**УДК 517.538.7**

# Про один критерій розв'язності кратної інтерполяційної задачі в класі голоморфних півплощині функцій нескінченного порядку

***Шаран В. Л.***

volsharan@ukr.net

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра математичного аналізу, вул. Стрийська 3, м. Дрогобич, 82100

В класі голоморфних у правій півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re}z > 0\}$ функцій $f \not\equiv 0$ для яких $(\exists c > 0)\,(\forall z \in \mathbb{C}_+) : |f(z)| \leqslant c\exp(\eta(c|z|))$, де $\eta : [0;+\infty) \to (0;+\infty)$ — додатна зростаюча неперервно диференційовна на $[0;+\infty)$ функція для якої $\lim\limits_{t\to+\infty}\eta(t) = +\infty$ і $(\exists c_0 > 0)\,(\forall t \geqslant 0) : \eta(t)\log\eta(t)/t\eta'(t) \leqslant c_0$, знайдено новий критерій розв'язності кратної інтерполяційної задачі $f^{(j-1)}(\lambda_n) = b_{n,j}$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1;\ldots;s_n\}$ в термінах аналогічних умові Карлесона.

Нехай $\eta : [0;+\infty) \to (0;+\infty)$ — зростаюча неперервно диференційовна на $[0;+\infty)$ функція для якої $\lim\limits_{t\to+\infty}\eta(t) = +\infty$ і

$$(\exists c_0)\,(\forall t \geqslant 0) : \frac{\eta(t)\log\eta(t)}{t\eta'(t)} \leqslant c_0, \qquad (1)$$

а $B_\eta$ — клас голоморфних у правій півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re}z > 0\}$ функцій $f \not\equiv 0$, для яких

$$(\exists c)\,(\forall z \in \mathbb{C}_+) : |f(z)| \leqslant c\exp(\eta(c|z|)). \qquad (2)$$

Із умови (1) випливає [1, с. 134], що

$$(\exists c_1)(\exists t_0)(\forall t \geqslant t_0) : \eta(t) \geqslant \exp(t^{c_1}), \qquad (3)$$

$$(\forall c_2)(\forall c_3 > 1)(\exists t_0)(\forall t \geqslant t_0) : c_2\eta(t) \leqslant \eta(c_3 t). \qquad (4)$$

Нехай $(\lambda_n)$ — послідовність різних комплексних чисел, $(s_n)$ — послідовність натуральних чисел. У [2] в класі $B_\eta$ отримано, в термінах властивостей функцій із класу $B_\eta$, критерій розв'язності кратної інтерполяційної задачі

$$f^{(j-1)}(\lambda_n) = b_{n,j}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad j \in \{1;\ldots;s_n\}, \qquad (5)$$

де $(b_{n,j})$ — послідовність комплексних чисел яка задовольняє умову

$$(\exists c_4) : \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\eta(c_4|\lambda_n|)} \log \max_{1\leqslant j\leqslant s_n} \frac{\rho_{\lambda_n}^{j-1}|b_{n,j}|}{(j-1)!} < +\infty, \qquad (6)$$

а $\rho_{\lambda_n} = \min\{1; \mathrm{Re}\lambda_n\}$. Тут ми отримали критерій розв'язності кратної інтерполяційної задачі (5) в класі $B_\eta$, в термінах, аналогічних умові Карлесона [3].

**Теорема 1.** *Для того щоб для кожної послідовності комплексних чисел $(b_{n,j})$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1;...;s_n\}$, яка задовольняє умову (6), існувала функція $f \in B_\eta$, яка розв'язує кратну інтерполяційну задачу (5), необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$\sum_{|\lambda_n|\leqslant 1} s_n \mathrm{Re}\lambda_n < +\infty, \qquad (7)$$

$$(\exists c_5) : \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{rS(r)}{\eta(c_5 r)} < +\infty, \qquad (8)$$

$$(\exists c_6) : \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{s_n}{\eta(c_6|\lambda_n|)} \log\frac{2\mathrm{Re}\lambda_n}{\rho_{\lambda_n}} < +\infty. \qquad (9)$$

$$(\exists c_7)\,(\forall n) : \prod_{\substack{i\neq n \\ |\lambda_i|\leqslant 2|\lambda_n|}} \left|\frac{\lambda_n - \lambda_i}{\lambda_n + \bar{\lambda}_i}\right|^{s_i} \geqslant \exp(-\eta(c_7|\lambda_n|)), \qquad (10)$$

