

УДК 518:517.948

Чисельне розв'язування просторової крайової задачі для рівняння Лапласа методом інтегральних рівнянь

Дорошенко М. В., Когут У. П.

informatyka@drohobych.net

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, кафедра інформатики та обчислювальної математики, вул. Стрийська 3, м. Дрогобич, 82100

Розглядається просторова крайова задача Діріхле для рівняння Лапласа. Розв'язування крайової задачі зводиться до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма першого роду зі слабкою особливістю в ядрі, яке розв'язується методом колокації з використанням кубічних ізопараметричних граничних елементів для апроксимації невідомої густини та граничних поверхонь.

Вступ

До розв'язування крайових задач для рівнянь еліптичного типу зводиться моделювання багатьох практичних задач, наприклад, розрахунку електростатичних полів, які створюють електронно-оптичні системи. Така задача зводиться до розв'язування просторової внутрішньої та зовнішньої задач Діріхле для рівняння Лапласа.

Ефективним методом розв'язування крайових задач для рівнянь еліптичного типу є метод інтегральних рівнянь. Метод інтегральних рівнянь застосовувався для розв'язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа в роботах [1-6]. За допомогою даного методу розв'язування зовнішньої та внутрішньої задач Діріхле для рівняння Лапласа зводиться до розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду зі слабкою особливістю в ядрі. Ефективність методу інтегральних рівнянь полягає в тому, що розмірність задачі зменшується на одиницю.

В роботі [4] метод інтегральних рівнянь застосовувався для розв'язування осесиметричної задачі Діріхле для рівняння Пуассона, а в роботах [5], [6] для розв'язування крайових задач для рівнянь еліптичного типу пропонується непрямий метод інтегральних рівнянь із застосуванням апарату функцій Гріна. Чисельне розв'язування отриманих інтегральних рівнянь здійснюється методом дискретної колокації з використанням тригонометричних інтерполяційних квадратур.

В даній роботі пропонується чисельний алгоритм розв'язування просторових крайових задач Діріхле для рівняння Лапласа, який зводиться до розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду зі слабкою особливістю в ядрі методом колокації з використанням кубічних ізопараметричних граничних елементів для апроксимації невідомої густини та граничних поверхонь.

Виклад основних результатів та чисельні розрахунки

Нехай в просторі R^3 задано сукупність гладких розімкнутих поверхонь $S = \bigcup_{i=1}^M S_i$. Припусти-

мо, що край поверхні S_i – замкнутий кусково-гладкий контур τ_i . Точки R^3 будемо позначати $r = (x, y, z)$, $\hat{r} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ і т.д. $R(r, \hat{r})$ – відстань між точками r і $\hat{r}$. Позначимо, також $\bar{S} = S \cup \tau$, де $\tau = \bigcup_{i=1}^M \tau_i$. В кожній внутрішній точці $\hat{r} \in S$ визначимо норму $n_{\hat{r}}$. Тобто, поверхні S_i будемо розглядати як двохсторонні поверхні S_i^+ та S_i^- в залежності від напрямку норми.

Крайова задача полягає в наступному: необхідно знайти функцію $U(r) \in C^2(R^3 \setminus \bar{S})$, яке задовольняє трьохвимірному рівнянню Лапласа

$$\Delta U(r) = 0, \quad r \in R^3 \setminus \bar{S}, \quad (1)$$

крайовій умові Діріхле

$$U^\pm(r) = U_0(r), \quad r \in S, \quad (2)$$

та умова регулярності на нескінченності

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0, \quad (3)$$

В даній роботі будемо розглядати випадок, коли $U_0(r) = U_0^{(i)} = \text{const}$ при $r \in S_i$. Така задача називається зовнішньою крайовою задачею Діріхле для рівняння Лапласа в просторовому випадку. У випадку відсутності умови регулярності на нескінченності крайова задача Діріхле називається внутрішньою задачею.

