УДК 517.584

Про переповнені системи з функцій Бесселя

Шавала О. В.

Shavala@ukr.net

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра матаналізу, вул. Стрийська 3, м. Дрогобич, 82100

Досліджено переповненість системи функцій Бесселя з від'ємним півцілим індесом, меншим за -1

Нехай $p \in (0;+\infty)$, $L_2((0;1);x^p dx)$ — простір вимірних функцій f, для яких $\int_0^1 t^p|f(t)|^2dt < +\infty$, зі скалярним добутком $\langle f_1; f_2\rangle = \int_0^1 t^p f_1(t)\overline{f_2(t)}dt$, нормою $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 t^p|f(t)|^2dt}$ і $[x]$ — ціла частина числа x. Відомо ([1, с.71]), що при $\nu > 1$ функція Бесселя першого роду $J_{-\nu}(z)$ порядку $-\nu$ має нескінченну кількість дійсних нулів і $2[\nu]$ попарно спряжених комплексних нулів. Якщо $[\nu]$ — непарне ціле число, то серед комплексних нулів є два чисто уявних (див. також [6], [2, с.532]). Нехай $\rho_j = \rho_{-\nu,j}$, $j \in \mathbb{N}$, — ті нулі функції $J_{-\nu}(z)$, для яких $\Im\rho_j > 0$, якщо ρ_j — комплексне число і $\rho_j > 0$, якщо ρ_j — дійсне число.

Питання про повноту функцій і систем функцій $J_{-\nu}$, де $\nu > 1$ — неціле число розглядались у працях [3–5,7–11]. Ми доводимо наступне твердження

Теорема. *Нехай $v_j(x) = \rho_j^{\nu}\sqrt{\pi x/2}J_{-\nu}(\rho_j x)$, де $\nu > 1$ — півціле число. Тоді система $\{v_j(x) : j \in \mathbb{N}\}$ є переповненою в просторі $L_2((0;1);x^{2\nu-1}dx)$.*

Для доведення цього твердження нам знадобиться наступний результат

Лема.[11] *Нехай z — довільне число. Тоді*

$$\int_0^1 \cos(zt)\frac{J_{-\nu}(\rho_j t)}{(\rho_j t)^{-\nu}}dt = (-1)^{m+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\rho_j^{1+\nu}\times$$
$$\times J_{-\nu+1}(\rho_j)\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m \frac{J_{-\nu}(z)}{(z^2-\rho_j^2)z^{-\nu}}, \qquad (1)$$

де $\nu > 1$ — півціле число, $m \in \mathbb{N}$ таке, що $-\nu+m = -1/2$, $(z^{-1}d/dz)^m$ — m разів застосована операція $z^{-1}d/dz$ (диференціювання з наступним множенням на $1/z$).

Доведення теореми. Досить показати, що система $\{v_j(x) : j \in \mathbb{N}\backslash\{1\}\}$ є повною в просторі $L_2((0;1);x^{2\nu-1}dx)$. Припустимо, що вона неповна. Тоді існує така функція $\varphi \in L_2((0;1);x^{1-2\nu}dx)$, що $\varphi \neq 0$ і

$$\int_0^1 \varphi(t)v_j(t)dt = 0, \quad j \in \mathbb{N}\backslash\{1\},$$

або

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \tilde{\varphi}(t)\frac{J_{-\nu}(\rho_j t)}{(\rho_j t)^{-\nu}}dt = 0,$$

де $\tilde{\varphi}(t) = t^{1/2-\nu}\varphi(t) \in L_2(0;1)$. Нехай

$$Q(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \tilde{\varphi}(t)\frac{J_{-\nu}(zt)}{(zt)^{-\nu}}dt. \qquad (2)$$

З [2, с.67] маємо

$$\sqrt{\pi/2}J_{-\nu}(zt)/(zt)^{-\nu} = \cos\left(zt + \frac{m\pi}{2}\right)\times$$
$$\times\sum_{r=0}^{[m/2]}\frac{(-1)^r(m+2r)!(zt)^{m-2r}}{(2r)!(m-2r)!2^{2r}}-$$
$$-\sin\left(zt+\frac{m\pi}{2}\right)\times$$
$$\times\sum_{r=0}^{[(m-1)/2]}\frac{(-1)^r(m+2r+1)!(zt)^{m-2r-1}}{(2r+1)!(m-2r-1)!2^{2r+1}},$$

