УДК 517.538.7

Кратна інтерполяційна задача в класі голоморфних у півплощині функцій нескінченного порядку

Шаран В. Л.

Volsharan@ukr.net

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра математичного аналізу, вул. Стрийська 3, м. Дрогобич, 82100

Знайдено критерій розв'язності кратної інтерполяційної задачі $f^{(j-1)}(\lambda_n) = b_{n,j}$, $j \in \{1; \ldots; s_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, в класі голоморфних у півплощині функцій $f \not\equiv 0$, для яких $(\exists c > 0)(\forall z \in \mathbb{C}_+) : |f(z)| \leqslant c \exp(\eta(c|z|))$, де $\eta : [0; +\infty) \to (0; +\infty)$ – зростаюча неперервно диференційовна на $[0; +\infty)$ функція для якої $\lim\limits_{t\to+\infty} \eta(t) = +\infty$ і $(\exists c_0 > 0)(\forall t \geqslant 0) : \eta(t) \ln \eta(t)/t\eta'(t) \leqslant c_0$.

Нехай B_η – клас голоморфних в $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$ функцій $f \not\equiv 0$, для яких

$$(\exists c)(\forall z \in \mathbb{C}_+) : |f(z)| \leqslant c \exp(\eta(c|z|)), \quad (1)$$

де $\eta : [0; +\infty) \to (0; +\infty)$ – зростаюча неперервно диференційовна на $[0; +\infty)$ функція для якої $\lim\limits_{t\to+\infty} \eta(t) = +\infty$ і

$$(\exists c_0)(\forall t \geqslant 0) : \frac{\eta(t) \ln \eta(t)}{t\eta'(t)} \leqslant c_0. \quad (2)$$

Із (2) випливає [1, с. 134], що

$$(\exists c_1)(\exists t_0)(\forall t \geqslant t_0) : \eta(t) \geqslant \exp(t^{c_1}), \quad (3)$$

$$(\forall c_2)(\forall c_3 > 1)(\exists t_0)(\forall t \geqslant t_0) : c_2\eta(t) \leqslant \eta(c_3 t). \quad (4)$$

Тут і надалі через c, c_0, c_1, c_2, ... позначатимемо додатні сталі.

У даній статті досліджується кратна інтерполяційна задача, що полягає у знаходженні умов на дивізор $\{(\lambda_n; s_n)\}$ (тобто множину всіх упорядкованих пар $(\lambda_n; s_n)$, де $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$, $s_n \in \mathbb{N}$), за яких для кожної послідовності комплексних чисел $(b_{n,j})$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1; \ldots; s_n\}$, яка задовольняє умову

$$(\exists c_4) : \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\eta(c_4|\lambda_n|)} \ln \max_{1\leqslant j\leqslant s_n} \frac{\rho_{\lambda_n}^{j-1} |b_{n,j}|}{(j-1)!} < +\infty, \quad (5)$$

де $\rho_{\lambda_n} = \min\{1; \mathrm{Re}\lambda_n\}$, існує така функція $f \in B_\eta$, що для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $j \in \{1; \ldots; s_n\}$

$$f^{(j-1)}(\lambda_n) = b_{n,j}. \quad (6)$$

Кратна інтерполяційна задача у півплощині в різних класах функцій скінченного порядку розглядалася в роботах Н.Т.Уена [2], А.М.Русаковського [3, 4], К.Г.Малютіна [5, 6] та ін. Основним результатом нашої роботи є наступне твердження.

Теорема 1. *Для того щоб для кожної послідовності комплексних чисел $(b_{n,j})$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1; \ldots; s_n\}$, яка задовольняє умову (5), існувала функція $f \in B_\eta$, що розв'язує інтерполяційну задачу (6), необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$\sum_{|\lambda_n|\leqslant 1} s_n \mathrm{Re}\lambda_n < +\infty, \quad (7)$$

$$(\exists c_5) : \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{rS(r)}{\eta(c_5 r)} < +\infty, \quad (8)$$

і для деякої функції $F \in B_\eta$, дивізор нулів якої співпадає з $\{(\lambda_n; s_n)\}$, виконувалась умова

$$(\exists c_6) : \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\eta(c_6|\lambda_n|)} \ln \frac{s_n!}{\rho_{\lambda_n}^{s_n} \left|F^{(s_n)}(\lambda_n)\right|} < +\infty. \quad (9)$$

У випадку $s_n \equiv 1$ теорема 1 доведена в [1], а для цілих функцій аналогічні результати отримала Т.І.Абаніна [7, 8].

Зауважимо, що умова (8) рівносильна кожній з наступних умов (це фактично доведено в [1])

$$(\exists c_7)(\exists r_0)(\forall r \geqslant r_0) : S_0(r) \leqslant \frac{\eta(c_7 r)}{r}, \quad (10)$$

$$(\exists c_8)(\exists r_0)(\forall r \geqslant r_0) : s(r) \leqslant \eta(c_8 r), \quad (11)$$

де

$$S_0(r) = \sum_{1<|\lambda_n|\leqslant r} \frac{s_n \mathrm{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^2}, \quad s(r) = \sum_{1<|\lambda_n|\leqslant r} \frac{s_n \mathrm{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}.$$

Для доведення теореми 1 нам будуть потрібні наступні допоміжні твердження.

Лема 1. *Для того щоб існувала функції $F \in B_\eta$, яка має в кожній точці λ_n нуль кратності s_n, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови (7) і (8).*

Доведення леми 1 є аналогічним до доведення теореми 1 із [1], при цьому функція F будується у вигляді

$$F(z) = \prod_{|\lambda_n|\leqslant 1} \left(\frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n}\right)^{s_n} \cdot \prod_{|\lambda_n|>1} \left(\frac{1-z/\lambda_n}{1-z/\overline{\lambda}_n}\right)^{s_n} \times$$

$$\times\exp\left\{s_n\sum_{j=1}^{p_n}\frac{z^j}{j!}\left(\frac{1}{\lambda_n^j}+\frac{(-1)^{j+1}}{\overline{\lambda}_n^j}\right)\right\},\qquad(12)$$

де $p_n=\left[\frac{1}{c_0}\ln\eta\left(c_8\left|\lambda_n\right|\right)\right]$, $[\cdot]$ – ціла частина числа, c_0 і c_8 – сталі із (2) та (11) відповідно.

Лема 2. *Якщо дивізор $\{(\lambda_n;s_n)\}$ задовольняє умови (7) і (8), то для визначеної рівністю (12) функції F на деяких півколах $D_k=\{z:|z|=r_k,\mathrm{Re}z>0\}$, $r_k\to+\infty$, $r_k<\alpha r_{k-1}$, $1<\alpha<+\infty$, для деякої сталої c_9 виконується*

$$|F(z)|>\exp\left(-\eta\left(c_9\left|z\right|\right)\right).$$

Доведення леми 2 є аналогічним до доведення лем 3 і 3.1 із [1].

Лема 3 [9, с. 22]. *Нехай функція f є голоморфною і обмеженою в кожному півкрузі $Q\left(l;R'\right)=\{z:|z-il|<R',\ \mathrm{Re}z>0\}$, $l\in\mathrm{R}$, $0<R'<+\infty$. Тоді при $z=re^{i\varphi}\in Q\left(l;R\right)$, $0<R<R'$, справедлива формула Неванлінни*

$$\ln\left|f\left(z\right)\right|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial Q(l;R)}\ln\left|f\left(\zeta\right)\right|\frac{\partial G_R\left(\zeta;z\right)}{\partial n_\varsigma}\left|d\zeta\right|-$$

$$-\sum_{\zeta_k\in Q(l;R)}G_R\left(\zeta_k;z\right)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{l-R}^{l+R}\frac{\partial G_R\left(t;z\right)}{\partial n_t}dh_f\left(t\right),$$

де $G_R\left(\zeta;z\right)$ – функція Гріна півкруга $Q\left(l;R\right)$, $\frac{\partial G_R(\zeta;z)}{\partial n_\varsigma}\left|d\zeta\right|$ – похідна функції Гріна по внутрішній нормалі до межі півкруга $Q\left(l;R\right)$, ζ_k – нулі функції f, h_f – сингулярна межова функція функції f, а $f\left(it\right)$ – кутові межові значення функції f на уявній осі.

Використавши загальний вигляд функція Гріна півкруга $Q\left(l;R\right)$, отримуємо, що формулу Неванлінни для півкруга $Q\left(l;R\right)$ можна записати у вигляді

$$\ln\left|f\left(z\right)\right|=-\sum_{\zeta_k\in Q(l;R)}\ln\left|\frac{R^2-\left(z-il\right)\left(\overline{\zeta}_k+il\right)}{R\left(\zeta_k-z\right)}\cdot\frac{R\left(\overline{\zeta}_k+z\right)}{R^2+\left(z-il\right)\left(\zeta_k-il\right)}\right|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{R^2-\left|z-il\right|^2}{\left|R\,e^{i\theta}-z+il\right|^2}-\frac{R^2-\left|z-il\right|^2}{\left|R\,e^{-i\theta}+z-il\right|^2}\right)\ln\left|f\left(il+R\,e^{i\theta}\right)\right|d\theta+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-R+l}^{R+l}\left(\frac{2\mathrm{Re}z}{\left|t+iz\right|^2}-\frac{2R^2\mathrm{Re}z}{\left|R^2-\left(il-it\right)\left(z-il\right)\right|^2}\right)\left(\ln\left|f\left(it\right)\right|dt+dh_f\left(t\right)\right).$$

Зауваження 1. Формула Неванлінни для півкруга $Q\left(l;R\right)$ залишається справедливою для голоморфних в $Q\left(l;R\right)$ функцій f, які подаються у вигляді $f=f_1/f_2$, якщо кожна із функцій f_1 і f_2 задовольняє умови леми 3 і $h_{f_2}\left(t\right)\equiv const$.

