

УДК 517.5

Про факторизацію одного класу голоморфних у півплощині функцій, який визначається мажорантою, породженою функцією обмеженої варіації

Шаран В. Л.

volsharan@ukr.net

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра матаналізу, вул. Стрийська 3, м. Дрогобич, 82100

Отримано факторизацію класу функцій $f \neq 0$, голоморфних у правій півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, для яких

$$(\exists c_1 > 0) (\forall z \in \mathbb{C}_+) : |f(z)| \leq c_1 \exp(\sigma|z|\eta(|z|)),$$

де $0 \leq \sigma < +\infty$ – задане число, $\eta : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ – функція обмеженої варіації на $[0; +\infty)$ така, що функція $t\eta(t)$ є неспадною при $t \geq t_0$.

У теорії голоморфних і обмежених у півплощині функцій важливу роль відіграє таке твердження [1–2].

Теорема А. Нехай послідовність комплексних чисел (λ_n) із $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, незростаюча на $(-\infty; +\infty)$ функція h , похідна якої майже скрізь (м.с.) дорівнює нулеві, і функція $f_0 : \partial\mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ задовольняють умови

$$\sum_{|\lambda_n| \leq 1} \operatorname{Re} \lambda_n + \sum_{|\lambda_n| > 1} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|^2} < +\infty, \quad (1)$$

$$f_0 \in L^\infty(\partial\mathbb{C}_+), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |f_0(it)||}{1+t^2} dt < +\infty, \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|dh(t)|}{1+t^2} dt < +\infty. \quad (3)$$

Тоді функція

$$f(z) = e^{ia_0+a_1z} \prod_{|\lambda_n| \leq 1} \frac{z - \lambda_n}{z + \overline{\lambda_n}} \cdot \prod_{|\lambda_n| > 1} \frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\overline{\lambda_n}} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(tz+i)}{(1+t^2)(t+iz)} (\ln |f_0(it)| dt + dh(t)) \right\} \quad (4)$$

де a_0, a_1 – дійсні сталі, є голоморфною і обмеженою в $\mathbb{C}_+$, причому модулі кутових граничних значень функції f м.с. на $\partial\mathbb{C}_+$ збігаються з $|f_0(it)|$, послідовність нулів функції f збігається з (λ_n) і сингулярна гранична функція функції f збігається з h . Навпаки, якщо функція $f \neq 0$ є голоморфною і обмеженою в $\mathbb{C}_+$, то вона подається у вигляді (4), де λ_n – нулі функції f , $f_0(it)$ – кутові граничні значення функції f на $\partial\mathbb{C}_+$, h – сингулярна гранична функція функції f , і виконуються умови (1)–(3), причому $a_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(x)|}{x} \leq 0$, $a_0 \in \mathbb{R}$.

Сингулярна гранична функція голоморфної і обмеженої в кожному півкрузі $Q_R = \{z : |z| < R, \operatorname{Re} z > 0\}$, $0 < R < +\infty$, функції $f \neq 0$ – це

незростаюча на $(-\infty; +\infty)$ функція h , яка визначається з точністю до адитивної сталої і значень у точках неперервності рівності

$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x \rightarrow +0} \int_{t_1}^{t_2} \ln |f(x+iy)| dy - \int_{t_1}^{t_2} \ln |f(iy)| dy, \\ t_1 < t_2.$$

Із теореми А випливає таке твердження.

Теорема В. Для того, щоб існувала голоморфна і обмежена в $\mathbb{C}_+$ функція $f \neq 0$, послідовність нулів, сингулярна гранична функція і модулі кутових граничних значень якої збігаються відповідно з (λ_n) , h і $|f_0(it)|$, необхідно і достатньо, щоб функція h була незростаючою, причому $h'(t) = 0$ м.с., і виконувалися умови (1)–(3).

Б.В. Винницький і В.Л. Шаран узагальнили ці твердження [3], розглянувши клас голоморфних в $\mathbb{C}_+$ функцій $f \neq 0$, які задовольняють умови

$$(\exists c_1 > 0) (\forall z \in \mathbb{C}_+) : |f(z)| \leq c_1 \exp(\sigma|z|), \quad (5)$$

де $0 \leq \sigma < +\infty$ – задане число.

