектор $\vec{a}$ в базисі B має координати $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, а в базисі B' – координати $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$, то

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3] T,$$

$$[\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] T^{-1},$$

де T – матриця переходу від базису B до базису B' , яка визначається з матричної рівності $e' = Te$, де

$$e' = \begin{pmatrix} \vec{e'_1} \\ \vec{e'_2} \\ \vec{e'_3} \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{pmatrix}.$$

Нехай

$$e^0 = \begin{pmatrix} \vec{e_1^0} \\ \vec{e_2^0} \\ \vec{e_3^0} \end{pmatrix}, \text{ де } \vec{e_1^0} = (1,0,0), \vec{e_2^0} = (0,1,0), \vec{e_3^0} = (0,0,1).$$

Тоді

$$e = A_0 e^0, \quad (1)$$

$$e' = B_0 e^0, \quad (2)$$

де A_0 і B_0 – матриці, складені із координат векторів базисів B і B' відповідно. Визначимо e^0 з рівності (1)

$$e^0 = A_0^{-1} e$$

і підставимо в рівність (2):

$$e' = B_0 A_0^{-1} e.$$

Звідси отримаємо формули

$$T = B_0 A_0^{-1}, \quad T^{-1} = A_0 B_0^{-1}.$$

Знаходимо матрицю A_0^{-1} :

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$T = B_0 A_0^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ -8 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3] T = [\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3] \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$[\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] T^{-1} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} \alpha'_1 = 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, \\ \alpha'_2 = 6\alpha_1 + 4\alpha_2 + 4\alpha_3, \\ \alpha'_3 = -4\alpha_1 - 3\alpha_2 - 2\alpha_3. \end{cases}$$

№ 31.4 [2]. Знайти координати матриці $A = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$ в базисі

$$\text{б) } B' \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Розв'язання.

Розкладемо задану матрицю за базисними матрицями; коефіцієнти розкладу і будуть шуканими координатами.

$$\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Використаємо означення рівності двох матриць, отримаємо систему:

$$\begin{cases} \lambda_4 = 13, \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 12, \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = -1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_4 = 13, \\ \lambda_3 = -1, \\ \lambda_2 = -13, \\ \lambda_1 = -4. \end{cases}$$

Отже, $[-4, -13, -1, 13]$ – шуканий координатний рядок.

№ 31.5 [2]. Знайти матрицю переходу T від базису B до базису B' , де

$$B \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Розв'язання.

Позначимо матриці базису B через E_1, E_2, E_3, E_4 , а матриці базису B' через E'_1, E'_2, E'_3, E'_4 . Розкладемо матриці E'_1, E'_2, E'_3, E'_4 через матриці E_1, E_2, E_3, E_4 :

$$E'_1 = \tau_{11}E_1 + \tau_{12}E_2 + \tau_{13}E_3 + \tau_{14}E_4,$$

$$E'_2 = \tau_{21}E_1 + \tau_{22}E_2 + \tau_{23}E_3 + \tau_{24}E_4,$$

$$E'_3 = \tau_{31}E_1 + \tau_{32}E_2 + \tau_{33}E_3 + \tau_{34}E_4,$$

$$E'_4 = \tau_{41}E_1 + \tau_{42}E_2 + \tau_{43}E_3 + \tau_{44}E_4.$$

Матрицю переходу складають коефіцієнти цих розкладів.

З першої рівності маємо:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tau_{11} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \tau_{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \tau_{13} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \tau_{14} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

звідки

$$\begin{cases} \tau_{11} + \tau_{12} + \tau_{13} + \tau_{14} = 0, \\ -\tau_{11} + \tau_{12} + \tau_{13} = 0, \\ \tau_{11} + \tau_{12} = 0, \\ \tau_{11} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau_{14} = -2, \\ \tau_{13} = 2, \\ \tau_{12} = -1, \\ \tau_{11} = 1. \end{cases}$$

Аналогічно знаходимо інші коефіцієнти. Шукана матриця переходу має вигляд:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

№ 31.6. Як зміниться матриця переходу від одного базису до другого, якщо: **а)** переставити два перших (довільних) вектори першого базису? **б)** поміняти місцями два перших (довільних) вектори другого базису? **в)** записати вектори обох базисів у зворотному порядку?

Розв'язання.

У матриці переходу від першого базису до другого: **а)** поміняються місцями перші (довільні) два стовпці; **б)** поміняються місцями перші (довільні) два рядки; **в)** усі рядки і всі стовпці запишуться у зворотному порядку.

Завдання для самостійної роботи до теми 1

№ 30.8 [2] (в). Знайти базис і розмірність підпростору L арифметичного векторного простору V_n , що складається з усіх векторів простору V_n , у кожного з яких координати з парними (непарними) номерами дорівнюють нулю.

№ 31.2 [2] (б). Довести, що вектори

$$\vec{a}_1 = (1, 1, -1), \vec{a}_2 = (1, -1, 0), \vec{a}_3 = (-1, 0, 0)$$

утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{x} = (2, -1, 3)$ у цьому базисі.

№ 31.2 [2] (в). Довести, що вектори

$$\vec{a}_1 = (1, -1, 0, 0), \vec{a}_2 = (0, 1, 1, 0), \vec{a}_3 = (0, 0, -1, 0), \vec{a}_4 = (0, 0, 0, 1)$$

утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{x} = (2, 1, -1, 0)$ у цьому базисі.

№ 31.3 [2]. Довести, що кожна з двох даних систем векторів є базисом, і знайти зв'язок між координатами того самого довільно вибраного вектора в цих двох базисах, якщо:

б) $\vec{e}_1 = (1, 0, 1), \vec{e}_2 = (3, -1, 2), \vec{e}_3 = (0, -1, 0);$

$$\vec{e}'_1 = (0, -1, 0), \vec{e}'_2 = (3, -1, 2), \vec{e}'_3 = (1, 0, 1);$$

Що відбувається у цьому випадку з координатами вектора при переході від одного базису до іншого?

в) $\vec{e}_1 = (1, 1, 1, 1), \vec{e}_2 = (1, 1, 1, 0), \vec{e}_3 = (1, 1, 0, 0), \vec{e}_4 = (1, 0, 0, 0);$

$$\vec{e}'_1 = (0, 0, 0, 1), \vec{e}'_2 = (0, 0, 1, 1), \vec{e}'_3 = (0, 1, 1, 1), \vec{e}'_4 = (1, 1, 1, 1).$$

№ 31.4 [2]. Знайти координати матриці $A = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$ в базисі

а) $B \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$

Тема 2. Лінійна оболонка множини векторів. Перетин, сума і пряма сума підпросторів

№ 32.2 [2] (а). Знайти базис і розмірність векторного підпростору, який є лінійною оболонкою такої системи векторів:

$$\vec{a}_1 = (1, 0, 0, -1), \vec{a}_2 = (2, 1, 1, 0), \vec{a}_3 = (1, 1, 1, 1), \vec{a}_4 = (1, 2, 3, 4), \vec{a}_5 = (0, 1, 2, 3).$$

Розв'язання.

Розмірність лінійної оболонки $L'(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5)$ дорівнює рангу

матриці, яка містить координати даних векторів у довільному базисі всього простору, а за базис простору L' можна взяти довільну максимальну

лінійно незалежну підсистему системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{a}_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{a}_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{a}_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{a}_1$$

$$\text{rang } A = 3, \text{ тому } \dim L'(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5) = 3.$$

Однією з максимальних лінійно незалежних підсистем системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5$ є підсистема $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$, її можна взяти за базис. За базис можна взяти також підсистеми $\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_4$, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_5$, $\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_5$.

№ 32.5 [2] (г). Знайти розмірність s суми і розмірність d перетину векторних підпросторів U і V , заданих як лінійні оболонки векторів

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_l$ відповідно:

$$\vec{a}_1 = (1, 0, 1), \vec{a}_2 = (-1, 2, 1), \vec{a}_3 = (0, 2, 2);$$

$$\vec{b}_1 = (3, 2, 1), \vec{b}_2 = (2, 1, 0), \vec{b}_3 = (1, 1, 1).$$

Розв'язання.

Знайдемо спочатку розмірності просторів U і V .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\dim U = 2$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\dim V = 2$.

Щоб знайти розмірність суми, складемо матрицю з базисних векторів простору U і простору V (ненульові рядки в східчастих матрицях) та обчислимо її ранг:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $s = \dim(U + V) = 3$.

За теоремою про розмірність суми підпросторів

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V),$$

звідки $\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V)$.

Отже, $d = \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 3 = 1$.

№ 32.6 [2] (д). Знайти базиси суми і перетину векторних підпросторів U і V , заданих як лінійні оболонки векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_l$ відповідно:

$$\vec{a}_1 = (1, 1, 1, 0), \vec{a}_2 = (0, 1, 0, 0), \vec{a}_3 = (-1, 2, 0, 1);$$

$$\vec{b}_1 = (0, 1, 0, 0), \vec{b}_2 = (2, 1, 1, 0), \vec{b}_3 = (0, 2, 1, 1).$$

Розв'язання.

Відомо, що коли розглядається сума лінійних оболонок $U = L'(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$ і $V = L'(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_l)$, то базисом суми $S = U + V$ є кожна максимально лінійно незалежна підсистема системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_l$ або системи векторів $\vec{a}_{j_1}, \vec{a}_{j_2}, \dots, \vec{a}_{j_s}, \vec{b}_{i_1}, \vec{b}_{i_2}, \dots, \vec{b}_{i_m}$, де $\vec{a}_{j_1}, \vec{a}_{j_2}, \dots, \vec{a}_{j_s}$ – базис U , $\vec{b}_{i_1}, \vec{b}_{i_2}, \dots, \vec{b}_{i_m}$ – базис V .

Знайдемо спочатку базиси просторів U і V . Для цього складемо матриці з координат даних векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_l$ та знайдемо їхні ранги.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{rang} A = 3.$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{rang} C = 3.$$

Отже, базисом простору U є система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, а базисом простору V є система векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$. Знайдемо базис простору $U + V$.

Для цього складемо матрицю з координат векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ (або з ненульових рядків відповідних східчастих матриць) і знайдемо її ранг.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{rang} D = 4.$$

За базис простору $S = U + V$ можна взяти вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b}_2$. Знайдемо тепер базис перетину $P = U \cap V$. Оскільки $\dim U = 3$, $\dim V = 3$, $\dim S = 4$, то $\dim P = 3 + 3 - 4 = 2$.

Отже, базис простору P складається з двох векторів. Знайдемо їх. Оскільки простір P складається з тих і тільки тих векторів $\vec{p}$, що належать як до простору U , так і до простору V , то можна припустити, що

$$\vec{p} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 = y_1 \vec{b}_1 + y_2 \vec{b}_2 + y_3 \vec{b}_3. \quad (1)$$

Ця рівність рівносильна системі чотирьох лінійних однорідних рівнянь з шістьма невідомими $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ рангу 4:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2y_2 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - y_1 - y_2 - 2y_3 = 0, \\ x_1 - y_2 - y_3 = 0, \\ x_3 - y_3 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Знайдемо фундаментальну систему розв'язків цієї системи.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок системи (2):

$$\begin{cases} x_1 = y_3, \\ x_2 = y_1 - y_3, \\ x_3 = y_3, \\ y_2 = 0. \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
$\vec{f}_1$	0	1	0	1	0	0
$\vec{f}_2$	1	-1	1	0	0	1

Фундаментальна система розв'язків системи (2):

$$\vec{f}_1 = (0, 1, 0, 1, 0, 0), \quad \vec{f}_2 = (1, -1, 1, 0, 0, 1).$$

Базис простору P дістанемо, якщо в рівності (1) замість x_1, x_2, x_3 (або замість y_1, y_2, y_3) підставимо їх значення з $\vec{f}_1$ і $\vec{f}_2$:

$$\begin{aligned}\vec{c}_1 &= \vec{a}_2 = \vec{b}_1 = (0, 1, 0, 0), \\ \vec{c}_2 &= \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{b}_3 = (0, 2, 1, 1).\end{aligned}$$

№ 32.6 [2] (г). Знайти базиси суми і перетину векторних підпросторів U і V , заданих як лінійні оболонки векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_l$ відповідно:

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= (1, 0, -1), \quad \vec{a}_2 = (0, 1, 0), \quad \vec{a}_3 = (0, 1, -1); \\ \vec{b}_1 &= (1, 0, 0), \quad \vec{b}_2 = (-1, 1, 0), \quad \vec{b}_3 = (1, 1, 1).\end{aligned}$$

Розв'язання.

Знайдемо спочатку базиси просторів U і V .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad rang A = 3.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad rang C = 3.$$

Отже, базисом простору U є система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, а базисом простору V є система векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$. Знайдемо базис простору $U + V$.

Для цього складемо матрицю з координат векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ (або з ненульових рядків відповідних східчастих матриць) і знайдемо її ранг.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad rang D = 3.$$

За базис простору $S = U + V$ можна взяти вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ (або $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$). Знайдемо тепер базис перетину $P = U \cap V$. Оскільки $\dim U = 3$, $\dim V = 3$, $\dim S = 3$, то $\dim P = 3 + 3 - 3 = 3$.

Отже, базис простору P теж складається з трьох векторів.

Таким чином, у цьому випадку і підпростір U , і підпростір V збігаються з усім векторним простором L_3 . Тому за базис перетину, як і за базис суми, можна взяти вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ (або $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$).

№ 32.11 [2]. Знайти простір розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (знайти базис і визначити розмірність):

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Для знаходження базису слід вказати фундаментальну систему розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь, а розмірністю простору буде число векторів фундаментальної системи розв'язків, яке, як відомо, дорівнює $n - r$, де n – кількість невідомих, r – ранг матриці системи.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = x_4 - x_5, \\ x_2 = x_4 - x_6, \\ x_3 = x_4. \end{cases}$$

Базис: $\vec{b}_1 = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$, $\vec{b}_2 = (-1, 0, 0, 0, 1, 0)$, $\vec{b}_3 = (0, -1, 0, 0, 0, 1)$.

Розмірність простору розв'язків дорівнює 3.

Завдання для самостійної роботи до теми 2

№ 32.2 [2] (в). Знайти базис і розмірність векторного підпростору, який є лінійною оболонкою такої системи векторів:

$$\vec{a}_1 = (1,1,1,0), \quad \vec{a}_2 = (1,1,-1,-1), \quad \vec{a}_3 = (2,2,0,0,-1), \quad \vec{a}_4 = (1,1,5,5,2), \\ \vec{a}_5 = (1,-1,-1,0,0).$$

№ 32.5 [2] (д). Знайти розмірність s суми і розмірність d перетину векторних підпросторів U і V , заданих як лінійні оболонки векторів

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \text{ і } \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_l \text{ відповідно:} \\ \vec{a}_1 = (1,1,1,1), \quad \vec{a}_2 = (1,-1,1,-1), \quad \vec{a}_3 = (1,3,1,3); \\ \vec{b}_1 = (1,2,0,2), \quad \vec{b}_2 = (1,2,1,2), \quad \vec{b}_3 = (3,1,3,1).$$

№ 32.6 [2] (а). Знайти базиси суми і перетину векторних підпросторів U і V , заданих як лінійні оболонки векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_l$ відповідно:

$$\vec{a}_1 = (1,2,1), \quad \vec{a}_2 = (1,1,-1), \quad \vec{a}_3 = (1,3,3); \\ \vec{b}_1 = (2,3,-1), \quad \vec{b}_2 = (1,2,2), \quad \vec{b}_3 = (1,1,-3).$$

№ 32.11 [2]. Знайти простір розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (знайти базис і визначити розмірність):

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Тема 3. Векторний простір із скалярним добутком. Процес ортогоналізації системи векторів

Знайти скалярний добуток векторів $\vec{x} = (1,-4,2,2)$, $\vec{y} = (3,3,3,3)$.
Нормувати вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$.