Лема 4. *Якщо дивізор $\{(\lambda_n;s_n)\}$ задовольняє умови (7)–(9), то для деякої сталої c_{10} виконується*

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{s_n}{\eta\left(c_{10}\left|\lambda_n\right|\right)}\ln\frac{2\mathrm{Re}\lambda_n}{\rho_{\lambda_n}}<+\infty.\qquad(13)$$

Доведення. Запишемо для визначеної рівністю (12) функції F формулу Неванлінни в півкрузі $Q\left(\mathrm{Im}\lambda_n;R_n\right)=\{z:|z-i\mathrm{Im}\lambda_n|<R_n,\ \mathrm{Re}z>0\}$, де $R_n=2\mathrm{Re}\lambda_n$, при $z=\lambda_n$. Оскільки функція h_F є незростаючою, то

$$\int\limits_{-R_n+\mathrm{Im}\lambda_n}^{R_n+\mathrm{Im}\lambda_n}\left(\frac{2\mathrm{Re}\lambda_n}{\left|t+i\lambda_n\right|^2}-\frac{2R_n^2\mathrm{Re}\lambda_n}{\left|R_n^2-\left(i\mathrm{Im}\lambda_n-it\right)\mathrm{Re}\lambda_n\right|^2}\right)dh_F\left(t\right)\leqslant 0,$$

і тому

$$s_n\ln\frac{6\mathrm{Re}\lambda_n}{5\rho_{\lambda_n}}+\sum_{\substack{\lambda_k\neq\lambda_n\\ \lambda_k\in Q(\mathrm{Im}\lambda_n;R_n)}}s_k\ln\left|\frac{\overline{\lambda}_k+\lambda_n}{\lambda_k-\lambda_n}\cdot\frac{R_n^2-\mathrm{Re}\lambda_n\left(\overline{\lambda}_k+i\mathrm{Im}\lambda_n\right)}{R_n^2+\mathrm{Re}\lambda_n\left(\lambda_k-i\mathrm{Im}\lambda_n\right)}\right|+$$

$$\leqslant\int\limits_{\partial Q(\mathrm{Im}\lambda_n;R_n)}\frac{\partial G_{R_n}\left(\zeta;\lambda_n\right)}{\partial n_\zeta}\ln\left|F\left(\zeta\right)\right|\left|d\zeta\right|+\ln\left|\frac{s_n!}{\rho_{\lambda_n}^{s_n}F^{(s_n)}\left(\lambda_n\right)}\right|,\qquad(14)$$

Врахувавши, що $F \in B_\eta$ і [10, с. 12] $\frac{\partial G_{R_n}}{\partial n_\zeta} \geqslant 0$, $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial Q(\mathrm{Im}\lambda_n; R_n)} \frac{\partial G_{R_n}(\zeta;\lambda_n)}{\partial n_\zeta} |d\zeta| = 1$, отримуємо для деякої сталої c_{11}

$$\int\limits_{\partial Q(\mathrm{Im}\lambda_n; R_n)} \frac{\partial G_{R_n}(\zeta;\lambda_n)}{\partial n_\zeta} \ln|F(\zeta)|\,|d\zeta| \leqslant \eta(c_{11}|\lambda_n|). \tag{15}$$

Оскільки сума із лівої частини нерівності (14) є невід'ємною, то із (14), (15) і (9) отримуємо, що для деякої сталої c_{12}

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{s_n}{\eta(c_{12}|\lambda_n|)} \ln\frac{6\mathrm{Re}\lambda_n}{5\rho_{\lambda_n}} < +\infty. \tag{16}$$

Звідси отримуємо, що

$$(\exists c_{13})\,(\forall n \in \mathbb{N}): \quad s_n \leqslant \eta(c_{13}|\lambda_n|). \tag{17}$$

Оскільки

$$s_n \ln\frac{2\mathrm{Re}\lambda_n}{\rho_{\lambda_n}} = s_n \ln\frac{5}{3} + s_n \ln\frac{6\mathrm{Re}\lambda_n}{5\rho_{\lambda_n}},$$

то із (16) і (17) отримуємо (13).

Лема 5. *Якщо дивізор $\{(\lambda_n; s_n)\}$ задовольняє умови (7)–(9), то для деякої сталої c_{14} виконується*

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\eta(c_{14}|\lambda_n|)} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k \mathrm{Re}\lambda_n \mathrm{Re}\lambda_k}{\left|\lambda_n + \overline{\lambda}_k\right|^2 \left(1+|\lambda_k|^2\right)^{q_k-1}} < +\infty, \tag{18}$$

де $q_k = \left[\eta(c_8|\lambda_k|) \Big/ \ln\sqrt{1+|\lambda_k|^2}\right]$, $[\cdot]$ – *ціла частина числа, а стала* c_8 *визначена умовою (11).*

Доведення. Записавши для визначеної рівністю (12) функції F формулу Неванлінни в півкрузі $Q_{R_n} = Q(0; R_n) = \{z : |z| < R_n,\ \mathrm{Re}z > 0\}$, де $R_n = 2|\lambda_n| + 1$, при $z = \lambda_n$ і врахувавши, що

$$\int\limits_{-R_n}^{R_n} \left(\frac{\mathrm{Re}\lambda_n}{|t+i\lambda_n|^2} - \frac{R_n^2 \mathrm{Re}\lambda_n}{|R_n^2 + it\lambda_n|^2}\right) dh_F(t) \leqslant 0,$$

отримуємо

$$s_n \ln\frac{2\mathrm{Re}\lambda_n}{\rho_{\lambda_n}} + \sum_{\substack{\lambda_k \neq \lambda_n \\ \lambda_k \in Q_{R_n}}} s_k \ln\left|\frac{\lambda_n + \overline{\lambda}_k}{\lambda_n - \lambda_k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\partial Q_{R_n}} \frac{\partial G_{R_n}(\zeta;\lambda_n)}{\partial n_\zeta} \ln|F(\zeta)|\,|d\zeta| +$$

$$+ \ln\frac{s_n!\,(\rho_{\lambda_n})^{-s_n}}{\left|F^{(s_n)}(\lambda_n)\right|} + \sum_{\lambda_k \in Q_{R_n}} s_k \ln\left|\frac{R_n^2 + \lambda_n\lambda_k}{R_n^2 - \lambda_n\overline{\lambda}_k}\right|. \tag{19}$$

Аналогічно, як і при доведенні леми 4, отримуємо, що для деякої сталої c_{15}

$$\int\limits_{\partial Q_{R_n}} \frac{\partial G_{R_n}(\zeta;\lambda_n)}{\partial n_\zeta} \ln|F(\zeta)|\,|d\zeta| \leqslant \eta(c_{15}|\lambda_n|). \tag{20}$$

Оцінимо суму із правої частини нерівності (19). Врахувавши (7) і (11), для деякої сталої c_{16} маємо

$$\sum_{\lambda_k \in Q_{R_n}} s_k \ln\left|\frac{R_n^2 + \lambda_n\lambda_k}{R_n^2 - \lambda_n\overline{\lambda}_k}\right| =$$

$$= \sum_{\lambda_k \in Q_{R_n}} s_k \ln\left|1 + \frac{2\lambda_n \mathrm{Re}\lambda_k}{R_n^2 - \lambda_n\overline{\lambda}_k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\lambda_k \in Q_{R_n}} \frac{2s_k|\lambda_n|\mathrm{Re}\lambda_k}{R_n^2 - |\lambda_n\lambda_k|} \leqslant \sum_{\lambda_k \in Q_{R_n}} \frac{2s_k \mathrm{Re}\lambda_k}{R_n} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\lambda_k \in Q_{R_n} \\ |\lambda_k| \leqslant 1}} 2s_k \mathrm{Re}\lambda_k + \sum_{\substack{\lambda_k \in Q_{R_n} \\ |\lambda_k| > 1}} \frac{2s_k \mathrm{Re}\lambda_k}{|\lambda_k|} \leqslant \eta(c_{16}|\lambda_n|). \tag{21}$$

Доданок $s_n \ln\frac{2\mathrm{Re}\lambda_n}{\rho_{\lambda_n}}$ із лівої частини нерівності (19) є невід'ємним. Тому із (19), (20), (21) і (9) отримуємо, що для деякої сталої c_{17} виконується

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\eta(c_{17}|\lambda_n|)} \sum_{\substack{\lambda_k \neq \lambda_n \\ |\lambda_k| \leqslant 2|\lambda_n|+1}} s_k \ln\left|\frac{\lambda_n + \overline{\lambda}_k}{\lambda_n - \lambda_k}\right| < +\infty. \tag{22}$$