Як показано в роботі [7] розв'язок задачі (1) - (3) може бути представлений у вигляді

$$U(r) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{R(r, \hat{r})} \left\{ \left(\frac{\partial U(\hat{r})}{\partial n_{\hat{r}}} \right)^+ - \left(\frac{\partial U(\hat{r})}{\partial n_{\hat{r}}} \right)^- \right\} dS_{\hat{r}} - \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial}{\partial n_{\hat{r}}} \left(\frac{1}{R(\hat{r}, r)} \right) \{ U^-(\hat{r}) - U^+(\hat{r}) \} dS_{\hat{r}} \quad (4)$$

Враховуючи, що $U^+(\hat{r}) = U^-(\hat{r})$, з представлення (4) випливає, що розв'язок крайової задачі (1)-(3) необхідно шукати в вигляді потенціалу простого шару

$$U(r) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\mu(\hat{r})}{R(r, \hat{r})} dS_{\hat{r}}, \quad (5)$$

де

$$\mu(\hat{r}) = \left(\frac{\partial U(\hat{r})}{\partial n_{\hat{r}}} \right)^+ - \left(\frac{\partial U(\hat{r})}{\partial n_{\hat{r}}} \right)^-$$

Використовуючи крайову мову (2) для визначення невідомої густини $\mu(\hat{r})$, отримаємо таке двовимірне інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$K\mu = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\mu(\hat{r})}{R(r, \hat{r})} dS_{\hat{r}} = U_0(r), \quad r \in S \quad (6)$$

Для відшукування чисельного розв'язку рівняння (6) важливим є питання єдиності розв'язку.

Теорема. Якщо функція $\mu(\hat{r})$ є розв'язком однорідного інтегрального рівняння $K\mu = 0$, то $\mu(\hat{r}) \equiv 0$, $\hat{r} \in S$.

Доведення. Нехай функція $\mu(\hat{r})$ є розв'язком $K\mu_0 = 0$ і $\mu_0(\hat{r}) \neq 0$ на S , тоді функція

$$V_0(r) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\mu_0(\hat{r})}{R(r, \hat{r})} dS_{\hat{r}},$$

буде розв'язком задачі (1), (2), (3) з однорідною крайовою умовою $V_0^+(r) = 0$, $r \in S$.

Покажемо, що в цьому випадку $V_0(r) \equiv 0$ в R^3 . Оточимо поверхні S_i ($i = \overline{1, M}$) замкнутими поверхнями $C_i = \tilde{S}_i^+ \cup \tilde{S}_i^- \cup \tilde{C}_i(\rho)$, де $\tilde{S}_i^\pm$ - деякі поверхні, паралельні S_i . Зафіксуємо точку r поза $C = \bigcup_{i=1}^M C_i$. Застосуємо до функції $V_0(r)$ першу формулу Гріна в області D , обмеженою поверхнею C і сферою $\sum_R(r)$ радіуса R з центром в точці r . Отримаємо, що

$$\iiint_D \Delta V_0(r) dV_r = \iint_{\sum_{R(r)} \cup C} V_0(\hat{r}) \frac{\partial V_0(\hat{r})}{\partial n_{\hat{r}}} dS_{\hat{r}} \quad (7)$$

Оскільки, функція $V_0(\hat{r})$ є гармонічною і прямує до нуля на нескінченності, то вона регулярна. Тому

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{\sum_{R(r)} \cup C} V_0(\hat{r}) \frac{\partial V_0(\hat{r})}{\partial R} dS_{\hat{r}} = 0$$

Спрямуємо $\rho \rightarrow 0$, в результаті граничного переходу отримаємо таке співвідношення

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \iint_C V_0(\hat{r}) \frac{\partial V_0(\hat{r})}{\partial n_{\hat{r}}} dS_{\hat{r}} = \\ & = \iint_S \left\{ V_0^-(\hat{r}) \left(\frac{\partial V_0(\hat{r})}{\partial n_{\hat{r}}} \right)^- - \right. \\ & \left. - V_0^+(\hat{r}) \left(\frac{\partial V_0(\hat{r})}{\partial n_{\hat{r}}} \right)^+ \right\} dS_{\hat{r}} + I^*, \end{aligned}$$

