УДК 517.5

Про асимптотику голоморфної у півплощині функції цілого порядку без нулів

Юрків М.

yurkiv.maryana@gmail.com

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра матаналізу, вул. Стрийська 3, м. Дрогобич, 82100

Якщо f – голоморфна у півплощині $\mathbb{C}^+=\{z:\Im z>0\}$ функція цілого формального порядку $\rho\in(0;+\infty)$ не має нулів, $|f_0(t)|=1$ м.с. на дійсній осі і для деяких $l_1\in\mathbb{R}$, $l_2\in\mathbb{R}$ і $\rho_2\in(0;\rho)$ виконується $\ln|f(re^{i\varphi})|=r^\rho\ln r h_1(\varphi)+r^\rho h_2(\varphi)+O\left(\frac{r^{\rho_2}}{\sin\varphi}\right)$ рівномірно за $\varphi\in(0;\pi)$, якщо $r\to+\infty$, то існує $\rho_1\in(0;\rho)$ таке, що $1/(2\pi)\int\limits_1^r\frac{ds(x)}{x}=l_1r^\rho+O(r^{\rho_1})$ $(r\to+\infty)$ і $1/(2\pi)\int\limits_1^r\frac{ds(-x)}{x}=l_2r^\rho+O(r^{\rho_1})$ $(r\to+\infty)$, де $f_0(t)$, $t\in\mathbb{R}$ – кутові граничні значення функції f на дійсній осі, $s(t)$ – сингулярна гранична функція, $h_1(\varphi)=2\rho\sin\rho\varphi(-l_1+(-1)^\rho l_2)$, $h_2(\varphi)=(-b_\rho-2l_1+(-1)^\rho 2l_2)\sin\rho\varphi+2\rho(l_1(\pi-\varphi)+(-1)^\rho l_2\varphi)\cos\rho\varphi$.

Нехай голоморфна у півплощині $\mathbb{C}^+=\{z:\Im z>0\}$, функція $f\neq 0$ цілого формального порядку $\rho\in(0;+\infty)$ не має нулів. Тоді, як відомо [1], її можна подати у вигляді:

$$f(z)=\exp\left\{i\sum_{k=0}^{\rho}b_kz^k+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\pi i}\left(\int\limits_{-1}^{1}\frac{\ln|f_0(t)|}{t-z}dt+\int\limits_{-1}^{1}\frac{ds(t)}{t-z}\right)\right\}\times$$
$$\exp\left\{\frac{z^{\rho+1}}{\pi i}\left(\int\limits_{|t|\geqslant 1}\frac{\ln|f_0(t)|}{t^{\rho+1}(t-z)}dt+\int\limits_{|t|\geqslant 1}\frac{ds(t)}{t^{\rho+1}(t-z)}\right)\right\},\tag{1}$$

де $b_0,\dots,b_\rho$ – дійсні сталі, $f_0(t)$ – кутові граничні значення на дійсній осі функції f, $s(t)$ – сингулярна гранична функція.

Використавши методи доведення М.В. Говорова [1], легко отримати таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $\rho\in(0;+\infty)$ – ціле число, $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – неспадна на $\mathbb{R}$ функція, похідна якої дорівнює нулеві майже скрізь (м.с.), $|f_0(t)|=1$ м.с. на $\mathbb{R}$,*

$$\tau_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_1^t\frac{ds(x)}{x},\quad \tau_2(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_1^t\frac{ds(-x)}{x}.$$

Тоді, якщо для деяких $l_1\in\mathbb{R}$, $l_2\in\mathbb{R}$ та для деякого $\rho_1\in(0;\rho)$

$$\tau_1(r)=l_1r^\rho+O(r^{\rho_1}),\quad \tau_2(r)=l_2r^\rho+O(r^{\rho_1}),$$
$$r\to+\infty\tag{2}$$