Теорема А'. Нехай послідовність комплексних чисел (λ_n) із $\mathbb{C}_+$, незростаюча на $(-\infty; +\infty)$ функція h , похідна якої дорівнює нулеві м.с., і функція $f_0 : \partial\mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ задовольняють умови

$$\sum_{|\lambda_n| \leq 1} \operatorname{Re} \lambda_n < +\infty, \quad (6)$$

$$\ln |f_0(it)| \in L^1(-1; 1), \quad f_0(it)e^{-\sigma|t|} \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad (7)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} K_0(r) < +\infty, \quad (8)$$

де

$$K_0(r) = \sum_{1 < |\lambda_n| \leq r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2} \right) \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|} + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) (|dh(t)| - \ln |f_0(it)| dt).$$

Тоді функція

$$f(z) = e^{ia_0+a_1z} \prod_{|\lambda_n| \leq 1} \frac{z - \lambda_n}{z + \overline{\lambda_n}} \cdot \prod_{|\lambda_n| > 1} W_n(z) \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t; z) (\ln |f_0(it)| dt + dh(t)) \right\}, \quad (9)$$

де a_0, a_1 – дійсні сталі,

$$W_n(z) = \frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\bar{\lambda}_n} \exp \left(\frac{z}{\lambda_n} + \frac{z}{\bar{\lambda}_n} \right),$$

$$Q(t; z) = \frac{(tz + i)^2}{(t^2 + 1)^2(t + iz)},$$

є голоморфною в $\mathbb{C}_+$ і задовольняє умову

$$(\exists c_1 > 0) (\forall z \in \mathbb{C}_+) : |f(z)| \leq c_1 \exp(\sigma|z| + c_1 x),$$

$$x = \operatorname{Re} z, \quad (10)$$

причому модулі кутових граничних значень функції f м.с. на $\partial\mathbb{C}_+$ збігаються з $|f_0(it)|$, послідовність нулів функції f співпадає з (λ_n) і сингулярна гранична функція функції f збігається з h . Навпаки, якщо голоморфна в $\mathbb{C}_+$ функція $f \not\equiv 0$ задовольняє умову (10), то вона подається у вигляді (9), де (λ_n) – послідовність нулів функції f , $f_0(it)$ – кутові граничні значення функції f на $\partial\mathbb{C}_+$, h – сингулярна гранична функція функції f , і виконуються умови (6)–(8).

Теорема В'. Для того, щоб існувала голоморфна в $\mathbb{C}_+$ функція $f \not\equiv 0$, яка задовольняє умову (5), послідовність нулів, сингулярна гранична функція і модулі кутових граничних значень якої збігаються відповідно з (λ_n) , h , $|f_0(it)|$, необхідно і достатньо, щоб функція h була незростаючою, причому $h'(t) = 0$ м.с., і виконувалися умови (6)–(8).

Якщо $\sigma = 0$, то клас голоморфних в $\mathbb{C}_+$ функцій $f \not\equiv 0$, які задовольняють умову (5), збігається з класом голоморфних і обмежених в $\mathbb{C}_+$ функцій, а умови (6)–(8) рівносильні умовам (1)–(3). У цьому випадку із теорем А' і В' отримуємо теорему А і В.

Нехай $0 \leq \sigma < +\infty$ – задане число, $\eta : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ – функція обмеженої варіації на $[0; +\infty)$ така, що функція $t\eta(t)$ є неспадною при $t \geq t_0$. Позначимо через $B_\eta(\sigma)$ клас голоморфних в $\mathbb{C}_+$ функцій $f \not\equiv 0$, які задовольняють умову

$$(\exists c_2 > 0) (\forall z \in \mathbb{C}_+) : |f(z)| \leq c_2 \exp(\sigma|z|\eta(|z|)). \quad (11)$$

Клас $B_\eta(\sigma)$ (без додаткової умови на функцію η) розглядався у роботах Ж.-П. Кахана, Б.В. Винницького та В.Л. Шарана [4–7]. Зокрема, в [6] отримано повний опис послідовностей нулів, а в [7] – сингулярних граничних функцій класу $B_\eta(\sigma)$.

Ми доведемо тут наступне твердження, яке дає опис повних мір (за термінологією А.П. Гришина [8]) функцій класу $B_\eta(\sigma)$.

Теорема 1. Для того, щоб існувала функція $f \in B_\eta(\sigma)$, послідовність нулів, сингулярна гранична функція і модулі кутових граничних значень якої збігаються відповідно з (λ_n) , h , $|f_0(it)|$,

необхідно і достатньо, щоб функція h була незростаючою, причому $h'(t) = 0$ м.с., і

$$\sum_{|\lambda_n| \leq 1} \operatorname{Re} \lambda_n < +\infty, \quad (12)$$

$$\ln |f_0(it)| \in L^1(-1; 1), \quad f_0(it)e^{-\sigma|t|\eta(|t|)} \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad (13)$$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} K_0(r) < +\infty. \quad (14)$$

Справедливість теореми 1 випливає із такого твердження.