Далі із тотожності $\left|\frac{a-b}{\overline{a}+b}\right|^2 = 1 - \frac{4\mathrm{Re}a\mathrm{Re}b}{|\overline{a}+b|^2}$, нерівності $x \leqslant -\ln(1-x)$, $0 \leqslant x < 1$, і (22) отримуємо для деякої сталої c_{18}

$$\sum_{\substack{\lambda_k \neq \lambda_n \\ |\lambda_k| \leqslant 2|\lambda_n|+1}} \frac{s_k \mathrm{Re}\lambda_n \mathrm{Re}\lambda_k}{\left|\lambda_n + \overline{\lambda}_k\right|^2} \leqslant \eta(c_{18}|\lambda_n|). \tag{23}$$

Крім цього, із (7) і (11) випливає

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k \mathrm{Re}\lambda_k}{\left(1+|\lambda_k|^2\right)^{q_k-1}} < +\infty. \tag{24}$$

Справді,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k \mathrm{Re}\lambda_k}{\left(1+|\lambda_k|^2\right)^{q_k-1}} \leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k \mathrm{Re}\lambda_k}{\left(1+|\lambda_k|^2\right)^{\eta(c_8|\lambda_k|)\big/\ln\sqrt{1+|\lambda_k|^2}-2}} \leqslant$$

$$\sum_{|\lambda_k| \leqslant 1} s_k \mathrm{Re}\lambda_k +$$

$$+ \sum_{|\lambda_k| > 1} \frac{s_k \mathrm{Re}\lambda_k}{\left(1+|\lambda_k|^2\right)^{\eta(c_8|\lambda_k|)\big/\ln\sqrt{1+|\lambda_k|^2}-2}} \leqslant$$

$$c_{19} + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{ds(t)}{(1+t^2)^{\eta(c_8 t)/\ln\sqrt{1+t^2}-3}} =$$

$$= \left.\frac{s(t)}{(1+t^2)^{\eta(c_8t)/\ln\sqrt{1+t^2}-3}}\right|_1^{+\infty} +$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{s(t)\, d\left(2\eta(c_8t) - 3\ln\left(1+t^2\right)\right)}{e^{2\eta(c_8t)-3\ln(1+t^2)}} + c_{19} \leqslant$$

$$\leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\eta(c_8t)\, d\left(2\eta(c_8t) - 3\ln\left(1+t^2\right)\right)}{e^{2\eta(c_8t)-3\ln(1+t^2)}} + c_{20} \leqslant$$

$$c_{21}\int_1^{+\infty} \frac{d\left(\eta(c_8t) - 3/2\ln\left(1+t^2\right)\right)}{e^{\eta(c_8t)-3/2\ln(1+t^2)}} + c_{20} < +\infty.$$

Тому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k \mathrm{Re}\lambda_n \mathrm{Re}\lambda_k}{\left|\lambda_n + \overline{\lambda}_k\right|^2 \left(1+|\lambda_k|^2\right)^{q_k-1}} =$$

$$= \frac{s_n}{4\left(1+|\lambda_n|^2\right)^{q_n-1}} +$$

$$+ \sum_{\substack{\lambda_k\neq\lambda_n \\ |\lambda_k|\leqslant 2|\lambda_n|+1}} \frac{s_k \mathrm{Re}\lambda_n \mathrm{Re}\lambda_k}{\left|\lambda_n + \overline{\lambda}_k\right|^2 \left(1+|\lambda_k|^2\right)^{q_k-1}} +$$

$$+ \sum_{|\lambda_k|>2|\lambda_n|+1} \frac{s_k \mathrm{Re}\lambda_n \mathrm{Re}\lambda_k}{\left|\lambda_n + \overline{\lambda}_k\right|^2 \left(1+|\lambda_k|^2\right)^{q_k-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s_n}{4\left(1+|\lambda_n|^2\right)^{q_n-1}} + \sum_{\substack{\lambda_k\neq\lambda_n \\ |\lambda_k|\leqslant 2|\lambda_n|+1}} \frac{s_k \mathrm{Re}\lambda_n \mathrm{Re}\lambda_k}{\left|\lambda_n + \overline{\lambda}_k\right|^2} +$$

$$+ \sum_{|\lambda_k|>2|\lambda_n|+1} \frac{s_k \mathrm{Re}\lambda_k}{\left(1+|\lambda_k|^2\right)^{q_k-1}}. \qquad (25)$$

Отже, висновок леми отримуємо із (25), (17), (23) і (24).

Лема 6 [14, с. 48]. *Нехай функція U голоморфна в крузі $\{z:\ |z|<r\}$, $|U(\xi)| \leqslant M$, і нехай U має в точці $\xi = 0$ нуль кратності m, а в точці $\xi = a$, $0<|a|<r$, – нуль кратності q. Тоді*

$$|a|^q \geqslant \frac{\left|U^{(m)}(0)\right|}{m!} \cdot \frac{r^{m+q}}{M}.$$

Лема 7 [11]. *Якщо голоморфна в крузі $U(0;R) = \{z\in\mathbb{C}:\ |z|\leqslant R\}$ функція f не має нулів у цьому крузі і $f(0)=1$, то її модуль в крузі $U(0;r)$, $r<R$, задовольняє нерівність*

$$\ln|f(z)| \geqslant \frac{-2r}{R-r} \ln \max_{|z|\leqslant R} |f(z)|.$$

Лема 8. *Якщо дивізор $\{(\lambda_n; s_n)\}$ задовольняє умови (7)–(9), то для деякої сталої c_{21}*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{\eta(c_{21}|\lambda_n|)} \max_{1<k\leqslant s_n} \ln \frac{|\gamma_{n,k}|}{\rho_{\lambda_n}^{s_n-k+1}} < +\infty, \qquad (26)$$

де $\gamma_{n,k} = \frac{1}{(k-1)!}\left.\left(\frac{(z-\lambda_n)^{s_n}}{F(z)}\right)^{(k-1)}\right|_{z=\lambda_n}$.

Доведення. Нехай

$$d_n := \min\left\{\frac{\rho_{\lambda_n}}{2};\ \min\{|\lambda_j - \lambda_n|:\ j\neq n\}\right\}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Припустимо, що $(\exists k\in\mathbb{N}):\ \ d_n = |\lambda_k - \lambda_n|$. Тоді

$$|\lambda_k - \lambda_n| \leqslant \rho_{\lambda_n}/2 < \rho_{\lambda_k}.$$

Функція $U(\xi) = F(\lambda_k + \xi)$ є голоморфною в крузі $\{z:\ |z|<\rho_{\lambda_k}\}$, має в точці $\xi=0$ нуль кратності s_k а в точці $\xi = \lambda_k - \lambda_n$ – нуль кратності s_n. Тому, використавши лему 6, отримаємо

$$d_n^{s_n} \geqslant \frac{\left|F^{(s_k)}(\lambda_k)\right|}{s_k!} \cdot \frac{\rho_{\lambda_k}^{s_k+s_n}}{\max\{|F(\xi)|: |\xi-\lambda_k|\leqslant\rho_{\lambda_k}\}}. \qquad (27)$$

Із (9), (13) і (27) випливає, що для деякої сталої c_{22} і для всіх $n\in\mathbb{N}$ виконується

$$d_n^{s_n} \geqslant (\rho_{\lambda_n})^{s_n} \exp\left(-\eta\left(c_{22}|\lambda_n|\right)\right). \qquad (28)$$

Із (13) отримуємо, що нерівність (28) виконується також, якщо $d_n = \min\{1; \mathrm{Re}\lambda_n\}/2$. Розглянемо функцію $\psi(t) = F(\lambda_n + d_nt)/t^{s_n}$, яка є голоморфною в крузі $U(0;1) = \{t\in\mathbb{C}:\ |t|<1\}$. Використавши правило Лопіталя і нерівності (9) і (28), отримаємо, що для деякої сталої c_{23} і для всіх $n\in\mathbb{N}$

$$|\psi(0)| = \lim_{t\to 0}\left|\frac{F(\lambda_n + d_nt)}{t^{s_n}}\right| =$$

$$= \frac{\left|F^{(s_n)}(\lambda_n)\right|}{s_n!} d_n^{s_n} \geqslant \exp\left(-\eta\left(c_{23}|\lambda_n|\right)\right). \qquad (29)$$

Окрім цього, для деякої сталої c_{24} при $|t|<1$ і для всіх $n\in\mathrm{N}$

$$|\psi(t)| \leqslant \max_{|t-\lambda_n|\leqslant d_n} |F(z)| \leqslant \exp\left(\eta\left(c_{24}|\lambda_n|\right)\right). \qquad (30)$$

Розглянемо функцію $g(t) = \psi(t)/\psi(0)$. Оскільки функція g не має нулів у крузі $U(0;1/2)$ і $g(0)=1$, то із леми 7 при $r=1/4$ і $R=1/2$, використавши (29) і (30) отримуємо

$$\ln|g(t)| \geqslant -2\ln\max_{|t|\leqslant 1/2}|g(t)| = 2\ln\frac{\psi(0)}{\max\limits_{|t|\leqslant 1/2}|\psi(t)|} \geqslant$$

$$\geqslant -2\left(\eta\left(c_{23}|\lambda_n|\right) + \eta\left(c_{24}|\lambda_n|\right)\right).$$

Звідси отримуємо, що для деякої сталої c_{25} при $|\tau| \leqslant d_n/4$

$$|F(\lambda_n + \tau)| \geqslant \frac{|\tau|^{s_n}}{d_n^{s_n}} \exp\left(-\eta\left(c_{25}|\lambda_n|\right)\right). \qquad (31)$$

Оскільки

$$\gamma_{n,k} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-\lambda_n|=d_n/4} \frac{(z-\lambda_n)^{s_n-k}}{F(z)}dz,$$

то із (13) і (31), врахувавши означення d_n, отримуємо, що

$$|\gamma_{n,k}| \leqslant \rho_{\lambda_n}^{s_n-k+1} \exp\left(2\eta\left(c_{13}|\lambda_n|\right) + \eta\left(c_{25}|\lambda_n|\right)\right),$$

звідки випливає (26).

