

УДК 519.682

Розв'язування задач інженерної практики з допомогою ПК в середовищі інтегрованого багатофункціонального пакету MathCad

Іваник Є. Г., Сікора О. В., Лазурчак Л. В.

Львівський національний аграрний університет,

кафедра вищої математики, вул. В. еликого, м. Дубляни, 80381

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,

кафедра інформатики та обчислювальної математики, вул. Стрийська, 3, м. Дрогобич, 82100

Запропоновано підхід до побудови розв'язку задачі про деформацію мостової опори у формі зрізаного конуса під дією зовнішнього силового навантаження, який передбачає застосування аналітичного методу і наближеного — проєкційного методу Гальоркіна, що використовує як базисні функції поліноми і тригонометричні функції. Алгоритм реалізовано у середовищі пакету MathCAD. Виконані числові дослідження показали, що аналітичний метод та адаптовані наближені схеми на основі методу Гальоркіна адекватні в просторі поліноміальних та тригонометричних базисних функцій.

1. Вступ

ЕОМ довільного класа в першу чергу призначено для різного роду обчислень і лише згодом для інших задач автоматизації інтелектуальної праці.

На сьогодні обчислювальні задачі при допомозі ПК можна вирішувати на трьох основних рівнях: 1) в середовищі вибраної системи програмування; 2) на основі спеціальних обчислювальних процедур і програм; 3) при допомозі спеціальних пакетів програм.

На першому рівні користувач в середовищі деякої системи програмування (наприклад, BASIC, Turbo-C, Turbo-Pascal, FORTRAN та інш.) може запрограмувати і виконувати практично довільний обчислювальний алгоритм.

На другому рівні користувач може використовувати для проведення обчислень відповідні програми, розроблені в тій чи іншій системі програмування. Але даний підхід (називається методом стандартних програм) є досить вузьким.

До третього рівня відносяться розвинуті пакети програм, призначені для забезпечення розв'язку різного роду обчислювальних задач на ПК. Серед пакетів даної групи можна відзначити REDUCE, призначений для алгебраїчних символічних перетворень. На відміну від нього, пакет EUREKA фірми BORLAND International (США) служить для чисельного розв'язку широкого класу математичних і комерційних задач: системи лінійних і нелінійних рівнянь, інтерполяція, обчислення означених інтегралів і похідних, розв'язок диференціальних рівнянь, матричні операції, метод найменших квадратів, дискретне перетворення Фур'є. Пакет орієнтовано на роботу з IBM PC і потребує для свого функціонування не менше 384 К оперативної пам'яті. Пакет Turbo-EUREKA є розвитком цього пакета і додатково включає екранний редактор, розвинуту систему меню, електронний калькулятор, засоби для проведення різноманітних комерційних розрахунків, розв'язку мінімаксних задач, а також можливість виводу результатів на принтер і плоттер.

Однак, серед засобів третього рівня можна виділити інтегрований багатофункціональний пакет MathCAD фірми MathSoft Inc. Сама назва пакета є аббревіатура виразу Mathematical Computer Aided Design (математичне автоматизоване проєктування), що вказує на призначення пакета — розв'язок різного роду обчислювальних задач, що описуються засобами математики. Зараз розповсюджений термін "CAD" (Computer Aided Drafting) і розшифровується як автоматизоване проєктування креслень. Можливості пакета MathCAD дозволяють повно описати обчислювальні алгоритми в математичних позначеннях, виконати його і оформити результат. Пакет добре сполучає математичний опис проблеми, обчислювальні можливості і засоби відображення ПК. Інтегрований пакет MathCAD — це ще один крок до удосконалення в області комп'ютерної технології розв'язку обчислювальних задач і автоматизованого проєктування науково-технічних досліджень.

2. Постановка проблеми про визначення напружено-деформованого стану мостової опори аналітичними та числовими методами та аналіз досліджень і публікацій, в яких започатковане вирішення проблеми.