то функція f, визначена формулою (1), є голоморфною в $\mathbb{C}^+$ і рівномірно за $\varphi\in(0;\pi)$ виконується

$$\ln|f(re^{i\varphi})|=r^\rho\ln r h_1(\varphi)+r^\rho h_2(\varphi)+O\left(\frac{r^\rho}{\sin\varphi}\right),$$
$$r\to+\infty,$$

$$\int\limits_1^r\ln|f(te^{i\varphi})|\frac{dt}{t}=$$
$$=\frac{r^\rho\ln r}{\rho}h_1(\varphi)+\frac{r^\rho}{\rho}\left(h_2(\varphi)-\frac{h_1(\varphi)}{\rho}\right)+O\left(\frac{r^\rho}{\sin\varphi}\right),$$
$$r\to+\infty,$$

де

$$h_1(\varphi)=2\rho\sin\rho\varphi(-l_1+(-1)^\rho l_2),\tag{3}$$
$$h_2(\varphi)=\sin\rho\varphi(-b_\rho-2l_1+(-1)^\rho 2l_2)+$$
$$+2\rho\cos\rho\varphi(l_1(\pi-\varphi)+(-1)^\rho l_2\varphi).\tag{4}$$

Метою нашої статті є доведення наступного твердження.

Теорема 2. *Нехай голоморфна в $\mathbb{C}^+$ функція $f\neq 0$ цілого формального порядку $\rho\in(0;+\infty)$ не має нулів і модулі її кутових граничних значень на дійсній осі дорівнюють одиниці майже скрізь. Тоді, якщо для деяких $l_1\in\mathbb{R}$, $l_2\in\mathbb{R}$ і $\rho_2\in(0;\rho)$ виконується*

$$\ln|f(re^{i\varphi})|=r^\rho\ln r h_1(\varphi)+r^\rho h_2(\varphi)+O\left(\frac{r^{\rho_2}}{\sin\varphi}\right),$$
$$r\to+\infty,\tag{5}$$

$$\int\limits_1^r\ln|f(te^{i\varphi})|\frac{dt}{t}=$$
$$=\frac{r^\rho\ln r}{\rho}h_1(\varphi)+\frac{r^\rho}{\rho}\left(h_2(\varphi)-\frac{h_1(\varphi)}{\rho}\right)+O\left(\frac{r^{\rho_2}}{\sin\varphi}\right),$$
$$r\to+\infty,\tag{6}$$

з функціями h_1 і h_2, визначеними формулами (3)-(4), то для деякого $\rho_1\in(0;\rho)$ виконується (2).

Доведення. Нехай $0<\delta<\pi/\max(\rho,1)$. За відповідного вибору голоморфної гілки степеня функція $g(\zeta)=f(\zeta^{\delta/\pi})$ є голоморфною в $\mathbb{C}^+$ і допускає голоморфне продовження у нижню півплощину через від'ємний дійсний промінь. Тому її сингулярна гранична функція $s_g(x)$ є сталою на цьому промені. Крім цього, число $\frac{\rho\delta}{\pi} \in (0;1)$ є формальним порядком функції g. Згідно з узагальненою формулою Карлемана [1],

$$-\frac{1}{2\pi}\int_1^R \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{R^2}\right)\ln|g(x)g(-x)|\,dx+$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_1^R \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{R^2}\right)ds_g(x)=$$

$$=\frac{1}{\pi R}\int_0^\pi \ln|g(Re^{i\varphi})|\sin\varphi\,d\varphi+c_1+\frac{c_2}{R^2},$$