де

$$I^* = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{i=1}^M \iint_{C_i(\rho)} V_0(\hat{r}) \frac{\partial V_0(\hat{r})}{\partial n_{\hat{r}}} dS_{\hat{r}}.$$

Оскільки $V_0(\hat{r})$ обмежена в околі τ , то використовуючи умову на нескінченності, отримаємо

$$|I^*| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} M_C \sum_{i=1}^M \iint_{C_i(\rho)} \left| \frac{\partial V_0(\hat{r})}{\partial n_{\hat{r}}} \right| dS_{\hat{r}} = 0.$$

Таким чином, співвідношення (7) перетворюється до такого вигляду

$$\iiint_{R^3} \Delta V_0(r) dV_r = \quad (8)$$

$$= \iint_S \left\{ V_0^-(\hat{r}) \left(\frac{\partial V_0(\hat{r})}{\partial n_{\hat{r}}} \right)^- - V_0^+(\hat{r}) \left(\frac{\partial V_0(\hat{r})}{\partial n_{\hat{r}}} \right)^+ \right\} dS_{\hat{r}}.$$

Оскільки функція $V_0(\hat{r})$ задовольняє умові (2), то із співвідношення (8) дістанемо, що $\Delta V_0(r) \equiv 0$ або $V_0(r) = \text{const}$ в R^3 . Так, як

$$\mu_0(\hat{r}) = \left(\frac{\partial V_0(\hat{r})}{\partial n_{\hat{r}}} \right)^- - \left(\frac{\partial V_0(\hat{r})}{\partial n_{\hat{r}}} \right)^+, \quad \text{а} \quad V_0(\hat{r}) \equiv 0,$$

то

$$\mu_0(\hat{r}) \equiv 0 \quad \text{на} \quad S.$$

Для чисельне розв'язування інтегрального рівняння (6) використовувався метод колокації, а для апроксимації невідомої густини та граничних поверхонь кубічні ізопараметричні граничні елементи [2].

Граничні поверхні S_i апроксимуємо за допомогою дванадцятивузлових ізопараметричних граничних елементів. Тоді декартові координати довільної точки елементів $e_m^{(i)}$, $m = \overline{1, N^{(i)}}$, на які розбивається кожна гранична поверхня, представляються через координати вузлових точок та деякі функції від внутрішніх координат таким чином, а саме:

$$r_m^{(i)}(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^{12} N^l(\xi, \eta) r_m^l, \quad (9)$$

де $r_m^l = (x_m^l, y_m^l, z_m^l)$;

$$N^1(\xi, \eta) = \frac{1}{32} (1 + \xi) (1 + \eta) (9(\xi^2 + \eta^2) - 10);$$

$$N^2(-\xi, \eta) = N^3(-\xi, -\eta) = N^4(\xi, -\eta) = N^1(\xi, \eta);$$

$$N^5(\xi, \eta) = -\frac{27}{32} (1 + \xi) (1 - \eta^2) (\eta - \frac{1}{3});$$

$$N^6(\xi, -\eta) = N^9(-\xi, -\eta) = N^{10}(-\xi, \eta) = N^5(\xi, \eta);$$

$$N^8(-\xi, \eta) = N^{11}(-\xi, -\eta) = N^{12}(\xi, -\eta) = \\ = N^7(\xi, \eta) = N^5(\eta, \xi).$$

Отже, представлення (9) забезпечує відображення кожного елемента $e_m^{(i)}$ в одиничний квадрат $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Для зручності опису алгоритму індекс i будемо опускати.

Невідому густину в рівнянні (6) представимо у вигляді

$$\mu(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^N \mu_m(\xi, \eta) \theta_m(\xi, \eta), \quad (10)$$

$$\text{де } \mu_m(\xi, \eta) = \begin{cases} \sum_{l=1}^{12} \mu_m^l N^l(\xi, \eta), & (\xi, \eta) \in e_m \\ 0 & (\xi, \eta) \notin e_m \end{cases}$$

а μ_m^l – значення невідомої густини в l -тому вузлі елемента e_m ; функції $\theta_m(\xi, \eta)$ – функції, які враховують особливості густини на краю розімкнутої поверхні [1], [3].