*де*

$$S(r) = \sum_{1<|\lambda_n|\leqslant r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2}\right) \frac{s_n \mathrm{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}.$$

Зауважимо, що умова (8) рівносильна кожній із наступних умов

$$(\exists c_8)\,(\exists r_0)\,(\forall r \geqslant r_0) :\ S_0(r) \leqslant \frac{\eta(c_8 r)}{r}, \qquad (11)$$

$$(\exists c_9)\,(\exists r_0)\,(\forall r \geqslant r_0) :\ s(r) \leqslant \eta(c_9 r), \qquad (12)$$

де

$$S_0(r) = \sum_{1<|\lambda_n|\leqslant r} \frac{s_n \mathrm{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^2}, \quad s(r) = \sum_{1<|\lambda_n|\leqslant r} \frac{s_n \mathrm{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}.$$

**Доведення теореми 1.** Нехай для кожної послідовності комплексних чисел $(b_{n,j})$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1;...;s_n\}$, яка задовольняє умову (6), існує функція $f \in B_\eta$, яка розв'язує кратну інтерполяційну задачу (5). Тоді [2, с. 55] виконуються умови (7), (8) і для деякої сталої $c_{10}$

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\eta(c_{10}|\lambda_n|)} \log \frac{s_n!}{\rho_{\lambda_n}^{s_n}\left|F^{(s_n)}(\lambda_n)\right|} < +\infty, \qquad (13)$$

де

$$F(z) = \prod_{|\lambda_n|\leqslant 1} \left(\frac{z-\lambda_n}{z+\bar{\lambda}_n}\right)^{s_n} \cdot \prod_{|\lambda_n|>1} W_n(z), \qquad (14)$$

$$W_n(z) = \left(\frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\bar{\lambda}_n}\right)^{s_n}$$

$$\times\exp\left\{s_n\sum_{j=1}^{p_n}\frac{z^j}{j}\left(\frac{1}{\lambda_n^j}+\frac{(-1)^{j+1}}{\overline{\lambda}_n^j}\right)\right\},$$

$p_n=\left[\frac{1}{c_0}\log\eta\left(c_9\left|\lambda_n\right|\right)\right]$, $[\bullet]$ — ціла частина числа $\bullet$, а сталі $c_0$ і $c_9$ визначаються умовами (1) та (12) відповідно. Нехай

$$f_n\left(z\right)=F\left(z\right)\cdot\Phi_n^{-1}\left(z\right),$$

де

$$\Phi_n(z)=\prod_{\substack{i\neq n\\ |\lambda_i|\leqslant 2|z|}}\left(\frac{z-\lambda_i}{z+\overline{\lambda}_i}\right)^{s_i}.$$

Тоді

$$\frac{\left(2\mathrm{Re}\lambda_n\right)^{s_n}}{s_n!}\left|F^{(s_n)}\left(\lambda_n\right)\right|=\left|\Phi_n\left(\lambda_n\right)\right|\cdot\left|f_n\left(\lambda_n\right)\right|, \quad (15)$$

звідки

$$\left|\Phi_n\left(\lambda_n\right)\right|=\frac{\rho_{\lambda_n}^{s_n}}{s_n!}\left|F^{(s_n)}\left(\lambda_n\right)\right|\left(\frac{2\mathrm{Re}\lambda_n}{\rho_{\lambda_n}}\right)^{s_n}\cdot\left|f_n\left(\lambda_n\right)\right|^{-1}.$$

Якщо виконуються умови (7), (8) і (13), то [2, с. 56] виконується умова (9), а з останньої рівності отримуємо, що умова (10) виконується, якщо

$$\left(\exists c_{11}\right)\left(\forall n\right):\log\left|f_n\left(\lambda_n\right)\right|\leqslant\eta\left(c_{11}\left|\lambda_n\right|\right).$$