Доведення теореми 1. Спочатку доведемо необхідність умов (7) і (8). Нехай для кожної послідовності $(b_{n,j})$, $n \in \mathrm{N}$, $j \in \{1;\ldots;s_n\}$, яка задовольняє умову (5), існує функція $f \in B_\eta$, що розв'язує кратну інтерполяційну задачу (6), зокрема, знайдеться така функція $f \in B_\eta$, для якої мають місце рівності $f^{(j-1)}(\lambda_1) = 1$, якщо $j \in \{1;\ldots;s_1\}$, а $f^{(j-1)}(\lambda_n) = 0$, якщо $n \geqslant 2$ і $j \in \{1;\ldots;s_n\}$. Функція $g(z) = (z-\lambda_1)^{s_1} f(z) \not\equiv 0$ належить класу B_η і дивізор її нулів співпадає з дивізором $\{(\lambda_n;s_n)\}$. Тому за лемою 1 виконуються умови (7) і (8). Доведемо тепер необхідність умови (9) від супротивного. Припустимо, що для кожної сталої c_6 і кожної функції $F \in B_\eta$, дивізор нулів якої співпадає з $\{(\lambda_n;s_n)\}$, умова (9) не виконується. Тоді для визначеної рівністю (12) функції F маємо

$$(\forall c_6): \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{\eta(c_6|\lambda_n|)} \ln \frac{s_n!}{\rho_{\lambda_n}^{s_n}\left|F^{(s_n)}(\lambda_n)\right|} = +\infty.$$

Тому існують такі підпослідовності (ν_n) і $(\tilde{s}_n)$ послідовностей (λ_n) та $(\tilde{s}_n)$ відповідно, що

$$(\forall n \in \mathbb{N}): \frac{1}{\eta(n|\nu_n|)} \ln \frac{\tilde{s}_n!}{\rho_{\nu_n}^{\tilde{s}_n}\left|F^{(\tilde{s}_n)}(\nu_n)\right|} > n. \quad (32)$$

Підпослідовність (ν_n) можна вибрати так, щоб добуток

$$\tilde{H}(z) = \prod_{|\nu_n|\leqslant 1} \frac{z-\nu_n}{z+\overline{\nu}_n} \prod_{|\nu_n|>1} \frac{1-z/\nu_n}{1+z/\overline{\nu}_n}$$

збігався і

$$(\exists\delta>0)(\forall n\in\mathbb{N}): \left|\mathrm{Re}\nu_n \tilde{H}'(\nu_n)\right| \geqslant \delta. \quad (33)$$

Нехай f – така функція із класу B_η, що

$$f^{(j-1)}(\lambda_n) = 0, \quad \lambda_n \notin \{\nu_n\}, \quad j \in \{1;\ldots;s_n\},$$
$$f^{(j-1)}(\nu_n) = 0, \quad j \in \{1;\ldots;\tilde{s}_n - 1\},$$
$$f^{(\tilde{s}_n-1)}(\nu_n) = (\tilde{s}_n - 1)!\,(\mathrm{Re}\nu_n)\,\rho_{\nu_n}^{-\tilde{s}_n}. \quad (34)$$

Функція

$$\Omega(z) = \frac{f(z)\cdot\tilde{H}(z)}{F(z)}$$

є голоморфною в $\mathbb{C}_+$. Покажемо, що вона задовольняє умову (1). Нехай r_k – послідовність із леми 2. Тоді для кожного $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+$ знайдеться таке $m \in \mathbb{N}$, що $r_m \leqslant r < r_{m+1}$. Оскільки $|F(it)| = 1$, $\left|\tilde{H}(it)\right| = 1$ для майже всіх $t \in \mathbb{R}$, $h_F(t) \equiv const$ і $h_{\tilde{H}}(t) \equiv const$, то врахувавши зауваження 1, із формули Неванлінни для півкруга $Q_{r_{m+2}} = Q(0;r_{m+2})$ отримуємо

$$\ln\left|\Omega\left(re^{i\varphi}\right)\right| = -\sum_{\tau_k\in Q_{r_{m+2}}} \ln\left|\frac{r_{m+2}^2 - z\overline{\tau}_k}{r_{m+2}(z-\tau_k)} \cdot \frac{r_{m+2}(z+\overline{\tau}_k)}{r_{m+2}^2 + z\tau_k}\right| +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{r_{m+2}^2 - r^2}{\left|r_{m+2}e^{i\theta} - re^{i\varphi}\right|^2} - \frac{r_{m+2}^2 - r^2}{\left|r_{m+2}e^{-i\theta} + re^{i\varphi}\right|^2}\right)\ln\left|\Omega\left(r_{m+2}e^{i\theta}\right)\right| d\theta +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-r_{m+2}}^{r_{m+2}}\left(\frac{r\cos\varphi}{\left|t+ire^{i\varphi}\right|^2} - \frac{r_{m+2}^2 r\cos\varphi}{\left|r_{m+2}^2 + itre^{i\varphi}\right|^2}\right)\left(\ln|f(it)|\,dt + dh_f(t)\right), \quad (35)$$

де τ_k – нулі функції f, відмінні від $\lambda_k \notin \{\nu_k\}$. Із леми 2 і (4) отримуємо, що для деякої сталої c_{26}

$$\ln\frac{1}{\left|F\left(r_{m+2}e^{i\theta}\right)\right|} \leqslant \eta\left(c_{26}r_{m+2}\right).$$

Окрім цього $\left|\tilde{H}\left(r_{m+2}e^{i\theta}\right)\right| \leqslant 1$. Тому, врахувавши, що $f \in B_\eta$, отримуємо для деякої сталої c_{27}

$$\ln\left|\Omega\left(r_{m+2}e^{i\theta}\right)\right| \leqslant \eta\left(c_{27}r_{m+2}\right) + c_{27}. \quad (36)$$

Оскільки $f \in B_\eta$, то функція f є обмеженою в кожному півкрузі Q_R. Тому має [12, с. 182] майже скрізь на уявній осі кутові межові значення $f(it)$, причому для майже всіх $t \in \mathbb{R}$

$$|f(it)| \leqslant c\exp\left(\eta(c|t|)\right). \quad (37)$$

Оскільки [10, с. 12]

$$\frac{\partial G}{\partial n_\zeta} \geqslant 0, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\partial Q_R} \frac{\partial G(\zeta;\lambda_n)}{\partial n_\zeta}|d\zeta| = 1,$$

то із (36) і (37) отримуємо, для деякої сталої c_{28}

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{r_{m+2}^2 - r^2}{\left|r_{m+2}e^{i\theta} - re^{i\varphi}\right|^2} - \frac{r_{m+2}^2 - r^2}{\left|r_{m+2}e^{-i\theta} + re^{i\varphi}\right|^2}\right)\ln\left|\Omega\left(r_{m+2}e^{i\theta}\right)\right| d\theta +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-r_{m+2}}^{r_{m+2}}\left(\frac{r\cos\varphi}{\left|t+ire^{i\varphi}\right|^2}-\frac{r_{m+2}^2 r\cos\varphi}{\left|r_{m+2}^2+itre^{i\varphi}\right|^2}\right)\ln\left|f\left(it\right)\right|dt\leqslant\eta\left(c_{28}r_{m+2}\right)+c_{28}. \tag{38}$$

Сума із правої частини рівності (35) є невід'ємною і завдяки незростанню функції h_f, отримуємо, що

$$\int\limits_{-r_{m+2}}^{r_{m+2}}\left(\frac{r\cos\varphi}{\left|t+ire^{i\varphi}\right|^2}-\frac{r_{m+2}^2 r\cos\varphi}{\left|r_{m+2}^2+itre^{i\varphi}\right|^2}\right)dh_f\left(t\right)\leqslant 0.$$

Тому, із (35), врахувавши (38), отримуємо, що $\Omega\in B_\eta$. Далі із (33) і (34) отримуємо для деякої сталої c_{29}

$$\left|\Omega\left(\nu_n\right)\right|=\frac{\tilde{s}_n!\left|f^{(\tilde{s}_n-1)}\left(\nu_n\right)\right|\cdot\left|\tilde{H}'\left(\nu_n\right)\right|}{\left(\tilde{s}_n-1\right)!\left|F^{(\tilde{s}_n)}\left(\nu_n\right)\right|}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{c_{29}\tilde{s}_n!}{\rho_{\nu_n}^{\tilde{s}_n}\left|F^{(\tilde{s}_n)}\left(\nu_n\right)\right|}.$$

Оскільки $\Omega\in B_\eta$, то звідси отримуємо, що для деякої сталої c_{30}

$$\frac{\tilde{s}_n!}{\rho_{\nu_n}^{\tilde{s}_n}\left|F^{(\tilde{s}_n)}\left(\nu_n\right)\right|}\leqslant c_{30}\exp\left(\eta\left(c_{30}\left|\nu_n\right|\right)\right).$$

Таким чином, для деякого $n_0\in\mathbb{N}$

$$\frac{\tilde{s}_{n_0}!}{\left(\rho_{\nu_{n_0}}\right)^{\tilde{s}_{n_0}}\left|F^{(\tilde{s}_{n_0})}\left(\nu_{n_0}\right)\right|}\leqslant n_0\exp\left(\eta\left(n_0\left|\nu_{n_0}\right|\right)\right),$$

що суперечить (32). Необхідність доведена.

