

УДК 519.62, 519.63

Чисельне розв'язування оберненої задачі для рівняння Лапласа в осесиметричному випадку

Дорошенко М. В., Лазурчак Л. В., Берегуляк Л. В.

informatyka@drohobych.net

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, кафедра інформатики та обчислювальної математики, вул. Стрийська 3, м. Дрогобич, 82100

Розглядається обернена задача теорії потенціалу знаходження оптимальної геометрії граничних поверхонь та оптимального розподілу граничних потенціалів в осесиметричному випадку. Методика розв'язання оберненої задачі зводиться до мінімізації деякого функціоналу та розв'язуванні системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду з логарифмічною особливістю.

Постановка проблеми

Крайові задачі математичної фізики поділяються на прямі та обернені.

У прямих задачах потрібно знайти характеристики поля при відомих геометрії граничних поверхонь та крайових умовах. В обернених – крайові умови та геометрію граничних поверхонь, які реалізують задані характеристики поля.

Розв'язання прямої задачі теорії потенціалу при розрахунку електростатичних полів, які створюють електронно-оптичні системи, зводиться до розв'язання внутрішньої та зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа.

Задача знаходження оптимального розподілу граничних потенціалів та оптимальної геометрії граничних поверхонь є актуальною при проектуванні електронно-оптичних систем, які реалізують задані параметри електронно-оптичних систем. Така задача зводиться до розв'язання деяких обернених задач математичної фізики.

Обернені задачі математичної фізики часто в класичному змісті поставлені некоректно, тобто, малим змінам у функціоналах можуть відповідати великі зміни у розв'язку задачі [5]. Тому розробка ефективних алгоритмів рішення обернених задач математичної фізики є достатньо актуальною проблемою.

Аналіз попередніх публікацій

Ефективним методом розв'язання прямої задачі є метод інтегральних рівнянь, що застосовувався для розв'язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа в роботах [1, 4]. За допомогою даного методу розв'язання зовнішньої та внутрішньої задач Діріхле для рівняння Лапласа зводиться до розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду зі слабкою особливістю в ядрі. Ефективність методу інтегральних рівнянь полягає в тому, що розмірність задачі зменшується на одиницю.

Задача знаходження оптимальних конструкцій електронно-оптичних систем, яка зводиться до розв'язання обернених задач теорії потенціалу, розглядалась в роботах [3, 6, 7].

У роботах [3, 6] при знаходженні оптимальних конструкцій електронно-оптичних систем розв'язувалися інтегральні рівняння у варіаціях і здійснювалась мінімізація деякого функціоналу.

У роботі [7] розглянута обернена задача реконструкції границі обмеженого включення у частково необмежену канонічну область задачі Діріхле для рівняння Лапласа. Для розв'язку такої задачі застосовувався гібридний метод, який полягає в наступному: методом Ньютона здійснюється лінеаризація відповідного нелінійного операторного рівняння, до якого зводиться розв'язок оберненої задачі, використовується техніка функцій Гріна для того, щоб розв'язок задачі звести до розв'язку деякого інтегрального рівняння першого роду.

Мета роботи: розробка чисельних алгоритмів для знаходження оптимального розподілу граничних потенціалів та знаходження оптимальної геометрії граничних поверхонь в осесиметричному випадку при заданому розподілу потенціалу на осі симетрії, які полягають у знаходженні мінімумів деяких функціоналів та розв'язуванні інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду.

Виклад основних результатів

На відрізку $[a, b]$ осі OZ циліндричної системи координат (r, z, φ) задана деяка достатньо гладка функція $U_0(z)$. Необхідно знайти розподіл потенціалів $\left\{V_0^{(i)}\right\}_{i=1}^m$ на осі симетрії розімкнутих поверхонь $\left\{S = \bigcup_{i=1}^m S_i\right\}$, які створюють осесиметричне електростатичне поле $U(r, z)$ при умові, що $U(0, z) = U_0(z)$, $z \in [a, b]$. Функція $U(r, z)$ є розв'язком такої задачі Діріхле для рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

$$U(r, z) = V_0^{(i)}, \quad (r, z) \in S_i \quad (2)$$

$$\lim_{(r,z) \rightarrow \infty} U(r, z) = 0 \quad (3)$$

Невідомі потенціали $V_0^{(i)}$ потрібно визначати з умови $U(0, z) = U_0(z)$.