Із (15) отримуємо, що

$$\frac{\left(\rho_{\lambda_n}\right)^{s_n}}{s_n!}\left|F^{(s_n)}\left(\lambda_n\right)\right|=\left(\frac{\rho_{\lambda_n}}{2\mathrm{Re}\lambda_n}\right)^{s_n}\left|\Phi_n\left(\lambda_n\right)f_n\left(\lambda_n\right)\right|.$$

Якщо виконуються умови (9) і (10), то з останньої рівності отримуємо, що умова (13) виконується, якщо

$$\left(\exists c_{12}\right)\left(\forall n\right):\log\left|f_n\left(\lambda_n\right)\right|\geqslant-\eta\left(c_{12}\left|\lambda_n\right|\right).$$

Якщо виконуються умови (7), (8) і (13), то [2, с. 55] для кожної послідовності комплексних чисел $(b_{n,j})$, $n\in\mathbb{N}$, $j\in\{1;\ldots;s_n\}$, яка задовольняє умову (6), існує функція $f\in B_\eta$, яка розв'язує кратну інтерполяційну задачу (5).

Таким чином для завершення доведення достатньо показати, що

$$\left(\exists c_{13}\right)\left(\forall n\right):\ \left|\log\left|f_n\left(\lambda_n\right)\right|\right|\leqslant\eta\left(c_{13}\left|\lambda_n\right|\right). \quad (16)$$

Очевидно,

$$\left|f_n\left(\lambda_n\right)\right|=\left|\pi_1\left(\lambda_n\right)\right|\cdot\left|\pi_2\left(\lambda_n\right)\right|\cdot\left|\pi_3\left(\lambda_n\right)\right|,$$

де

$$\pi_1\left(\lambda_n\right)=\prod_{2|\lambda_n|<|\lambda_i|\leqslant 1}\left(\frac{\lambda_n-\lambda_i}{\lambda_n+\overline{\lambda}_i}\right)^{s_i},$$

$$\pi_3\left(\lambda_n\right)=\prod_{|\lambda_i|>2|\lambda_n|}W_i\left(\lambda_n\right),$$

$$\pi_2\left(\lambda_n\right)=\prod_{1<|\lambda_i|\leqslant 2|\lambda_n|}\exp\left\{s_i\sum_{j=1}^{p_i}\frac{\lambda_n^j}{j!}\left(\frac{1}{\lambda_i^j}+\frac{(-1)^{j+1}}{\overline{\lambda}_i^j}\right)\right\}.$$

Оскільки

$$\left|\exp\left\{s_i\sum_{j=1}^{p_i}\frac{\lambda_n^j}{j}\left(\frac{1}{\lambda_i^j}+\frac{(-1)^{j+1}}{\overline{\lambda}_i^j}\right)\right\}\right|$$

$$\leqslant\exp\left\{2s_i\sum_{j=1}^{p_i}\frac{\left|\lambda_n\right|^j\mathrm{Re}\lambda_i}{\left|\lambda_i\right|^{j+1}}\right\},$$

то

$$\left|\log\left|\pi_2\left(\lambda_n\right)\right|\right|$$

$$\leqslant\left|\log\prod_{1<|\lambda_i|\leqslant 2|\lambda_n|}\exp\left\{2s_i\sum_{j=1}^{p_i}\frac{\left|\lambda_n\right|^j\mathrm{Re}\lambda_i}{\left|\lambda_i\right|^{j+1}}\right\}\right|$$

$$=2\sum_{1<|\lambda_i|\leqslant 2|\lambda_n|}s_i\sum_{j=1}^{p_i}\frac{\left|\lambda_n\right|^j\mathrm{Re}\lambda_i}{\left|\lambda_i\right|^{j+1}}$$

$$\leqslant 2\sum_{1<|\lambda_i|\leqslant 2|\lambda_n|}\left(\frac{2\left|\lambda_n\right|}{\left|\lambda_i\right|}\right)^{p_i}\frac{s_i\mathrm{Re}\lambda_i}{\left|\lambda_i\right|}.$$