Теорема 2. Нехай послідовність комплексних чисел (λ_n) , $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$, незростаюча на $(-\infty; +\infty)$ функція h , похідна якої дорівнює нулеві м.с., і функція $f_0 : \partial\mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ задовольняють умови (12)–(14). Тоді визначена рівністю (9) функція f є голоморфною в $\mathbb{C}_+$ і задовольняє умову

$$(\exists c_2 > 0) (\forall z \in \mathbb{C}_+) : |f(z)| \leq c_2 \exp(\sigma|z|\eta(|z|) + c_2 x),$$

$$x = \operatorname{Re} z, \quad (15)$$

причому модулі кутових граничних значень функції f м.с. на $\partial\mathbb{C}_+$ збігаються з $|f_0(it)|$, послідовність нулів функції f збігається з (λ_n) і сингулярна гранична функція функції f збігається з h . Навпаки, якщо голоморфна в $\mathbb{C}_+$ функція $f \not\equiv 0$ задовольняє умову (15), то вона подається у вигляді (9), де (λ_n) – послідовність нулів функції f , $f_0(it)$ – кутові граничні значення функції f на $\partial\mathbb{C}_+$, h – сингулярна гранична функція функції f , і виконуються умови (12)–(14).

Якщо $\eta \equiv 1$, то $B_\eta(\sigma)$ збігається з класом голоморфних в $\mathbb{C}_+$ функцій $f \not\equiv 0$, які задовольняють умову (5), а із теорем 1 і 2 отримуємо теорему В' і А'.

Якщо $\sigma = 0$, то $B_\eta(\sigma)$ збігається з класом голоморфних і обмежених у $\mathbb{C}_+$ функцій $f \not\equiv 0$, а із теорем 1 і 2 отримуємо теорему В і А.

Для доведення теореми 2 нам буде потрібна така лема.

Лема 1 [1, с. 26]. Якщо функція $f \not\equiv 0$ є голоморфною в $\mathbb{C}_+$ і обмеженою в кожному півкрузі Q_R , то для всіх $r \in [1; +\infty)$ виконується

$$\sum_{|\lambda_n| \leq r} \operatorname{Re} \lambda_n < +\infty, \quad (16)$$

$$K_0(r) = \frac{1}{\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln |f(re^{i\varphi})| \cos \varphi d\varphi + c_3 + \frac{c_4}{r^2}, \quad (17)$$

де c_3, c_4 – дійсні сталі, які не залежать від r .

Доведення теореми 2. Нехай виконуються умови (12)–(14). Із (13) випливає, що

$$(\exists c_5 > 0) : |f_0(it)| \leq c_5 \exp(\sigma|t|\eta(|t|)),$$

$$\text{для м. в. } t \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $c_5 = 1$ і ± 1 є точками неперервності функції h . Оскільки функція η є обмеженою на $[0; +\infty)$, то

використавши рівність $\ln |f| = \ln^+ |f| - \ln^+ |1/f|$ і (18), із (14) отримуємо для деякого σ_1 , $0 < \sigma_1 < +\infty$,

$$\begin{aligned} & \sum_{1 < |\lambda_n| \leq r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2} \right) \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|} + \frac{1}{2\pi} \times \\ & \times \int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \left(\ln^+ \frac{1}{|f_0(it)|} dt + |dh(t)| \right) dt \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln^+ |f_0(it)| dt + c_6 \leq \\ & \leq \frac{\sigma}{\pi} \int_1^r \frac{\eta(t)}{t} dt + c_7 \leq \frac{\sigma_1}{\pi} \ln r + c_7. \end{aligned}$$

Звідси

$$\sum_{1 < |\lambda_n| \leq r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2} \right) \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|} \leq \frac{\sigma_1}{\pi} \ln r + c_8, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \int_{1 < |t| \leq r} \frac{\ln^+ \frac{1}{|f_0(it)|}}{t^2} dt \leq \\ & \leq \frac{4}{3} \int_{1 < |t| \leq 2r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(2r)^2} \right) \ln^+ \frac{1}{|f_0(it)|} dt \leq \\ & \leq \frac{8\sigma_1}{3} \ln r + c_9, \quad (20) \\ & \int_{1 < |t| \leq r} \frac{|dh(t)|}{t^2} \leq \\ & \leq \frac{4}{3} \int_{1 < |t| \leq 2r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(2r)^2} \right) |dh(t)| \leq \frac{8\sigma_1}{3} \ln r + c_{10}. \quad (21) \end{aligned}$$