Доведення достатності проводиться модифікованим методом Джонса [13]. Нехай

$$f\left(z\right)=F\left(z\right)\sum_{n=1}^{\infty}P_n\left(z\right), \tag{39}$$

де F – функція визначена рівністю (12),

$$P_n(z)=\sum_{m=1}^{s_n}\alpha_{n,m}\left(\frac{\varphi_n(z)}{z-\lambda_n}\right)^{(m-1)},$$

$$\alpha_{n,m}=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\sum_{i=0}^{s_n-m}\frac{1}{i!}\gamma_{n,s_n+1-m-i}b_{n,i+1},$$

$$\varphi_n\left(z\right)=\left(\frac{1+z\overline{\lambda}_n}{1+\left|\lambda_n\right|^2}\right)^{\omega_n+2q_n}\cdot\left(\frac{2\mathrm{Re}\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n}\right)^2\times$$

$$\times\exp\left\{\alpha_n\left(\lambda_n\right)-\alpha_n\left(z\right)\right\},$$

$$\alpha_n\left(z\right)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1+\overline{\lambda}_k\left(z+\rho_n\right)}{\overline{\lambda}_k+z+\rho_n}\cdot\frac{s_k\mathrm{Re}\lambda_k}{\left(1+\left|\lambda_k\right|^2\right)^{q_k}},$$

де $q_k=\left[\frac{\eta(c_8|\lambda_k|)}{\ln\sqrt{1+|\lambda_k|^2}}\right]$, (ω_n) – послідовність натуральних чисел, яку виберемо нижче. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2}=0$, то перенумерувавши, якщо є необхідність, точки λ_n можна вважати, що

$$(\forall n\in\mathrm{N}):\ \frac{\mathrm{Re}\lambda_n}{1+\left|\lambda_n\right|^2}\geqslant\frac{\mathrm{Re}\lambda_{n+1}}{1+\left|\lambda_{n+1}\right|^2}. \tag{40}$$

Ряд $\alpha_n\left(z\right)$ збігається рівномірно в кожній області $D=\{z:|z|\leqslant R,\ \mathrm{Re}z\geqslant-\rho_n+\delta,\ \delta>0\}$, бо при $z\in D$, $R\geqslant 2$, із нерівності $1+|xy|\leqslant\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}$, маємо

$$\left|\frac{1+\overline{\lambda}_k\left(z+\rho_n\right)}{\overline{\lambda}_k+z+\rho_n}\right|\cdot\frac{s_k\mathrm{Re}\lambda_k}{\left(1+\left|\lambda_k\right|^2\right)^{q_k}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+R^2}}{\delta}\cdot\frac{\sqrt{1+\left|\lambda_k\right|^2}s_k\mathrm{Re}\lambda_k}{\left(1+\left|\lambda_k\right|^2\right)^{q_k}},$$

а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{s_k\mathrm{Re}\lambda_k}{\left(1+|\lambda_k|^2\right)^{q_k-1/2}}$ є збіжним. Далі

$$\mathrm{Re}\alpha_n(z)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left(\left(\mathrm{Re}z+\rho_n\right)\left(1+\left|\lambda_k\right|^2\right)+\mathrm{Re}\lambda_k\left(1+\left|z\right|^2+2\mathrm{Re}z\rho_n+\rho_n^2\right)\right)s_k\mathrm{Re}\lambda_k}{\left|\overline{\lambda}_k+z+\rho_n\right|^2\left(1+\left|\lambda_k\right|^2\right)^{q_k}}. \tag{41}$$

Врахувавши нерівність $\left|\overline{\lambda}_k+\lambda_n+\rho_n\right|\geqslant\left|\overline{\lambda}_k+\lambda_n\right|$, (40) і (18), отримуємо для деякої сталої c_{31}

$$\mathrm{Re}\alpha_n\left(\lambda_n\right)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left(\left(\mathrm{Re}\lambda_n+\rho_n\right)\left(1+\left|\lambda_k\right|^2\right)+\mathrm{Re}\lambda_k\left(1+\left|\lambda_n\right|^2+2\mathrm{Re}\lambda_n\rho_n+\rho_n^2\right)\right)s_k\mathrm{Re}\lambda_k}{\left|\overline{\lambda}_k+\lambda_n+\rho_n\right|^2\left(1+\left|\lambda_k\right|^2\right)^{q_k}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left(3\mathrm{Re}\lambda_k\left(1+\left|\lambda_n\right|^2\right)+2\mathrm{Re}\lambda_n\left(1+\left|\lambda_k\right|^2\right)\right)s_k\mathrm{Re}\lambda_k}{\left|\overline{\lambda}_k+\lambda_n\right|^2\left(1+\left|\lambda_k\right|^2\right)^{q_k}}=$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{3\mathrm{Re}\lambda_k}{1+|\lambda_k|^2}+\frac{2\mathrm{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2}\right)\frac{\left(1+|\lambda_k|^2\right)\left(1+|\lambda_n|^2\right)s_k\mathrm{Re}\lambda_k}{\left|\overline{\lambda}_k+\lambda_n\right|^2\left(1+|\lambda_k|^2\right)^{q_k}}\leqslant$$

$$\leqslant 5\sum_{k=n}^{\infty}\frac{s_k\mathrm{Re}\lambda_n\mathrm{Re}\lambda_k}{\left|\overline{\lambda}_k+\lambda_n\right|^2\left(1+|\lambda_k|^2\right)^{q_k-1}}\leqslant \eta\left(c_{31}\left|\lambda_n\right|\right). \quad (42)$$

Крім цього, із (41) отримуємо

$$\mathrm{Re}\alpha_n(z)\geqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{s_k\left(\mathrm{Re}\lambda_k\right)^2}{\left|z+\overline{\lambda}_k+\rho_n\right|^2\left(1+|\lambda_k|^2\right)^{q_k}}. \quad (43)$$

Оскільки $1+|xy|\leqslant\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}$, то

$$\left|\frac{1+z\overline{\lambda}_n}{1+|\lambda_n|^2}\right|\leqslant\frac{1+|\lambda_n|\,|z|}{1+|\lambda_n|^2}\leqslant\frac{\sqrt{1+|z|^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}},$$

звідки

$$|\varphi_n(z)|\leqslant 4\left(\frac{\sqrt{1+|z|^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{\omega_n+2q_n}\cdot\frac{\left(\mathrm{Re}\lambda_n\right)^2}{\left|z+\overline{\lambda}_n\right|^2}\times$$

$$\times\exp\left(\mathrm{Re}\alpha_n(\lambda_n)-\mathrm{Re}\alpha_n(z)\right). \quad (44)$$

Покажемо, що визначена рівністю (39) функція f розв'язує кратну інтерполяційну задачу (6).

Очевидно, для всіх $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{(z-\lambda_n)^{s_n}f(z)}{F(z)}=$$

$$=(z-\lambda_n)^{s_n}P_n(z)+(z-\lambda_n)^{s_n}\sum_{k\neq n}P_k(z). \quad (45)$$

Оскільки $\varphi_n(\lambda_n)=1$, для всіх $n\in\mathbb{N}$, то

$$\frac{\varphi_n(z)}{z-\lambda_n}=\frac{1}{z-\lambda_n}+\tilde{\varphi}_n(z),$$

де $\tilde{\varphi}_n$ – функція, голоморфна в $\mathbb{C}_+$, причому $\tilde{\varphi}_n(\lambda_n)=\varphi_n'(\lambda_n)$. Тоді

$$P_n(z)=\sum_{m=1}^{s_n}\alpha_{n,m}\left(\frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(z-\lambda_n)^m}+\tilde{\varphi}_n^{(m-1)}(z)\right).$$

Звідси отримуємо, що

$$(z-\lambda_n)^{s_n}P_n(z)=\sum_{m=1}^{s_n}\alpha_{n,m}\left((-1)^{m-1}(m-1)!\,(z-\lambda_n)^{s_n-m}+(z-\lambda_n)^{s_n}\tilde{\varphi}_n^{(m-1)}(z)\right).$$

Знайшовши (s_n-m)-у похідну від обох частин рівності (45) в точці $z=\lambda_n$, отримуємо

$$\sum_{i=0}^{s_n-m}C_{s_n-m}^{i}f^{(i)}(\lambda_n)\left(\frac{(z-\lambda_n)^{s_n}}{F(z)}\right)^{(s_n-m-i)}\Bigg|_{z=\lambda_n}=(-1)^{m-1}(m-1)!\,(s_n-m)!\alpha_{n,m},$$