Розв'язання.

$$(\vec{x}, \vec{y}) = 3 - 12 + 6 + 6 = 3;$$

$$\vec{x}_0 = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \vec{x} = \frac{1}{\sqrt{1+16+4+4}} \vec{x} = \frac{1}{5} \vec{x} = \left(\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right);$$

$$\vec{y}_0 = \frac{1}{\|\vec{y}\|} \vec{y} = \frac{1}{\sqrt{9+9+9+9}} \vec{y} = \frac{1}{6} \vec{y} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

№ 34.10 [2]. Чи буде векторний простір L_4 над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ евклідовим, якщо за скалярний добуток довільних його векторів $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ узяти число

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4?$$

Розв'язання.

Ні, бо не виконується умова $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$ для всіх ненульових векторів $\vec{x}$. Наприклад, якщо $\vec{x} = (0, 0, 0, 1)$, то $(\vec{x}, \vec{x}) = -1 < 0$.

Чи можна в n -вимірному векторному просторі L_n над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ задати скалярний добуток векторів $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ за допомогою формули

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + \dots + nx_n y_n?$$

Розв'язання.

Так, бо виконуються всі аксіоми скалярного множення.

№ 34.7 [2] (а). Знайти довжини сторін і внутрішні кути трикутника, вершини якого задано своїми координатами: $A(2, 4, 2, 4, 2)$, $B(6, 4, 4, 4, 6)$, $C(5, 7, 5, 7, 2)$.

Розв'язання. $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(\vec{AB}, \vec{AB})};$

$$\vec{AB} = (4, 0, 2, 0, 4); (\vec{AB}, \vec{AB}) = 16 + 4 + 16 = 36; \|\vec{AB}\| = \sqrt{36} = 6;$$

$$\vec{AC} = (3, 3, 3, 3, 0); (\vec{AC}, \vec{AC}) = 9 + 9 + 9 + 9 = 36; \|\vec{AC}\| = \sqrt{36} = 6;$$

$$\cos \angle A = \frac{(\vec{AB}, \vec{AC})}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|} = \frac{4 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 0}{6 \cdot 6} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2};$$

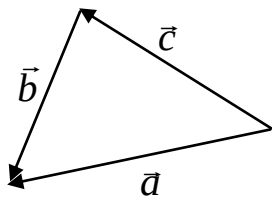
$$\angle A = 60^\circ.$$

Трикутник рівносторонній, тому $\|\vec{BC}\| = 6$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 60^\circ$.

№ 34.8 [2]. Довести, що квадрат довжини сторони трикутника дорівнює сумі квадратів довжин двох його інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними (теорема косинусів), користуючись скалярним добутком векторів.

Розв'язання.

Потрібно довести, що $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$.



$$\vec{b} = \vec{a} - \vec{c};$$

$$\|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a} - \vec{c}\|^2;$$

$$\begin{aligned}\|\vec{b}\|^2 &= (\vec{a} - \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{a}) + (\vec{c}, \vec{c}) - 2(\vec{a}, \vec{c}) = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 - 2(\vec{a}, \vec{c}) = \\ &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 - 2\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{c}\| \cos \beta.\end{aligned}$$

№ 34.2 [2]. Встановити, чи є бінарне відношення ортогональності векторів, задане на множині всіх векторів простору E_n , рефлексивним, симетричним, транзитивним.

Розв'язання.

Бінарне відношення ортогональності векторів, задане на множині всіх векторів простору E_n , є нереклексивним, симетричним і нетранзитивним.

№ 34.3 [2]. Ортогоналізувати систему векторів:

б) $\vec{b}_1 = (-1, 3, 2, 1)$, $\vec{b}_2 = (0, 0, 5, 5)$, $\vec{b}_3 = (2, 1, -1, 1)$.

Розв'язання.

Перевіримо спочатку, чи є задана система векторів лінійно незалежною.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{rang} A = 3.$$

Від системи векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ перейдемо до ортогональної системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Нехай $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 = (-1, 3, 2, 1)$. Тоді перевіряємо, який з векторів $\vec{b}_2, \vec{b}_3$ ортогональний до вектора $\vec{a}_1$, і, якщо такий є, то за $\vec{a}_2$ треба взяти саме його, незалежно від того, який порядковий номер він має.

Оскільки $(\vec{b}_3, \vec{b}_1) = 0$, то за вектор $\vec{a}_2$ візьмемо вектор $\vec{b}_3$: $\vec{a}_2 = (2, 1, -1, 1)$. Тоді вектор $\vec{a}_3$ шукаємо у вигляді

$$\vec{a}_3 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \vec{b}_2.$$

λ_1, λ_2 шукаємо з умов $(\vec{a}_3, \vec{a}_1) = 0$, $(\vec{a}_3, \vec{a}_2) = 0$.

$$\lambda_1 = -\frac{(\vec{a}_1, \vec{b}_2)}{(\vec{a}_1, \vec{a}_1)} = -\frac{15}{15} = -1; \quad \lambda_2 = -\frac{(\vec{a}_2, \vec{b}_2)}{(\vec{a}_2, \vec{a}_2)} = -\frac{0}{7} = 0.$$

$$\vec{a}_3 = -\vec{a}_1 + \vec{b}_2 = -(-1, 3, 2, 1) + (0, 0, 5, 5) = (1, -3, 3, 4).$$

Отже, $\vec{a}_1 = (-1, 3, 2, 1)$, $\vec{a}_2 = (2, 1, -1, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, -3, 3, 4)$ – шукана ортогональна система векторів.

а) $\vec{b}_1 = (1, 2, 1, 0)$, $\vec{b}_2 = (-1, 1, 2, 0)$, $\vec{b}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{b}_4 = (1, 4, 4, 1)$.

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad rang A = 3.$$

Задана система векторів лінійно залежна, тому її ортогоналізувати не можна.

в) $\vec{b}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{b}_2 = (-1, 1, 3)$, $\vec{b}_3 = (13, 34, 5)$.

Розв'язання.

Перевіримо, чи є задана система векторів лінійно незалежною.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 13 & 34 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -144 \end{pmatrix}; \quad rang A = 3.$$

Від системи векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ перейдемо до ортогональної системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Нехай $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 = (1, 0, 1)$. Перевіркою встановлюємо, що жодний з векторів $\vec{b}_2, \vec{b}_3$ не є ортогональним до вектора $\vec{a}_1$. Тоді вектор $\vec{a}_2$ шукаємо у вигляді

$$\vec{a}_2 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \vec{b}_2.$$

λ_1 шукаємо з умови $(\vec{a}_2, \vec{a}_1) = 0$.

$$\lambda_1 = -\frac{(\vec{a}_1, \vec{b}_2)}{(\vec{a}_1, \vec{a}_1)} = -\frac{2}{2} = -1.$$

Тоді

$$\vec{a}_2 = -\vec{a}_1 + \vec{b}_2 = (-1, 0, -1) + (-1, 1, 3) = (-2, 1, 2).$$

Вектор $\vec{a}_3$ шукаємо у вигляді

$$\vec{a}_3 = \mu_1 \vec{a}_1 + \mu_2 \vec{a}_2 + \vec{b}_3.$$

μ_1, μ_2 шукаємо з умов $(\vec{a}_3, \vec{a}_1) = 0$, $(\vec{a}_3, \vec{a}_2) = 0$.

$$\mu_1 = -\frac{(\vec{a}_1, \vec{b}_3)}{(\vec{a}_1, \vec{a}_1)} = -\frac{18}{2} = -9; \quad \mu_2 = -\frac{(\vec{a}_2, \vec{b}_3)}{(\vec{a}_2, \vec{a}_2)} = -\frac{18}{9} = -2.$$

$$\vec{a}_3 = -9\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{b}_3 = -9(1,0,1) - 2(-2,1,2) + (13,34,5) = (8,32,-8).$$

Отже, $\vec{a}_1 = (1,0,1)$, $\vec{a}_2 = (-2,1,2)$, $\vec{a}_3 = (8,32,-8)$ – шукана ортогональна система векторів.

Знайти нормований вектор, ортогональний до векторів $\vec{a}_1 = (1,1,3,2)$, $\vec{a}_2 = (-1,-1,1,1)$, $\vec{a}_3 = (1,1,1,1)$.

Розв'язання.

Вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ повинен задовольняти умови:

$$(\vec{x}, \vec{a}_1) = 0, (\vec{x}, \vec{a}_2) = 0, (\vec{x}, \vec{a}_3) = 0,$$

тобто

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Зведемо матрицю системи до східчастого вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальна система розв'язків: $\vec{x} = (-1,1,0,0)$. Нормуємо вектор $\vec{x}$:

$$\vec{x}_0 = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \vec{x} = \frac{1}{\sqrt{1+1+0+0}} \vec{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{x} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right).$$

$$\text{Отже, шуканий вектор } \vec{x}_0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right).$$

Завдання для самостійної роботи до теми 3

Чи можна в n -вимірному векторному просторі L_n над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ задати скалярний добуток векторів $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ за допомогою формули

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{n-1} y_{n-1}?$$

№ 34.7 [2] (б). Знайти довжини сторін і внутрішні сторони трикутника, вершини якого задано своїми координатами: $A(1,1,1,1)$, $B(2,3,3,1)$, $C(1,1,1,5)$;

$$A(1,2,3,2,1), B(3,4,0,4,3), \\ C\left(1+\frac{5}{26}\sqrt{78}, 2+\frac{5}{13}\sqrt{78}, 3+\frac{10}{13}\sqrt{78}, 2+\frac{5}{13}\sqrt{78}, 1+\frac{5}{26}\sqrt{78}\right).$$

№ 34.3 [2]. Ортогоналізувати систему векторів:

г) $\vec{b}_1 = (1,0,1,1), \vec{b}_2 = (1,1,1,1), \vec{b}_3 = (0,0,1,2), \vec{b}_4 = (-1,0,3,1);$

д) $\vec{b}_1 = (1,0,1,1), \vec{b}_2 = (3,1,-3,0), \vec{b}_3 = (5,7,1,1).$

Тема 4. Ортогональний та ортонормований базиси

№ 34.4 [2]. Перевірити, чи вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ ортогональні, і коли так, то доповнити систему цих векторів до ортогонального базису простору, в якому вони розглядаються, якщо:

г) $\vec{a}_1 = (1,0,0,1), \vec{a}_2 = (0,-1,-1,0).$

Розв'язання.

$(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$, то вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ ортогональні.

Знайдемо тепер такий вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_4$, що

$$(\vec{a}_1, \vec{x}) = (\vec{a}_2, \vec{x}) = 0.$$

Дістанемо систему лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0, \\ -x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

загальний розв'язок якої

$$\begin{cases} x_1 = -x_4, \\ x_2 = -x_3. \end{cases}$$

Фундаментальна система розв'язків цієї системи:

$$\vec{x}^{(1)} = (0, -1, 1, 0), \quad \vec{x}^{(2)} = (-1, 0, 0, 1).$$

Вектори $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}$ ортогональні до векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ (їх знайдено з цієї умови). Крім того, ортогональні і самі вектори $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}$, бо $(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}) = 0$.

Тому система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}$ є ортогональним базисом простору E_4 .

Зауважимо, що якщо б вектори $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}$ виявились не ортогональними, то систему векторів $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}$ треба було б ортогоналізувати.

в) $\vec{a}_1 = (1,1,1,2), \vec{a}_2 = (1,2,3,-2).$

Розв'язання.

$(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 2 \neq 0$, то вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ не ортогональні.

Перевірити, чи вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ ортогональні, і коли так, то доповнити систему цих векторів до ортогонального базису простору, в якому вони розглядаються, якщо: $\vec{a}_1 = (6, 1, -5, 2)$, $\vec{a}_2 = (2, 4, 2, -3)$.

Розв'язання.

$(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$, то вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ ортогональні.

Знайдемо тепер такий вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_4$, що

$$(\vec{a}_1, \vec{x}) = (\vec{a}_2, \vec{x}) = 0.$$

Дістанемо таку систему лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$$

загальний розв'язок якої

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - \frac{1}{2}x_4, \\ x_2 = -x_3 + x_4. \end{cases}$$

Фундаментальна система розв'язків цієї системи:

$$\vec{x}^{(1)} = (1, -1, 1, 0), \quad \vec{x}^{(2)} = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0, 1\right) \quad \text{або}$$

$$\vec{x}^{(1)} = (1, -1, 1, 0), \quad \vec{x}^{(2)} = (-1, 2, 0, 2).$$

Вектори $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}$ ортогональні до векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ (їх знайдено з цієї умови). Але вектори $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}$ не ортогональні, бо $(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}) = -3 \neq 0$. Тому систему векторів $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}$ потрібно ортогоналізувати.

Відповідно до процесу ортогоналізації маємо $\vec{c}_1 = \vec{x}^{(1)} = (1, -1, 1, 0)$,
 $\vec{c}_2 = \lambda \vec{c}_1 + \vec{x}^{(2)}$, де $\lambda = -\frac{(\vec{c}_1, \vec{x}^{(2)})}{(\vec{c}_1, \vec{c}_1)} = -\frac{-3}{3} = 1$. Тоді $\vec{c}_2 = \vec{c}_1 + \vec{x}^{(2)} = (0, 1, 1, 2)$.

Отже, система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{c}_1, \vec{c}_2$ є ортогональним базисом простору E_4 .

№ 34.6 [2]. Знайти який-небудь ортогональний базис лінійної оболонки $L'(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$, якщо:

а) $\vec{a}_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, -5, 3)$, $\vec{a}_3 = (5, 9, 3, -7)$.

Розв'язання.

Знайдемо спочатку довільний базис лінійної оболонки $L'(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \\ 5 & 9 & 3 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -7 & 4 \\ 0 & -1 & -7 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Отже, за базис беремо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Ортогоналізуємо цей базис. Серед векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ортогональних немає.

$$\vec{c}_1 = \vec{a}_1 = (1, 2, 2, -1);$$

$$\vec{c}_2 = \lambda \vec{c}_1 + \vec{a}_2, \quad \lambda = -\frac{(\vec{c}_1, \vec{a}_2)}{(\vec{c}_1, \vec{c}_1)} = -\frac{-10}{10} = 1, \quad \vec{c}_2 = \vec{c}_1 + \vec{a}_2 = (2, 3, -3, 2);$$

$$\vec{c}_3 = \mu_1 \vec{c}_1 + \mu_2 \vec{c}_2 + \vec{a}_3,$$

$$\mu_1 = -\frac{\begin{pmatrix} \vec{c}_1 & \vec{a}_3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \vec{c}_1 & \vec{c}_1 \end{pmatrix}} = -\frac{36}{10} = -\frac{18}{5}, \quad \mu_2 = -\frac{\begin{pmatrix} \vec{c}_2 & \vec{a}_3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \vec{c}_2 & \vec{c}_2 \end{pmatrix}} = -\frac{14}{26} = -\frac{7}{13},$$

$$\begin{aligned} \vec{c}_3 &= -\frac{18}{5} \vec{c}_1 - \frac{7}{13} \vec{c}_2 + \vec{a}_3 = -\frac{18}{5} (1, 2, 2, -1) - \frac{7}{13} (2, 3, -3, 2) + (5, 9, 3, -7) = \\ &= \left(\frac{21}{65}, \frac{12}{65}, -\frac{168}{65}, -\frac{291}{65} \right) = \frac{1}{65} (21, 12, -168, -291). \end{aligned}$$

Отже, $\vec{c}_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\vec{c}_2 = (2, 3, -3, 2)$, $\vec{c}_3 = \frac{1}{65} (21, 12, -168, -291)$ – ортогональний базис заданої лінійної оболонки.

№ 34.5 [2]. Знайти вектори, які доповнюють дану систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ до ортонормованих базисів просторів, в яких розглядаються дані вектори, якщо:

а) $\vec{a}_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right).$

Розв'язання.