Із (12) і (19) випливає [9], що добутки, які входять в (9) збігаються абсолютно і рівномірно на кожному компактi із $\mathbb{C}_+$. Далі із (20) і (21) випливає [3, с. 44], що інтеграли, які входять в (9), збігаються абсолютно і рівномірно на кожному компактi із $\mathbb{C}_+$. Отже, функція f , визначена рівністю (9), є голоморфною в $\mathbb{C}_+$ і тому нам залишилося довести справедливості оцінки (15). Нехай

$$\begin{aligned} K(r) &= \sum_{1 < |\lambda_n| \leq r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2} \right) \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|} + \frac{1}{2\pi} \times \\ & \times \int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) ((\sigma |t| \eta(|t|) - \ln |f_0(it)|) dt + |dh(t)|). \end{aligned}$$

Із (14) і (18) випливає, що для деякої сталої c_0 , $0 < c_0 < +\infty$,

$$K(r) \leq \frac{\sigma}{\pi} \psi(r) + c_0, \quad r \geq 1, \quad (22)$$

$$\psi(r) = \int_1^r \frac{\eta(t)}{t} dt.$$

Крім цього,

$$K(r) = \frac{1}{2\pi} \int_1^r \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) dh_1(t), \quad (23)$$

де

$$\begin{aligned} h_1(t) &:= 2\pi \sum_{1 < |\lambda_n| \leq t} \operatorname{Re} \lambda_n + \\ &+ \int_{1 < |u| \leq t} ((\sigma |u| \eta(|u|) - \ln |f_0(iu)|) du + |dh(u)|). \end{aligned}$$

Із (23) випливає, що

$$\frac{h_1(t)}{t^2} \leq \frac{8\pi}{3} K(2t) \leq c_{11} \psi(t) + c_{11}, \quad t \geq 1. \quad (24)$$

Крім цього,

$$K(r) = \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) h_1(1) + \frac{1}{\pi} \int_1^r \frac{h_1(t)}{t^3} dt.$$

Тому функція K є неперервною на $(1; +\infty)$ і $\lim_{r \rightarrow 1+} K(r) = 0$. На проміжку $[r_0; +\infty)$ функція K зростає, де $r_0 = \max \{r : K(r) = 0\}$. Нехай

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{f_2(z) \cdot \exp(ia_0 + a_1 z)}, \quad (25)$$

де

$$f_2(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t; z) \sigma |t| \eta(|t|) dt \right\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \prod_{|\lambda_n| \leq 1} \frac{z - \lambda_n}{z + \bar{\lambda}_n} \cdot \prod_{|\lambda_n| > 1} \frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\bar{\lambda}_n} \times \\ & \times \exp \left(\frac{z}{\lambda_n} + \frac{z}{\bar{\lambda}_n} \right) \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t; z) ((\ln |f_0(it)| - \sigma |t| \eta(|t|)) dt + dh(t)) \right\}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$Q(t; z) = -\frac{iz}{t^2} - \frac{1}{t + iz} + \frac{t(t^2 + 2)}{(t^2 + 1)^2} + \frac{iz(2t^2 + 1)}{t^2(t^2 + 1)^2}, \quad (26)$$

і при $z \in \mathbb{C}_+$, $t \neq 0$,

$$\frac{1}{t^2} - \frac{1}{|t + iz|^2} \leq \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(|t| + |z|)^2} =$$

$$= \frac{2|z| \left(|t| + \frac{|z|}{2} \right)}{t^2 (|t| + |z|)^2} \leq \frac{2|z|}{|t|^3}, \quad (27)$$