Враховуючи (9), (10) інтегральне рівняння (6) набуде вигляду

$$\sum_{m=1}^N \sum_{l=1}^{12} \mu_m^l \iint_D N^l(\xi, \eta) F(\xi, \eta) \theta_m(\xi, \eta) \times \quad (11)$$

$$\times G_{pm}(\xi, \eta, \bar{\xi}, \bar{\eta}) d\xi d\eta = U_0,$$

де $(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \in e_p$;

$$F(\xi, \eta) = \sqrt{ET - Q^2};$$

$$E = \left(\frac{\partial x_m(\xi, \eta)}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_m(\xi, \eta)}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_m(\xi, \eta)}{\partial \xi}\right)^2;$$

$$T = \left(\frac{\partial x_m(\xi, \eta)}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_m(\xi, \eta)}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_m(\xi, \eta)}{\partial \eta}\right)^2;$$

$$Q = \frac{\partial x_m(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial x_m(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial y_m(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial y_m(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \\ + \frac{\partial z_m(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial z_m(\xi, \eta)}{\partial \eta}.$$

Невідомі коефіцієнти μ_m^l визначаємо із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку отримаємо з рівняння (11) методом колокацій.

$$\sum_{m=1}^N \sum_{l=1}^{12} \mu_m^l \iint_D N^l(\xi, \eta) F(\xi, \eta) \theta_m(\xi, \eta) \times \quad (12)$$

$$\times G_{pm}(\xi, \eta, \bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k) d\xi d\eta = U_{0p},$$

де $(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k) \in e_p$, $k = \overline{1, N_k}$ – точки колокації.

Коефіцієнти отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь (12) мають сингулярну особливість на краях розімкнутих поверхонь, а ядро –

слабку особливість при суміщенні точки спостереження з точкою інтегрування. Якщо поверхні замкнуті, то отримані коефіцієнти мають тільки слабку особливість.

Особливості на краю розімкнутих поверхонь виділяються заміною змінних [1], [3]. Слабка особливість в ядрі виділяється за методикою ослаблення особливостей Канторовича, тобто, від підінтегральної функції віднімається та додається функція, яка поводить себе в особливій точці як підінтегральна функція, а інтеграл від неї знаходиться аналітично.

В даному випадку алгоритм аналітичного виділення слабкої особливості в коефіцієнтах матриці такий. Якщо $(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k) \in e_m$, то від підінтегральної функції віднімаємо та додаємо таку функцію

$$W(\xi, \eta, \bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k) = \quad (13)$$

$$= N^l(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k) F(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k) \theta_m(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k) H(\xi, \eta, \bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k),$$

де $H(\xi, \eta, \bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)$ результат розкладу в ряд Тейлора функцій $x_m(\xi, \eta)$, $y_m(\xi, \eta)$, $z_m(\xi, \eta)$ в $G_{pm}(\xi, \eta, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ в околі точки $(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)$ з точністю не вище першого порядку, тобто

$$H(\xi, \eta, \bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k) = \frac{1}{\sqrt{A(\xi - \bar{\xi}_k)^2 + 2B(\xi - \bar{\xi}_k)(\eta - \bar{\eta}_k) + C(\eta - \bar{\eta}_k)^2}};$$

$$A = \left(\frac{\partial x_m(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_m(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_m(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)}{\partial \xi}\right)^2;$$

$$B = \frac{\partial x_m(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)}{\partial \xi} \frac{\partial x_m(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)}{\partial \eta} + \frac{\partial y_m(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)}{\partial \xi} \frac{\partial y_m(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)}{\partial \eta} + \\ + \frac{\partial z_m(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)}{\partial \xi} \frac{\partial z_m(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)}{\partial \eta};$$

$$C = \left(\frac{\partial x_m(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_m(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_m(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)}{\partial \eta}\right)^2.$$

Для наближеного обчислення коефіцієнтів матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь використовувалась кубатурна формула Гауса.