Розв'язок задачі (1)–(3) представимо в такому вигляді:

$$U(r, z) = \sum_{i=1}^m V_0^{(i)} \varphi_i(z) \quad (4)$$

де $\varphi_i(r, z)$ є розв'язки таких характеристичних крайових задач:

$$\Delta \varphi_i(r, z) = 0, \quad (5)$$

$$\varphi_i(r, z) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } (r, z) \notin S_i \\ 1, & \text{якщо } (r, z) \in S_i \end{cases} \quad i$$

$$\lim_{(r, z) \rightarrow \infty} \varphi_i(r, z) = 0$$

Розв'язки задачі (5) не залежать від заданих на поверхнях потенціалів.

Невідомі потенціали $V_0^{(i)}$ є розв'язком такої задачі:

$$F(V_0^{(1)}, V_0^{(2)}, \dots, V_0^{(m)}) =$$

$$= \min \|U_0(z) - \sum_{i=1}^m V_0^{(i)} \varphi_i(z)\|^2, \quad (6)$$

$$\text{де } \|g(z)\|^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b |g(z)|^2 dz.$$

Суттєвим при знаходженні мінімуму функціонала (6) є дослідження лінійної незалежності функцій $\{\varphi_i(z)\}_{i=1}^m$.

Проблема лінійної незалежності пов'язана з дослідженням єдиності розв'язку даної задачі.

Теорема. Якщо $U_0(z) = 0$, на $[a, b]$, то задача має тривіальний розв'язок, тобто $V_0^{(i)} = 0$, $i = \overline{1, m}$.

Доведення. Нехай існує деяка функція $W(r, z)$ яка є розв'язком задачі (1) – (3)

Константи $V_0^{(i)}$ не дорівнюють нулю і виконується умова $W(0, z) = U_0(z) = 0$, $z \in [a, b]$.

Покажемо, що $W(r, z) \equiv 0$ в R^3 .

Нехай z_0 – середина відрізка $[a, b]$. Опишемо сферу $\sum_\varepsilon(z_0)$ з центром у точці z_0 радіуса ε . Число ε вибираємо так, щоб сфера $\sum_\varepsilon(z_0)$ не дотикалась до граничних поверхонь S_i і точки $z = a$ і $z = b$ знаходилися поза сферою. Функція $W(r, z)$ є гармонічною в $\sum_\varepsilon(z_0)$. Позначимо C коло, утворене перетином площини $\varphi = 0$ і $\sum_\varepsilon(z_0)$. Оскільки $W(0, z_0 + \varepsilon) = W(0, z_0 - \varepsilon) = 0$, то з принципу максимуму, випливає, що існує точка $W(\bar{r}, \bar{z})$, така, що $W(\bar{r}, \bar{z}) = 0$.

У протилежному випадку $W(r, z) \leq 0$, $W(r, z) \geq 0$. Припустимо, що, якщо $(r, z) \in \sum_\varepsilon(z_0)$. На основі теореми про середнє для гармонічних функцій маємо

$$W(0, z) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{\sum_\varepsilon(z_0)} W(r, z) ds = 0.$$

З цієї формули отримаємо, що $W(r, z) = 0$ на $\sum_\varepsilon(z_0)$. З теореми єдиності випливає, що $W(r, z) \equiv 0$ в кулі $K_\varepsilon(r, z)$. Аналогічно отримуємо такий самий результат у випадку, коли $W(r, z) \leq 0$, $(r, z) \in \sum_\varepsilon(z_0)$.