Доповнимо спочатку задану систему векторів до ортогонального базису простору E_3 . Знайдемо вектори $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in E_3$ такі, що $(\vec{a}_1, \vec{x}) = 0$. Дістанемо таку систему лінійних однорідних рівнянь:

$$\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0,$$

загальний розв'язок якої $x_3 = -2x_1 + 2x_2$. Фундаментальна система розв'язків цієї системи:

$$\vec{x}^{(1)} = (1, 0, -2), \quad \vec{x}^{(2)} = (0, 1, 2).$$

Вектори $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}$ ортогональні до вектора $\bar{a}_1$, але не ортогональні між собою. Тому систему $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}$ треба ортогоналізувати.

$$\bar{c}_1 = \bar{x}^{(1)} = (1, 0, -2), \quad \bar{c}_2 = \lambda \bar{c}_1 + \bar{x}^{(2)}, \quad \text{де } \lambda = -\frac{(\bar{c}_1, \bar{x}^{(2)})}{(\bar{c}_1, \bar{c}_1)} = -\frac{-4}{5} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Тоді } \bar{c}_2 = \frac{4}{5} \bar{c}_1 + \bar{x}^{(2)} = \frac{4}{5}(1, 0, -2) + (0, 1, 2) = \left(\frac{4}{5}, 1, \frac{2}{5}\right).$$

Таким чином, система векторів $\bar{a}_1, \bar{c}_1, \bar{c}_2$ є ортогональною системою векторів. Оскільки ця система містить три тривимірні вектори, то ця система є ортогональним базисом. Для перетворення його в ортонормований базис треба нормувати всі вектори.

$$\|\bar{a}_1\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = 1; \quad \|\bar{c}_1\| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5};$$

$$\|\bar{c}_2\| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{25}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Отже, шуканий ортонормований базис:

$$\bar{a}_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \bar{a}_2 = \frac{\bar{c}_1}{\|\bar{c}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \quad \bar{a}_3 = \frac{\bar{c}_2}{\|\bar{c}_2\|} = \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{15}\right).$$

В евклідовому просторі многочленів степеня, не вищого 2 над полем дійсних чисел зі скалярним добутком, що задається рівністю

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx,$$

ортгоналізувати базис $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2$.

Розв'язання.

Нехай $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ – шуканий ортогональний базис.

$$\varphi_1(x) = f_1(x) = 1;$$

$$\varphi_2(x) = \lambda \varphi_1(x) + f_2(x), \quad \lambda = -\frac{(\varphi_1, f_2)}{(\varphi_1, \varphi_1)} = -\frac{\int_0^1 x dx}{\int_0^1 dx} = -\frac{1}{2};$$

$$\varphi_2(x) = -\frac{1}{2} \varphi_1(x) + f_2(x) = x - \frac{1}{2};$$

$$\varphi_3(x) = \nu_1 \varphi_1(x) + \nu_2 \varphi_2(x) + f_3(x),$$

$$v_1 = -\frac{(\varphi_1, f_3)}{(\varphi_1, \varphi_1)} = -\frac{\int_0^1 x^2 dx}{\int_0^1 dx} = -\frac{1}{3}, \quad v_2 = -\frac{(\varphi_2, f_3)}{(\varphi_2, \varphi_2)} = -\frac{\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) x^2 dx}{\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx} = -1,$$

$$\varphi_3(x) = -\frac{1}{3}\varphi_1(x) - \varphi_2(x) + f_3(x) = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) + x^2 = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Отже, шуканий базис складається з многочленів $1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6}$.

Завдання для самостійної роботи до теми 4

№ 34.4 [2]. Перевірити, чи вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ ортогональні, і коли так, то доповнити систему цих векторів до ортогонального базису простору, в якому вони розглядаються, якщо:

а) $\vec{a}_1 = (2,1), \vec{a}_2 = (-1,2)$;

б) $\vec{a}_1 = (1,1,1), \vec{a}_2 = (1,0,-1)$;

д) $\vec{a}_1 = (-1,2,1,0), \vec{a}_2 = (1,-2,5,0)$.

№ 34.5 [2]. Знайти вектори, які доповнюють дану систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ до ортонормованих базисів просторів, в яких розглядаються дані вектори, якщо:

б) $\vec{a}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \vec{a}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

№ 34.6 [2]. Знайти який-небудь ортогональний базис лінійної оболонки $L'(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$, якщо:

в) $\vec{a}_1 = (2,2,1,-1), \vec{a}_2 = (1,-5,1,3), \vec{a}_3 = (3,3,4,-4)$;

г) $\vec{a}_1 = (2,1,3,-1), \vec{a}_2 = (7,4,3,-3), \vec{a}_3 = (1,1,-6,0), \vec{a}_4 = (5,7,7,8)$.

Тема 5. Ортогональне доповнення підпростору. Ізоморфізм векторних та евклідових просторів

№ 35.2 [2]. Довести, що ортогональне доповнення до лінійного підпростору евклідового простору E має такі властивості:

д) $(U^\perp \cap V^\perp)^\perp = U + V$;

е) $(U^\perp + V^\perp)^\perp = U \cap V$;

є) $(U \cap V \cap T)^\perp = U^\perp + V^\perp + T^\perp$;

$$\text{ж)} (U + V + T)^\perp = U^\perp \cap V^\perp \cap T^\perp.$$

Розв'язання.

Ці властивості випливають з доведених властивостей [3]:

1. $(U^\perp)^\perp = U$;
2. $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$;
3. $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$,

а саме:

$$\text{д)} (U^\perp \cap V^\perp)^\perp = (U^\perp)^\perp + (V^\perp)^\perp = U + V;$$

$$\text{е)} (U^\perp + V^\perp)^\perp = (U^\perp)^\perp \cap (V^\perp)^\perp = U \cap V;$$

$$\text{є)} (U \cap V \cap T)^\perp = (U \cap V)^\perp + T^\perp = U^\perp + V^\perp + T^\perp;$$

$$\text{ж)} (U + V + T)^\perp = (U + V)^\perp \cap T^\perp = U^\perp \cap V^\perp \cap T^\perp.$$

№ 35.3 [2]. Знайти базис ортогонального доповнення $U^\perp$ підпростору U , якщо: **1)** U є лінійною оболонкою векторів:

$$\text{в)} \bar{a}_1 = (1, 1, 0, -2), \bar{a}_2 = (2, 1, -1, 1), \bar{a}_3 = (3, 2, -1, -1).$$

Розв'язання.

Для того, щоб вектор був ортогональним до підпростору U , достатньо, щоб він був ортогональний кожному вектору деякого базису цього підпростору. Знайдемо спочатку базис простору U .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{rang} A = 2.$$

Базис простору U складається з 2-х векторів, і за базисні вектори можна взяти, наприклад, вектори $\bar{a}_1$ і $\bar{a}_2$. Нехай $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – довільний вектор з ортогонального доповнення $U^\perp$ підпростору U . Тоді, згідно сформульованого твердження,

$$(\bar{x}, \bar{a}_1) = (\bar{x}, \bar{a}_2) = 0.$$

Ці рівності рівносильні такій системі лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

загальний розв'язок якої

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 3x_4, \\ x_2 = -x_3 + 5x_4. \end{cases}$$

Фундаментальна система розв'язків:

x_1	x_2	x_3	x_4
1	-1	1	0
-3	5	0	1

тобто $\vec{f}_1 = (1, -1, 1, 0)$, $\vec{f}_2 = (-3, 5, 0, 1)$.

Система векторів $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ лінійно незалежна, і, крім того, кожен вектор з $U^\perp$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{f}_1, \vec{f}_2$. Отже, $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ – базис $U^\perp$.

б) $\vec{a}_1 = (1, -1, 2)$, $\vec{a}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{a}_3 = (2, -1, 4)$.

Розв'язання.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{rang} A = 3.$$

У цьому випадку підпростір U співпадає з усім простором E_3 . Тому $U^\perp = E_3^\perp = \{\vec{0}\}$, а нульовий підпростір $\{\vec{0}\}$ базису не має.

2) Знайти базис ортогонального доповнення $U^\perp$ підпростору U , якщо лінійний підпростір U задано як простір розв'язків системи лінійних

однорідних рівнянь: е)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Загальний розв'язок заданої системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = -x_4, \end{cases}$$

а її фундаментальна система розв'язків:

x_1	x_2	x_3	x_4
-1	0	1	0
0	-1	0	1

тобто $\vec{a}_1 = (-1, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, -1, 0, 1)$.

Отже, за базис простору U розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь можна взяти вектори $\vec{a}_1 = (-1, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, -1, 0, 1)$.

Тоді базис $U^\perp$ знаходимо як фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$(\vec{x}, \vec{a}_1) = (\vec{x}, \vec{a}_2) = 0,$$

де $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, тобто системи

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0, \\ -x_2 + x_4 = 0, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = x_4. \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	1	0
0	1	0	1

Отже, якщо за базис U взяти вектори $\vec{a}_1 = (-1, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, -1, 0, 1)$, то за базис $U^\perp$ можна взяти систему векторів $\vec{f}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{f}_2 = (0, 1, 0, 1)$.

№ 35.4 [2]. Лінійний підпростір U задано як простір розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Знайти систему лінійних однорідних рівнянь, підпростір розв'язків якої задає ортогональне доповнення $U^\perp$ підпростору U .

Розв'язання.

Знайдемо загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків заданої системи рівнянь.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 9 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \begin{cases} x_1 = -6x_3, \\ x_2 = 9x_3 + x_4. \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
-6	9	1	0
0	1	0	1

$$\vec{f}_1 = (-6, 9, 1, 0), \quad \vec{f}_2 = (0, 1, 0, 1).$$

$U^\perp$ складається з тих векторів $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, що $(\vec{x}, \vec{f}_1) = (\vec{x}, \vec{f}_2) = 0$, тобто

$$\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

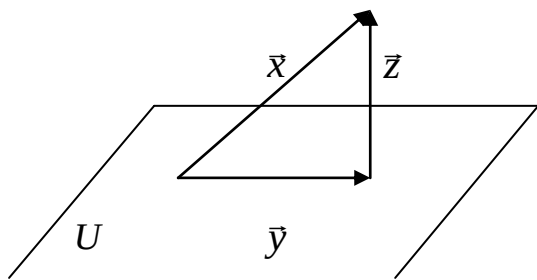
№ 35.6 [2]. Знайти ортогональну проекцію $\vec{x}_U$ і ортогональну складову $\vec{x}_{U^\perp}$ вектора $\vec{x}$ на лінійний підпростір U , якщо:

а) $\vec{x} = (4, -1, -3, 4)$, U є лінійною оболонкою векторів

$$\vec{a}_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \vec{a}_2 = (1, 2, 2, -1), \quad \vec{a}_3 = (1, 0, 0, 3).$$

Розв'язання.

Для довільного вектора $\vec{x} \in E_n$ існує єдине зображення $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, де $\vec{y} \in U$, $\vec{z} \in U^\perp$. Вектор $\vec{y}$ називається **ортогональною проекцією** вектора $\vec{x}$ на підпростір U і позначається $\vec{x}_U$, а вектор $\vec{z}$ називається **ортогональною складовою** вектора $\vec{x}$, або **проектуючим вектором** і позначається $\vec{x}_{U^\perp}$. Отже, $\vec{x} = \vec{x}_U + \vec{x}_{U^\perp}$.



Знайдемо спочатку базис простору U .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{rang} A = 2.$$

За базис U можна взяти вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2$. Оскільки $\vec{x}_U \in U$, то цей вектор можна виразити через базисні вектори:

$$\vec{x}_U = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2.$$

Тоді

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \vec{x}_{U^\perp}.$$

Домножимо останню рівність скалярно на $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ та врахуємо те, що $(\vec{x}_{U^\perp}, \vec{a}_1) = (\vec{x}_{U^\perp}, \vec{a}_2) = 0$:

$$\begin{cases} (\vec{x}, \vec{a}_1) = \alpha_1 (\vec{a}_1, \vec{a}_1) + \alpha_2 (\vec{a}_2, \vec{a}_1), \\ (\vec{x}, \vec{a}_2) = \alpha_1 (\vec{a}_1, \vec{a}_2) + \alpha_2 (\vec{a}_2, \vec{a}_2). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 4\alpha_2 = 4, \\ 4\alpha_1 + 10\alpha_2 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3, \\ \alpha_2 = -2. \end{cases}$$

$$\text{Отже, } \vec{x}_U = 3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 = (1, -1, -1, 5), \quad \vec{x}_{U^\perp} = \vec{x} - \vec{x}_U = (3, 0, -2, -1).$$

г) Знайти ортогональну проекцію $\vec{x}_U$ і ортогональну складову $\vec{x}_{U^\perp}$ вектора $\vec{x}$ на лінійний підпростір U , якщо $\vec{x} = (8, 5, -3, 6)$, U є підпростором розв'язків системи

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Знайдемо фундаментальну систему розв'язків заданої системи.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \begin{cases} x_1 = x_4, \\ x_2 = -x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
0	-1	1	0
1	-2	0	1

$$\bar{a}_1 = (0, -1, 1, 0), \quad \bar{a}_2 = (1, -2, 0, 1).$$

$$\bar{x} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \bar{x}_{U^\perp}.$$

Домножимо останню рівність скалярно на $\bar{a}_1$ і $\bar{a}_2$ та врахуємо те, що $(\bar{x}_{U^\perp}, \bar{a}_1) = (\bar{x}_{U^\perp}, \bar{a}_2) = 0$:

$$\begin{cases} (\bar{x}, \bar{a}_1) = \alpha_1 (\bar{a}_1, \bar{a}_1) + \alpha_2 (\bar{a}_2, \bar{a}_1), \\ (\bar{x}, \bar{a}_2) = \alpha_1 (\bar{a}_1, \bar{a}_2) + \alpha_2 (\bar{a}_2, \bar{a}_2). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = -8, \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -7, \\ \alpha_2 = 3. \end{cases}$$

$$\text{Отже, } \bar{x}_U = -7\bar{a}_1 + 3\bar{a}_2 = (3, 1, -7, 3), \quad \bar{x}_{U^\perp} = \bar{x} - \bar{x}_U = (5, 4, 4, 3).$$

№ 35.8 [2]. Довести, що при ізоморфній відповідності між евклідовими просторами E і E' : **а)** ортогональна система векторів з E переходить в ортогональну систему векторів з E' .

Розв'язання.

Оскільки при ізоморфній відповідності між евклідовими просторами E і E' зберігається скалярний добуток, то ортогональна система векторів з E переходить в ортогональну систему векторів з E' .

Завдання для самостійної роботи до теми 5

№ 35.3 [2]. Знайти базис ортогонального доповнення $U^\perp$ підпростору U , якщо: **1)** U є лінійною оболонкою векторів:

а) $\bar{a}_1 = (1, -2, 3)$;

г) $\bar{a}_1 = (1, -1, 2, 1)$, $\bar{a}_2 = (1, 0, 1, -1)$, $\bar{a}_3 = (2, -1, 3, 0)$;

д) $\bar{a}_1 = (1, 1, -1, 2)$, $\bar{a}_2 = (2, 0, 1, 3)$, $\bar{a}_3 = (4, 2, -1, 7)$, $\bar{a}_4 = (3, 1, 0, 5)$;

2) лінійний підпростір U задано як простір розв'язків системи лінійних

однорідних рівнянь: $\epsilon) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

№ 35.6 [2]. Знайти ортогональну проекцію $\bar{x}_U$ і ортогональну складову $\bar{x}_{U^\perp}$ вектора $\bar{x}$ на лінійний підпростір U , якщо:

в) $\bar{x} = (5, 2, -2, 2)$, U є лінійною оболонкою векторів $\bar{a}_1 = (2, 1, 1, -1)$, $\bar{a}_2 = (1, 1, 3, 0)$, $\bar{a}_3 = (1, 2, 8, 1)$;

д) $\bar{x} = (7, -4, -1, 2)$, U є підпростором розв'язків системи

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

№ 35.8 [2]. Довести, що при ізоморфній відповідності між евклідовими просторами E і E' : **б)** ортонормована система векторів з E переходить в ортонормовану систему векторів з E' .