де c_1, c_2 – деякі додатні сталі. Оскільки $ds_g(x) = \pi/\delta\cdot x^{1-\delta/\pi}ds_f(x^{\delta/\pi})$, то, перейшовши до функції f і зробивши заміну $x^{\delta/\pi}=t$, $R^{\delta/\pi}=r$, будемо мати

$$-\frac{1}{2\pi}\int_1^r \left(\frac{1}{t^{2\pi/\delta}}-\frac{1}{r^{2\pi/\delta}}\right)\ln|f(t)f(te^{i\delta})|\frac{\pi}{\delta}t^{\pi/\delta}\frac{dt}{t}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_1^r \left(\frac{1}{t^{2\pi/\delta}}-\frac{1}{r^{2\pi/\delta}}\right)\frac{\pi}{\delta}t^{\pi/\delta-1}ds_f(t)=$$

$$=\frac{1}{\pi r^{\pi/\delta}}\int_0^\pi \ln|f(re^{i\theta\frac{\delta}{\pi}})|\sin\theta\,d\theta+c_1+\frac{c_2}{r^{2\pi/\delta}}. \quad (7)$$

Нехай

$$\omega(r)=-\frac{1}{2\delta}\int_1^r t^{\pi/\delta}\frac{ds_f(t)}{t},$$

$$\Omega(r):=\frac{2\pi}{\delta}\int_1^r \frac{\omega(t)}{t^{2\pi/\delta+1}}dt. \quad (8)$$

Тоді з (7) і (8) отримуємо

$$\int_1^r \left(\frac{1}{t^{2\pi/\delta}}-\frac{1}{r^{2\pi/\delta}}\right)d\omega(t)=$$

$$=\frac{1}{\pi r^{\pi/\delta}}\int_0^\pi \ln|f(re^{i\theta\frac{\delta}{\pi}})|\sin\theta\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\delta}\int_1^r \left(\frac{1}{t^{2\pi/\delta}}-\frac{1}{r^{2\pi/\delta}}\right)t^{\pi/\delta}\ln|f(te^{i\delta})|\frac{dt}{t}+$$

$$+c_1+\frac{c_2}{r^{2\pi/\delta}},$$

звідки

$$\Omega(r)=\frac{1}{\pi r^{\pi/\delta}}\int_0^\pi \ln|f(re^{i\theta\frac{\delta}{\pi}})|\sin\theta\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\delta}\int_1^r \left(\frac{1}{t^{2\pi/\delta}}-\frac{1}{r^{2\pi/\delta}}\right)t^{\pi/\delta}\ln|f(te^{i\delta})|\frac{dt}{t}+$$

$$+c_1+\frac{c_2}{r^{2\pi/\delta}}. \quad (9)$$

Завдяки (6) та інтегруванню по частинах, будемо мати

$$\frac{1}{2\delta}\int_1^r \left(\frac{1}{t^{2\pi/\delta}}-\frac{1}{r^{2\pi/\delta}}\right)t^{\pi/\delta}\ln|f(te^{i\delta})|\frac{dt}{t}=$$

$$=\frac{\pi}{\delta^2}\int_1^r \frac{1}{t^{2\pi/\delta+1}}\left(\int_1^t \tau^{\pi/\delta}\ln|f(\tau e^{i\delta})|\frac{d\tau}{\tau}\right)dt=$$

$$=\frac{\pi}{\rho^2\delta^2-\pi^2}h_1(\delta)r^{\rho-\pi/\delta}\ln r+$$

$$+\frac{\pi}{\rho^2\delta^2-\pi^2}r^{\rho-\pi/\delta}\left(h_2(\delta)-\frac{2\delta^2\rho}{\rho^2\delta^2-\pi^2}h_1(\delta)\right)+$$

$$+O(r^{\rho_2-\pi/\delta}),\, r\to+\infty. \quad (10)$$

Тоді в (9), використовуючи (5) і (10), отримаємо

$$\Omega(r)=\frac{r^{\rho-\pi/\delta}\ln r}{\pi}\left(\int_0^\pi h_1\left(\frac{\theta\delta}{\pi}\right)\sin\theta\,d\theta+\right.$$

$$\left.+(\frac{\pi}{\rho^2\delta^2-\pi^2}h_1(\delta)\right)+\frac{r^{\rho-\pi/\delta}}{\pi}\times$$