Нехай на частині кола C_ε , обмеженої точками $(0, z_0 - \varepsilon)$ і $(r, z) \in \sum_\varepsilon(z_0)$ функція $W(r, z) \geq 0$. Розглянемо сферу $\sum_{\varepsilon_1}(z_0)$, де $\varepsilon_1 < \varepsilon$. Оскільки функція $W(r, z)$ неперервна, то на основі наведених вище міркувань, дістаємо, що існує точка $(\bar{r}, \bar{z}) \in C$, де $W(\bar{r}, \bar{z}) = 0$. Виберемо $\varepsilon_2 > \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > \varepsilon_{n-1}$, так, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Ми одержали, що на площині $\varphi = 0$ існує деяка крива Γ з кінцями $(\bar{r}, \bar{z}) \in C$ і $(0, z_0)$, на якій $W(r, z) \equiv 0$. Також в області G , яка утворена обертанням навколо осі Z кривої Γ і кола C_ε , функція $W(r, z) \equiv 0$. Оскільки $W(r, z) \leq 0$ на $\sum_\Gamma(z_1)$, то $W(r, z) \equiv 0$ на $\sum_\Gamma(z_1)$. З теореми єдиності дістаємо, що $W(r, z) \equiv 0$, якщо $(r, z) \in K_\Gamma(z_1)$.

Отже, ми показали, що існує деяка куля K , в якій функція $W(r, z) \equiv 0$.

Розглянемо тепер довільну область $B \in R^3$, яка містить дану кулю K і гранична поверхня S знаходиться поза B . Оскільки за умовою функція $W(r, z)$ є гармонічною у B , то дістанемо, що $W(r, z) \equiv 0$, якщо $(r, z) \in B$.

Оскільки область B вибрана довільно, то отримуємо $W(r, z) \equiv 0$ для довільної точки (r, z) поза S , то $W(r, z) \equiv 0$, $(r, z) \in B$, тобто $V_0^{(i)} = 0$, $i = \overline{1, m}$.

Теорема доведена.

Чисельне розв'язування даної задачі зводиться до розв'язування двох таких задач:

Системи одномірних інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду

$$\sum_{i=1}^m \int_{L_i} \mu^{(i)}(r, z) E^{j(i)}(r, z, \bar{r}, \bar{z}) dl_i = \delta_{ij}, \quad (7)$$

де $\mu^{(i)}(r, z)$ – шукані функції,

$$E^{j(i)}(r, z, \bar{r}, \bar{z}) = \frac{K^{j(i)}(k) r^{(i)}}{\left((r^{(i)} + \bar{r}^{(j)})^2 + (z^{(i)} - \bar{z}^{(j)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}},$$

$K^{j(i)}(k)$ – повні еліптичні інтеграли першого роду; $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}$.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j \\ 1, & \text{якщо } i = j. \end{cases}$$

Мінімізації функціоналу:

$$F(V_0^{(1)}, V_0^{(2)}, \dots, V_0^{(m)}) = \left\| U_0(\bar{z}) - \sum_{i=1}^m V_0^{(i)} \varphi_i(\bar{z}) \right\|^2, \quad (8)$$

де

$$U_i(0, \bar{z}) = \int_{L_i} \mu^{(i)}(r, z) E^{(i)}(r, z, 0, \bar{z}) dl,$$

$$\varphi_i(\bar{z}) = U_i(0, \bar{z}).$$

Невідомі функції $\mu^{(i)}(r, z)$ мають сингулярну особливість на краях розімкнутих поверхонь, а ядро – логарифмічну особливість при суміщенні точки спостереження з точкою інтегрування. Якщо поверхні замкнуті, то отримані інтегральні рівняння Фредгольма мають тільки логарифмічну особливість.

Для розв'язування системи інтегральних рівнянь застосовувався метод колокації, а невідомі функції $\mu^{(i)}(r, z)$ представлялися за допомогою кубічних сплайнів [2].

Нехай криві L_i задані параметрично

$$r_i = r_i(t), \quad z_i = z_i(t), \quad a_i \leq t \leq b_i.$$

На відрізках $[a_i, b_i]$ виберемо вузлові токи $a_i = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b_i$. Невідомі функції $\mu_k^{(i)}(t) = \mu_k^{(i)}(r_i(t), z_i(t))$ на кожному інтервалі $[t_k, t_{k+1}]$ представимо в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \mu_k^{(i)}(\tau) &= (1-\tau)^2(1+2\tau)\mu_k^{(i)} + (3-2\tau)\tau^2\mu_{k+1}^{(i)} + \\ &+ (1-\tau)^2 h_k \mu_k^{'(i)} + \tau^2(\tau-1) h_{k+1} \mu_{k+1}^{'(i)} \\ h_k &= t_{k+1} - t_k, \quad \tau = \frac{t - t_k}{h_k}. \end{aligned}$$