Розділ II. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

Тема 6. Лінійні оператори. Матриця лінійного оператора

№ 36.2 [2]. З'ясувати, які з наведених нижче операторів A в просторі V_n , задані координатами вектора $\bar{x}A$ як функціями координат вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, є лінійними. У випадку лінійності знайти їх матриці A в тому самому базисі, де задано координати векторів $\bar{x}$ і $\bar{x}A$:

а) $\bar{x}A = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$.

Розв'язання.

Перевіряємо виконання умов 1 і 2 означення лінійного оператора. Для цього розглянемо образ суми векторів $\bar{x}$ і $\bar{y}$, де $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Маємо

$$\begin{aligned}(\bar{x} + \bar{y})A &= ((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3))A = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)A = \\&= ((x_2 + y_2) + (x_3 + y_3), 2(x_1 + y_1) + (x_3 + y_3), 3(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3)).\end{aligned}$$

Сумою образів векторів $\bar{x}$ і $\bar{y}$ є вектор

$$\begin{aligned}\bar{x}A + \bar{y}A &= (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3) + (y_2 + y_3, 2y_1 + y_3, 3y_1 - y_2 + y_3) = \\&= (x_2 + x_3 + y_2 + y_3, 2x_1 + x_3 + 2y_1 + y_3, 3x_1 - x_2 + x_3 + 3y_1 - y_2 + y_3).\end{aligned}$$

Оскільки $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ – дійсні числа, то очевидно, що відповідні координати векторів $(\bar{x} + \bar{y})A$ і $\bar{x}A + \bar{y}A$ попарно рівні, а тому

$$(\bar{x} + \bar{y})A = \bar{x}A + \bar{y}A.$$

Нехай тепер λ – довільне дійсне число. Тоді

$$\begin{aligned}(\lambda\bar{x})A &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)A = (\lambda x_2 + \lambda x_3, 2\lambda x_1 + \lambda x_3, 3\lambda x_1 - \lambda x_2 + \lambda x_3) = \\&= \lambda(x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3) = \lambda(\bar{x}A).\end{aligned}$$

Отже, A – лінійний оператор.

Знайдемо матрицю цього оператора.

$$\bar{e}_1 A = (1, 0, 0)A = (0, 2, 3) = 0 \cdot \bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{e}_2 + 3 \cdot \bar{e}_3,$$

$$\bar{e}_2 A = (0, 1, 0)A = (1, 0, -1) = 1 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 - 1 \cdot \bar{e}_3,$$

$$\bar{e}_3 A = (0, 0, 1)A = (1, 1, 1) = 1 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2 + 1 \cdot \bar{e}_3.$$

Матрицею даного оператора є матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

З цього прикладу видно, що будь-який оператор A , який кожному координату вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ переводить у довільну лінійну комбінацію координат цього самого вектора, є лінійним:

$$\vec{x}A = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n, \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n, \dots, \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_n x_n).$$

б) $\vec{x}A = (x_1, x_2 + x_1, x_3 + 2x_1 + 1).$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} (\vec{x} + \vec{y})A &= ((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3))A = \\ &= (x_1 + y_1, (x_2 + y_2) + (x_1 + y_1), (x_3 + y_3) + 2(x_1 + y_1) + 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}A + \vec{y}A &= (x_1, x_2 + x_1, x_3 + 2x_1 + 1) + (y_1, y_2 + y_1, y_3 + 2y_1 + 1) = \\ &= (x_1 + y_1, (x_2 + x_1) + (y_2 + y_1), (x_3 + 2x_1 + 1) + (y_3 + 2y_1 + 1)). \end{aligned}$$

Отже, $(\vec{x} + \vec{y})A \neq \vec{x}A + \vec{y}A$, тому заданий оператор не є лінійним.

№ 36.6 [2]. Довести, що існує єдиний лінійний оператор A тривимірного простору, який переводить вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ в $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ відповідно, і знайти матрицю A цього оператора в тому самому базисі, в якому задано координати всіх векторів, якщо:

а) $\vec{a}_1 = (2, 3, 5), \vec{b}_1 = (1, 1, 1), \vec{a}_2 = (0, 1, 2), \vec{b}_2 = (1, 1, -1),$

$\vec{a}_3 = (1, 0, 0), \vec{b}_3 = (2, 1, 2).$

Розв'язання.

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ є базисом простору V_3 , оскільки вона, як легко перевірити, лінійно незалежна.

Використаємо теорему:

Якщо не була упорядкована система з n векторів простору L_n

$$\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n, \quad (1)$$

існує і притому тільки один, лінійний оператор φ простору L_n такий, що вектори системи (1) є образами векторів базису $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ при дії цього оператора:

$$\vec{c}_i = \vec{e}_i \varphi, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Отже, існує єдиний лінійний оператор A тривимірного простору, який переводить вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ в $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ відповідно. Знайдемо матрицю A цього оператора в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

$$\vec{a}_1 A = \vec{b}_1 \Rightarrow (2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3)A = 2\vec{e}_1 A + 3\vec{e}_2 A + 5\vec{e}_3 A = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3;$$

$$\vec{a}_2 A = \vec{b}_2 \Rightarrow (0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)A = \vec{e}_2 A + 2\vec{e}_3 A = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3;$$

$$\vec{a}_3 A = \vec{b}_3 \Rightarrow (1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3)A = \vec{e}_1 A = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Отримали систему:

$$\begin{cases} 2\vec{e}_1 A + 3\vec{e}_2 A + 5\vec{e}_3 A = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \\ \vec{e}_2 A + 2\vec{e}_3 A = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \\ \vec{e}_1 A = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \end{cases}$$

яку можна записати в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 A \\ \vec{e}_2 A \\ \vec{e}_3 A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Позначимо через L і M матриці, рядками яких є координатні рядки векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ відповідно в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тоді система має вигляд:

$$L \begin{pmatrix} \vec{e}_1 A \\ \vec{e}_2 A \\ \vec{e}_3 A \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \text{звідки} \quad \begin{pmatrix} \vec{e}_1 A \\ \vec{e}_2 A \\ \vec{e}_3 A \end{pmatrix} = L^{-1} M \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Отже, $A = L^{-1}M$. Оскільки вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ лінійно незалежні, то матриця L – невироджена, і тому L^{-1} існує.

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$L^{-1}M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -11 & -7 & -1 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Отже, } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -11 & -7 & -1 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, ми довели, що:

№ 36.7 [2]. Нехай лінійний оператор A простору L_n переводить лінійно незалежні вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ у вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ відповідно. Довести,

що матрицю A цього оператора в деякому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ можна знайти з рівності $A = L^{-1}M$, де рядки матриць L і M містять координати векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ відповідно в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

№ 36.8 [2]. Нехай оператор A на кожний вектор $\vec{x}$ тривимірного простору діє так: $\vec{x}A = (\vec{x}, \vec{a})\vec{a}$, де $\vec{a}$ – деякий фіксований вектор. Довести, що A – лінійний оператор, знайти його матрицю в тому самому ортонормованому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, в якому задано координати всіх векторів, якщо:

а) $\vec{a} = (1, 2, 3)$.

Розв'язання.

$$(\vec{x} + \vec{y})A = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{a})\vec{a} = ((\vec{x}, \vec{a}) + (\vec{y}, \vec{a}))\vec{a} = (\vec{x}, \vec{a})\vec{a} + (\vec{y}, \vec{a})\vec{a} = \vec{x}A + \vec{y}A;$$

$$(\lambda\vec{x})A = (\lambda\vec{x}, \vec{a})\vec{a} = \lambda(\vec{x}, \vec{a})\vec{a} = \lambda(\vec{x}A).$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_1A &= (\vec{e}_1, \vec{a})\vec{a} = 1 \cdot \vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \\ \vec{e}_2A &= (\vec{e}_2, \vec{a})\vec{a} = 2 \cdot \vec{a} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3, \\ \vec{e}_3A &= (\vec{e}_3, \vec{a})\vec{a} = 3 \cdot \vec{a} = 3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3.\end{aligned}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

№ 36.9 [2] (а). Довести, що множення кожної квадратної матриці другого порядку зліва на дану матрицю

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

є лінійним оператором простору всіх квадратних матриць другого порядку. Знайти матрицю цього оператора у базисі, що складається з матриць:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \right) = \lambda \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \right).$$

$$E_1A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = aE_1 + cE_2,$$

$$E_2A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = bE_1 + dE_2,$$

$$E_3A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = aE_3 + cE_4,$$

$$E_4 A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = bE_3 + dE_4.$$

$$A = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}.$$

№ 36.11 [2]. Нехай у базисі $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ простору V_n лінійний оператор A задано матрицею A . І нехай дано координатний рядок $[\vec{x}]$ вектора $\vec{x}$ в цьому самому базисі. Знайти координатний рядок $[\vec{x}A]$ вектора $\vec{x}A$ в базисі B , якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad [\vec{x}] = [1, -8, 4, 3].$

Розв'язання.

$$[\vec{x}A] = [\vec{x}]A = [1, -8, 4, 3] \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = [1, -9, -11, -13].$$

Завдання для самостійної роботи до теми 6

№ 36.2 [2]. З'ясувати, які з наведених нижче операторів A в просторі V_n , задані координатами вектора $\vec{x}A$ як функціями координат вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, є лінійними. У випадку лінійності знайти їх матриці A в тому самому базисі, де задано координати векторів $\vec{x}$ і $\vec{x}A$:

г) $\vec{x}A = (x_4, x_3, x_2, x_1)$, д) $\vec{x}A = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2)$.

№ 36.6 [2]. Довести, що існує єдиний лінійний оператор A тривимірного простору, який переводить вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ в $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ відповідно, і знайти матрицю A цього оператора в тому самому базисі, в якому задано координати всіх векторів, якщо:

б) $\vec{a}_1 = (2, 0, 3), \vec{b}_1 = (1, 2, -1), \vec{a}_2 = (1, 1, -1), \vec{b}_2 = (-2, 1, 3),$
 $\vec{a}_3 = (2, 1, 0), \vec{b}_3 = (1, -1, 1).$

№ 36.8 [2]. Нехай оператор A на кожний вектор $\vec{x}$ тривимірного простору діє так: $\vec{x}A = (\vec{x}, \vec{a}) \vec{a}$, де $\vec{a}$ – деякий фіксований вектор. Довести, що A – лінійний оператор, знайти його матрицю в тому самому ортонормованому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, в якому задано координати всіх векторів, якщо:

б) $\vec{a} = (1, 1, 1)$.

№ 36.9 [2] (б). Довести, що множення кожної квадратної матриці другого порядку справа на дану матрицю $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ є лінійним оператором простору

всіх квадратних матриць другого порядку. Знайти матрицю цього оператора в базисі, що складається з матриць:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

№ 36.11 [2]. Нехай у базисі $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ простору V_n лінійний оператор A задано матрицею A . І нехай дано координатний рядок $[\vec{x}]$ вектора $\vec{x}$ в цьому самому базисі. Знайти координатний рядок $[\vec{x}A]$ вектора $\vec{x}A$ в базисі B , якщо:

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad [\vec{x}] = [2, -1, 1].$

Тема 7. Зв'язок між матрицями лінійного оператора в різних базисах. Подібні матриці

№ 37.2 [2]. Лінійний оператор A в базисі $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ має матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю A' цього самого оператора в базисі: **а)** $\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_4$.

Розв'язання.

В матриці A поміняються місцями другий і третій рядки, другий і третій стовпці:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

б) $\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$.

Розв'язання.

$A' = TAT^{-1}$, де T – матриця переходу від базису B до заданого базису $\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T|E = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{попередній}]{\substack{\text{від} \\ \text{кожного} \\ \text{рядка} \\ \text{віднімемо}}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) = E|T^{-1}.$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ 6 & 7 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 3 & 7 \end{pmatrix};$$

$$A' = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ 6 & 7 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 3 \\ -1 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

№ 37.3 [2]. Лінійний оператор A в базисі $B\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ має матрицю A . Знайти його матрицю A' в базисі $B'\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, якщо:

а) $\vec{a}_1 = (1,0,0)$, $\vec{a}_2 = (0,1,0)$, $\vec{a}_3 = (0,0,1)$, $\vec{b}_1 = (2,3,1)$, $\vec{b}_2 = (3,4,1)$, $\vec{b}_3 = (1,2,2)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\vec{b}_1 = 2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + \vec{a}_3,$$

$$\vec{b}_2 = 3\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2 + \vec{a}_3,$$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3,$$

то матриця переходу від базису B до базису B' має вигляд:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad |T| = -1; \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A' = TAT^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -6 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

б) $\vec{a}_1 = (0,-1,0)$, $\vec{a}_2 = (0,1,-1)$, $\vec{a}_3 = (1,0,0)$,

$\vec{b}_1 = (1,3,2)$, $\vec{b}_2 = (-1,0,0)$, $\vec{b}_3 = (1,1,1)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Матрицю переходу від базису $B\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ до базису $B'\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ шукаємо за відомою формулою (див. практ. зан. № 1):

$$T = B_0 A_0^{-1}.$$

$$|A_0| = 1, \quad A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T = B_0 A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$|T| = 1, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A' = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

№ 37.8 [2]. Довести, що коли хоч одна з двох матриць A, B невинроджена, то матриці $ABAB$ і $BABA$ подібні.

Розв'язання.

Матриця X подібна матриці Y , якщо існує така невинроджена матриця T , що $Y = T^{-1}XT$.

Якщо матриця A невинроджена, тоді

$$ABAB = (A^{-1})^{-1}(BABA)A^{-1},$$

і тому матриці $ABAB$ і $BABA$ подібні, бо за матрицю T можна взяти матрицю A^{-1} .

Якщо матриця B невинроджена, тоді

$$ABAB = B^{-1}(BABA)B,$$

і тому матриці $ABAB$ і $BABA$ теж подібні, бо за матрицю T можна взяти матрицю B .

Лінійний оператор A в базисі $B\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ має матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 8 \\ -11 & -15 & -7 \\ 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Знайти його матрицю A' в базисі $B'\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, якщо:

$$\begin{aligned}\vec{b}_1 &= 2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + \vec{a}_3, \\ \vec{b}_2 &= 3\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3, \\ \vec{b}_3 &= \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3.\end{aligned}$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned}T &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; T^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; A' = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 15 & 20 & 8 \\ -11 & -15 & -7 \\ 5 & 8 & 6 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 11 & 16 & 8 \\ 14 & 21 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 2 \\ 13 & -6 & 6 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи до теми 7

№ 37.2 [2] (в). Лінійний оператор A в базисі $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ має матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю A' цього самого оператора в базисі:

$$\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4.$$

№ 37.3 [2] (в). Лінійний оператор A в базисі $B\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ має матрицю A .

Знайти його матрицю A' в базисі $B'\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, якщо:

$$\vec{a}_1 = (1, 3, 2), \vec{a}_2 = (2, 2, 1), \vec{a}_3 = (2, 5, 3),$$

$$\vec{b}_1 = (0, 3, 2), \vec{b}_2 = (-1, 4, 3), \vec{b}_3 = (3, -8, -6),$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -4 & 16 & -8 \\ -7 & 23 & -11 \end{pmatrix}.$$

Лінійний оператор A в базисі $B\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ має матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти його матрицю A' в базисі $B'\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, якщо:

$$\vec{a}_1 = (1, 0, 2), \vec{a}_2 = (-1, 1, 0), \vec{a}_3 = (1, 2, 3), \vec{b}_1 = (1, 1, 1), \vec{b}_2 = (1, 0, 1), \vec{b}_3 = (-2, 1, 0).$$

**Тема 8. Операції над лінійними операторами.
Область значень і ядро, ранг і дефект лінійного
оператора. Обернений лінійний оператор**

№ 38.2 [2] (а). Нехай лінійний оператор A в базисі $\vec{a}_1 = (1, -2), \vec{a}_2 = (3, -5)$

має матрицю $A = \begin{pmatrix} 37 & -13 \\ 108 & -38 \end{pmatrix}$, а лінійний оператор B у базисі $\vec{b}_1 = (1, 2),$

$\vec{b}_2 = (2, 5)$ має матрицю $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю X лінійного

оператора $A + B$ у базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2$.

