УДК 517.5

Про деякі властивості спеціальних цілих функцій експоненціального типу та їх застосування

Крутиголова Є. К.

krutygolova@gmail.com

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра матаналізу, вул. Стрийська 3, м. Дрогобич, 82100

Побудовано цілу функцію експоненціального типу заданого росту, індикаторною діаграмою якої є круг $|z| \leqslant 1$. Встановлено умови збіжності ряду експонент у замкненій опуклій області.

Питання про побудову цілих функцій заданого росту розглядалось у ряді робіт, наприклад, [1], [3]. Як виявилось, ріст цілих функцій експоненціального типу тісно пов'язаний з характером особливих точок асоційованих функцій. Якщо асоційована функція $\gamma(t)$ має скінченне число особливих точок на межі опуклого многокутника D, то для застосування відповідної їй цілої функції $L(\lambda)$ та її нулів у теорії рядів експонент найефективніше в якості функції $L(\lambda)$ використовувати експоненціальний поліном $P(z) = \sum_{k=1}^{p} c_k e^{a_k z}$, $3 \leqslant p < \infty$, $c_k = const$, a_k - вершини многокутника D.

Асоційована з $P(z)$ функція $\gamma(t)$ має своїми особливими точками прості полюси в точках a_k, $k = 1, ..., p$, і не має жодних інших особливих точок. Також для функції $P(z)$ встановлено оцінки: [1, с.84],

$$Ae^{h(\varphi)r} < |P(z)| < Be^{h(\varphi)r} \tag{1}$$

$z = re^{i\varphi}$, $A, B = const$, $h(\varphi)$- індикатор росту функції $P(z)$, $z \notin K_n$ (K_n- кружки фіксованого радіусу ρ_0 з центрами в нулях λ_n^k функції $P(z)$.

Для цілих функцій експоненціального типу, індикаторними діаграмами яких є опуклі області іншого типу, ніж многокутник D, оцінок вигляду (1) не встановлено.

У даній роботі розглядаються цілі функції експоненціального типу, індикаторними діаграмами яких є круг $|z| \leqslant 1$, або інша опукла обмежена область, і для яких мають місце оцінки вигляду (1). Також встановлюються умови збіжності в замкненій області ряду експонент, показниками якого є нулі побудованої цілої функції.

1.Розглянемо експоненціальний поліном

$$P_m(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} e^{ze^{\frac{2k\pi i}{m}}}, 3 \leqslant m < \infty \tag{2}$$

Асоційована із $P_m(z)$ функція $\gamma_m(t)$ має вигляд

$$\gamma_m(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \frac{1}{t - e^{\frac{2k\pi i}{m}}},$$

а індикаторною діаграмою функції $P_m(z)$ є правильний m-кутник, вписаний в круг $|z| \leqslant 1$ з вершинами в точках $a_k = e^{\frac{2k\pi i}{m}}$ (k=1,...,m).

Згідно з нерівністю (1) для функції $P_m(z)$ має місце оцінка:

$$A_m e^{h_m(\varphi)r} < |P_m(z)| < B_m e^{h_m(\varphi)r}$$

$A_m, B_m = const$, $h_m(\varphi)$ - індикатор росту функції $P_m(z)$, $z \notin K_n$, $3 \leqslant m < \infty$, $n = 2, 3, ...$

Оскільки $\left|e^{ze^{\frac{2k\pi i}{m}}}\right| = \left|e^{re^{i\varphi}e^{\frac{2k\pi i}{m}}}\right| = e^{r\cos(\varphi + \frac{2k\pi i}{m})} \leqslant e^r$, і, крім того, послідовність функцій $P_m(z)$ при $m \to \infty$ збігається рівномірно до деякої функції $P(z)$ в довільній замкненій обмеженій області $\overline{K}$, бо при всіх $m \geqslant 3$

$|P_m(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \left|e^{ze^{\frac{2k\pi i}{m}}}\right| < Ce^r$, то при $z \notin K_n$ виконується нерівність

$$C_1 e^r < |P_m(z)| < C_2 e^r, C_1, C_2 = const \tag{3}$$

Поряд із (1) розглянемо експоненціальний поліном

$$P_{2m}(z) = \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{2^k} e^{ze^{\frac{2k\pi i}{2m}}}.$$