Забезпечення довговічності мостових конструкцій є актуальною задачею мостобудування. При проєктуванні сучасних мостобудівних конструкцій для розрахунку основних факторів їх функціонування: міцності, жорсткості, стійкості, використовуються як дані теоретичних розрахунків [1,2], так і результати відповідних експериментальних досліджень [3–5]. Вказані два підходи є взаємопов'язані, бо об'єм експериментальних робіт в значній мірі залежить від точності застосовуваних розрахункових методів. Тому розробка і впровадження в інженерну практику вдосконалених методів розрахунку елементів будівельних конструкцій (балки, плити, оболонки, мостові опори і т. ін.) є вельми актуальною задачею. Серед великої кількості відомих на сьогодні методів розрахунку найбільш точними є методи теорії пружності [6,7]. Але вна-

слідок того, що далеко не всі задачі теорії пружності і теорії оболонок мають точні замкнуті розв'язки, значну роль в розрахунковій практиці відіграють наближені методи, серед яких найбільш плідними є варіаційні методи [8–10] і методи функціонального аналізу [11–14]. Розвиток варіаційних методів, викладених в класичних працях Релея і Рітца, дістав своє застосування до задач розрахунку основних конструктивних елементів, що використовуються в будівельній галузі, завдяки роботам С.П. Тимошенко, І.Г. Бубнова, Б.Г. Гальоркіна, Л.С. Лейбензона, П.Ф. Папковича, В.З. Власова, Л.В. Канторовича та інш.

3. Постановка задачі

Розглянемо мостову опору у формі зрізаного конуса, осьовим перерізом якого є трапеція (рис. 1). Нижня і верхня основи конуса еліпсо-

їдальної форми мають площі відповідно F_1 і F_2 ; висота конуса рівна H . Прийнемо, що на мостову опору по її осі діє зосереджена сила P , прикладена до верхньої основи. Вказана конструкція — проміжна мостова опора (бик), яку роблять або ступінчатою, або з похилими гранями при ступінчатому фундаменті, наближається до бруса рівного опору, розрахунок якого наведено в роботах [15,16]. Поставимо задачу про визначення напружено-деформованого стану мостових конструкцій шляхом формулювання відповідної математичної моделі на основі диференціальних рівнянь деформації опори та розвитку підходу до їх розв'язування. Розвинемо аналітичні та чисельні методи розв'язку граничної задачі про деформацію мостової опори, порівняємо отримані результати та зробимо оцінку достовірності застосовуваних чисельних схем.

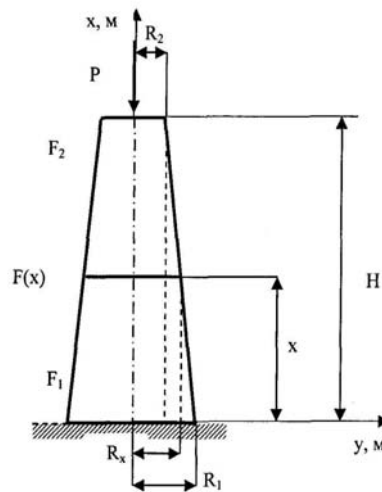


Рис. 1. Розрахункова схема мостової опори

4. Виклад основного матеріалу досліджень

Об'єктом дослідження є мостова опора у формі зрізаного конуса. Диференціальне рівняння деформації опори візьмемо у вигляді [7, 15]

$$\sigma(x) = E \varepsilon(x), \quad (1)$$

де E — модуль Юнга, $\varepsilon(x)$ — відносна лінійна деформація, $\sigma(x)$ — напруження, що виникає в перерізі мостової опори з координатою x , і визначається залежністю

$$\sigma(x) = P / F(x). \quad (2)$$

У виразі (2) $F(x)$ — площа перерізу на рівні x від мостової опори. Оскільки в конструкції виникає неоднорідний напружений стан, то деформація в довільному січенні визначається залежністю

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx}, \quad (3)$$

де $u(x)$ — поздовжнє зміщення осдової лінії мостової опори в розглядуваній точці з координатою x .