Розв'язання.

$X = A + B'$, де B' – матриця оператора B у базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2$.

$B' = TBT^{-1}$, де T – матриця переходу від базису $\vec{b}$ до базису $\vec{a}$.

$T = A_0 B_0^{-1}$, де A_0, B_0 – матриці, складені з компонент векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ відповідно.

$$|B_0| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1; \quad B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$T = A_0 B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 25 & -11 \end{pmatrix};$$

$$|T| = \begin{vmatrix} 9 & -4 \\ 25 & -11 \end{vmatrix} = 1; \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 4 \\ -25 & 9 \end{pmatrix};$$

$$B' = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 25 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & 4 \\ -25 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 & 13 \\ -108 & 39 \end{pmatrix};$$

$$X = A + B' = \begin{pmatrix} 37 & -13 \\ 108 & -38 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -36 & 13 \\ -108 & 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

№ 38.3 [2]. Нехай лінійний оператор A в базисі $\vec{a}_1 = (-3, -1), \vec{a}_2 = (7, 2)$

має матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, а лінійний оператор B у базисі $\vec{b}_1 = (3, 2),$

$\vec{b}_2 = (4, 3)$ має матрицю $B = \begin{pmatrix} -14 & 10 \\ -21 & 15 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю X лінійних операторів AB і BA в базисі, в якому задано координати всіх векторів.

Розв'язання.

Знайдемо матрицю A' оператора A в базисі $\vec{e}$ і матрицю B' оператора B в базисі $\vec{e}$.

$A' = T_1 A T_1^{-1}$, T_1 – матриця переходу від базису $\vec{a}$ до базису $\vec{e}$,

$B' = T_2 B T_2^{-1}$, T_2 – матриця переходу від базису $\vec{b}$ до базису $\vec{e}$.

Якщо A_0, B_0 – матриці, складені з координатних рядків векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ відповідно, то

$$\vec{a} = A_0 \vec{e}, \quad \vec{b} = B_0 \vec{e},$$

звідки

$$\vec{e} = A_0^{-1} \vec{a}, \quad \vec{e} = B_0^{-1} \vec{b},$$

тобто

$T_1 = A_0^{-1}$ – матриця переходу від базису $\vec{a}$ до базису $\vec{e}$,

$T_2 = B_0^{-1}$ – матриця переходу від базису $\vec{b}$ до базису $\vec{e}$.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$T_1 = A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}, \quad T_2 = B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} A' = T_1 A T_1^{-1} &= A_0^{-1} A A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 31 & 10 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B' = T_2 B T_2^{-1} &= B_0^{-1} B B_0 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -14 & 10 \\ -21 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матриця оператора AB в базисі $\vec{e}$:

$$X = A'B' = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 31 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Матриця оператора BA в базисі $\vec{e}$:

$$X = B'A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 31 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 37 & 12 \end{pmatrix}.$$

№ 38.4 [2]. Нехай A – лінійний оператор простору многочленів, степінь яких менше або дорівнює n , з дійсними коефіцієнтами, який переводить кожен многочлен у його похідну. Довести, що при $m \geq n + 1$ оператор A^m переводить кожен многочлен в нуль, тобто $A^m = \theta$, де θ – нульовий оператор.

Розв'язання.

Многочлени мають вигляд (можна, не обмежуючи загальності, припустити, що старший коефіцієнт дорівнює 1):

$$f_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

Тоді:

$$f_n A = n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + a_2 (n-2) x^{n-3} + \dots + a_{n-1},$$

$$f_n A^2 = (f_n A) A = n(n-1) x^{n-2} + a_1 (n-1)(n-2) x^{n-3} + \dots + a_{n-2},$$

.....

$$f_n A^n = (f_n A) A = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1,$$

тобто $f_n A^n$ є многочленом нульового степеня (константою). Тому $f_n A^m = 0$, де $m \geq n + 1$, тобто $A^m = \theta$, де θ – нульовий оператор.

№ 1457 [6]. Оператор A в базисі $\vec{a}_1 = (1, 2)$, $\vec{a}_2 = (2, 3)$ має матрицю

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, а лінійний оператор B у базисі $\vec{b}_1 = (3, 1)$, $\vec{b}_2 = (4, 2)$ має

матрицю $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю лінійного оператора $A - 2B$ у

базисі $\vec{b}_1, \vec{b}_2$.

Розв'язання.

Знайдемо матрицю A' оператора A в базисі $\vec{b}_1, \vec{b}_2$.

$A' = T A T^{-1}$, де T – матриця переходу від базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ до базису $\vec{b}_1, \vec{b}_2$.

$T = B_0 A_0^{-1}$, де A_0, B_0 – матриці, складені з компонент векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ відповідно.

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2,5 \\ -4 & 3,5 \end{pmatrix},$$

$$A' = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -20 \\ 0 & -22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2,5 \\ -4 & 3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 & -72,5 \\ 88 & -77 \end{pmatrix}.$$

Матриця оператора $A - 2B$ в базисі $\vec{b}_1, \vec{b}_2$:

$$\begin{pmatrix} 83 & -72,5 \\ 88 & -77 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & -84,5 \\ 76 & -95 \end{pmatrix}.$$

№ 39.1 [2] (ж). Нехай лінійний оператор A векторного простору L_4 над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ у деякому базисі $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ цього простору задано матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти ранг $\dim(\text{Im } A)$ і дефект $\dim(\text{Ker } A)$ цього лінійного оператора A . Побудувати ядро $\text{Ker } A$ і область значень $\text{Im } A$ оператора A .

Розв'язання.

Ранг лінійного оператора дорівнює рангу матриці цього оператора в базисі B . Знаходимо ранг матриці A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $r(A) = 3$, тому $\dim(\text{Im } A) = 3$.

Оскільки сума рангу і дефекту лінійного оператора дорівнює розмірності простору, то $\dim(\text{Ker } A) = n - 3 = 4 - 3 = 1$, тобто дефект оператора дорівнює 1.

Для побудови ядра $\text{Ker } A$ і області значень $\text{Im } A$ оператора A достатньо визначити їх базиси.

Область значень $\text{Im } A$ оператора A складається з образів усіх векторів простору L_4 , тобто з усіх векторів вигляду

$$(\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 + \alpha_4 \vec{e}_4)A = \alpha_1 (\vec{e}_1 A) + \alpha_2 (\vec{e}_2 A) + \alpha_3 (\vec{e}_3 A) + \alpha_4 (\vec{e}_4 A),$$

де α_i – довільні числа. Тобто, підпростір $\text{Im } A$ породжується системою векторів

$$\vec{e}_1 A, \vec{e}_2 A, \vec{e}_3 A, \vec{e}_4 A \quad (1)$$

Отже, за базис підпростору $\text{Im } A$ можна взяти довільну максимальну лінійно незалежну підсистему векторів системи (1). Оскільки

$$\begin{aligned}\bar{e}_1 A &= 1 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3 + 1 \cdot \bar{e}_4, \\ \bar{e}_2 A &= -1 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + 1 \cdot \bar{e}_3 + 1 \cdot \bar{e}_4, \\ \bar{e}_3 A &= 0 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2 + 1 \cdot \bar{e}_3 + 3 \cdot \bar{e}_4, \\ \bar{e}_4 A &= 1 \cdot \bar{e}_1 + 2 \cdot \bar{e}_2 + 1 \cdot \bar{e}_3 + 3 \cdot \bar{e}_4,\end{aligned}$$

то такі підсистеми визначаються максимальними лінійно незалежними рядками матриці A . Із знаходження рангу матриці A видно, що однією з таких підсистем є підсистема, що складається з першого, другого і третього рядків матриці A . Тоді за базис простору $\text{Im } A$ можна взяти вектори $\bar{e}_1 A, \bar{e}_2 A, \bar{e}_3 A$.

Побудуємо ядро $\text{Ker } A$. Вектор $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + x_3 \bar{e}_3 + x_4 \bar{e}_4$ належить ядру оператора A тоді і тільки тоді, коли $\bar{x}A = \vec{0}$, тобто коли $[\bar{x}A] = [\bar{x}]A = [\vec{0}]$.

Отже, $\text{Ker } A$ – це множина всіх тих векторів, координати яких задовольняють умову $[\bar{x}]A = [\vec{0}]$, тобто

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Знаходимо базис простору розв'язків системи рівнянь (2), тобто фундаментальну систему розв'язків. Оскільки матрицею системи (2) є матриця, транспонована до A , а $r(A) = r(A^T)$, то ранг матриці системи (2) теж дорівнює 3 і за вільне невідоме можна взяти, наприклад x_4 . Знаходимо загальний розв'язок системи (2).

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = -2x_4, \\ x_2 = -x_4, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальна система розв'язків: $\vec{f} = (-2, -1, 0, 1)$.

Вектор $\vec{f} = (-2, -1, 0, 1)$ є базисом одновимірного простору $\text{Ker } A$.

Нехай L – векторний простір многочленів $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами степеня меншого або рівного $n-1$, а A – оператор диференціювання многочленів із L . Знайти образ і ядро оператора A .

Розв'язання.

Похідна многочлена степеня $\leq n-1$ є многочлен степеня $\leq n-2$. З іншого боку, якщо

$$f_1(x) = a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$$

– довільний многочлен степеня $\leq n-2$, то знайдеться многочлен $f(x)$ степеня $\leq n-1$ такий, що $f'(x) = f_1(x)$. Таким многочленом є, наприклад, многочлен

$$f(x) = \frac{a_{n-2}}{n-1}x^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0x.$$

Отже, образом простору L при дії оператора A є множина всіх многочленів із L степеня $\leq n-2$.

Ядром оператора A є поле дійсних чисел (коефіцієнти многочленів належать полю $\mathbb{R}$), оскільки похідна многочлена дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли цей многочлен є многочлен нульового степеня (тобто константа) або дорівнює нулю.

Зазначимо, що розмірність ядра дорівнює 1 (його базисом є многочлен $f(x) \equiv 1$), а розмірність образу L дорівнює $n-1$ (його базис: $1, x, x^2, \dots, x^{n-2}$).

№ 39.2 [2]. Нехай лінійний оператор A векторного простору L_n над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ задано в деякому базисі $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ цього простору своєю матрицею A . З'ясувати, чи є оператор A невиродженим, і якщо є, то знайти матрицю X оберненого оператора A^{-1} в тому самому базисі при:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$

Розв'язання.

Оскільки рядки матриці пропорційні, то матриця вироджена, тому заданий оператор не має оберненого, бо він не є невиродженим.

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Розв'язання.

Матриця невироджена, тому заданий оператор не вироджений і для нього існує обернений. Матрицею оберненого оператора є матриця:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійної роботи до теми 8

№ 38.2 [2] (б). Нехай лінійний оператор A в базисі $\vec{a}_1 = (7,3)$, $\vec{a}_2 = (2,1)$ має матрицю $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, а лінійний оператор B у базисі $\vec{b}_1 = (6,1)$, $\vec{b}_2 = (5,1)$ має матрицю $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю X лінійного оператора $A+B$ у базисі $\vec{b}_1, \vec{b}_2$.

№ 1458 [6]. Оператор A в базисі $\vec{a}_1 = (-3,7)$, $\vec{a}_2 = (1,-2)$ має матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а лінійний оператор B у базисі $\vec{b}_1 = (6,-7)$, $\vec{b}_2 = (-5,6)$ має матрицю $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю лінійного оператора AB в тому базисі, в якому задано координати всіх векторів.

№ 39.1 [2] (е). Нехай лінійний оператор A векторного простору L_4 над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ у деякому базисі $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ цього простору задано матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти ранг $\dim(\text{Im } A)$ і дефект $\dim(\text{Ker } A)$ цього лінійного оператора A . Побудувати ядро $\text{Ker } A$ і область значень $\text{Im } A$ оператора A .

№ 39.2 [2]. Нехай лінійний оператор A векторного простору L_n над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ задано в деякому базисі $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ цього простору своєю матрицею A . З'ясувати, чи є оператор A невиродженим, і якщо є, то знайти матрицю X оберненого оператора A^{-1} в тому самому базисі при:

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Тема 9. Власні вектори і власні значення лінійного оператора. Лінійні оператори з простим спектром. Зведення матриці до діагонального вигляду

№ 40.1 [2]. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора A дійсного векторного простору L_n , заданого в деякому базисі $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ цього простору матрицею A , якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Розв'язання.

Характеристична матриця $A - \lambda E$ має вигляд: $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$

Характеристичне рівняння: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = 0;$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Характеристичні корені не належать полю дійсних чисел. Тому цей оператор власних значень, а, значить, і власних векторів, немає.

е) $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння $|A - \lambda E| = 0:$

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 & -5 \\ 3 & 2-\lambda & -3 \\ 7 & 1 & -6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (6-\lambda)(2-\lambda)(-6-\lambda) - 21 - 15 + 35(2-\lambda) - 3(-6-\lambda) + 3(6-\lambda) =$$

$$= (6-\lambda)(2-\lambda)(-6-\lambda) + 35(2-\lambda) = (2-\lambda)((6-\lambda)(-6-\lambda) + 35) =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 1) = (2-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0;$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1.$$

Власними значеннями оператора A є ті його характеристичні корені, які належать полю P , і тільки вони. Усі знайдені характеристичні корені є власними значеннями даного оператора.

Для знаходження власного вектора $\vec{b}$, який відповідає власному значенню λ , треба розв'язати таку систему лінійних рівнянь:

$$(A^T - \lambda E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{де } A^T - \text{матриця, транспонована до } A.$$

Тоді кожний вектор лінійної оболонки фундаментальної системи розв'язків цієї системи є власним вектором оператора A , що відповідає власному значенню λ . У даному випадку

$$A^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ -5 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_1 = 2$ маємо систему:

$$\begin{cases} (6-2)x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0, \\ 1 \cdot x_1 + (2-2)x_2 + 1 \cdot x_3 = 0, \\ -5x_1 - 3x_2 + (-6-2)x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ -5x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = -x_3. \end{cases}$$

Фундаментальна система розв'язків цієї системи: $\Phi_1 = \{\vec{f}_1\} = \{(-1, -1, 1)\}$. Тому всі власні вектори, що відповідають власному значенню $\lambda_1 = 2$, мають вигляд $\vec{b}_1 = c_1 \vec{f}_1 = c_1(-1, -1, 1)$, де c_1 – довільне дійсне число, $c_1 \neq 0$.

Для $\lambda_2 = 1$ маємо систему:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -5x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = -2x_3, \\ x_2 = x_3. \end{cases}$$

Фундаментальна система розв'язків цієї системи: $\Phi_2 = \{\vec{f}_2\} = \{(-2, 1, 1)\}$. Тому всі власні вектори, що відповідають власному значенню $\lambda_2 = 1$, мають вигляд $\vec{b}_2 = c_2 \vec{f}_2 = c_2(-2, 1, 1)$, де c_2 – довільне дійсне число, $c_2 \neq 0$.

Для $\lambda_3 = -1$ маємо систему:

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ -5x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальна система розв'язків цієї системи: $\Phi_3 = \{\vec{f}_3\} = \{(-1, 0, 1)\}$. Тому всі власні вектори, що відповідають власному значенню $\lambda_3 = -1$, мають вигляд $\vec{b}_3 = c_3 \vec{f}_3 = c_3(-1, 0, 1)$, де c_3 – довільне дійсне число, $c_3 \neq 0$.