або

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{s_n-m}\frac{1}{i!}\gamma_{n,s_n+1-m-i}\left(f^{(i)}(\lambda_n)-b_{n,i+1}\right)=0,\\ m\in\{1;\ldots;s_n\}.\end{cases} \quad (46)$$

Матриця системи (46) має вигляд

$$\begin{pmatrix}\gamma_{n,s_n} & \frac{1}{1!}\gamma_{n,s_n-1} & \frac{1}{2!}\gamma_{n,s_n-2} & \ldots & \frac{1}{(s_n-2)!}\gamma_{n,2} & \frac{1}{(s_n-1)!}\gamma_{n,1}\\ \gamma_{n,s_n-1} & \frac{1}{1!}\gamma_{n,s_n-2} & \frac{1}{2!}\gamma_{n,s_n-3} & \ldots & \frac{1}{(s_n-2)!}\gamma_{n,1} & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \gamma_{n,1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Оскільки функція F має в точці λ_n нуль порядку s_n, то $\gamma_{n,1}\neq 0$, і отже, визначник матриці відмінний від нуля. Тому

$$f^{(k-1)}(\lambda_n)=b_{n,k},\quad k\in\{1;\ldots;s_n\},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Покажемо тепер, що при належному виборі послідовності натуральних чисел (ω_n) функція f належить класу B_η. Із (5), (26) і визначення $\alpha_{n,m}$ отримуємо, що для деякої сталої c_{32}

$$|\alpha_{n,m}|\leqslant\frac{s_n-m+1}{(m-1)!}\rho_n^m\exp\left(\eta\left(c_{32}\left|\lambda_n\right|\right)\right). \quad (47)$$

Оцінимо

$$u_{n,m}(z)=\left(\frac{\varphi_n(z)}{z-\lambda_n}\right)^{(m-1)},$$

при $z \in \mathbb{C}_+ \backslash U(\lambda_n; \rho_n/2)$. Очевидно

$$u_{n,m}(z) = \frac{(m-1)!}{2\pi i} \int\limits_{\left\{t:\ |t-z| = \frac{\rho_n}{4}\right\}} \frac{\varphi_n(t)\, dt}{(t-\lambda_n)(t-z)^m}.$$

Якщо $|t-z| = \rho_n/4$, то

$$|t-\lambda_n| \geqslant \frac{\rho_n}{4}, \tag{48}$$

$$\left|t+\rho_n+\overline{\lambda}_k\right| \leqslant \left|z+\overline{\lambda}_k+\frac{5\rho_n}{4}+\frac{i\rho_n}{4}\right|, \tag{49}$$

$$\frac{3}{4}\left|z+\overline{\lambda}_n\right| \leqslant \left|t+\overline{\lambda}_n\right| \leqslant \frac{5}{4}\left|z+\overline{\lambda}_n\right|, \tag{50}$$

бо

$$|t-\lambda_n| \geqslant |z-\lambda_n| - |t-z| \geqslant \frac{\rho_n}{2} - \frac{\rho_n}{4} = \frac{\rho_n}{4},$$

$$\left|t+\overline{\lambda}_n\right| \geqslant \mathrm{Re}\lambda_n - \frac{\rho_n}{4} \geqslant \frac{3\rho_n}{4}$$

$$\mathrm{Re}z - \frac{\rho_n}{4} \leqslant \mathrm{Re}t \leqslant \mathrm{Re}z + \frac{\rho_n}{4},$$

$$\mathrm{Im}z - \frac{\rho_n}{4} \leqslant \mathrm{Im}t \leqslant \mathrm{Im}z + \frac{\rho_n}{4},$$

$$\left|t+\rho_n+\overline{\lambda}_k\right|^2 \leqslant \left(\mathrm{Re}z + \mathrm{Re}\lambda_k + \frac{5\rho_n}{4}\right)^2 +$$

$$+\left(\mathrm{Im}z + \frac{\rho_n}{4} - \mathrm{Re}\lambda_k\right)^2 = \left|z+\overline{\lambda}_k+\frac{5\rho_n}{4}+\frac{i\rho_n}{4}\right|,$$

$$\left|z+\overline{\lambda}_n\right| \leqslant |z-t| + \left|t+\overline{\lambda}_n\right| = \frac{\rho_n}{4} + \left|t+\overline{\lambda}_n\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{3}\left|t+\overline{\lambda}_n\right| + \left|t+\overline{\lambda}_n\right| = \frac{4}{3}\left|t+\overline{\lambda}_n\right|,$$

$$\left|t+\overline{\lambda}_n\right| \leqslant |z-t| + \left|z+\overline{\lambda}_n\right| = \frac{\rho_n}{4} + \left|z+\overline{\lambda}_n\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\left|z+\overline{\lambda}_n\right| + \left|z+\overline{\lambda}_n\right| = \frac{5}{4}\left|z+\overline{\lambda}_n\right|.$$

Тоді із (42)–(44) і (48)–(50) отримуємо при $z \in \mathbb{C}_+ \backslash U(\lambda_n; \rho_n/2)$

$$|u_{n,m}(z)| = \frac{(m-1)!}{2\pi} \left| \int\limits_{\{t:\ |t-z| = \rho_n/4\}} \frac{\varphi_n(t)dt}{(t-\lambda_n)(t-z)^m} \right| \leqslant \frac{4^m (m-1)!}{\rho_n^m} \max_{|t-z|=\rho_n/4} |\varphi_n(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4^{m+3}(m-1)!\,(\mathrm{Re}\lambda_\mathrm{n})^2}{9\rho_n^m \left|z+\overline{\lambda}_n\right|^2} \left(\frac{\sqrt{1+(|z|+1/4)^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{\omega_n+2q_n} \max_{|t-z|=\rho_n/4} \exp\left(\mathrm{Re}\alpha_\mathrm{n}(\lambda_\mathrm{n}) - \mathrm{Re}\alpha_\mathrm{n}(\mathrm{t})\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4^{m+3}(m-1)!\,(\mathrm{Re}\lambda_n)^2}{9\rho_n^m \left|z+\overline{\lambda}_n\right|^2} \left(\frac{\sqrt{1+(|z|+1/4)^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{\omega_n+2q_n} \exp\left(\eta\left(c_{31}|\lambda_n|\right)\right) \max_{|t-z|=\rho_n/4} \exp\left(-\mathrm{Re}\alpha_n(t)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4^{m+3}(m-1)!\,(\mathrm{Re}\lambda_n)^2}{9\rho_n^m \left|z+\overline{\lambda}_n\right|^2} \left(\frac{\sqrt{1+(|z|+1/4)^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{\omega_n+2q_n} \exp\left(\eta\left(c_{31}|\lambda_n|\right)\right) \times$$

$$\times \max_{|t-z|=\rho_n/4} \exp\left(-\sum_{k=n}^{\infty} \frac{s_k (\mathrm{Re}\lambda_k)^2}{\left|t+\overline{\lambda}_k+\rho_n\right|^2 \left(1+|\lambda_k|^2\right)^{q_k}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4^{m+3}(m-1)!\exp\left(\eta\left(c_{31}|\lambda_n|\right)\right)(\mathrm{Re}\lambda_n)^2 \left(\sqrt{1+(|z|+1/4)^2}\right)^{\omega_n+2q_n}}{9\rho_n^m \left|z+\overline{\lambda}_n\right|^2 \left(\sqrt{1+|\lambda_n|^2}\right)^{\omega_n+2q_n}} \times$$

$$\times \exp\left(-\sum_{k=n}^{\infty} \frac{s_k (\mathrm{Re}\lambda_k)^2}{\left|z+\overline{\lambda}_k+5\rho_n/4+i\rho_n/4\right|^2 \left(1+|\lambda_k|^2\right)^{q_k}}\right), \quad m \in \overline{1; s_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{51}$$

Далі, якщо $|z-\lambda_n| \leqslant \rho_n/2$, і $|t-\lambda_n| = \rho_n/2$, то

$$|t| \leqslant |z| + 1, \tag{52}$$

$$\frac{3}{5}\left|z+\overline{\lambda}_n\right| \leqslant \left|t+\overline{\lambda}_n\right| \leqslant \frac{5}{3}\left|z+\overline{\lambda}_n\right|, \tag{53}$$

$$\mathrm{Re}z - \rho_n \leqslant \mathrm{Re}t \leqslant \mathrm{Re}z + \rho_n,\ \mathrm{Im}z - \rho_n \leqslant \mathrm{Im}t \leqslant \mathrm{Im}z + \rho_n. \tag{54}$$