то, враховуючи, що функція η є обмеженою на $[0; +\infty)$, а функція $t\eta(t)$ є неспадною на $[t_0; +\infty)$, отримуємо при $z = x + iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+$, $r \geq r_0$,

$$\begin{aligned} \ln |f_2(z)| &= \frac{\sigma}{\pi} x \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{|t + iz|^2} - \frac{1}{t^2} \right) |t\eta(|t|) dt + \\ &+ \frac{\sigma}{\pi} x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2t^2 + 1)\eta(|t|)}{|t|(t^2 + 1)} dt = \\ &= \frac{\sigma}{\pi} x \int_{|t| \leq r} \frac{|t\eta(|t|)}{|t + iz|^2} dt - \frac{\sigma}{\pi} x \int_{1 \leq |t| \leq r} \frac{\eta(|t|)}{|t|} dt + \\ &+ \frac{\sigma}{\pi} x \int_{|t| \geq r} \left(\frac{1}{|t + iz|^2} - \frac{1}{t^2} \right) |t\eta(|t|) dt + \\ &- \frac{\sigma}{\pi} x \int_{|t| \leq 1} \frac{|t|^3 \eta(|t|)}{(t^2 + 1)^2} dt + \\ &+ \frac{\sigma}{\pi} x \int_{|t| \geq 1} \frac{(2t^2 + 1)\eta(|t|)}{|t|(t^2 + 1)^2} dt \leq -\frac{2\sigma}{\pi} x \psi(r) + \\ &+ \frac{\sigma}{\pi} x \int_{|t| \leq r} \frac{|t\eta(|t|)}{(t - y)^2 + x^2} dt + c_{12}x \leq \\ &\leq \sigma r \eta(r) - \frac{2\sigma}{\pi} x \psi(r) + c_{12}x. \end{aligned} \quad (28)$$

Якщо $K(r) = O(1)$ при $r \in [1; +\infty)$, то

$$\begin{aligned} \sum_{|\lambda_n| \leq 1} \operatorname{Re} \lambda_n + \sum_{|\lambda_n| > 1} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|^2} &< +\infty, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sigma |t\eta(|t|) - \ln |f_0(it)|) dt + |dh(t)|}{1 + t^2} &< +\infty. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$|f_1(z)| \leq c_{13} \exp(c_{13}x),$$

бо [9, с. 487] добуток $\prod_{|\lambda_n| > 1} W_n(z)$ тільки мно-
жником $\exp(cz)$ відрізняється від добутку Бляшке
для $\mathbb{C}_+$, а

$$\frac{(tz + i)^2}{(t^2 + 1)^2 (t + iz)} = ib_0 + b_1 z + \frac{tz + i}{(t^2 + 1)(t + iz)},$$

$$b_0, b_1 \in \mathbb{R},$$

і в цьому випадку оцінка (15) очевидна, тому що
із (22) випливає, що

$$(\exists c_{14} > 0) (\forall r \in [0; +\infty)) : \frac{\sigma}{\pi} \psi(r) \geq -c_{14}.$$

Тому вважаємо, що $K(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$.
Тоді завдяки монотонності функції K , $\psi(r) \rightarrow +\infty$
при $r \rightarrow +\infty$ і $0 < \sigma < +\infty$. Нехай $\psi_1(t) =$
 $\min_{x \geq t} \psi(x)$, K^{-1} – функція, обернена до звуження
 K на $[r_0; +\infty)$, і $K_1(r) = K^{-1}((\sigma/\pi)\psi_1(2r) + c_0)$.
Оскільки функція ψ є неперервною на $[0; +\infty)$, то
функція ψ_1 є неспадною і неперервною на $[0; +\infty)$,
 $\psi_1(r) \leq \psi(r)$ і $\psi_1(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$. Крім цьо-
го, існує найменший невід'ємний роз'язок $\psi_1^{-1}(t)$
рівняння $\psi_1(x) = t$. При цьому, $\psi_1(\psi_1^{-1}(t)) = t$,
 $\psi_1^{-1}(\psi_1(t)) \leq t$, ψ_1^{-1} – зростаюча функція на
 $[t_0; +\infty)$ і $\psi_1^{-1}(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Із (22) отри-
муємо [6, с. 1171], що

$$K(r) \leq \frac{\sigma}{\pi} \psi_1(r) + c_0, \quad r \geq 1. \quad (29)$$

Із (29) отримуємо

$$K_1(r) \geq 2r, \quad r \geq r_0. \quad (30)$$

Далі, врахувавши що $\sum_{|\lambda_n| \leq 1} \ln \left| \frac{z - \lambda_n}{z + \bar{\lambda}_n} \right| \leq 0$ при $z \in$
 $\mathbb{C}_+$, і використавши рівність (26), одержуємо