Позначимо через $h_m(\varphi)$ і $h_{2m}(\varphi)$ - індикатори росту функцій $P_m(z)$ і $P_{2m}(z)$ відповідно, а через $K_m(\varphi)$ і $K_{2m}(\varphi)$ - їх опорні функції. Враховуючи, що індикаторними діаграмами функцій $P_m(z)$ і $P_{2m}(z)$ є відповідні правильні вписані в круг $|z| \leqslant 1$ m-кутник і $2m$-кутник, і при тому $h_m(\varphi) = K_m(-\varphi)$, $h_{2m}(\varphi) = K_{2m}(-\varphi)$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, матимемо, що $K_m(\varphi) \leqslant K_{2m}(\varphi)$, тобто $h_m(\varphi) \leqslant h_{2m}(\varphi)$, $\varphi \in [0; 2\pi]$. Із умови (1) та попередньої нерівності випливає, що при $z \notin K_n$ (K_n- кружки з центрами в нулях функції $P_{2m}(z)$ фіксованого радіусу ρ_0)

$$|P_m(z)| < Be^{h_m(\varphi)r} \leqslant B_1 e^{h_{2m}(\varphi)r} < B_2 |P_{2m}(z)|, \quad B_1, B_2 = const. \tag{4}$$

Для нулів функції (1) має місце асимптотика ([1, с.56]):

$$\lambda_n^k = \frac{2\pi n i}{e^{\frac{2(k+1)\pi i}{m}} - e^{\frac{2k\pi i}{m}}} + \varepsilon_n^{(k)}, \left|\varepsilon_n^{(k)}\right| < e^{-gn}, \tag{5}$$

$g > 0$ - *const*, $k = 0, 1, ..., m-1$, $m \geqslant 3$, $n = 1, 2, 3, ...$

Розглянемо тепер функцію

$$Q(z) = \prod_{n=2}^{\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{z}{\frac{2\pi n i}{e^{\frac{2(k+1)\pi i}{n}} - e^{\frac{2k\pi i}{n}}}}\right) \tag{6}$$

Нулі функції (6) $z_n = \frac{2\pi ni}{e^{\frac{2(k+1)\pi i}{m}} - e^{\frac{2k\pi i}{m}}}$, $k = 0, 1, ..., n-1$, $n = 2, 3, ...$ розташовані на колах Γ_n радіусів $\left|z_n^k\right|$ так, що на кожному колі Γ_n лежить n нулів функції (6), тому в крузі U_n радіусу R_n ($R_n = \max\left(\left|z_n^{(k)}\right|, \left|\lambda_n^{(k)}\right|\right)$) міститься $\nu(Q) = \frac{n^2+n-1}{2}$ нулів функції (6).

Візьмемо два експоненціальні поліноми $P_n(z)$ та $P_{m_1}(z)$ ($m_1 \in N$, $m_1 \leqslant \frac{n}{2}$). В крузі U_n кількість нулів функцій $P_n(z)$ та $P_{m_1}(z)$ відповідно дорівнює $\nu(P_n) = n^2$, $\nu(P_{m_1}) \leqslant \frac{n^2}{2}$, і, отже маємо, що

$$\nu(P_{m_1}) < \nu(Q) < \nu(P_n), n = 2, 3, ... \qquad (7)$$

Зауважимо, що на кожному колі Γ_i, ($i = 2, ..., n$) в околах точок z_i^k лежать нулі λ_i^k функцій $P_i(z)$, і якщо в (5) покладемо m=n, то $\left|\lambda_i^k - z_i^k\right| < e^{-iq}$, $q > 0 - const$. Використовуючи міркування, проведені в ([1, c.59]), матимемо, що при $n \geqslant 1$

$$M_1 < \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left|1 - \frac{z}{z_n^k}\right|}{\prod_{k=1}^{n}\left|1 - \frac{z}{\lambda_n^k}\right|} < M_2, \qquad (8)$$
$$M_1, M_2 = const, z \notin K_n$$

Із (3),(4),(7),(8) випливає, що при $z \notin K_n$ виконується нерівність

$$C_1 e^r < |Q(z)| < C_2 e^r, C_1, C_2 = const \qquad (9)$$

Крім того, міркуючи так само, як при доведенні теореми 1.2.13 ([1, c.64]), одержимо, що

$$\left|Q'(z_n^k)\right| > L e^{r_n h(\varphi_n^k)}, \qquad (10)$$
$$z_n^k = r_n^k e^{h(\varphi_n^k)}, L = const$$