№ 40.3 [2]. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора A дійсного векторного простору L_n , який задано в базисі $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -\lambda & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 2 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \\ 2 & -1 & 1-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -(\lambda-1)((1-\lambda)^3 - 2(1-\lambda) + 2(1-\lambda)) = -(\lambda-1)(1-\lambda)^3 = (\lambda-1)^4 = 0. \end{aligned}$$

Отже, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A^T - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2, \\ x_3 = -x_4. \end{cases}$$

Фундаментальна система розв'язків цієї системи:

$$\vec{b}_1 = (-2, 1, 0, 0), \quad \vec{b}_2 = (0, 0, -1, 1).$$

Власні вектори мають вигляд $c_1 \cdot (-2, 1, 0, 0) + c_2 \cdot (0, 0, -1, 1)$, де c_1, c_2 – дійсні числа, які одночасно не дорівнюють нулю.

№ 41.1 [2]. Які з наступних матриць лінійних операторів дійсного векторного простору L можна звести до діагонального вигляду за допомогою переходу до нового базису? Знайти цей базис і відповідну йому діагональну матрицю:

б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 9 = 0; \quad -(\lambda + 1)(5 - \lambda) = 0$$

має корені $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, які і є власними значеннями заданого оператора. Отже, оператор має простий спектр, тому матриця цього оператора зводиться до діагонального вигляду. Діагональна матриця, подібна даній матриці, має вигляд:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо базис з власних векторів, в якому матриця оператора є діагональною.

$$\lambda_1 = -1 \quad \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2; \quad \vec{f}_1 = (-1, 1);$$

$$\lambda_2 = 5 \quad \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2; \quad \vec{f}_2 = (1, 1).$$

Отже, в базисі $\vec{f}_1 = (-1, 1)$, $\vec{f}_2 = (1, 1)$ матриця оператора має вигляд

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

а) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 8 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 + 16 = 0$$

дійсних коренів не має, тому не має і власних значень. Отже, матриця цього оператора не зводиться до діагонального вигляду.

є) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(5-\lambda) + 4(5-\lambda) = (5-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 13) = 0$$

має корені $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3 - 2i$, $\lambda_3 = 3 + 2i$, тобто оператор має тільки одне власне значення $\lambda = 5$. Тому матриця цього оператора не зводиться до діагонального вигляду.

в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

має двократний корінь $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Отже, власних значень є два, але різних власних значень є тільки одне. Знайдемо число k лінійно

незалежних власних векторів, що відповідають власному значенню $\lambda = 2$ кратності 2, тобто кількість векторів фундаментальної системи розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь

$$(A^T - \lambda E) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^T - \lambda E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r = 1, n = 2$, тому $k = n - r = 2 - 1 = 1 < 2$ (2 – кратність кореня $\lambda = 2$), тобто не набереться стільки власних векторів, скільки їх повинно бути в базисі. Тому матриця цього оператора не зводиться до діагонального вигляду.

$$\text{ж) } \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 6 - \lambda & -5 & -3 \\ 3 & -2 - \lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 2)(6 - \lambda) + 20 + 18 - 6(\lambda + 2) - 15\lambda - 4(6 - \lambda) =$$

$$= \lambda(\lambda + 2)(6 - \lambda) - 17\lambda + 2 = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda^2 - 3\lambda - 2\lambda + 2 = -\lambda^2(\lambda - 1) + 3\lambda(\lambda - 1) - 2(\lambda - 1) =$$

$$= (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 3\lambda - 2) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$$

має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. Отже, власних значень є три, але різних власних значень є два. Знайдемо число k лінійно незалежних власних векторів, що відповідають власному значенню $\lambda = 1$ кратності 2.

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -2 & -2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A^T - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -5 & -3 & -2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r = 2, n = 3$, тому $k = n - r = 3 - 2 = 1 < 2$ (2 – кратність кореня $\lambda = 1$). Тому матриця цього оператора не зводиться до діагонального вигляду.

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-5-\lambda)(1-\lambda) + 18(1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) = -(\lambda-1)^2(\lambda+2) = 0$$

має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. Отже, власних значень є три, але різних власних значень є два. Знайдемо число k лінійно незалежних власних векторів, що відповідають власному значенню $\lambda = 1$ кратності 2.

$$A^T - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r = 1$, $n = 3$, тому $k = n - r = 3 - 1 = 2$ (2 – кратність кореня $\lambda = 1$). Тому матриця цього оператора зводиться до діагонального вигляду, а саме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо базис, в якому матриця оператора має знайдений діагональний вигляд, тобто знайдемо власні вектори оператора.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad x_1 - x_2 - x_3 = 0; \quad x_1 = x_2 + x_3;$$

$$\vec{f}_1 = (1,1,0), \quad \vec{f}_2 = (1,0,1)$$

$$\lambda_3 = -2 \quad \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 6 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_2 = 2x_1, \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad \vec{f}_3 = (1,2,0).$$

Отже, шуканий базис: $\vec{f}_1 = (1,1,0)$, $\vec{f}_2 = (1,0,1)$, $\vec{f}_3 = (1,2,0)$.

$$\kappa) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1-\lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda^2 - 1)^2 = 0$$

має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$. Отже, власних значень є чотири, але різних власних значень є два.

Знайдемо число k лінійно незалежних власних векторів, що відповідають власному значенню $\lambda = 1$ кратності 2.

$$A^T - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; r = 2, k = 4 - 2 = 2;$$

$$A^T + 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; r = 2, k = 4 - 2 = 2.$$

Матриця цього оператора зводиться до діагонального вигляду, а саме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо базис, в якому матриця оператора має знайдений діагональний вигляд, тобто знайдемо власні вектори оператора.

$$\lambda = 1 \quad \begin{cases} -x_1 + x_4 = 0, \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_4, \\ x_2 = x_3, \end{cases} \quad \vec{f}_1 = (0,1,1,0), \vec{f}_2 = (1,0,0,1),$$

$$\lambda = -1 \quad \begin{cases} x_1 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4, \\ x_2 = -x_3, \end{cases} \quad \vec{f}_3 = (0,-1,1,0), \vec{f}_4 = (-1,0,0,1).$$

Отже, шуканий базис:

$$\vec{f}_1 = (0,1,1,0), \vec{f}_2 = (1,0,0,1), \vec{f}_3 = (0,-1,1,0), \vec{f}_4 = (-1,0,0,1).$$

Завдання для самостійної роботи до теми 9

№ 40.1 [2]. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора $\mathcal{A}$ дійсного векторного простору L_n , заданого в деякому базисі $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ цього простору матрицею A , якщо:

$$\text{в)} A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{г)} A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{з)} A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{к)} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{м)} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

№ 41.1 [2]. Які з наступних матриць лінійних операторів дійсного векторного простору L можна звести до діагонального вигляду за допомогою переходу до нового базису? Знайти цей базис і відповідну йому діагональну матрицю:

$$\text{г)} \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{д)} \begin{pmatrix} 7 & 10 & -12 \\ 3 & 8 & -9 \\ 4 & 8 & -9 \end{pmatrix}; \quad \text{е)} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{з)} \begin{pmatrix} -5 & 6 & -4 & 3 \\ -6 & 6 & -4 & 4 \\ -6 & 4 & -3 & 5 \\ -7 & 7 & -5 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{л)} \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & -2 & 2 \\ -4 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розділ III. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ НА ЕВКЛІДОВОМУ ТА УНІТАРНОМУ ПРОСТОРАХ

Тема 10. Ортогональні, спряжені і самоспряжені (симетричні) лінійні оператори

№ 41.11 [2]. Взявши за означення ортогонального лінійного оператора A евклідового простору E умову збереження ним скалярного добутку, тобто умову $(\vec{x}A, \vec{y}A) = (\vec{x}, \vec{y})$ для довільних $\vec{x}, \vec{y} \in E$, довести, що:

а) добуток двох ортогональних операторів є ортогональним оператором.

Розв'язання.

Нехай оператори A, B – ортогональні, тобто $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$

$$(\vec{x}A, \vec{y}A) = (\vec{x}, \vec{y}),$$

$$(\vec{x}B, \vec{y}B) = (\vec{x}, \vec{y}).$$

Доведемо, що оператор AB – ортогональний, тобто $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$

$$(\vec{x}(AB), \vec{y}(AB)) = (\vec{x}, \vec{y}).$$

$$(\vec{x}(AB), \vec{y}(AB)) = ((\vec{x}A)B, (\vec{y}A)B) \stackrel{B\text{-ортогон}}{=} (\vec{x}A, \vec{y}A) \stackrel{A\text{-ортогон}}{=} (\vec{x}, \vec{y}).$$

№ 1569 [6]. Довести, що для унітарного оператора A унітарного простору:

а) власні значення за модулем дорівнюють одиниці;

Розв'язання.

Нехай $\vec{x}$ – власний вектор унітарного оператора A , λ – відповідне йому власне значення, тобто $\vec{x}A = \lambda\vec{x}$. Тоді

$$(\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{x}A, \vec{x}A) = (\lambda\vec{x}, \lambda\vec{x}) = \lambda\bar{\lambda}(\vec{x}, \vec{x}).$$

Оскільки $\vec{x} \neq \vec{0}$, то $\lambda\bar{\lambda} = 1$, звідки $|\lambda| = 1$.

№ 41.7 [2]. Нехай $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ – ортонормований базис евклідового простору E_2 , а лінійний оператор A цього простору в базисі, що складається з векторів $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, має матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю A^* спряженого оператора A^* в тому самому базисі $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$.

Розв'язання.

Знайдемо x_1, y_1, x_2, y_2 з рівностей

$$\vec{f}_1 A^* = x_1 \vec{f}_1 + y_1 \vec{f}_2,$$

$$\vec{f}_2 A^* = x_2 \vec{f}_1 + y_2 \vec{f}_2.$$

Для цього помножимо кожен з них на $\vec{f}_1$ і $\vec{f}_2$.

$$(\vec{f}_1 A^*, \vec{f}_1) = x_1(\vec{f}_1, \vec{f}_1) + y_1(\vec{f}_2, \vec{f}_1),$$

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_1 A) = x_1(\vec{f}_1, \vec{f}_1) + y_1(\vec{f}_2, \vec{f}_1),$$

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_1 + 2\vec{f}_2) = x_1(\vec{f}_1, \vec{f}_1) + y_1(\vec{f}_2, \vec{f}_1),$$

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_1) + 2(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = x_1(\vec{f}_1, \vec{f}_1) + y_1(\vec{f}_2, \vec{f}_1).$$

Оскільки $(\vec{f}_1, \vec{f}_1) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1,$

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\vec{f}_2, \vec{f}_1) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1) + (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1 + 0 = 1,$$

$$(\vec{f}_2, \vec{f}_2) = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1) + 2(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + (\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 1 + 0 + 1 = 2,$$

то

$$3 = x_1 + y_1.$$

Аналогічно

$$(\vec{f}_1 A^*, \vec{f}_2) = x_1(\vec{f}_1, \vec{f}_2) + y_1(\vec{f}_2, \vec{f}_2),$$

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_2 A) = x_1(\vec{f}_1, \vec{f}_2) + y_1(\vec{f}_2, \vec{f}_2),$$

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_1 - \vec{f}_2) = x_1(\vec{f}_1, \vec{f}_2) + y_1(\vec{f}_2, \vec{f}_2),$$

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_1) - (\vec{f}_1, \vec{f}_2) = x_1(\vec{f}_1, \vec{f}_2) + y_1(\vec{f}_2, \vec{f}_2),$$

$$0 = x_1 + 2y_1.$$

$$\begin{cases} 3 = x_1 + y_1, \\ 0 = x_1 + 2y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6, \\ y_1 = -3. \end{cases}$$

$$(\vec{f}_2 A^*, \vec{f}_1) = x_2(\vec{f}_1, \vec{f}_1) + y_2(\vec{f}_2, \vec{f}_1),$$

$$(\vec{f}_2, \vec{f}_1 A) = x_2(\vec{f}_1, \vec{f}_1) + y_2(\vec{f}_2, \vec{f}_1),$$

$$(\vec{f}_2, \vec{f}_1 + 2\vec{f}_2) = x_2(\vec{f}_1, \vec{f}_1) + y_2(\vec{f}_2, \vec{f}_1),$$

$$(\vec{f}_2, \vec{f}_1) + 2(\vec{f}_2, \vec{f}_2) = x_2(\vec{f}_1, \vec{f}_1) + y_2(\vec{f}_2, \vec{f}_1),$$

$$5 = x_2 + y_2.$$

$$(\vec{f}_2 A^*, \vec{f}_2) = x_2(\vec{f}_1, \vec{f}_2) + y_2(\vec{f}_2, \vec{f}_2),$$

$$(\vec{f}_2, \vec{f}_2 A) = x_2(\vec{f}_1, \vec{f}_2) + y_2(\vec{f}_2, \vec{f}_2),$$

$$(\vec{f}_2, \vec{f}_1 - \vec{f}_2) = x_2(\vec{f}_1, \vec{f}_2) + y_2(\vec{f}_2, \vec{f}_2),$$

$$(\vec{f}_2, \vec{f}_1) - (\vec{f}_2, \vec{f}_2) = x_2(\vec{f}_1, \vec{f}_2) + y_2(\vec{f}_2, \vec{f}_2),$$

$$-1 = x_2 + 2y_2.$$

$$\begin{cases} 5 = x_2 + y_2, \\ -1 = x_2 + 2y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 11, \\ y_2 = -6. \end{cases}$$

Отже,

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 11 & -6 \end{pmatrix}.$$

№ 41.13 [2]. Знайти ортонормований базис $B'\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}$ з власних векторів і матрицю A' в цьому базисі для лінійного оператора A , заданого в деякому ортонормованому базисі $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ евклідового простору E_n матрицею A , якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, в) $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$

Розв'язання.

Лінійний оператор A евклідового простору E називають **самоспряженим** (або **симетричним**), якщо для довільної пари векторів $\vec{x}, \vec{y} \in E$ справджується умова

$$(\vec{x}A, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}A).$$

Відомо, що:

- 1) довільний самоспряжений оператор A в ортонормованому базисі евклідового простору E має симетричну матрицю A (ця умова є одночасно і достатньою умовою само спряженості оператора);
- 2) усі характеристичні корені самоспряженого оператора є дійсними, а отже, є його власними значеннями;
- 3) власні вектори самоспряженого оператора, які відповідають різним власним значенням, ортогональні між собою;
- 4) для довільного самоспряженого оператора завжди існує (звичайно ортонормований) базис з власних векторів, в якому цей оператор має діагональну матрицю.