Для подальших розрахунків необхідно встановити функціональну залежність площі перерізу $F(x)$ зрізаного конуса від його висоти, що визначається координатою x , над основою з площею F_1 . На основі схеми, зображеної на рис. 1, з геометричних міркувань маємо залежність

$$\frac{R_1 - R_2}{H} = \frac{R_1 - R_x}{x}$$

з якої одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{R_x}{R_1} &= 1 - \frac{1 - \frac{R_1}{R_2}}{H} \cdot x, \\ \sqrt{\frac{F(x)}{F_1}} &= 1 - \frac{1 - \sqrt{\frac{F_2}{F_1}}}{H} \cdot x. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким чином функціональна залежність площі осьового перерізу $F(x)$ зрізаного конуса від його висоти x над основою з площею F_1 , виходячи з (4), матиме вид

$$F(x) = F_1 \left(1 - \frac{1 - \sqrt{\frac{F_2}{F_1}}}{H} \cdot x \right)^2. \quad (5)$$

Використовуючи вирази (2), (3), та підставивши значення $F(x)$, що дається виразом (5), у рівняння (1) будемо мати

$$E \frac{du}{dx} = \frac{P}{F_1} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1 \right) \cdot \frac{x}{H} \right]^2}. \quad (6)$$

Ввівши нову безрозмірну змінну $\eta = x/H$ ($0 \leq \eta \leq 1$) перепишемо рівняння (6) таким чином

$$\frac{E}{H} \cdot \frac{du}{d\eta} = \frac{P}{F_1} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1 \right) \cdot \eta \right]^2}. \quad (7)$$

Інтегрування отриманого диференціального рівняння (7) дає

$$u(\eta) = \frac{H}{E} \int_0^\eta \frac{P}{F_1} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1 \right) \cdot \eta_0 \right]^2} d\eta_0. \quad (8)$$

Обчисливши інтеграл в правій частині залежності (8) дістанемо

$$\begin{aligned} u(\eta) &= \frac{P H}{E F_1 \left(\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1 \right)} \times \\ &\times \left[1 - \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1 \right) \eta} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

На основі залежностей (1) і (9) запишемо аналітичні вирази для визначення переміщення точок мостової опори $u(x)$ та напруження $\sigma(x)$ в перерізі з координатою x :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{P H}{E F_1 \left(\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1 \right)} \times \\ &\times \left[1 - \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1 \right) \cdot \frac{x}{H}} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sigma(x) = \frac{P}{F_1} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\sqrt{\frac{F_2}{F_1}} - 1 \right) \cdot \frac{x}{H} \right]^2}. \quad (11)$$

Чисельний розрахунок зміщення точок мостової опори $u(x)$ та напруження $\sigma(x)$ на основі аналітичних залежностей (10), (11) виконаємо за таких вихідних даних: $H = 5$ м; $E = 1,764 \cdot 10^{10}$ н/м²; $F_1 = 5$ м²; $F_2 = 0,5$ м²; $P = 2 \cdot 10^6$ Н. Графіки розподілу величин $u(x)$ та $\sigma(x)$ наведено відповідно на рис. 2 і рис. 3.

З метою оцінки ефективності застосування числового проєкційного методу розв'язку диференціального рівняння деформації мостової опори (7) використаємо прямий варіаційний метод Гальоркіна на базі поліноміальних і тригонометричних функцій. Розрахункову схему розглядуваної конструкції відповідно до застосовуваного числового методу подано на рис. 4.