$$\times\left(\int_0^\pi h_2\left(\frac{\theta\delta}{\pi}\right)\sin\theta\,d\theta+\frac{\pi}{\rho^2\delta^2-\pi^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(h_2(\delta)-\frac{2\delta^2\rho}{\rho^2\delta^2-\pi^2}h_1(\delta)\right)\right)+$$

$$+O(r^{\rho_2-\pi/\delta})+c_1,\quad r\to+\infty.$$

Нехай

$$A=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi h_1\left(\frac{\theta\delta}{\pi}\right)\sin\theta\,d\theta+\frac{\pi}{\rho^2\delta^2-\pi^2}h_1(\delta)\right),$$

$$B=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi h_2\left(\frac{\theta\delta}{\pi}\right)\sin\theta\,d\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{\rho^2\delta^2-\pi^2}\left(h_2(\delta)-\frac{2\delta^2\rho}{\rho^2\delta^2-\pi^2}h_1(\delta)\right)\right).$$

Оскільки функція ω є неспадною на $[1;+\infty)$, то для $0<r<R<+\infty$

$$\omega(r)\frac{R^{2\pi/\delta}-r^{2\pi/\delta}}{R^{2\pi/\delta}r^{2\pi/\delta}}\leqslant\Omega(R)-\Omega(r)=$$

$$=\frac{2\pi}{\delta}\int_r^R \frac{\omega(t)dt}{t^{2\pi/\delta+1}}\leqslant\omega(R)\frac{R^{2\pi/\delta}-r^{2\pi/\delta}}{R^{2\pi/\delta}r^{2\pi/\delta}}. \quad (11)$$

Далі, подібно до [3, 5], взявши у лівій нерівності $R=r+r^\alpha$, де $1+\rho_2-\rho<\alpha<1$, $\max\{\rho+\alpha-1,\rho_2-\alpha+1\}<\rho_1<\rho$, при $r\to+\infty$ отримуємо

$$\Omega(R)-\Omega(r)=A(R^{\rho-\pi/\delta}\ln R-r^{\rho-\pi/\delta}\ln r)+$$

$$+B(R^{\rho-\pi/\delta}-r^{\rho-\pi/\delta})+O(r^{\rho_2-\pi/\delta})=$$
$$=A((r+r^{\alpha})^{\rho-\pi/\delta}\ln(r+r^{\alpha})-r^{\rho-\pi/\delta}\ln r)+$$
$$+B((r+r^{\alpha})^{\rho-\pi/\delta}-r^{\rho-\pi/\delta})+O(r^{\rho_2-\pi/\delta})=$$
$$=Ar^{\rho-\pi/\delta}\ln r((1+r^{\alpha-1})^{\rho-\pi/\delta}-1)+$$
$$+Ar^{\rho-\pi/\delta}(1+r^{\alpha-1})^{\rho-\pi/\delta}\ln(1+r^{\alpha-1})+$$
$$+Br^{\rho-\pi/\delta}((1+r^{\alpha-1})^{\rho-\pi/\delta}-1)+O(r^{\rho_2-\pi/\delta})=$$
$$=Ar^{\rho-\pi/\delta}\ln r\left(\left(\rho-\frac{\pi}{\delta}\right)r^{\alpha-1}+O(r^{2\alpha-2})\right)+$$
$$+Ar^{\rho-\pi/\delta}\left(r^{\alpha-1}+O(r^{2\alpha-2})\right)+$$
$$+Br^{\rho-\pi/\delta}\left(\left(\rho-\frac{\pi}{\delta}\right)r^{\alpha-1}+O(r^{2\alpha-2})\right)+$$
$$+O(r^{\rho_2-\pi/\delta})=$$
$$=A\frac{\rho\delta-\pi}{\delta}r^{\rho+\alpha-1-\pi/\delta}\ln r+$$
$$+r^{\rho+\alpha-1-\pi/\delta}\left(A+\frac{\rho\delta-\pi}{\delta}B\right)+$$
$$+O(r^{\rho+2\alpha-2-\pi/\delta}\ln r)+O(r^{\rho_2-\pi/\delta}).$$