Застосувавши принцип максимуму модуля до голоморфної в $\mathbb{C}_+$ функції

$$u_{n,m}(z) = \left(\frac{\varphi_n(z)}{z-\lambda_n}\right)^{(m-1)},$$

і використавши нерівності (51)–(54), отримаємо при $z \in U(\lambda_n; \rho_n/2)$

$$|u_{n,m}(z)| \leqslant \max_{|t-\lambda_n|=\rho_n/2} |u_{n,m}(t)| \leqslant \frac{4^{m+3}(m-1)!\exp\left(\eta\left(c_{31}|\lambda_n|\right)\right)(\mathrm{Re}\lambda_n)^2\left(\sqrt{1+(|t|+1/4)^2}\right)^{\omega_n+2q_n}}{9\rho_n^m\left|t+\overline{\lambda}_n\right|^2\left(\sqrt{1+|\lambda_n|^2}\right)^{\omega_n+2q_n}}\times$$

$$\times\exp\left(-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{s_k\left(\mathrm{Re}\lambda_k\right)^2}{\left|t+\overline{\lambda}_k+5\rho_n/4+i\rho_n/4\right|^2\left(1+|\lambda_k|^2\right)^{q_k}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{25\cdot 4^{m+3}(m-1)!\exp\left(\eta\left(c_{31}|\lambda_n|\right)\right)(\mathrm{Re}\lambda_n)^2\left(\sqrt{1+(|z|+5/4)^2}\right)^{\omega_n+2q_n}}{81\rho_n^m\left|z+\overline{\lambda}_n\right|^2\left(\sqrt{1+|\lambda_n|^2}\right)^{\omega_n+2q_n}}\times$$

$$\times\exp\left(-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{s_k\left(\mathrm{Re}\lambda_k\right)^2}{\left|z+\overline{\lambda}_k+9\rho_n/4+5i\rho_n/4\right|^2\left(1+|\lambda_k|^2\right)^{q_k}}\right),\quad m\in\overline{1;s_n},\quad n\in\mathrm{N}. \tag{55}$$

Звідси і з (51) випливає, що нерівність (55) справедлива для всіх $z\in\mathbb{C}_+$. Далі із (47) і (55) отримуємо, що при $z\in\mathbb{C}_+$ справедлива нерівність

$$|P_n(z)|\leqslant\sum_{m=1}^{s_n}|\alpha_{n,m}|\,|u_{n,m}(z)|\leqslant\frac{1600}{81}\exp\left(\eta\left(c_{31}|\lambda_n|\right)+\eta\left(c_{32}|\lambda_n|\right)\right)\sum_{m=1}^{s_n}4^m\left(s_n-m+1\right)\times$$

$$\times\frac{\left(\sqrt{1+(|z|+5/4)^2}\right)^{\omega_n+2q_n}(\mathrm{Re}\lambda_n)^2}{\left|z+\overline{\lambda}_n\right|^2\left(\sqrt{1+|\lambda_n|^2}\right)^{\omega_n+2q_n}}\cdot\exp\left(-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{s_k\left(\mathrm{Re}\lambda_k\right)^2}{\left|z+\overline{\lambda}_k+9\rho_n/4+5i\rho_n/4\right|^2\left(1+|\lambda_k|^2\right)^{q_k}}\right)=$$

$$=\frac{6400}{81}\exp\left(\eta\left(c_{31}|\lambda_n|\right)+\eta\left(c_{32}|\lambda_n|\right)\right)\left(4^{s_n+1}-3s_n-4\right)\left(\frac{\sqrt{1+(|z|+5/4)^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{\omega_n}\times$$

$$\times\frac{(\mathrm{Re}\lambda_n)^2\left(\sqrt{1+(|z|+5/4)^2}\right)^{2q_n}}{\left|z+\overline{\lambda}_n\right|^2\left(1+|\lambda_n|^2\right)^{q_n}}\exp\left(-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{s_k\left(\mathrm{Re}\lambda_k\right)^2}{\left|z+\overline{\lambda}_k+9\rho_n/4+5i\rho_n/4\right|^2\left(1+|\lambda_k|^2\right)^{q_k}}\right)\leqslant$$

$$=\frac{25600}{81}\exp\left(\eta\left(c_{31}|\lambda_n|\right)+\eta\left(c_{32}|\lambda_n|\right)+s_n\ln 4\right)\left(\sqrt{1+(|z|+5/4)^2}\right)^{2q_n}\left(\frac{\sqrt{1+(|z|+5/4)^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{\omega_n}\times$$

$$\times\frac{(\mathrm{Re}\lambda_n)^2}{\left|z+\overline{\lambda}_n\right|^2\left(1+|\lambda_n|^2\right)^{q_n}}\exp\left(-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{s_k\left(\mathrm{Re}\lambda_k\right)^2}{\left|z+\overline{\lambda}_k+9\rho_n/4+5i\rho_n/4\right|^2\left(1+|\lambda_k|^2\right)^{q_k}}\right),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Використавши (17), звідси отримуємо для деякої сталої c_{33} і всіх $z\in\mathbb{C}_+$

$$|P_n(z)|\leqslant c_{33}\exp\left(\eta\left(c_{33}|\lambda_n|\right)\right)\left(\sqrt{1+(|z|+5/4)^2}\right)^{2q_n}\left(\frac{\sqrt{1+(|z|+5/4)^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{\omega_n}\times$$

$$\times\frac{(\mathrm{Re}\lambda_n)^2}{\left|z+\overline{\lambda}_n\right|^2\left(1+|\lambda_n|^2\right)^{q_n}}\exp\left(-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{s_k\left(\mathrm{Re}\lambda_k\right)^2}{\left|z+\overline{\lambda}_k+9\rho_n/4+5i\rho_n/4\right|^2\left(1+|\lambda_k|^2\right)^{q_k}}\right),\quad n\in\mathbb{N}. \tag{56}$$

Нехай

$$\varkappa_n(z)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{s_k\left(\mathrm{Re}\lambda_k\right)^2}{\left|z+\overline{\lambda}_k+9\rho_n/4+5i\rho_n/4\right|^2\left(1+|\lambda_k|^2\right)^{q_k}}.$$

Тоді

$$\varkappa_n(z) - \varkappa_{n+1}(z) = \frac{s_n\left(\mathrm{Re}\lambda_n\right)^2}{\left|z+\overline{\lambda}_n+9\rho_n/4+5i\rho_n/4\right|^2\left(1+|\lambda_n|^2\right)^{q_n}}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Очевидно, $\varkappa_n(z)\to 0$ при $n\to\infty$ рівномірно на компактах із $\mathbb{C}_+$. Оскільки $\left|z+\overline{\lambda}_n+9\rho_n/4+5i\rho_n/4\right|\leqslant (1+\sqrt{106}/4)\left|z+\overline{\lambda}_n\right|$, то із (56), врахувавши, що $F\in B_\eta$, для функції

$$\Phi_n(z) = F(z)\,P_n(z)$$

отримуємо

$$|\Phi_n(z)|\leqslant c_{34}\exp\left\{\eta\left(c_{33}|\lambda_n|\right)+\eta\left(c_{35}\left(|z|\right)\right)\right\}\exp\left(-\varkappa_n(z)\right)\left(\varkappa_n(z)-\varkappa_{n+1}(z)\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\sqrt{1+\left(|z|+5/4\right)^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{\omega_n}\left(\sqrt{1+\left(|z|+5/4\right)^2}\right)^{2q_n}.$$

Використовуючи нерівність $t\leqslant e^t-1$, $t\geqslant 0$, при $t=\varkappa_n(z)-\varkappa_{n+1}(z)$, одержуємо

$$|\Phi_n(z)|\leqslant c_{34}\exp\left\{\eta\left(c_{33}|\lambda_n|\right)+\eta\left(c_{35}\left(|z|\right)\right)\right\}\left(\frac{\sqrt{1+\left(|z|+5/4\right)^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{\omega_n}\times$$
$$\times\left(\sqrt{1+\left(|z|+5/4\right)^2}\right)^{2q_n}\left\{\exp\left(-\varkappa_{n+1}(z)\right)-\exp\left(-\varkappa_n(z)\right)\right\}. \tag{57}$$

Якщо $\sqrt{1+|\lambda_n|^2}\geqslant e\sqrt{1+\left(|z|+5/4\right)^2}$, то

$$\exp\left\{\eta\left(c_{33}|\lambda_n|\right)+\eta\left(c_{35}\left(|z|\right)\right)\right\}\left(\sqrt{1+\left(|z|+5/4\right)^2}\right)^{2q_n}\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left\{\eta\left(c_{33}|\lambda_n|\right)+\eta\left(c_{35}\left(|z|\right)\right)+2\frac{\eta\left(c_8|\lambda_n|\right)}{\ln\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\ln\sqrt{1+\left(|z|+5/4\right)^2}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left\{\eta\left(c_{33}|\lambda_n|\right)+\eta\left(c_{35}\left(|z|\right)\right)+2\frac{\eta\left(c_8|\lambda_n|\right)}{\ln\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\ln\frac{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}{e}\right\}\leqslant\exp\left\{\eta\left(c_{36}|\lambda_n|\right)+\eta\left(c_{35}\left(|z|\right)\right)\right\}.$$