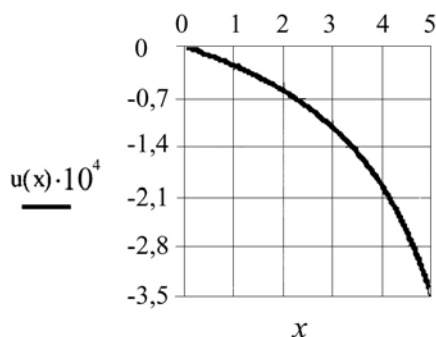
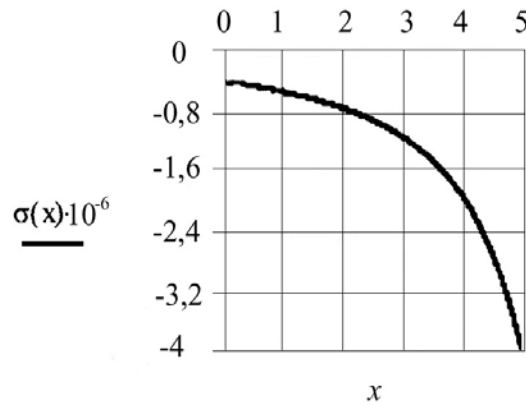
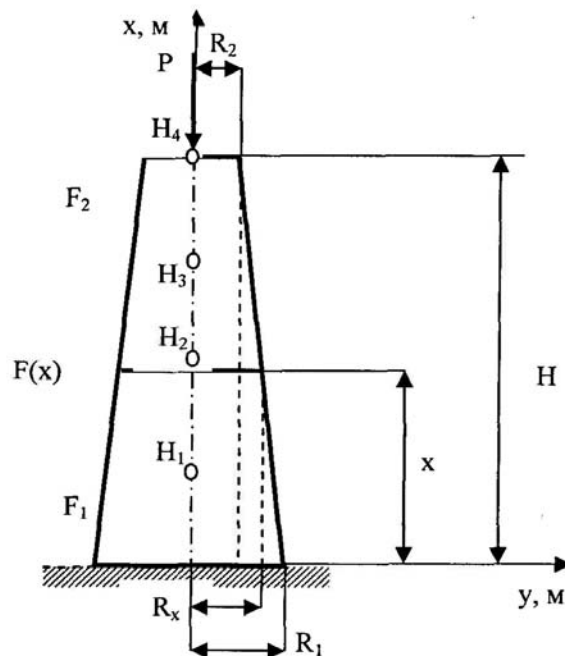


Рис. 2. Залежність поздовжніх зміщень $u(x)$ точок

Рис. 3. Розподіл напружень $\sigma(x)$ в перерізі з координатою x Рис. 4. Мостова опора – зрізаний конус з вузлами H_1, H_2, H_3, H_4

Таким чином трактуємо мостову опору як скінченний елемент з чотирма вузлами H_1, H_2, H_3, H_4 .

Розв'язок рівняння (7) шукаємо у вигляді полінома

$$u(\eta) = c_1 + c_2\eta + c_3\eta^2 + c_4\eta^3 + c_5\eta^4, \quad (12)$$

причому будемо вимагати виконання граничної умови $u(0) = 0$, а також умов у вузлових точках H_1, H_2, H_3, H_4 опори:

$$\begin{aligned} u(1/4) &= H_1, & u(1/2) &= H_2, \\ u(3/4) &= H_3, & u(1) &= H_4; \end{aligned} \quad (13)$$

в умовах (13) H_1, H_2, H_3, H_4 тут і далі вагові коефіцієнти для базисних функцій.

Константи c_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) у виразі для переміщення (12) знайдемо з розв'язку системи алгебраїчних рівнянь, сформованої на основі виконання граничної умови про відсутність переміщення основи опори та групи умов у вузлах (13). В результаті приходимо до системи рівнянь виду

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ \frac{1}{4}c_2 + \frac{1}{16}c_3 + \frac{1}{48}c_4 + \frac{1}{192}c_5 = H_1, \\ \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{4}c_3 + \frac{1}{8}c_4 + \frac{1}{16}c_5 = H_2, \\ \frac{3}{4}c_2 + \frac{9}{16}c_3 + \frac{27}{48}c_4 + \frac{81}{192}c_5 = H_3, \\ c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = H_4 \end{cases}$$