Крім цього,

$$\frac{R^{2\pi/\delta}r^{2\pi/\delta}}{R^{2\pi/\delta}-r^{2\pi/\delta}}=\frac{(r+r^{\alpha})^{2\pi/\delta}r^{2\pi/\delta}}{(r+r^{\alpha})^{2\pi/\delta}-r^{2\pi/\delta}}=$$
$$=\frac{r^{2\pi/\delta}\left(1+\frac{2\pi}{\delta}r^{\alpha-1}+O(r^{2\alpha-2})\right)}{\frac{2\pi}{\delta}r^{\alpha-1}(1+O(r^{\alpha-1}))}=$$
$$=\frac{\delta}{2\pi}r^{2\pi/\delta+1-\alpha}+O(r^{2\pi/\delta}),\quad r\to+\infty.$$

Тому з лівої частини (11) отримуємо

$$\omega(r)\leqslant\frac{R^{2\pi/\delta}r^{2\pi/\delta}}{R^{2\pi/\delta}-r^{2\pi/\delta}}(\Omega(R)-\Omega(r))=$$
$$=\left(\frac{\delta}{2\pi}r^{2\pi/\delta+1-\alpha}+O(r^{2\pi/\delta})\right)\times$$
$$\times\left(A\frac{\rho\delta-\pi}{\delta}r^{\rho+\alpha-1-\pi/\delta}\ln r+\right.$$
$$\left.+r^{\rho+\alpha-1-\pi/\delta}\left(A+\frac{\rho\delta-\pi}{\delta}B\right)\right)+$$
$$+O(r^{\rho+\alpha-1+\pi/\delta}\ln r)+O(r^{\rho_2+1-\alpha+\pi/\delta})=$$
$$=A\frac{\rho\delta-\pi}{2\pi}r^{\rho+\pi/\delta}\ln r+$$
$$+r^{\rho+\pi/\delta}\left(\frac{\delta}{2\pi}A+\frac{\rho\delta-\pi}{2\pi}B\right)+O(r^{\rho_1+\pi/\delta}) \qquad (12)$$

якщо $r\to+\infty$. Нехай $r=R-R^{\alpha}$. Тоді при $R\to+\infty$

$$\Omega(R)-\Omega(r)=$$
$$=A(R^{\rho-\pi/\delta}\ln R-(R-R^{\alpha})^{\rho-\pi/\delta}\ln(R-R^{\alpha}))+$$
$$+B(R^{\rho-\pi/\delta}-(R-R^{\alpha})^{\rho-\pi/\delta})+O(R^{\rho_2-\pi/\delta})=$$
$$=AR^{\rho-\pi/\delta}\ln R(1-(1-R^{\alpha-1})^{\rho-\pi/\delta})+$$
$$-AR^{\rho-\pi/\delta}(1-R^{\alpha-1})^{\rho-\pi/\delta}\ln(1-R^{\alpha-1})+$$
$$+BR^{\rho-\pi/\delta}(1-(1-R^{\alpha-1})^{\rho-\pi/\delta})+O(R^{\rho_2-\pi/\delta})=$$
$$=AR^{\rho-\pi/\delta}\ln R\left(\left(\rho-\frac{\pi}{\delta}\right)R^{\alpha-1}+O(R^{2\alpha-2})\right)+$$
$$+AR^{\rho-\pi/\delta}\left(R^{\alpha-1}+O(R^{2\alpha-2})\right)+$$
$$+BR^{\rho-\pi/\delta}\left(\left(\rho-\frac{\pi}{\delta}\right)R^{\alpha-1}+O(R^{2\alpha-2})\right)+$$
$$+O(R^{\rho_2-\pi/\delta})=$$
$$=A\frac{\rho\delta-\pi}{\delta}R^{\rho+\alpha-1-\pi/\delta}\ln R+$$
$$+R^{\rho+\alpha-1-\pi/\delta}\left(A+\frac{\rho\delta-\pi}{\delta}B\right)+$$
$$+O(R^{\rho+2\alpha-2-\pi/\delta}\ln R)+O(R^{\rho_2-\pi/\delta})$$