Справді, якщо візьмемо число ρ_1 таким малим, щоб кружки K_n з центрами в точках z_n^k радіусу ρ_1 не перетинались, тоді матимемо

$$\frac{1}{|Q'(z_n^k)|} \leqslant \max_{|z - z_n^k| = \rho_1}\left|\frac{z - z_n^k}{Q(z)}\right| = \frac{\rho_1}{|Q(z_0)|}, \left|z_0 - z_n^k\right| = \rho_1$$

Враховуючи (9), одержимо

$$\frac{\rho_1}{|Q(z_0)|} \leqslant \frac{\rho_1}{C_3} e^{r_0 h(\varphi_0)} = \frac{\rho_1}{C_3} e^{h(\varphi_n^k) r_n^k - h(\varphi_0) r_0} \cdot e^{-h(\varphi_n^k) r_n^k}$$

Оскільки ([1, c.65]), $\left|h(\varphi_n^k) r_n^k - h(\varphi_0) r_0\right| \leqslant \left|z_n^k - z_0\right| \max_{|z| \leqslant 1} |z| = \rho_1$

то $\frac{1}{|Q'(z_n^k)|} < C_4 e^{-h(\varphi_n^k) r_n^k}$, $n \geqslant 2$, $z_n^k = r_n^k e^{i\varphi_n^k}$, $C_4 = const$.

Нарешті зазначимо, що всі нулі функції (6) є прості, а із (9) випливає, що функція (6) є цілою функцією експоненціального типу цілком регулярного росту. Індикаторною діаграмою функції (6) є круг $|z| \leqslant 1$, а асоційована з нею функція $\gamma(t)$ має своїми особливими точками прості полюси.

Таким чином із проведених міркувань випливає:

Теорема 1. *Функція (6) є цілою функцією експоненціального типу, для якої виконуються умови (9) і (10).*

Використовуючи міркування, проведені при доведенні теореми 3, можна побудувати цілу функцію експоненціального типу індикаторною діаграмою якої є довільна опукла обмежена область, і для якої мають місце оцінки (9) і (10).

Справді, якщо потрібно побудувати цілу функцію, для якої індикаторною діаграмою є, наприклад, еліпс: $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, $\varphi \in [0; 2\pi]$ то взявши на цьому еліпсі точки $c_n^k = a\cos\frac{2k\pi}{n} + b\sin\frac{2k\pi}{n}$, $n \in N$, $k = 1, ..., n$ побудуємо функцію

$$Q_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{c_{n+1}^k - c_n^k}\right) \qquad (11)$$

з нулями в точках $\mu_n^k = \frac{2\pi ni}{c_{n+1}^k - c_n^k}$. Міркуючи так само, як при доведенні теореми 3, одержимо

$$M_3 e^{h(\varphi)r} < |Q_1(z)| < M_4 e^{h(\varphi)r} \qquad (12)$$

$z \notin \tilde{K}_n$ - кружки з центрами в точках μ_n^k фіксованого радіусу $\rho > 0$, і

$$\left|Q_1'(\mu_n^k)\right| > \bar{C} e^{h(\varphi_n^k) r_n^k}, \qquad (13)$$
$$\bar{C} = const, \mu_n^k = r_n^k e^{i\varphi_n^k}, n \in N, k = 1, ..., n$$

В загальному випадку довільної опуклої обмеженої області D, межу якої задано рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a; b]$ візьмемо на цій межі точки $c_n^k = \varphi\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\psi\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ і будуємо функцію $Q_1(z)$ анадогічно до (11). З допомогою міркувань, аналогічних до тих, які проводилось при доведенні теореми 3 ([3, c. 57]), переконаємось, що має місце

Теорема 2. *Для того, щоб асоційована функція $\gamma(t)$ мала на межі опуклої області $\bar{D}$ своїми особливими точками полюси порядку $p \geqslant 1$, необхідно і достатньо, щоб відповідна їй ціла функція мала вигляд $f(z) = P(z) \cdot Q_1(z)$, де многочлен $P(z)$ - степеня n-1, $Q_1(z)$ - функція вигляду (11).*

2.Розглянемо ряд експонент

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\mu_k z}, z \in D \qquad (14)$$

в якому μ_k ($k \geqslant 1$) нулі цілої функції (11), коефіцієнти a_k обчислюються за формулами

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(t)\psi_k(t)dt, k = 1, 2, ... \qquad (15)$$

$\psi_k(t)$ ($k = 1, 2, ...$) - біортогональна система функцій до системи $\{e^{\mu_k z}\}_{k=1}^{\infty}$, C – довільний контур, який охоплює область $\bar{D}$ – індикаторну діаграму функції (11).