а) У нашому випадку $A^T = A$, тобто A – симетрична матриця і тому A – самоспряжений лінійний оператор. Знаходимо його власні значення.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (1-\lambda)(3-\lambda) = 0; \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3.$$

Тоді

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Визначимо тепер ортонормований базис $B'\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$. Для цього знайдемо власні вектори, що відповідають власним значенням 1 і 3, як фундаментальні системи розв'язків систем лінійних однорідних рівнянь:

$$(A - \lambda_i E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

Для $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad x_1 = -x_2; \quad \vec{f}_1 = (-1, 1).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_1$:
$$\vec{e}'_1 = \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Для $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad x_1 = x_2; \quad \vec{f}_2 = (1, 1).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_2$:
$$\vec{e}'_2 = \frac{\vec{f}_2}{\|\vec{f}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Вектори $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ утворюють шуканий базис.

$$\text{в)} \quad \begin{vmatrix} 11 - \lambda & 2 & -8 \\ 2 & 2 - \lambda & 10 \\ -8 & 10 & 5 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$(11 - \lambda)(2 - \lambda)(5 - \lambda) - 160 - 160 - 64(2 - \lambda) - 4(5 - \lambda) - 100(11 - \lambda) =$$

$$= (11 - \lambda)(2 - \lambda)(5 - \lambda) - 320 - 128 + 64\lambda - 20 + 4\lambda - 1100 + 100\lambda =$$

$$= (11 - \lambda)(2 - \lambda)(5 - \lambda) + 168\lambda - 1568 = -\lambda^3 + 18\lambda^2 + 81\lambda - 1458 =$$

$$= -\lambda^2(\lambda - 18) + 81(\lambda - 18) = -(\lambda - 18)(\lambda^2 - 81) = -(\lambda - 18)(\lambda - 9)(\lambda + 9) = 0$$

$$\lambda_1 = 18, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = -9.$$

$$A' = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_1 = 18$

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ 1 & -8 & 5 \\ -8 & 10 & -13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = -2x_2, \\ x_3 = 2x_2, \end{cases}$$

$$\vec{f}_1 = (-2, 1, 2).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_1$:
$$\vec{e}'_1 = \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Для $\lambda_2 = 9$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = 2x_3, \\ x_2 = 2x_3, \end{cases}$$

$$\vec{f}_2 = (2, 2, 1).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_2$:
$$\vec{e}'_2 = \frac{\vec{f}_2}{\|\vec{f}_2\|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Для $\lambda_3 = -9$

$$\begin{pmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 \\ 10 & 1 & -4 \\ 4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3, \\ x_2 = -x_3, \end{cases}$$

$$\vec{f}_3 = (1, -2, 2).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_3$:
$$\vec{e}'_3 = \frac{\vec{f}_3}{\|\vec{f}_3\|} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Вектори $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ утворюють шуканий базис.

Зауваження. Якщо б, наприклад, $\lambda_1 = \lambda_2$, то власні вектори $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ слід ще ортогоналізувати, оскільки ортогональними є власні вектори самоспряженого оператора, що відповідають **різним** власним значенням.

Для даної симетричної матриці знайти ортогональну матрицю, яка трансформує її в діагональну матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Знаходимо власні значення.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \lambda+2 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & -\lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \lambda+2 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 4-\lambda & 2 & 0 \end{vmatrix} = \\
= (\lambda+2)(2-(4-\lambda)(5-\lambda)) = (\lambda+2)(-\lambda^2+9\lambda-18) = -(\lambda+2)(\lambda^2-9\lambda+18) = \\
= -(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6) = 0; \\
\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6.$$

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо тепер ортонормований базис $B'\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ з власних векторів.

Для $\lambda_1 = -2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad \vec{f}_1 = (-1, 0, 1).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_1$:

$$\vec{e}'_1 = \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Для $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = -x_3, \end{cases} \quad \vec{f}_2 = (1, -1, 1).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_2$:

$$\vec{e}'_2 = \frac{\vec{f}_2}{\|\vec{f}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Для $\lambda_3 = 6$

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = 2x_3, \end{cases} \quad \vec{f}_3 = (1, 2, 1).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_3$:

$$\vec{e}'_3 = \frac{\vec{f}_3}{\|\vec{f}_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Вектори $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ утворюють шуканий базис.

Якщо існує така неособлива матриця Q n -го порядку, що $B = Q^{-1}AQ$, то кажуть, що матриця B утворена **трансформацією** матриці A матрицею Q або що матриця Q **трансформує** матрицю A в матрицю B .

Отже, нам слід знайти таку ортогональну матрицю Q , що $A' = Q^{-1}AQ$. Позначимо матрицю, рядками якої є вектори $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$, через G . Тоді $A' = GAG^{-1}$, звідки $Q = G^{-1}$. Але оскільки матриця G ортогональна, то $G^{-1} = G^T$. Таким чином, $Q = G^T$, тобто стовпцями матриці Q є координати векторів $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$:

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку:

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{3}} \\ \frac{6}{\sqrt{6}} & \frac{12}{\sqrt{6}} & \frac{6}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Знайти повну ортонормовану систему власних векторів симетричної матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ 5 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2-\lambda & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2-\lambda & 0 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2((2-\lambda)^2(1-\lambda) - 25(1-\lambda)) -$$

$$- 25((2-\lambda)^2(1-\lambda) - 25(1-\lambda)) = (1-\lambda)((2-\lambda)^2 - 25)^2 = (1-\lambda)(\lambda+3)^2(\lambda-7)^2 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -3, \lambda_4 = \lambda_5 = 7.$$

Для $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = 0, \end{cases} \quad \vec{e}'_1 = (0, 0, 1, 0, 0).$$

Для $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = -x_5, \\ x_2 = -x_4, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\vec{f}_2 = (0, -1, 0, 1, 0), \vec{f}_3 = (-1, 0, 0, 0, 1).$$

Пронормуємо вектори $\vec{f}_2, \vec{f}_3$:

$$\vec{e}'_2 = \frac{\vec{f}_2}{\|\vec{f}_2\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

$$\vec{e}'_3 = \frac{\vec{f}_3}{\|\vec{f}_3\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Для $\lambda_4 = \lambda_5 = 7$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = x_5, \\ x_2 = x_4, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\vec{f}_4 = (0, 1, 0, 1, 0), \vec{f}_5 = (1, 0, 0, 0, 1).$$

Пронормуємо вектори $\vec{f}_4, \vec{f}_5$:

$$\vec{e}'_4 = \frac{\vec{f}_4}{\|\vec{f}_4\|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

$$\vec{e}'_5 = \frac{\vec{f}_5}{\|\vec{f}_5\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Вектори $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'_4, \vec{e}'_5$ утворюють шукану ортонормовану систему власних векторів.

Завдання для самостійної роботи до теми 10

№ 41.6 [2]. Довести, що операція переходу від лінійного оператора A евклідового простору E до спряженого лінійного оператора A^* має такі властивості:

б) $(A + B)^* = A^* + B^*$;

д) якщо A – невироджений, то $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

№ 41.10 [2]. Нехай вектор $\vec{x}$ евклідового (унітарного) простору E є власним вектором для лінійного оператора A , відповідним власному значенню λ_1 , і для спряженого оператора A^* , відповідним власному значенню λ_2 . Довести, що $\lambda_1 = \lambda_2$ ($\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$).

№ 41.13 [2]. Знайти ортонормований базис $B' \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}$ з власних векторів і матрицю A' в цьому базисі для лінійного оператора A , заданого

в деякому ортонормованому базисі $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ евклідового простору E_n матрицею A , якщо:

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{г) } A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Розділ IV. КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ

Тема 11. Квадратичні форми. Матриця квадратичної форми. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду методом ортогональних перетворень

Знайти ортогональне перетворення, що зводить квадратичну форму до канонічного вигляду (зведення до головних осей) і записати цей канонічний вигляд:

№ 1248 [6]. $\varphi = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$.

Розв'язання.

Матрицею цієї форми є
$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Треба знайти ортогональну матрицю Q , що трансформує матрицю A в діагональну A' (тобто таку, що $A' = Q^{-1}AQ$). Для цього слід знайти власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ і повну ортонормовану систему власних векторів матриці A .

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda) - 4(5-\lambda) - 4(7-\lambda) = \\ & = (6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda) - 4(12-2\lambda) = (6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda) - 8(6-\lambda) = \\ & = (6-\lambda)((5-\lambda)(7-\lambda) - 8) = (6-\lambda)(35 - 12\lambda + \lambda^2 - 8) = \\ & = (6-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 27) = -(\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-9) = 0; \\ & \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9. \end{aligned}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_1 = 3$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = -2x_3, \\ x_2 = -2x_3, \end{cases}$$

$$\vec{f}_1 = (2, 2, -1).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_1$:
$$\vec{e}'_1 = \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Для $\lambda_2 = 6$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3, \\ x_2 = x_3, \end{cases}$$

$$\vec{f}_2 = (-1, 2, 2).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_2$:
$$\vec{e}'_2 = \frac{\vec{f}_2}{\|\vec{f}_2\|} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Для $\lambda_3 = 9$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3, \end{cases}$$

$$\vec{f}_3 = (2, -1, 2).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_3$:
$$\vec{e}'_3 = \frac{\vec{f}_3}{\|\vec{f}_3\|} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Вектори $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ утворюють повну ортонормовану систему власних векторів матриці A .

Отже, шукана матриця має вигляд:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

а відповідним перетворенням є

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_2 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3, \\ x_3 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3. \end{cases}$$

Внаслідок такого перетворення дістанемо канонічну форму

$$\varphi = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2.$$

№ 1251 [6]. $\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$

Розв'язання.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 16 - 4(1-\lambda) - 4(1-\lambda) - 4(1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)^3 + 16 - 12(1-\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 = -(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5) =$$

$$= -(\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda - 5\lambda - 5) = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 5) = 0;$$

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_1 = 5$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = x_3, \end{cases}$$

$$\vec{f}_1 = (1, 1, 1).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_1$:

$$\vec{e}_1' = \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Для $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad x_1 = -x_2 - x_3;$$

$$\vec{f}_2 = (-1, 1, 0), \vec{f}_3 = (-1, 0, 1).$$

Вектори $\vec{f}_2, \vec{f}_3$ не ортогональні, тому ортогоналізуємо цю систему векторів.

$$\vec{f}'_3 = \lambda \vec{f}_2 + \vec{f}_3; \quad 0 = \lambda(\vec{f}_2, \vec{f}_2) + (\vec{f}_3, \vec{f}_2); \quad \lambda = -\frac{(\vec{f}_3, \vec{f}_2)}{(\vec{f}_2, \vec{f}_2)} = -\frac{1}{2};$$

$$\vec{f}'_3 = -\frac{1}{2} \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Пронормуємо вектори $\vec{f}_2, \vec{f}'_3$:

$$\vec{e}'_2 = \frac{\vec{f}_2}{\|\vec{f}_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

$$\vec{e}'_3 = \frac{\vec{f}'_3}{\|\vec{f}'_3\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Вектори $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ утворюють повну ортонормовану систему власних векторів матриці A .

Матриця Q має вигляд:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

а відповідним перетворенням є

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} y_3. \end{cases}$$

Внаслідок такого перетворення дістанемо канонічну форму

$$\varphi = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

№ 1255 [6]. $\varphi = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.

Розв'язання.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -3\lambda & -3 \\ -3 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -3 & -8 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -3\lambda & -3 \\ 0 & -3\lambda & -10\lambda & -8 \\ 0 & -3 & -8 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-\lambda^2 & -\lambda & -3\lambda & -3 \\ -3\lambda^2 & -3\lambda & -10\lambda & -8 \\ -3\lambda & -3 & -8 & -\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1-\lambda^2 & -3\lambda & -3 \\ -3\lambda^2 & -10\lambda & -8 \\ -3\lambda & -8 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda^2-1 & 3\lambda & 3 \\ 3\lambda^2 & 10\lambda & 8 \\ 3\lambda & 8 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 10\lambda^2(\lambda^2-1) + 72\lambda^2 + 72\lambda^2 - 90\lambda^2 - 9\lambda^4 - 64(\lambda^2-1) = \\ = \lambda^4 - 20\lambda^2 + 64 = (\lambda^2-4)(\lambda^2-16) = (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda+4) = 0; \\ \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -4.$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x_1 = x_4, \\ x_2 = -x_4, \\ x_3 = -x_4, \end{cases} \quad \vec{f}_1 = (1, -1, -1, 1).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_1$:

$$\vec{e}_1' = \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Для $\lambda_2 = 4$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_4, \\ x_2 = -x_4, \\ x_3 = x_4, \end{cases} \quad \vec{f}_2 = (1, 1, -1, -1).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_2$: $\vec{e}'_2 = \frac{\vec{f}_2}{\|\vec{f}_2\|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$

Для $\lambda_3 = -2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & 2 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x_1 = x_4, \\ x_2 = x_4, \\ x_3 = x_4, \end{cases} \quad \vec{f}_3 = (1, 1, 1, 1).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_3$: $\vec{e}'_3 = \frac{\vec{f}_3}{\|\vec{f}_3\|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$

Для $\lambda_4 = -4$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_4, \\ x_2 = x_4, \\ x_3 = -x_4, \end{cases} \quad \vec{f}_4 = (1, -1, 1, -1).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_4$: $\vec{e}'_4 = \frac{\vec{f}_4}{\|\vec{f}_4\|} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$

Вектори $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'_4$ утворюють повну ортонормовану систему власних векторів матриці A .

Матриця Q має вигляд:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

а відповідним перетворенням є

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4), \\ x_2 = \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4), \\ x_3 = \frac{1}{2}(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4), \\ x_4 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4). \end{cases}$$

Внаслідок такого перетворення дістанемо канонічну форму

$$\varphi = 2y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2 - 4y_4^2.$$

№ 1250 [6]. $\varphi = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Розв'язання.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & -1 \\ -3 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(5-\lambda) + 3 + 3 - (1-\lambda) - 9(5-\lambda) - (1-\lambda) =$$

$$\begin{aligned} &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = -(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36) = \\ &= -(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda^2 + 36) = -(\lambda - 3)(\lambda^2 - 4\lambda - 12) = \\ &= -(\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda + 2) = 0; \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -2.$$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_1 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = -x_3, \end{cases}$$

$$\vec{f}_1 = (1, -1, 1).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_1$:

$$\vec{e}'_1 = \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Для $\lambda_2 = 6$

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & -8 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_2 = 2x_2, \end{cases}$$

$$\vec{f}_2 = (1, -1, -2).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_2$:

$$\vec{e}'_2 = \frac{\vec{f}_2}{\|\vec{f}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right).$$

Для $\lambda_3 = -2$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad \vec{f}_3 = (1, 1, 0).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_3$:

$$\vec{e}'_3 = \frac{\vec{f}_3}{\|\vec{f}_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

Вектори $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ утворюють повну ортонормовану систему власних векторів матриці A .

Шукана матриця має вигляд:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix},$$

а відповідним перетворенням є

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3, \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} y_2. \end{cases}$$

Внаслідок такого перетворення дістанемо канонічну форму

$$\varphi = 3y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2.$$

Завдання для самостійної роботи до теми 11

Знайти ортогональне перетворення, що зводить квадратичну форму до канонічного вигляду (зведення до головних осей) і записати цей канонічний вигляд:

№ 1252 [6]. $\varphi = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$

№ 1253 [6]. $\varphi = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

№ 1257 [6]. $\varphi = 3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2.$

№ 1258 [6]. $\varphi = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2.$

Тема 12. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду методом Лагранжа. Ранг квадратичної форми

Звести квадратичну форму до канонічного вигляду методом Лагранжа і записати цей канонічний вигляд:

№ 1248 [6]. $\varphi = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3.$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \varphi &= 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 = \\ &= \frac{1}{6}(6x_1 - 2x_2 + 2x_3)^2 + \frac{13}{3}x_2^2 + \frac{19}{3}x_3^2 + \frac{4}{3}x_2x_3. \end{aligned}$$

Виконаємо перетворення

$$\begin{cases} y_1 = 6x_1 - 2x_2 + 2x_3, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad \text{з матрицею } B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ тобто } \vec{y} = B\vec{x}; \text{ тоді}$$

$$\varphi = \frac{1}{6}y_1^2 + \frac{13}{3}y_2^2 + \frac{19}{3}y_3^2 + \frac{4}{3}y_2y_3 = \frac{1}{6}y_1^2 + \frac{3}{13}\left(\frac{13}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3\right)^2 + \frac{81}{13}y_3^2.$$

Виконаємо перетворення

$$\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = \frac{13}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ z_3 = y_3 \end{cases} \text{ з матрицею } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ тобто } \vec{z} = C\vec{y} = CB\vec{x}; \text{ тоді}$$

$$\varphi = \frac{1}{6}z_1^2 + \frac{3}{13}z_2^2 + \frac{81}{13}z_3^2.$$

Отже, задану квадратичну форму зведено до канонічного вигляду перетворенням з матрицею

$$P = CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тобто перетворенням

$$\begin{cases} z_1 = 6x_1 - 2x_2 + 2x_3, \\ z_2 = \frac{13}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3, \\ z_3 = x_3. \end{cases}$$

Звести квадратичну форму до канонічного вигляду методом Лагранжа і записати цей канонічний вигляд:

$$\varphi = x_1x_2 - x_2x_3 + 2x_3x_4.$$

Розв'язання.