розв'язок якої є

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \quad c_2 = 16H_1 - 12H_2 + \frac{16}{3}H_3 - H_4, \\ c_3 &= -\frac{208}{3}H_1 + 76H_2 - \frac{112}{3}H_3 + \frac{22}{3}H_4, \\ c_4 &= -\frac{128}{3}H_1 + 64H_2 - \frac{128}{3}H_3 + \frac{32}{3}H_4. \end{aligned} \quad (14)$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти c_i , ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) (14) у формулу (12) та групуючи отриманий вираз відносно вагових коефіцієнтів H_j ($j = 1, 2, 3, 4$) дістаємо

$$\begin{aligned} u(\eta) &= \left(16\eta - \frac{208}{3}\eta^2 + 96\eta^3 - \frac{128}{3}\eta^4\right) \times \\ &\times H_1 + \left(-12\eta + 79\eta^2 - 128\eta^3 + 64\eta^4\right) H_2 + \\ &+ \left(16\eta - \frac{112}{3}\eta^2 + \frac{224}{3}\eta^3 - \frac{128}{3}\eta^4\right) H_3 + \\ &+ \left(-\eta + \frac{22}{3}\eta^2 - 16\eta^3 + \frac{32}{3}\eta^4\right) H_4. \end{aligned} \quad (15)$$

Маючи вираз (15) можна записати поліноміальні базисні функції методу Гальоркіна

$$\begin{aligned} e_1(\eta) &= 16\eta - \frac{208}{3}\eta^2 + 96\eta^3 - \frac{128}{3}\eta^4, \\ e_2(\eta) &= -12\eta + 79\eta^2 - 128\eta^3 + 64\eta^4, \\ e_3(\eta) &= \frac{16}{3}\eta - \frac{112}{3}\eta^2 + \frac{224}{3}\eta^3 - \frac{128}{3}\eta^4, \\ e_4(\eta) &= -\eta + \frac{22}{3}\eta^2 - 16\eta^3 + \frac{32}{3}\eta^4. \end{aligned} \quad (16)$$

Процедура застосування методу Гальоркіна, вважаючи при цьому, що базисні (16) і пробні функції співпадають, є такою: знаходимо відповідну матрицю Λ

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij} &= E \int_0^1 e_j(\eta) \frac{de_i(\eta)}{d\eta} d\eta, \\ \Lambda &= \frac{5H}{8E} \begin{pmatrix} \frac{5445}{4096} & -\frac{203}{256} & \frac{2229}{4096} & -\frac{33}{16} \\ \frac{533}{256} & \frac{16}{69} & \frac{256}{5445} & -1 \\ \frac{8661}{4096} & \frac{261}{256} & \frac{5445}{4096} & -\frac{33}{16} \\ \frac{33}{16} & 1 & \frac{33}{16} & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (17)$$

визначаємо вектор $\mathbf{b}$

$$\begin{aligned} b_j &= \int_0^1 e_j(\eta) \sigma(\eta) d\eta, \\ \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} -25,822 \cdot 10^4 \\ -20,105 \cdot 10^4 \\ -70,137 \cdot 10^4 \\ -29,429 \cdot 10^4 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (18)$$

на основі (18) з виразу

$$\Lambda_{ij} H_i = b_j, \quad (19)$$

та значень (17) дістаємо вагові коефіцієнти

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2,903 \cdot 10^{-5} \\ -8,302 \cdot 10^{-5} \\ -1,690 \cdot 10^{-4} \\ -3,542 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Підставляючи знайдені значення (20) у (15) отримуємо наближений розв'язок диференціального рівняння деформації опори