Якщо функція $F(z)$ аналітична в D і неперервна в $\bar{D}$, то коефіцієнти a_k ряду (14) будемо обчислювати за формулами

$$a_k = \lim_{r \to 1-0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} F(rt)\psi_k(t)dt, k \geqslant 1 \qquad (16)$$

де C_r – такий контур, щоб функція $F(rt)$ була аналітичною всередині C_r і на C_r. При $k \geqslant 1$ границі в правих частинах (16) існують, оскільки внаслідок (13) маємо, що ([1, с. 232])

$$|\psi_n(t)| < \frac{M_0}{|Q'(\mu_n^k)|}, t \in \partial\bar{D}, n \geqslant 1, M_0 = const \quad (17)$$

Згідно теореми 4.6.4 ([1, с. 296]) ряд (14), в якому $F(z)$ – довільна аналітична в D і неперервна на $\bar{D}$ функція, а коефіцієнти a_k обчислюються за (16) збігається до абсолютно в D.

Встановимо умови, при виконанні яких ряд (14) збігається абсолютно та рівномірно в $\bar{D}$.

Теорема 3. *Якщо функція аналітична в області D, неперервна в $\bar{D}$ разом з своїми похідними $F'(z)$ та $F''(z)$, і виконується умова*

$$\lim_{r\to 1-0} \int_{C_r} F(rt)\gamma(t)dt = 0 \quad (18)$$

то ряд (14), в якому – μ_k ($k \geqslant 1$) нулі цілої функції (11), коефіцієнти a_k ($k \geqslant 1$) обчислюються за формулами (16) збігається до абсолютно та рівномірно в $\bar{D}$.

Доведення. Враховуючи умову (17), маємо

$$\lim_{r\to 1-0} \left| \int_{C_r} F''(rt)\psi_n(t)dt \right| < \frac{V}{|Q'(z_n^k)|}, \quad (19)$$
$$V = \max_{z\in\bar{D}} |F''(z)|.$$

При виконанні умови (18) для коефіцієнтів ряду (14) отримуємо ([1, с. 320])

$$a_n^k = \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} F(rt)\psi_n^k(t)dt =$$
$$= \lim_{r\to 1-0} \frac{-1}{(\mu_n^k)^2 Q'(\mu_n^k)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} F'(rt)\gamma(t)dt$$
$$+ \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{(\mu_n^k)^2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} F''(rt)\psi_n(t)dt$$

Внаслідок умови (12) асоційована до $Q_1(z)$ функція $\gamma(t)$ має своїми особливими точками прості полюси, тому

$$\left| \int_{C_r} F'(rt)\gamma(t)dt \right| = O(1) \quad (20)$$

Із (19) і (20) отримуємо

$$\left|a_n^k\right| < \frac{\bar{C}_1}{|(\mu_n^k)^2|\,|Q(\mu_n^k)|}, \bar{C}_1 = const, n \geqslant 1, k = 1, ..., n$$

Оскільки $\left|e^{\mu_n^k z}\right| = e^{\left|\mu_n^k\right| h(\varphi_n^k)}$, то враховуючи (12) маємо

$$\left|a_n^k e^{\mu_n^k z}\right| \leqslant \frac{M}{\left|\mu_n^k\right|^2}, z \in \bar{D}, n \geqslant 1, k = 1, ..., n, M = const$$

Теорема доведена.

Бібліоґрафія

[1] Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* —- М.: Наука, 1976, — 534 с.

[2] Мельник Ю.И. О представлении регулярных функций рядами Дирихле в замкнутом круге // Мат. сб. — 1975. — **97**, № 4. — С. 493–502.

[3] Крутиголова Є.К. Про залежність між ростом цілої функції експоненціального типу і характером особливих точок і перетворення Бореля-Лапласа // Актуальні проблеми фізики, математики та інформатики. — Дрогобич. — 2009. — № 1. — С. 57–60.