Оскільки тут немає членів з квадратами змінних, робимо спочатку перетворення

$$\begin{cases} x_1 = u_1 - u_2, \\ x_2 = u_1 + u_2, \\ x_3 = u_3, \\ x_4 = u_4 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \\ u_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \\ u_3 = x_3, \\ u_4 = x_4 \end{cases} \text{ з матрицею } B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дістанемо

$$\begin{aligned} \varphi &= (u_1 - u_2)(u_1 + u_2) - u_1u_3 - u_2u_3 + 2u_3u_4 = u_1^2 - u_2^2 - u_1u_3 - u_2u_3 + 2u_3u_4 = \\ &= \left(u_1 - \frac{1}{2}u_3\right)^2 - u_2^2 - \frac{1}{4}u_3^2 - u_2u_3 + 2u_3u_4. \end{aligned}$$

Тепер зробимо перетворення

$$\begin{cases} y_1 = u_1 - \frac{1}{2}u_3, \\ y_2 = u_2, \\ y_3 = u_3, \\ y_4 = u_4 \end{cases} \quad \text{з матрицею } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\varphi = y_1^2 - y_2^2 - \frac{1}{4}y_3^2 - y_2y_3 + 2y_3y_4 = y_1^2 - \left(y_2 + \frac{1}{2}y_3\right)^2 + 2y_3y_4.$$

Наступне перетворення

$$\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = y_2 + \frac{1}{2}y_3, \\ z_3 = y_3, \\ z_4 = y_4 \end{cases} \quad \text{має матрицю } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\varphi = z_1^2 - z_2^2 + 2z_3z_4.$$

Тепер зробимо перетворення

$$\begin{cases} z_1 = t_1, \\ z_2 = t_2, \\ z_3 = t_3 - t_4, \\ z_4 = t_3 + t_4 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} t_1 = z_1, \\ t_2 = z_2, \\ t_3 = \frac{1}{2}z_3 + \frac{1}{2}z_4, \\ t_4 = -\frac{1}{2}z_3 + \frac{1}{2}z_4 \end{cases} \quad \text{з матрицею } F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Дістанемо

$$\varphi = t_1^2 - t_2^2 + 2t_3^2 - 2t_4^2.$$

Отже, задану квадратичну форму зведено до канонічного вигляду перетворенням з матрицею

$$P = FDCB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

тобто перетворенням

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3), \\ t_2 = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3), \\ t_3 = \frac{1}{2}(x_3 + x_4), \\ t_4 = \frac{1}{2}(-x_3 + x_4). \end{cases}$$

Звести до нормального вигляду (над полем дійсних чисел) квадратичні форми. Визначити ранг і сигнатуру цих форм.

а) $\varphi = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \varphi &= x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 = \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_2x_3 - 6x_2x_3 = \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - 4x_2x_3 - 4x_3^2 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 = y_1^2 - y_2^2, \end{aligned}$$

де $y_1 = x_1 - x_2 + x_3, \quad y_2 = x_2 + 2x_3$.

Отже, $r = 2, \quad p = 1, \quad q = 1, \quad \sigma = p - q = 0$.

б) $\varphi = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.

Розв'язання.

Зробимо спочатку перетворення

$$\begin{cases} x_1 = u_1 - u_2, \\ x_2 = u_1 + u_2, \\ x_3 = u_3 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \\ u_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \\ u_3 = x_3. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = (u_1 - u_2)(u_1 + u_2) + u_1u_3 + u_2u_3 + u_1u_3 - u_2u_3 = \\ &= u_1^2 - u_2^2 + 2u_1u_3 = (u_1 + u_3)^2 - u_2^2 - u_3^2 = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2, \end{aligned}$$

де

$$\begin{cases} y_1 = u_1 + u_3, \\ y_2 = u_2, \\ y_3 = u_3. \end{cases}$$

Отже, $r = 3, \quad p = 1, \quad q = 2, \quad \sigma = p - q = -1.$

Завдання для самостійної роботи до теми 12

Звести квадратичну форму до канонічного вигляду методом Лагранжа і записати цей канонічний вигляд:

№ 1249 [6]. $\varphi = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3.$

№ 1253 [6]. $\varphi = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

$$\varphi = x_1x_2 - 2x_1x_4 + x_2x_4 + 3x_3x_4.$$

Тема 13. Нормальний вигляд квадратичної форми. Еквівалентні квадратичні форми. Додатно визначені форми

№ 1201 [6]. З'ясувати, які з даних квадратичних форм еквівалентні над полем дійсних чисел:

$$F_1 = x_1^2 - x_2x_3, \quad F_2 = y_1y_2 - y_3^2, \quad F_3 = z_1z_2 + z_3^2.$$

Розв'язання.

Зведемо усі квадратичні форми до нормального вигляду.

$$1) F_1 = x_1^2 - x_2x_3 = u_1^2 - u_2^2 + u_3^2, \quad \text{де} \quad \begin{cases} x_1 = u_1, \\ x_2 = u_2 - u_3, \\ x_3 = u_2 + u_3. \end{cases}$$

$$2) F_2 = y_1y_2 - y_3^2 = u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad \text{де} \quad \begin{cases} y_1 = u_1 - u_2, \\ y_2 = u_1 + u_2, \\ y_3 = u_3. \end{cases}$$

$$3) F_3 = z_1z_2 + z_3^2 = u_1^2 - u_2^2 + u_3^2, \quad \text{де} \quad \begin{cases} z_1 = u_1 - u_2, \\ z_2 = u_1 + u_2, \\ z_3 = u_3. \end{cases}$$

Отже, $F_1 \approx F_3.$

№ 1212 [6]. Знайти всі значення параметра λ , при яких квадратична форма додатно визначена:

$$\varphi = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Розв'язання.

Матриця даної квадратичної форми

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Використаємо критерій Сільвестра.

$$5 > 0, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} > 0,$$

$$\text{звідки} \quad 5\lambda + 2 + 2 - 1 - 4\lambda - 5 > 0 \quad \text{або} \quad \lambda > 2.$$

№ 1213 [6]. $\varphi = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3.$

Розв'язання.

Матриця даної квадратичної форми

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Використаємо критерій Сільвестра.

$$\begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 2 - \lambda^2 > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 - 3\lambda^2 > 0,$$

$$\text{тобто} \quad \begin{cases} \lambda^2 - 2 < 0, \\ 3\lambda^2 - 5 < 0, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad |\lambda| < \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Завдання для самостійної роботи до теми 13

Знайти всі значення параметра λ , при яких квадратична форма додатно визначена:

№ 1214 [6]. $\varphi = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

№ 1215 [6]. $\varphi = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3.$

Зразки завдань для контрольних робіт

№ 36.6 [2]. Довести, що існує єдиний лінійний оператор A тривимірного простору, який переводить вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ в $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ відповідно, і

знайти матрицю A цього оператора в тому самому базисі, в якому задано координати всіх векторів, якщо:

$$\text{б) } \vec{a}_1 = (2, 0, 3), \vec{b}_1 = (1, 2, -1), \vec{a}_2 = (1, 1, -1), \vec{b}_2 = (-2, 1, 3),$$

$$\vec{a}_3 = (2, 1, 0), \vec{b}_3 = (1, -1, 1).$$

Розв'язання.

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in$ базисом простору V_3 , оскільки вона, як легко перевірити, лінійно незалежна.

Використаємо теорему:

Якщо не була упорядкована система з n векторів простору L_n

$$\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n,$$

існує і притому тільки один, лінійний оператор φ простору L_n такий, що вектори системи $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n \in$ образами векторів базису $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ при дії цього оператора:

$$\vec{c}_i = \vec{e}_i \varphi, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Отже, існує єдиний лінійний оператор A тривимірного простору, який переводить базисні вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ в $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ відповідно. Матрицю A цього оператора в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ шукаємо за формулою:

$$A = L^{-1}M,$$

де L і M матриці, рядками яких є координатні рядки векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ відповідно в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо L^{-1} :

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A = L^{-1}M = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 & -5 \\ -15 & 15 & 11 \\ -5 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

№ 37.2 [2] (в). Лінійний оператор A в базисі $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ має матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю A' цього самого оператора в базисі:

$$\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2, 2\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4.$$

Розв'язання.

$A' = TAT^{-1}$, де T – матриця переходу від базису B до заданого базису $\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2, 2\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю T^{-1} .

$$\begin{aligned} T|E &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{від} \\ \text{другого} \\ \text{рядка} \\ \text{відніmemo} \\ \text{подвосяний} \\ \text{перший}}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{до} \\ \text{першого} \\ \text{рядка} \\ \text{додамо} \\ \text{потросний} \\ \text{другий}}} \\ &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{другий} \\ \text{рядок} \\ \text{множимо} \\ \text{на } (-1)}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = E|T^{-1}. \\ T^{-1} &= \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$TA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -3 & 7 \\ 17 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A' = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -3 & 7 \\ 17 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -46 & 28 & -3 & 7 \\ -77 & 47 & -5 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Отже, } A' = \begin{pmatrix} -46 & 28 & -3 & 7 \\ -77 & 47 & -5 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

№ 1458 [6]. Оператор A в базисі $\vec{a}_1 = (-3, 7)$, $\vec{a}_2 = (1, -2)$ має матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а лінійний оператор B у базисі $\vec{b}_1 = (6, -7)$, $\vec{b}_2 = (-5, 6)$ має матрицю $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю лінійного оператора AB в тому базисі, в якому задано координати всіх векторів.

Розв'язання.

Матрицю A' оператора A в базисі $\vec{e}$ і матрицю B' оператора B в базисі $\vec{e}$ знаходимо за формулами:

$A' = T_1 A T_1^{-1}$, T_1 – матриця переходу від базису $\vec{a}$ до базису $\vec{e}$, $T_1 = A_0^{-1}$,
 $B' = T_2 B T_2^{-1}$, T_2 – матриця переходу від базису $\vec{b}$ до базису $\vec{e}$, $T_2 = B_0^{-1}$.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$T_1 = A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad T_2 = B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} A' = T_1 A T_1^{-1} &= A_0^{-1} A A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 39 & -23 \\ 17 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -140 & 319 \\ -61 & 139 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B' = T_2 B T_2^{-1} &= B_0^{-1} B B_0 = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 20 & 67 \\ 17 & 57 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -215 & 262 \\ -183 & 223 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матриця оператора AB в базисі $\vec{e}$:

$$X = A'B' = \begin{pmatrix} -140 & 319 \\ -61 & 139 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -215 & 262 \\ -183 & 223 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28277 & 34457 \\ -12312 & 15015 \end{pmatrix}.$$

№ 41.1 [2]. Чи можна матрицю лінійного оператора дійсного векторного простору L звести до діагонального вигляду за допомогою переходу до нового базису? Знайти цей базис і відповідну йому діагональну матрицю:

$$\text{е)} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda) + 9 + 9 - 3(5-\lambda) + 9(1-\lambda) + 3(-1-\lambda) =$$

$$= (-1-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda) + 9 - 9\lambda = (-1-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda) + 9(1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)((-1-\lambda)(5-\lambda) + 9) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (1-\lambda)(\lambda - 2)^2 = 0$$

має корені $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Отже, власних значень є три, але різних власних значень є два. Знайдемо число k лінійно незалежних власних векторів, що відповідають власному значенню $\lambda = 2$ кратності 2.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^T - 2 \cdot E = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r=1, n=3$, тому $k = n - r = 3 - 1 = 2$ (2 – кратність кореня $\lambda = 2$). Тому матриця цього оператора зводиться до діагонального вигляду, а саме:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо базис, в якому матриця оператора має знайдений діагональний вигляд, тобто знайдемо власні вектори оператора.

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = 3x_3, \\ x_2 = -3x_3, \end{cases} \quad \vec{f}_1 = (3, -3, 1).$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0; \quad x_1 = -x_2 - x_3;$$

$$\vec{f}_2 = (-1, 1, 0), \quad \vec{f}_3 = (-1, 0, 1).$$

Отже, шуканий базис: $\vec{f}_1 = (3, -3, 1), \quad \vec{f}_2 = (-1, 1, 0), \quad \vec{f}_3 = (-1, 0, 1).$

№ 1253 [6]. Звести квадратичну форму

$$\varphi = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

до канонічного вигляду ортогональним перетворенням і записати формули перетворення.

Розв'язання.

Матрицею цієї форми є $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Треба знайти ортогональну матрицю Q , що трансформує матрицю A в діагональну A' (тобто таку, що $A' = Q^{-1}AQ$). Для цього слід знайти власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ і повну ортонормовану систему власних векторів матриці A .

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -5-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(-5-\lambda) + 4 + 4 + (5+\lambda) - 4(1-\lambda) - 4(1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)^2(-5-\lambda) + 8 + 5 + \lambda - 4 + 4\lambda - 4 + 4\lambda = (1-\lambda)^2(-5-\lambda) + 9\lambda + 5 =$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 18\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 3\lambda - 18) = 0;$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -6, \lambda_3 = 3.$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad \vec{f}_1 = (-1, 0, 1).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_1$: $\vec{e}'_1 = \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

Для $\lambda_2 = -6$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = -4x_3, \end{cases} \quad \vec{f}_2 = (1, -4, 1).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_2$:
$$\vec{e}'_2 = \frac{\vec{f}_2}{\|\vec{f}_2\|} = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \right).$$

Для $\lambda_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -8 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = 2x_2, \\ x_3 = 2x_2, \end{cases} \quad \vec{f}_3 = (2, 1, 2).$$

Пронормуємо вектор $\vec{f}_3$:
$$\vec{e}'_3 = \frac{\vec{f}_3}{\|\vec{f}_3\|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

Вектори $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ утворюють повну ортонормовану систему власних векторів матриці A .

Отже, шукана матриця має вигляд:

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

а відповідним перетворенням є

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{3\sqrt{2}}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_2 = -\frac{4}{3\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{3}y_3, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{3\sqrt{2}}y_2 + \frac{2}{3}y_3. \end{cases}$$

Внаслідок такого перетворення дістанемо канонічну форму

$$\varphi = -6y_2^2 + 3y_3^2.$$

Література

1. Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел : у 2-х частинах. Київ : «Вища школа», 1974. Ч.1. 464 с.
2. Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пиласв В.В., Рокицький І.О. Алгебра і теорія чисел. Практикум. Київ : «Вища школа», 1983. Ч. 1. 232 с.
3. Комарницька Л. Лінійна алгебра : тексти лекцій. Дрогобич : РВВ ДДПУ імені Івана Франка, 2015. Частина 2. 100 с.
4. Комарницька Л. Лінійна алгебра : методичні матеріали до самостійної роботи. Дрогобич : РВВ ДДПУ імені Івана Франка, 2017. Частина 2. 72 с.
5. Фаддєєв Д.К., Сомінський І.С. Збірник задач з вищої алгебри. Київ : «Вища школа», 1971. 316 с.
6. Проскуряков І.В. Збірник завдань з лінійної алгебри. Москва : «Наука», 1974. 384 с.
7. Авдєєва Т. В., Шраменко В. М. Лінійна алгебра в задачах та прикладах <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/16845>

Електронне навчально-методичне видання

ПРАКТИКУМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Частина 2

Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка

Редактор
Ірина Невмержицька
Технічний редактор
Ірина Артимко

Здано до набору 09.05.2025 р. Формат 60х90/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times. Ум. друк. арк. 5,75. Зам. 37.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5140 від 01. 07. 2016 р.) 82100, Дрогобич, вул. І.Франка, 24, к. 203.