і

$$\frac{R^{2\pi/\delta}r^{2\pi/\delta}}{R^{2\pi/\delta}-r^{2\pi/\delta}}=\frac{(R-R^{\alpha})^{2\pi/\delta}R^{2\pi/\delta}}{R^{2\pi/\delta}-(R-R^{\alpha})^{2\pi/\delta}}=$$
$$=\frac{R^{2\pi/\delta}\left(1-\frac{2\pi}{\delta}R^{\alpha-1}+O(R^{2\alpha-2})\right)}{\frac{2\pi}{\delta}R^{\alpha-1}(1+O(R^{\alpha-1}))}=$$
$$=\frac{\delta}{2\pi}R^{2\pi/\delta+1-\alpha}+O(R^{2\pi/\delta}).$$

Тому з правої частини (11)отримуємо

$$\omega(R)\geqslant\frac{R^{2\pi/\delta}r^{2\pi/\delta}}{R^{2\pi/\delta}-r^{2\pi/\delta}}(\Omega(R)-\Omega(r))=$$
$$=\left(\frac{\delta}{2\pi}R^{2\pi/\delta+1-\alpha}+O(R^{2\pi/\delta})\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\rho\delta-\pi}{\delta}AR^{\rho+\alpha-1-\pi/\delta}\ln R+\right.$$
$$\left.+R^{\rho+\alpha-1-\pi/\delta}\left(A+\frac{\rho\delta-\pi}{\delta}B\right)\right)+$$
$$+O(R^{\rho+\alpha-1+\pi/\delta}\ln R)+O(R^{\rho_2+1-\alpha+\pi/\delta})=$$
$$=A\frac{\rho\delta-\pi}{2\pi}R^{\rho+\pi/\delta}\ln R+$$
$$+R^{\rho+\pi/\delta}\left(\frac{\delta}{2\pi}A+\frac{\rho\delta-\pi}{2\pi}B\right)+O(R^{\rho_1+\pi/\delta}),$$

коли $R\to+\infty$. Звідси і з (12) при $r\to+\infty$ випливає, що

$$\omega(r)=A\frac{\rho\delta-\pi}{2\pi}r^{\rho+\pi/\delta}\ln r+$$
$$+r^{\rho+\pi/\delta}\left(\frac{\delta}{2\pi}A+\frac{\rho\delta-\pi}{2\pi}B\right)+O(r^{\rho_1+\pi/\delta}). \qquad (13)$$

До того ж,

$$-\frac{1}{2\delta}\int\limits_1^r\frac{ds_f(t)}{t}=\int\limits_1^r\frac{d\omega(t)}{t^{2\pi/\delta}}=\frac{\omega(r)}{r^{2\pi/\delta}}+\int\limits_1^r\frac{\omega(t)}{t^{2\pi/\delta+1}}dt.$$

Тому з останньої рівності і з (13) маємо

$$-\frac{1}{2\delta}\int\limits_1^r\frac{ds_f(t)}{t}=A\frac{\rho^2\delta^2-\pi^2}{2\pi\rho\delta}r^{\rho}\ln r+$$

$$+r^\rho\left(\frac{\rho^2\delta^2+\pi^2}{2\pi\rho^2\delta}A+\frac{\rho^2\delta^2-\pi^2}{2\pi\rho\delta}B\right)+O(r^{\rho_1})$$

або

$$\frac{1}{2\pi}\int_1^r\frac{ds_f(t)}{t}=-A\frac{r^\rho\ln r}{2\pi\rho}\frac{\rho^2\delta^2-\pi^2}{\pi}-$$

$$-\frac{r^\rho}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho^2\delta^2+\pi^2}{\pi\rho}A+\frac{\rho^2\delta^2-\pi^2}{\pi}B\right)+O(r^{\rho_1}),$$
$$r\to+\infty.$$