де $-\nu = -m-1/2$, $m \in \mathbb{N}$. Таким чином,

$$Q(z) = \sum_{r=0}^{[m/2]}\frac{(-1)^r(m+2r)!z^{m-2r}}{(2r)!(m-2r)!2^{2r}}\times$$
$$\times\int_0^1 \tilde{\varphi}(t)t^{m-2r}\cos(zt+m\pi/2)dt-$$
$$-\sum_{r=0}^{[(m-1)/2]}\frac{(-1)^r(m+2r+1)!z^{m-2r-1}}{(2r+1)!(m-2r-1)!2^{2r+1}}\times$$
$$\times\int_0^1 \tilde{\varphi}(t)t^{m-2r-1}\sin(zt+m\pi/2)dt.$$

Тоді Q — парна ціла функція і $Q(\rho_j) = 0$, $j \in \mathbb{N}$. Будемо вважати, що c_i — деякі сталі. Згідно з нерівністю Коші-Буняковського маємо

$$\left|\int_0^1 \tilde{\varphi}(t)t^{m-2r}\cos(zt+m\pi/2)dt\right| \leqslant \frac{c_1 e^{|\Im z|}}{\sqrt{1+|\Im z|}},$$
$$r \in \{0;[m/2]\},$$
$$\left|\int_0^1 \tilde{\varphi}(t)t^{m-2r-1}\sin(zt+m\pi/2)dt\right| \leqslant \frac{c_1 e^{|\Im z|}}{\sqrt{1+|\Im z|}},$$
$$r \in \{0;[(m-1)/2]\},$$

де $m \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. Звідси

$$|Q(z)| \leqslant c_2\frac{e^{|\Im z|}}{\sqrt{1+|\Im z|}}(1+|z|)^m, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Нехай $L(z) := \sqrt{\pi/2}z^{\nu}J_{-\nu}(z) = \cos(z+m\pi/2)\sum_{r=0}^{[m/2]}((-1)^r(m+2r)!z^{m-2r})/((2r)!(m-2r)!2^{2r}) - \sin(z+m\pi/2)\sum_{r=0}^{[(m-1)/2]}((-1)^r(m+2r+1)!z^{m-2r-1})/((2r+1)!(m-2r-1)!2^{2r+1})$. Тоді існують промені $\arg z = \psi_k$, $k \in \{0;1;2;3\}$, $\psi_0 \in (0;\pi/2)$, $\psi_1 \in (\pi/2;\pi)$, $\psi_2 \in (\pi;3\pi/2)$, $\psi_3 \in (3\pi/2;2\pi)$, на яких

$$|L(z)| \geqslant c_3(1+|z|)^m\exp(|\Im z|).$$

Нехай $Q_0(z) = L(z)/(z^2 - \rho_1^2)$, $\Omega = Q/Q_0$. Тоді Ω є цілою парною функцією порядку $\tilde{\rho} \leqslant 1$. Крім цього,

$$|\Omega(z)| \leqslant c_4(1+|z|)^{3/2}, \quad \arg z = \psi_k, \quad k \in \{0;1;2;3\}.$$

Остання нерівність справедлива для всіх $z \in \mathbb{C}$. Справді, нехай $G_0 = \{z : \psi_3 < \arg z < \psi_0\}$, $G_1 = \{z : \psi_0 < \arg z < \psi_1\}$, $G_2 = \{z : \psi_1 < \arg z < \psi_2\}$, $G_3 = \{z : \psi_2 < \arg z < \psi_3\}$. Тоді візьмемо довільну голоморфну гілку функції $\sqrt{i^k + z}$ в G_k, $k \in \{0;1;2;3\}$ і розглянемо функцію $\tilde{\Omega}_k(z) = \Omega(z)/((i^k + z)\sqrt{i^k + z})$, голоморфну в області G_k. На межі області G_k функція $\tilde{\Omega}_k$ є обмеженою і має порядок $\tilde{\rho}_k \leqslant 1$ в G_k. Тому згідно з принципом Фрагмена і Ліндельофа, вона є обмеженою в G_k. Отже, $|\Omega(z)| \leqslant c_5(1 + |z|)^{3/2}$ для всіх $z \in \mathbb{C}$. Але, Ω — парна ціла функція. Тому Ω є сталою і $Q = cQ_0$.