Невідомі функції на L_i представимо так:

$$\mu^{(i)}(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k^{(i)}(\tau) \theta_k(\tau),$$

де $\theta_k(\tau)$ – функції, які враховують особливість на краю поверхонь S_i [4] і мають такий вигляд:

$$\theta_1(\tau) = (\tau - a)^{-n_1}, \quad \theta_n(\tau) = (b - \tau)^{-n_2}, \quad \theta_k(\tau) = 1,$$

$$k = \overline{2, n-1}, \quad 0 \leq n_1 \leq 1, \quad 0 \leq n_2 \leq 1.$$

У результаті застосування для розв'язку системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду (7) методу колокації отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнти якої мають особливості завдяки особливостям на краю розімкнутих поверхонь та в ядрах інтегральних рівнянь. Особливості на краю розімкнутих поверхонь виділяються заміною змінних [4]. Логарифмічна особливість в ядрі виділяється за методикою ослаблення особливостей Канторовича, тобто від підінтегральної функції віднімається та додається функція, яка поводить себе в особливій точці як підінтегральна функція, а інтеграл від неї знаходиться аналітично. Для наближеного обчислення коефіцієнтів матриці системи лінійних алгебраїчних

рівнянь використовувалася квадратурна формула Гауса. При чисельній реалізації методу колокації для наближеного обчислення інтегралів з логарифмічною особливістю використовувалася квадратурна формула з ваговою функцією $\ln 1/x$.

Невідомі $V_0^{(i)}$ знаходилися з необхідної умови мінімуму функціонала (8), тобто такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{\partial F(V_0^{(1)}, V_0^{(2)}, \dots, V_0^{(m)})}{\partial V_0^{(i)}} = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Чисельна реалізація запропонованої методики здійснювалась у прикладній системі MatLab. Відносна похибка розрахунку тестових прикладів не перевищувала 0,05%.

Тепер розглянемо обернену задачу теорії потенціалу, яка полягає в знаходженні невідомої геометрії області, якщо відомий осьовий розподіл потенціалу поля $\Phi(z)$ на проміжку $[a, b]$. Наближений розв'язок такої задачі базується на методі інтегральних рівнянь та теорії малих збурень, а саме: малі збурення δr регулярної області L породжують збурення потенціалу $\delta u = -(\nabla U, \delta \mathbf{r})$, де ∇U – величина градієнта поля на незбуреній границі.

Застосовуючи теорію малих збурень [5], невідоме параметричне представлення геометрії області будемо шукати в такому вигляді:

$$r_k(\alpha) = r_{k-1}(\alpha) + \delta r(\alpha), \quad (9)$$

$$z_k(\alpha) = z_{k-1}(\alpha) + \delta z(\alpha),$$

де $r_0(\alpha)$, $z_0(\alpha)$ – вибираються на основі апріорної інформації про невідому достатньо гладку замкнуту область, а варіації $\delta r(\alpha)$, $\delta z(\alpha)$ подамо так:

$$\delta r(\alpha) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(\alpha), \quad \delta z(\alpha) = \sum_{i=1}^m b_i \psi_i(\alpha), \quad (10)$$

$\varphi_i(\alpha)$, $\psi_i(\alpha)$ – базисні функції.

Невідому густину будемо представляти аналогічно, а саме:

$$\mu_k(\alpha) = \mu_{k-1}(\alpha) + \delta \mu(\alpha), \quad (11)$$

де

$$\delta \mu(\alpha) = \sum_{i=1}^l c_i \tau_i(\alpha).$$

Алгоритм знаходження невідомої геометрії області зводиться до такої ітераційної чисельної схеми:

1. При заданому $r_{k-1}(\alpha)$ і $z_{k-1}(\alpha)$ розв'язуємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду, а саме рівняння виду:

$$\int_L \mu_{k-1}(r, z) E(r, z, \bar{r}, \bar{z}) dl = U_0, \quad (12)$$

де $\mu_{k-1}(r, z)$ – шукана густина на $k-1$ кроці ітерації;

$$E(r, z, \bar{r}, \bar{z}) = \frac{K(k)r}{\left((r + \bar{r})^2 + (z - \bar{z})^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Для чисельного розв'язування інтегрального рівняння (12) застосовуємо метод колокації, а невідому густину подаємо у вигляді кубічних сплайн-функцій. Логарифмічна особливість в ядрі виділяється методом ослаблення особливостей Канторовича.