Якщо ж $\sqrt{1+|\lambda_n|^2}<e\sqrt{1+\left(|z|+5/4\right)^2}$, то, врахувавши зростання функції $\psi(t)=\eta\left(c_8t\right)/\ln\sqrt{1+t^2}$, отримуємо

$$\exp\left\{\eta\left(c_{33}|\lambda_n|\right)+\eta\left(c_{35}\left(|z|\right)\right)\right\}\left(\sqrt{1+\left(|z|+5/4\right)^2}\right)^{2q_n}\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left\{\eta\left(c_{33}|\lambda_n|\right)+\eta\left(c_{35}\left(|z|\right)\right)+2\frac{\eta\left(c_8|\lambda_n|\right)}{\ln\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\ln\sqrt{1+\left(|z|+5/4\right)^2}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left\{\eta\left(c_{33}|\lambda_n|\right)+\eta\left(c_{35}\left(|z|\right)\right)+2\frac{\eta\left(c_8e\sqrt{1+\left(|z|+5/4\right)^2}\right)}{\ln\left(e\sqrt{1+\left(|z|+5/4\right)^2}\right)}\ln\sqrt{1+\left(|z|+5/4\right)^2}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\exp\left\{\eta\left(c_{33}|\lambda_n|\right)+\eta\left(c_{37}\left(|z|+7/4\right)\right)\right\}.$$

Таким чином, ми отримали, що для деяких сталих c_{38}, c_{39} і c_{40}

$$|\Phi_n(z)|\leqslant c_{38}\exp\left\{\eta\left(c_{39}|\lambda_n|\right)+\eta\left(c_{40}\left(|z|\right)\right)\right\}\left(\frac{\sqrt{1+\left(|z|+5/4\right)^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{\omega_n}\times\left\{\exp\left(-\varkappa_{n+1}(z)\right)-\exp\left(-\varkappa_n(z)\right)\right\}. \tag{58}$$

Нехай $\omega_n = [\eta(c_{39}|\lambda_n|)]$, де $[\cdot]$ – ціла частина числа, а c_{39} – стала із (58). Тоді якщо $\sqrt{1+|\lambda_n|^2} \geqslant e\sqrt{1+(|z|+5/4)^2}$, то

$$\exp\{\eta(c_{39}|\lambda_n|)\}\left(\frac{\sqrt{1+(|z|+5/4)^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{\omega_n} \leqslant \exp\{\eta(c_{39}|\lambda_n|)-\eta(c_{39}|\lambda_n|)\}=1. \quad (59)$$

Нехай $\sqrt{1+|\lambda_n|^2} < e\sqrt{1+(|z|+5/4)^2}$. Оскільки функція η є зростаючою, то для деякої сталої c_{41}

$$\exp\{\eta(c_{39}|\lambda_n|)\} \leqslant c_{41}\exp\{\eta(c_{41}|z|)\}. \quad (60)$$

Крім цього

$$\left(\frac{\sqrt{1+(|z|+5/4)^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{\omega_n} \leqslant \left(\frac{\sqrt{1+(|z|+5/4)^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{\eta(c_{39}|\lambda_n|)} \leqslant \max_{t\geqslant 0}\left(\frac{1+(|z|+5/4)^2}{1+t^2}\right)^{\frac{\eta(c_{39}t)}{2}}. \quad (61)$$

Оскільки функція $\varphi(t)=\left(\frac{1+(|z|+5/4)^2}{1+t^2}\right)^{\frac{\eta(c_{39}t)}{2}}$ є неперервною на $[0;+\infty)$ і прямує до нуля при $t\to+\infty$, то для кожного фіксованого $z\in\mathbb{C}_+$ знайдеться точка t_z, в якій функція φ досягає свого максимуму. Крім цього, функція φ спадає на $[|z|+5/4;+\infty)$, тому $t_z \leqslant |z|+5/4$. Отже, якщо $t_z=0$, то, враховуючи (3), отримуємо при $z\in\mathbb{C}_+$

$$\max_{t\geqslant 0}\left(\frac{1+(|z|+5/4)^2}{1+t^2}\right)^{\frac{\eta(c_{39}t)}{2}} =$$

$$=\left(1+(|z|+5/4)^2\right)^{c_{42}} \leqslant c_{43}\exp(\eta(c_{43}|z|)). \quad (62)$$

Якщо ж $1<t_z\leqslant |z|+5/4$, то

$$\max_{t\geqslant 0}\left(\frac{1+(|z|+5/4)^2}{1+t^2}\right)^{\frac{\eta(c_{39}t)}{2}} =$$

$$=\exp\left(\frac{\eta(c_{39}t_z)}{2}\ln\frac{1+(|z|+5/4)^2}{1+t_z^2}\right). \quad (63)$$

Оскільки

$$\left.\left(\exp\left(\frac{\eta(c_{39}t)}{2}\ln\frac{1+(|z|+5/4)^2}{1+t^2}\right)\right)'\right|_{t=t_z} = 0,$$

то, врахувавши (2), отримуємо для деякої сталої c_{44}

$$\ln\frac{1+(|z|+5/4)^2}{1+t^2} = \frac{2t\eta(c_{39}t_z)}{c_{39}(1+t_z^2)\eta'(c_{39}t_z)} \leqslant c_{44}.$$

Внаслідок цього, із (63) одержуємо, що для деякої сталої c_{44} при $z\in\mathbb{C}_+$

$$\max_{t\geqslant 0}\left(\frac{1+(|z|+5/4)^2}{1+t^2}\right)^{\frac{\eta(c_{39}t)}{2}} \leqslant \exp\left(\frac{c_{44}\eta(c_{39}t_z)}{2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant c_{45}\exp(\eta(c_{45}|z|)). \quad (64)$$

Отже, якщо $\sqrt{1+|\lambda_n|^2} < e\sqrt{1+(|z|+5/4)^2}$, то із (60)–(64) отримуємо для деякої сталої c_{46}

$$\exp\{\eta(c_{39}|\lambda_n|)\}\left(\frac{\sqrt{1+(|z|+5/4)^2}}{\sqrt{1+|\lambda_n|^2}}\right)^{\omega_n} \leqslant$$

$$\leqslant c_{46}\exp(\eta(c_{46}|z|)). \quad (65)$$

Таким чином, із (58), (59) і (65) отримуємо, що для деякої сталої c_{47} і всіх $z\in\mathbb{C}_+$ виконується

$$|\Phi_n(z)| \leqslant c_{47}\exp\{\eta(c_{47}(|z|))\}\times$$

$$\times(\exp(-\varkappa_{n+1}(z))-\exp(-\varkappa_n(z))).$$

Враховуючи це і приналежність функції F класу B_η, для довільного $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ отримуємо

$$\left|\sum_{n=1}^{m}F(z)P_n(z)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{m}|\Phi_n(z)| \leqslant c_{47}\exp\{\eta(c_{47}(|z|))\}\times\sum_{n=1}^{m}\{\exp(-\varkappa_{n+1}(z))-\exp(-\varkappa_n(z))\} =$$

$$= c_{47}\exp\{\eta(c_{47}(|z|))\}\exp(-\varkappa_{m+1}(z))-\exp(-\varkappa_1(z)) \leqslant c_{48}\exp\{\eta(c_{48}(|z|))\}.$$

Звідси випливає рівномірна збіжність ряду (40) на компактах із $\mathbb{C}_+$ і належність f класу B_η. Теорема 1 доведена.

Бібліоґрафія

[1] Шаран В. Л. Про інтерполяційні послідовності одного класу функцій, аналітичних в півплощині, який визначається швидко зростаючою мажорантою // Математичні Студії. —1998. — Т. 10, №2. — С. 133–146.

[2] Уен И.Т. Интерполирование с кратными узлами в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа // Теория функций, функцион. анализ и их прил. — 1979. — №31. — С. 119–129.

[3] Руссаковский А.М. Задача кратной интерполяции в классе функций, аналитических в полуплоскости и имеющих индикатор не выше данного // ДАН СССР. — 1983. — **269**, №4. — С. 814–817.

[4] Руссаковский А.М. Задача кратной интерполяции в классе функций, аналитических в полуплоскости и имеющих индикатор не выше данного // Харьковск. гос. ун-т. — Харьков. Деп. в ВИНИТИ 12.04.82. №5087-В82. — 1982. — 64 с.

[5] Малютин К.Г. Задача кратной интерполяции в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа // Математический сборник. — 1993. — **184**, №2. — С. 129–144.

[6] Малютин К.Г. Модифицированный метод Джонса для решения задач кратной интерполяции в полуплоскости // Математический форум. Т.3. Исследования по математическому анализу / отв. Ред. Коробейник Ю.Ф. и Кусраев А.Г. - Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А. — 2009. — С. 143–164.

[7] Абанина Т. И. Интерполяционная задача в пространствах целых функций сколь угодно быстрого роста. // — М. Деп. в ВИНИТИ, №5440-В88. — 1988. — 45 с.

[8] Абанина Т. И. Интерполяционная задача в пространствах целых функций сколь угодно быстрого роста — // Изв. вузов. Математика. — 1990. — №4. — С.72–74.

[9] Говоров Н.В. *Краевая задача Римана с бесконечным индексом.* — М.: Наука, 1986. — 240 с.

[10] Гольдберг А. А., Островский И. И. *Распределение значений мероморфных функций.* — М.: Наука, 1970. — 591 с.

[11] Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* — М.: ГИТТЛ, 1956. — 632 с.

[12] Привалов И. И. *Граничные свойства аналитических функций.* —Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. — 336 с.

[13] Jones P. Carleson measures and the Fefferman-Stein decomposition of BMO // Ann. Math. — 1980. — **111**. — P. 197–208.

[14] Малютин К.Г., Герасименко В.О. Вільна інтерполяція цілими функціями скінченного гамма-типу // Математичні Студії. —2007. — Т. 28, №1. — С. 45–50.