Окрім цього [4, с.35],

$$\left|\log\left|\pi_3\left(\lambda_n\right)\right|\right|\leqslant\left|\log\pi_3\left(\lambda_n\right)\right|\leqslant\sum_{|\lambda_i|>2|\lambda_n|}\left|\log W_n\left(\lambda_n\right)\right|$$

$$\leqslant 4\sum_{|\lambda_i|>2|\lambda_n|}\left(\frac{\left|\lambda_n\right|}{\left|\lambda_i\right|}\right)^{p_i+1}\frac{s_i\mathrm{Re}\lambda_i}{\left|\lambda_i\right|}.$$

Звідси, врахувавши, що $\left|\pi_1\left(\lambda_n\right)\right|\leqslant 1$, отримуємо

$$\left|\log\left|f_n\left(\lambda_n\right)\right|\right|\leqslant 2\sum_{1<|\lambda_i|\leqslant 2|\lambda_n|}\left(\frac{2\left|\lambda_n\right|}{\left|\lambda_i\right|}\right)^{p_i}\frac{s_i\mathrm{Re}\lambda_i}{\left|\lambda_i\right|}$$

$$+4\sum_{|\lambda_i|>2|\lambda_n|}\left(\frac{\left|\lambda_n\right|}{\left|\lambda_i\right|}\right)^{p_i+1}\frac{s_i\mathrm{Re}\lambda_i}{\left|\lambda_i\right|}$$

$$\leqslant 2\sum_{1<|\lambda_i|\leqslant 2|\lambda_n|}\left(\frac{2\left|\lambda_n\right|}{\left|\lambda_i\right|}\right)^{\frac{\log\eta\left(c_9|\lambda_i|\right)}{c_0}}\frac{s_i\mathrm{Re}\lambda_i}{\left|\lambda_i\right|}$$

$$+4\sum_{|\lambda_i|>2|\lambda_n|}\left(\frac{\left|\lambda_n\right|}{\left|\lambda_i\right|}\right)^{\frac{\log\eta\left(c_9|\lambda_i|\right)}{c_0}}\frac{s_i\mathrm{Re}\lambda_i}{\left|\lambda_i\right|}$$

$$\leqslant 4\sum_{|\lambda_i|>1}\left(\frac{2\left|\lambda_n\right|}{\left|\lambda_i\right|}\right)^{\frac{\log\eta\left(c_9|\lambda_i|\right)}{c_0}}\frac{s_i\mathrm{Re}\lambda_i}{\left|\lambda_i\right|}$$

$$\leqslant 4\sum_{|\lambda_i|>1}\left(\frac{2e^{2c_0}\left|\lambda_n\right|}{\left|\lambda_i\right|}\right)^{\frac{\log\eta\left(c_9|\lambda_i|\right)}{c_0}}\frac{s_i\mathrm{Re}\lambda_i}{\left|\lambda_i\right|\eta^2\left(c_9\left|\lambda_i\right|\right)}$$

$$\leqslant 4\int_1^{+\infty}\left(\frac{2e^{2c_0}\left|\lambda_n\right|}{t}\right)^{\frac{\log\eta\left(c_9 t\right)}{c_0}}\frac{ds(t)}{\eta^2\left(c_9 t\right)}$$

$$\leqslant 4\max_{t\geqslant 1}\left\{\left(\frac{2e^{2c_0}\left|\lambda_n\right|}{t}\right)^{\frac{\log\eta\left(c_9 t\right)}{c_0}}\right\}\int_1^{+\infty}\frac{ds(t)}{\eta^2\left(c_9 t\right)}. \quad (17)$$

Зауважимо, що для сталої $c_9$, визначеної умовою (12),

$$\int_1^{\infty} \frac{ds(t)}{\eta^2(c_9 t)} < +\infty. \qquad (18)$$

Справді, врахувавши (12), маємо

$$\int_1^{+\infty} \frac{ds(t)}{\eta^2(c_9 t)} = \frac{s(t)}{\eta^2(c_9 t)}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{2c_9\eta'(c_9 t)s(t)}{\eta^3(c_9 t)}dt$$

$$\leqslant c_{14} + 2c_9 \int_1^{+\infty} \frac{\eta'(c_9 t)}{\eta^2(c_9 t)}dt < +\infty.$$