$$\begin{aligned} \ln |f_1(z)| &= \sum_{|\lambda_n| \leq 1} \ln \left| \frac{z - \lambda_n}{z + \bar{\lambda}_n} \right| + \sum_{|\lambda_n| > 1} \ln |W_n(z)| + \frac{x}{\pi} \times \\ &\int_{|t| > 1} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{|t + iz|^2} \right) ((\sigma |t\eta(|t|) - \ln |f_0(it)|) dt + |dh(t)|) + \\ &- \frac{x}{\pi} \int_{|t| > 1} \frac{(2t^2 + 1)}{t^2 (t^2 + 1)^2} ((\sigma |t\eta(|t|) - \ln |f_0(it)|) dt + |dh(t)|) + \\ &- \frac{x}{\pi} \int_{|t| \leq 1} \frac{(\sigma |t\eta(|t|) - \ln |f_0(it)|) dt + |dh(t)|}{|t + iz|^2} + \\ &- \frac{x}{\pi} \int_{|t| \leq 1} \frac{t^2 ((\sigma |t\eta(|t|) - \ln |f_0(it)|) dt + |dh(t)|)}{(t^2 + 1)^2} \leq \\ &\leq \sum_{1 < |\lambda_n| \leq K_1(r)/2} \ln |W_n(z)| + \sum_{|\lambda_n| > K_1(r)/2} \ln |W_n(z)| + \\ &+ \frac{x}{\pi} \int_{1 < |t| \leq K_1(r)/2} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{|t + iz|^2} \right) \times \\ &\times ((\sigma |t\eta(|t|) - \ln |f_0(it)|) dt + |dh(t)|) + \\ &+ \frac{x}{\pi} \int_{|t| > K_1(r)/2} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{|t + iz|^2} \right) \times \\ &\times ((\sigma |t\eta(|t|) - \ln |f_0(it)|) dt + |dh(t)|) + c_{15}x = \\ &= I_1 + I_2 + c_{15}x. \end{aligned} \quad (31)$$

Оскільки $\frac{4x \operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n + z|^2} < 1$ при $z \neq \lambda_n$ і $z \in \mathbb{C}_+$, то
використавши нерівність $\ln(1 - t) \leq -t$, $t \in [0; 1)$, і
умову (30), при $1 < |\lambda_n| \leq K_1(r)/2$ і $z \neq \lambda_n$ маємо

$$\ln |W_n(z)| = 2x \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|^2} + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{4x \operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n + z|^2} \right) \leq$$

$$\leq 2x \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|^2} - \frac{2x \operatorname{Re} \lambda_n}{K_1^2(r)}, \quad r \geq r_0.$$

Аналогічно при $1 < |t| \leq K_1(r)/2$ і $z \in \mathbb{C}_+$ отримуємо

$$\frac{1}{t^2} - \frac{1}{|t+iz|^2} \leq \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(|t|+r)^2} \leq \frac{1}{t^2} - \frac{1}{K_1^2(r)}, \quad r \geq r_0.$$

Тому

$$\begin{aligned} I_1 &:= \sum_{1 < |\lambda_n| \leq \frac{K_1(r)}{2}} \ln |W_n(z)| + \frac{x}{\pi} \times \\ &\times \int_{1 \leq |t| \leq K_1(r)/2} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{|t+iz|^2} \right) \times \\ &\times (\sigma |t| \eta(|t|) - \ln |f_0(it)|) dt + |dh(t)| \leq \\ &\leq 2x \sum_{1 < |\lambda_n| \leq \frac{K_1(r)}{2}} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{K_1^2(r)} \right) \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|} + \\ &+ \frac{x}{\pi} \int_{1 \leq |t| \leq K_1(r)/2} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{K_1^2(r)} \right) \times \\ &\times (\sigma |t| \eta(|t|) - \ln |f_0(it)|) dt + |dh(t)| \leq \\ &\leq 2x K(K_1(r)) = \frac{2\sigma}{\pi} x \psi_1(2r) + c_{16} x. \quad r \geq r_0. \quad (32) \end{aligned}$$

Далі, враховуючи що при $z \in \mathbb{C}_+$, $t \neq 0$, $\lambda_n \neq 0$,

$$\begin{aligned} \ln |W_n(z)| &= 2x \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|^2} + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{4x \operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n + z|^2} \right) \leq \\ &\leq 2x \left(\frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|^2} - \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{(|\lambda_n|+r)^2} \right) = \\ &= 2x \frac{2r (|\lambda_n| + \frac{r}{2}) \operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|^2 (|\lambda_n|+r)^2} \leq \frac{4xr \operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|^3}, \\ \frac{1}{t^2} - \frac{1}{|t+iz|^2} &\leq \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(|t|+r)^2} = \frac{2r (|t| + \frac{r}{2})}{t^2 (|t|+r)^2} \leq \frac{2r}{|t|^3}, \end{aligned}$$