Скористаємось рівністю [2, с. 56]

$$\frac{d}{dz}\frac{J_{-\nu}(z)}{z^{-\nu}} = -z^{\nu} J_{-\nu+1}(z),$$

отримаємо

$$\left(\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)^m \frac{J_{-\nu}(zx)}{(zx)^{-\nu}} = (-1)^m x^{2m} \frac{J_{-\nu+m}(zx)}{(zx)^{-\nu+m}}. \quad (3)$$

Оскільки $x^{1/2} J_{-1/2}(x) = \sqrt{2/\pi}\cos x$, то з (2) і (3) маємо

$$c\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m Q_0(z) = (-1)^m \int_0^1 \tilde{\varphi}(t) t^{2m} \cos(zt) dt.$$

З формули (1) отримаємо

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m \frac{L(z)}{(z^2 - \rho_1^2)} = \\ = \frac{(-1)^{m+1}\rho_1^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)} \int_0^1 \cos(zt) \frac{J_{-\nu}(\rho_1 t)}{(\rho_1 t)^{-\nu}} dt.$$

Тому $\tilde{\varphi}(t) = -c\rho_1^{-1-\nu} t^{-2m} (\rho_1 t)^{\nu} J_{-\nu}(\rho_1 t)/J_{-\nu+1}(\rho_1)$. Оскільки $\tilde{\varphi} \in L_2(0;1)$, то це можливо тільки у випадку, коли $c = 0$. Отже, $\tilde{\varphi} = 0$, що суперечить нашому припущенню. Теорему доведено.

Бібліоґрафія

[1] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* — М.: Наука, 1974. — Т.2. — 296 с.

[2] Ватсон Г.Н. *Теория Бесселевых функций.* — М.: ИЛ., 1949. — Ч.1. – 787 с.

[3] Винницький Б., Шавала О. Обмеженість розв'язків лінійного диференціального рівняння другого порядку і одна крайова задача для рівняння Бесселя // Математичні Студії. — 2008. — **30**, № 1. — С. 31–41.

[4] Шавала О.В. Деякі властивості лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з мероморфними коефіцієнтами: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Дрогобич. — 2008. — 127 с.

[5] Boas R., Pollard H. Complete sets of Bessel and Legendre functions // Annals of Math. — 1947. — **48**, № 2. — P. 366–384.

[6] Hurwitz A. Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Function // Math. Ann. — 1889. — **33**. — P. 246–266.

[7] Vynnyts'kyi B., Dilnyi V. On some analogues of Paley-Wiener theorem and one boundary value problem for Bessel operator // Int. Conf. on complex analysis in memory of A.A. Gol'dberg. — Lviv: 2010. — P. 63–64

[8] Vynnyts'kyi B., Khats' R. Some approximation properties of the systems of Bessel functions of index $-3/2$ // Математичні Студії. — 2010. — **34**, № 2. — С. 152–159.

[9] Vynnyts'kyi B., Shavala O. On completeness of the system $\{\cos(\rho_n x) + \rho_n x \sin(\rho_n x)\}$ and a boundary value problem for Bessel operator // International Conference Analysis and Topology. — Lviv: 2008. — P. 54–55.

[10] Vynnyts'kyi B., Shavala O. Some properties of boundary value problems generated by Bessel's equation // International conference dedicated to the 120th anniversary of S. Banach. — Lviv: 2012. — P. 70.

[11] Vynnyts'kyi B., Shavala O. Some properties of boundary value problems generated by Bessel's equation // Proceedings of the Conference dedicated to the 120th anniversary of S. Banach. (подано до друку)