Оскільки функція $\left(\frac{2e^{2c_0}|\lambda_n|}{t}\right)^{\frac{\log\eta(c_9 t)}{c_0}}$ є неперервною на $[1;+\infty)$ і прямує до нуля при $t \to +\infty$, то для кожного фіксованого $n \in \mathbb{N}$ знайдеться точка $t_n$ , в якій дана функція досягає свого максимуму. Крім цього, задана функція спадає на проміжку $\left[2e^{2c_0}|\lambda_n|;+\infty\right)$, і тому $t_n \leqslant 2e^{2c_0}|\lambda_n|$. Отже, якщо $t_n = 1$, то, врахувавши (3) отримуємо

$$\max_{t\geqslant 1}\left\{\left(\frac{2e^{2c_0}|\lambda_n|}{t}\right)^{\frac{\log\eta(c_9 t)}{c_0}}\right\}$$

$$= \left(2e^{2c_0}|\lambda_n|\right)^{c_{15}} \leqslant \eta\left(c_{16}|\lambda_n|\right).$$

Якщо ж $1 < t_n \leqslant 2e^{2c_0}|\lambda_n|$, то

$$\max_{t\geqslant 1}\left\{\left(\frac{2e^{2c_0}|\lambda_n|}{t}\right)^{\frac{\log\eta(c_9 t)}{c_0}}\right\}$$

$$= e^{\frac{1}{c_0}\log\eta(c_9 t_n)\log\left(2e^{2c_0}|\lambda_n|/t_n\right)}. \qquad (19)$$

Оскільки

$$\left(e^{\frac{1}{c_0}\log\eta(c_9 t)\log\left(2e^{2c_0}|\lambda_n|/t\right)}\right)'\Big|_{t=t_n} = 0$$

і

$$\left(e^{\frac{1}{c_0}\log\eta(c_9 t)\log\left(2e^{2c_0}|\lambda_n|/t\right)}\right)'$$

$$= \frac{1}{c_0}e^{\frac{1}{c_0}\log\eta(c_9 t)\log\left(2e^{2c_0}|\lambda_n|/t\right)}$$

$$\times\left(\frac{c_9\eta'(c_9 t)}{\eta(c_9 t)}\log\left(2e^{2c_0}|\lambda_n|/t\right) - \frac{1}{t}\log\eta(c_9 t)\right)$$

то, врахувавши (2), отримуємо

$$\log\frac{2e^{2c_0}|\lambda_n|}{t_n} = \frac{\eta(c_9 t_n)\log\eta(c_9 t_n)}{c_9 t_n\eta'(c_9 t_n)} \leqslant c_0.$$

Внаслідок цього із (19) одержуємо

$$\max_{t\geqslant 1}\left\{\left(\frac{2e^{2c_0}|\lambda_n|}{t}\right)^{\frac{\log\eta(c_9 t)}{c_0}}\right\} \leqslant e^{\frac{1}{c_0}c_0\log\eta(c_9 t_n)}$$

$$= \eta(c_9 t_n) \leqslant \eta\left(c_9 2e^{2c_0}|\lambda_n|\right) = \eta\left(c_{17}|\lambda_n|\right). \qquad (20)$$

Таким чином, із (17), врахувавши (18) – (20), отримуємо (16) і теорема доведена.

### Бібліоґрафія


[1] Шаран В.Л. Про інтерполяційні послідовності одного класу функцій, аналітичних в півплощині, який визначається швидко зростаючою мажорантою // Матем. студії. — 1998. — 10, № 2. — С. 133–146.

[2] Шаран В.Л. Кратна інтерполяційна задача в класі голоморфних у півплощині функцій нескінченного порядку // Актуальні проблеми фізики математики та інформатики. — 2011. — № 3. — С. 55–66.

[3] Carleson L. An interpolation problem for bounded analytic functions // Amer. J. Math. — 1958. — 80. — P. 921–930.

[4] Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. — М.: Наука, 1986. – 240 с.