отримуємо

$$\begin{aligned} I_2 &:= \sum_{|\lambda_n| > \frac{K_1(r)}{2}} \ln |W_n(z)| + \\ &+ \frac{x}{\pi} \int_{|t| > K_1(r)/2} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{|t+iz|^2} \right) \times \\ &\times (\sigma |t| \eta(|t|) - \ln |f_0(it)|) dt + |dh(t)| \leq \\ &\leq \frac{2x}{\pi} \sup_{r \geq r_0} \left\{ r \sum_{|\lambda_n| > \frac{K_1(r)}{2}} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|^3} + \right. \\ &\left. + r \int_{|t| > \frac{K_1(r)}{2}} \frac{\sigma |t| \eta(|t|) - \ln |f_0(it)|}{|t|^3} dt + |dh(t)| \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2x}{\pi} \sup_{r \geq r_0} \left\{ r \int_{K_1(r)/2}^{+\infty} \frac{dh_1(t)}{t^3} \right\}. \quad (33)$$

Нехай $R_n = 2^n$ і $j = j(r)$ таке натуральне число, що

$$\begin{aligned} \psi_1^{-1} \left(\frac{\pi}{\sigma} (K(R_j) - c_0) \right) &\leq 2r < \\ < \psi_1^{-1} \left(\frac{\pi}{\sigma} (K(R_{j+1}) - c_0) \right). \end{aligned}$$

Звідси $K_1(r) \geq R_j$. Враховуючи це, із (33) одержуємо, що

$$I_2 \leq c_{17} \cdot d_0 \cdot x, \quad (34)$$

де

$$\begin{aligned} d_0 &= \sup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ \psi_1^{-1} \left(\frac{\pi}{\sigma} (K(R_{j+1}) - c_0) \right) \cdot \tau(R_j) \right\}, \\ \tau(t) &= \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{dh_1(u)}{u^3}. \end{aligned}$$

Із (12)–(14) випливає, що в кожному півкрузі Q_{2r_0} функція f_1 є обмеженою. Тому із (25), (28), (31), (32) і (34) отримуємо, що

$$|f(z)| \leq c_{18} \exp(\sigma r \eta(r) + c_{19}(1 + d_0)x).$$

Залишилися показати, що $d_0 < +\infty$. Із (24) випливає, що $\tau(t) < +\infty$ при $t > 0$. Нехай

$$x_j = \tau(R_j), \quad y_j = 1/\psi_1^{-1} \left(\frac{\pi}{\sigma} (C(R_{j+1}) - c_0) \right).$$

Очевидно $\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} x_j = \overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} y_j = 0$. Крім цього,

$$\begin{aligned} x_j - x_{j+1} &= \int_{R_j/2}^{R_{j+1}/2} \frac{dh_1(t)}{t^3} \leq \frac{c_{20}}{R_{j+2}^3} \int_1^{R_j} dh_1(t), \quad (35) \\ K(R_{j+2}) - K(R_{j+1}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{R_{j+1}}^{R_{j+2}} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R_{j+2}^2} \right) dh_1(t) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_1^{R_{j+1}} \left(\frac{1}{R_{j+1}^2} - \frac{1}{R_{j+2}^2} \right) (dh_1(t) \geq \frac{c_{21}}{R_{j+2}^2} \int_1^{R_j} dh_1(t)). \quad (36) \end{aligned}$$

Оскільки [6]

$$\psi_1(b) - \psi_1(a) \leq c(\ln b - \ln a), \quad 0 < a < b < +\infty,$$

то поклавши $a = \psi_1^{-1}(\frac{\pi}{\sigma}(K(R_{j+1}) - c_0))$ і $b = \psi_1^{-1}(\frac{\pi}{\sigma}(K(R_{j+2}) - c_0))$, звідси одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1^{-1}(\frac{\pi}{\sigma}(K(R_{j+2}) - c_0))}{\psi_1^{-1}(\frac{\pi}{\sigma}(K(R_{j+1}) - c_0))} &\geq \\ &\geq \exp \left(\frac{\pi}{c\sigma} (K(R_{j+2}) - K(R_{j+1})) \right). \quad (37) \end{aligned}$$