Чисельна реалізація запропонованої методики здійснювалась в прикладній системі Matlab. Отриманий чисельний розв'язок крайової задачі Діріхле для рівняння Лапласа для плоского кругового циліндра, точний розв'язок якої в циліндричній системі координат (r, z, φ) задається такою формулою

$$U(r, z) = \frac{2RU_0}{\pi} \times \\ \times \arcsin \frac{2R}{((R-r)^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + ((R+r)^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (14)$$

де U_0 – значення потенціалу на граничній поверхні; R – радіус кругового циліндра.

В таблиці 1 приведені аналітичний розв'язок модельної задачі $U_a(U_0 = 1; R = 1)$ та U_1, U_2, U_3 відповідно чисельні значення потенціалу електростатичного поля, отримані при використанні 3, 6

та 9 кубічних ізопараметричних граничних елементів для апроксимації кругового циліндра. Як видно з таблиці точність чисельного розв'язку із збільшенням кількості граничних елементів поліпшується.

Таблиця 1

z	U_a	U_1	U_2	U_3
0,1	0,936549	0,945018	0,935018	0,935703
0,2	0,874334	0,881644	0,871644	0,872935
0,3	0,814453	0,817329	0,812795	0,813174
0,4	0,757762	0,751934	0,754941	0,756112
0,5	0,704833	0,705112	0,704125	0,704629
0,6	0,655958	0,654823	0,655041	0,655865
0,7	0,611199	0,611851	0,611293	0,611135
0,8	0,570446	0,570973	0,570531	0,570495
0,9	0,533475	0,533671	0,533491	0,533479
1,0	0,500000	0,499981	0,500013	0,500002

Висновки

На основі проведених чисельних досліджень можна зробити такі висновки:

Запропонований алгоритм розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду дозволяє досягнути високу точність при розв'язуванні модельних задач.

Використання інтегральних рівнянь для розв'язування просторової крайової задачі дозволяє зменшити розмірність задачі на одиницю.

Використання кубічних ізопараметричних граничних елементів дозволяє розв'язувати крайові задачі Діріхле для граничних поверхонь з довільною геометрією.

Для розв'язування інтегральних рівнянь запропонована єдина методика, а саме:

- невідома густина апроксимується за допомогою кубічних ізопараметричних граничних елементів;
- слабка особливість в ядрі виділяється методом ослаблення особливостей Канторовича;
- для чисельного обчислення інтегралів використовується кубатурна формула Гауса.

Бібліографія

- [1] Бакалец В.А., Людкевич И.В. *Численное решение пространственных задач электронной оптики методом интегральных уравнений. Учебное пособие.* — Львов: Изд-во ЛГУ, 1986. — 135 с.
- [2] Бенерджи П., Баттерфилд Р. *Методы граничных элементов в прикладных науках.* — М.: Наука, 1984. — 475 с.
- [3] Ильин В.П. *Численные методы решения задач электрофизики.* — М.: Наука, 1986. — 395 с.
- [4] Остудін Б.А., Романенко А.В. Застосування методу квадратур до інтегрального рівняння у стаціонарних осесиметричних самоузгоджених задачах електронної оптики // Вісник Львівського університету. Сер. прикладна математика та інформатика. — 2000. — № 2. — С. 59–67.
- [5] Chapko R., Johansson B.T. On some iterative methods based on boundary integrals for elliptic Cauchy problems in semi-infinite domains // Electronic Journal of Boundary Elements. — 2009. — **7**. — P. 1–12.
- [6] Chapko R., Johansson B.T. An alternating boundary integral based method for a Cauchy problem for the Laplace equation in a quadrant // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2009. — **17**. — P. 871–883.
- [7] Hayashi J. Three dimensional Dirichlet problem for Helmholtz equation for an open boundary // Proc. Jap. Acad. — 1977. — **A55**, № 5. — P. 159–162.