Далі,

$$\frac{1}{2\pi}\int_1^r\frac{ds_f(t)}{t}=-\frac{r^\rho\ln r}{2\pi\rho}\times$$

$$\times\left(\frac{\rho^2\delta^2-\pi^2}{\pi^2}\int_0^\pi h_1\left(\frac{\theta\delta}{\pi}\right)\sin\theta\,d\theta+h_1(\delta)\right)-$$

$$-\frac{r^\rho}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho^2\delta^2+\pi^2}{\pi^2\rho}\int_0^\pi h_1\left(\frac{\theta\delta}{\pi}\right)\sin\theta\,d\theta-\frac{h_1(\delta)}{\rho}+\right.$$

$$\left.+\frac{\rho^2\delta^2-\pi^2}{\pi^2}\int_0^\pi h_2\left(\frac{\theta\delta}{\pi}\right)\sin\theta\,d\theta+h_2(\delta)\right)+$$

$$+O(r^{\rho_1}),\quad r\to+\infty.$$

Крім цього, згідно з (3) і (4),

$$\int_0^\pi h_1\left(\frac{\theta\delta}{\pi}\right)\sin\theta\,d\theta=$$

$$=-\frac{2\rho\pi^2}{\rho^2\delta^2-\pi^2}(-l_1+(-1)^\rho l_2)\sin\rho\delta,$$

$$h_1(\delta)=2\rho(-l_1+(-1)^\rho l_2)\sin\rho\delta,$$

$$\int_0^\pi h_2\left(\frac{\theta\delta}{\pi}\right)\sin\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{\pi^2}{\rho^2\delta^2-\pi^2}(b_\rho+2l_1-2(-1)^\rho l_2)\sin\rho\delta+$$

$$+\frac{\pi^2}{\rho^2\delta^2-\pi^2}\left(2\rho\delta(l_1-(-1)^\rho l_2)\right.$$

$$\left.\left(\cos\rho\delta-\frac{2\rho\delta}{\rho^2\delta^2-\pi^2}\sin\rho\delta\right)\right)+$$

$$-\frac{\pi^2}{\rho^2\delta^2-\pi^2}\left(2l_1\pi\rho(\cos\rho\delta+1)\right),$$

$$h_2(\delta)=\sin\rho\delta(-b_\rho-2l_1+(-1)^\rho 2l_2)+$$

$$+2\rho\cos\rho\delta(l_1\pi-l_1\delta+(-1)^\rho l_2\delta).$$

Тоді при $r\to+\infty$

$$\frac{1}{2\pi}\int_1^r\frac{ds_f(t)}{t}=l_1r^\rho-\frac{r^\rho\sin\rho\delta}{\pi\rho}(l_1-(-1)^\rho l_2)\times$$

$$\times\left(\frac{\pi^2-\rho^2\delta^2}{\rho^2\delta^2-\pi^2}+1\right)+O(r^{\rho_1})=$$

$$=l_1r^\rho+O(r^{\rho_1}),\quad r\to+\infty.$$

Тобто виконується перша з рівностей (2), а виконання другої обґрунтовується аналогічно. Теорему 2 доведено.

Бібліоґрафія

[1] Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 240 с.

[2] Хаць Р.В. Про асимптотичне поводження канонічного добутку цілого порядку // Матем. студії. – 2004. – 22, № 1. – С. 105–110.

[3] Винницький Б.В., Хаць Р.В. Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку // Матем. студії. – 2004. – 21, № 2. – С. 140–150.

[4] Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.

[5] Vynnyts'kyi B.V., Yurkiv M.I. Asymptotic properties of holomorphic functions in the half-plane of improved regular growth of order less than one // Matematychni Studii. – 2008. – 30, № 2. – P. 173–176.