2. Визначення невідомих коефіцієнтів a_i, b_i, c_i зводиться до мінімізації такого функціоналу:

$$F(a_1, a_2, \dots, b_n, c_1, \dots, c_l) = \quad (13)$$

$$= \|\Phi(z) - u(0, z) - \delta u(z)\|_{L_2[a, b]}^2,$$

де

$$\delta U(z) = \int_{L(\alpha)} (\delta \mu(\alpha) G_{k-1}(\alpha, z) + \mu_{k-1}(\alpha) V_{k-1}(\alpha, z)) d\alpha,$$

$$G_{k-1}(\alpha, z) = 2\pi \frac{r_{k-1}(\alpha)}{R_{k-1}(\alpha, z)},$$

$$V_{k-1}(\alpha, z) = 2\pi \left(\frac{\eta(\alpha)r_{k-1}(\alpha)}{R_{k-1}(\alpha, z)} + \frac{\xi(\alpha)r_{k-1}(\alpha)}{R_{k-1}^3(\alpha, z)} F_{k-1}(\alpha) \right),$$

$$\xi(\alpha) = \delta r(\alpha)(z - z_{k-1}(\alpha))^2 +$$

$$+ \delta z(\alpha)r_{k-1}(\alpha)(z - z_{k-1}(\alpha)),$$

$$R_{k-1}(\alpha) = \sqrt{(z_{k-1}(\alpha) - z)^2 + r_{k-1}(\alpha)}.$$

Бібліографія

- [1] Бакалец В.А., Людкевич И.В. Численное решение пространственных задач электронной оптики методом интегральных уравнений. Учебное пособие. – Львов: Изд-во ЛГУ, 1986.
- [2] Дорошенко М.В., Дудник О.М., Пушак Я.С. Два підходи чисельного розв'язування інтегральних рівнянь першого роду // Вісн. ДУ “Львівська політехніка”. – 1998, – № 341, – С. 103–105.
- [3] Иванов В.Я. Методы математического моделирования задач электронной оптики. – Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1986.
- [4] Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики – М.: Наука, 1986.
- [5] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980.
- [6] Монастырский М.А. Интегральные уравнения в экстремальных задачах электронной оптики. – Новосибирск: – Преринт ВЦ СО АН СССР, 1979. – 28 с.

Вигляд функції $\eta(\alpha)$ залежить від вибору класу малих збурень. Якщо розміри поверхні не змінюються, то $\eta(\alpha) = 0$.

Використовуючи необхідну умову існування екстремума функціонала (13), отримуємо некоректну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується методом Тихонова з вибором параметра регуляризації за принципом нев'язки.

3. Ітераційний процес закінчується у разі виконання такої умови:

$$\|r_k(\alpha) - r_{k-1}(\alpha)\| < \varepsilon,$$

$$\|z_k(\alpha) - z_{k-1}(\alpha)\| < \varepsilon.$$

Чисельна реалізація запропонованої методики здійснювалася у прикладній системі MatLab. Відносна похибка розрахунку тестових прикладів не перевищувала 0,1%.

Висновки

На основі проведених досліджень можна зробити такі висновки:

Чисельні розрахунки показали, що досягнута точність достатня для розв'язування практичних задач.

Ітераційний алгоритм знаходження оптимальної геометрії граничних поверхонь для модельних прикладів збігається достатньо швидко.

Запропонований алгоритм розв'язування інтегральних рівнянь першого роду дає змогу досягнути високої точності при розв'язанні модельних задач.

Для розв'язування інтегральних рівнянь запропонована єдина методика, а саме:

- невідома густина апроксимується за допомогою кубічних сплайн-функцій;
- логарифмічна особливість в ядрі виділяється методом ослаблення особливостей Канторовича;
- для чисельного обчислення інтегралів використовується квадратурна формула Гауса.

Перспективою досліджень є знаходження оптимального розподілу граничних потенціалів та оптимальної геометрії граничних поверхонь для суттєво просторових задач.

- [7] Chapko R., Kress R. A hybrid method for inverse boundary value problems in potential theory // Journal of IP – Posed and Inverse Problems. – 2005. – 13. – P. 27–40.