Використовуючи нерівність $e^x - 1 \geq x$, $x \in [0; +\infty)$, та (36) і (37), маємо

$$\begin{aligned} y_j - y_{j+1} &= \frac{1}{\psi_1^{-1}(\frac{\pi}{\sigma}(K(R_{j+1}) - c_0))} + \\ &\quad - \frac{1}{\psi_1^{-1}(\frac{\pi}{\sigma}(K(R_{j+2}) - c_0))} = \\ &= \frac{\psi_1^{-1}(\frac{\pi}{\sigma}(K(R_{j+2}) - c_0)) / \psi_1^{-1}(\frac{\pi}{\sigma}(K(R_{j+1}) - c_0)) - 1}{\psi_1^{-1}(\frac{\pi}{\sigma}(K(R_{j+2}) - c_0))} \\ &\geq \frac{\exp(\frac{\pi}{\sigma}(K(R_{j+2}) - K(R_{j+1}))) - 1}{\psi_1^{-1}(\frac{\pi}{\sigma}(K(R_{j+2}) - c_0))} \geq \\ &\geq \frac{c_{22}}{R_{j+2}^2 \psi_1^{-1}(\frac{\pi}{\sigma}(K(R_{j+2}) - c_0))} \int_1^{R_j} dh_1(t). \end{aligned}$$

Використавши (22), звідси отримуємо

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} \frac{x_j - x_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} &\leq \\ &\leq c_{23} \overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} \frac{\psi_1^{-1}(\frac{\pi}{\sigma}(K(R_{j+2}) - c_0))}{R_{j+2}} < +\infty. \end{aligned}$$

Скористаємося теоремою Штольца [10] у такій редакції: якщо $y_j > y_{j+1} > 0$ при $j \geq j_0$ і $\lim_{j \rightarrow +\infty} x_j = \lim_{j \rightarrow +\infty} y_j = 0$, то

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} \frac{x_j}{y_j} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_j - x_{j+1}}{y_j - y_{j+1}}.$$

Тому $d_0 < +\infty$. Отже, визначена рівністю (9) функція f належить класу $B_\eta(\sigma)$ і [1] її послідовність нулів, сингулярна гранична функція і модулі кутових граничних значень на $\partial\mathbb{C}_+$ збігається з (λ_n) , h і $|f_0(it)|$.

Нехай тепер голоморфна у півплощині $\mathbb{C}_+$ функція $f \neq 0$ задовольняє умову (15). Тоді вона є обмеженою в кожному півкрузі Q_R і має [11] м. с. на уявній осі кутові граничні значення $f(iy)$, причому виконується (13). Тому [1] вона подається у вигляді (9), де λ_n – нулі функції f , $f_0(it)$ – кутові граничні значення функції f на уявній осі, h – сингулярна гранична функція функції f . Тоді із леми 1 отримуємо, що

$$\sum_{|\lambda_n| \leq 1} \operatorname{Re} \lambda_n < +\infty,$$

$$K_0(r) \leq \frac{\ln c_1 + \sigma r \eta(r)}{\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi + c_{24} \leq c_{25},$$

$$r \geq 1,$$

тобто виконуються умови (12) і (14). Теорема 2 доведена.

Бібліографія

- [1] Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
- [2] Голфман К. Банаховы пространства аналитических функций. – М.: ИЛ, 1963. – 306 с.
- [3] Vynnytskyi B.V., Sharan V.L. On factorization of one class functions analytic in the half-plane // *Мат. студії.* – 2000. – 14, № 1. – С. 41–48.
- [4] Kahane J.-P. Extension du théorème de Carlson et applications // *C. R. Acad. Sci. Paris.* – 1952. – 234, № 21. – Р. 2038–2040.
- [5] Kahane J.-P. Sur quelques problèmes d'unicité et prolongement relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles // *Ann. Inst. Fourier.* – 1953–1954 (1955). – 5. – Р. 39–130.
- [6] Винницький Б.В., Шаран В.Л. Про описання послідовностей нулів одного класу функцій, голоморфних у півплощині // *Укр. мат. журн.* – 1998. – 50, № 9. – С. 1169–1176.
- [7] Шаран В.Л. Про сингулярні граничні функції деяких класів функцій, аналітичних в півплощині // *Сучасні проблеми математики. Матеріали Міжнародної наукової конференції. Частина 3.* – Київ: Ін-т математики НАН України. – 1998. – С. 208–210.
- [8] Гришин А.Ф. Субгармонические функции первого порядка: Автореферат дисс. ... докт. физ.-мат. наук. – Харьков, 1992. – 30 с.
- [9] Винницький Б.В. О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент // *Укр. мат. журн.* – 1994. – 46, № 5. – С. 484–500.
- [10] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1966. Т. 1. – 608 с.
- [11] Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. – М.;Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. – 336 с.