$$\begin{aligned} u(\eta) &= - \left(16\eta - \frac{208}{3}\eta^2 + 96\eta^3 - \frac{128}{3}\eta^4\right) \times \\ &\times 2,903 \cdot 10^{-5} \left(-12\eta + 79\eta^2 - 128\eta^3 + 64\eta^4\right) \times \\ &\times 8,302 \cdot 10^{-5} - \\ &- \left(16\eta - \frac{112}{3}\eta^2 + \frac{224}{3}\eta^3 - \frac{128}{3}\eta^4\right) \times \\ &\times 1,690 \cdot 10^{-4} - \\ &- \left(-\eta + \frac{22}{3}\eta^2 - 16\eta^3 + \frac{32}{3}\eta^4\right) \cdot 3,542 \cdot 10^{-4} = \\ &= -1,525 \cdot 10^{-5} \eta - 5,860 \cdot 10^{-4} \eta^2 + \\ &+ 8,906 \cdot 10^{-4} \eta^3 - 6,435 \cdot 10^{-4} \eta^4. \end{aligned} \quad (21)$$

Числовий аналіз на основі наближеної формули (21) свідчить, що має місце майже повне співпадання із значеннями переміщень, отриманих на основі точного аналітичного виразу (10).

Використавши проекційний метод шляхом розкладу на чотири базисні тригонометричні функції розв'язок рівняння (7) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} u(\eta) &= c_1 + c_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + c_3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + \\ &+ c_4 \cos(\pi\eta) + c_5 \sin(\pi\eta). \end{aligned} \quad (22)$$

Функція $u(\eta)$ (22) має задовольняти умові $u(0) = 0$, а також умовам (13) у вузлових точках. В результаті маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_4 = 0, \\ c_1 + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}c_2 + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}c_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}c_4 + \frac{\sqrt{2}}{2}c_5 = H_1, \\ c_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}c_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}c_3 + c_5 = H_2, \\ c_1 + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}c_2 + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}c_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}c_4 + \frac{\sqrt{2}}{2}c_5 = H_3, \\ c_2 + c_3 - c_4 = H_4 \end{cases}$$

з розв'язком

$$\begin{aligned} c_1 &= -34,960H_1 + 49,434H_2 - 34,960H_3 + 10,743H_4, \\ c_2 &= 31,948H_1 - 49,434H_2 + 34,972H_3 - 10,373H_4, \\ c_3 &= 34,972H_1 - 49,434H_2 + 31,948H_3 - 8,113H_4, \\ c_4 &= 3,0120H_1 - 6,0241H_2 - 3,0120H_3 + 1,6295H_4, \\ c_5 &= -14,473H_1 + 21,465H_2 - 14,473H_3 + 3,7407H_4. \end{aligned}$$

Підставивши отримані значення коефіцієнтів c_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) у вираз для переміщення (22), отримуємо

$$\begin{aligned}
u(\eta) = & \left[-34,960 + 31,948 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + \right. \\
& + 37,972 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 3,0120 \cos(\pi\eta) - \\
& - 14,473 \sin(\pi\eta) \left. \right] H_1 + \left[-34,960 + \right. \\
& + 49,434 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 49,434 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + \\
& + 3,0120 \cos(\pi\eta) - 14,473 \sin(\pi\eta) \left. \right] H_2 + \\
& + \left[-34,960 + 37,972 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - \right. \\
& - 31,948 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 3,0120 \cos(\pi\eta) - \\
& - 14,473 \sin(\pi\eta) \left. \right] H_3 + \left[10,743 - \right. \\
& - 12,373 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 8,1138 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + \\
& + 1,6295 \cos(\pi\eta) + 3,7407 \sin(\pi\eta) \left. \right]
\end{aligned} \quad (23)$$

На основі (23) формуємо тригонометричні базисні функції

$$\begin{aligned}
e_1(\eta) = & -34,960 + 31,948 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + \\
& + 37,972 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 3,0120 \cos(\pi\eta) - \\
& - 14,473 \sin(\pi\eta), e_2(\eta) = -34,960 + \\
& + 49,434 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 49,434 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + \\
& + 3,0120 \cos(\pi\eta) - 14,473 \sin(\pi\eta), \\
e_3(\eta) = & -34,960 + 37,972 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - \\
& - 31,948 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 3,0120 \cos(\pi\eta) - \\
& - 14,473 \sin(\pi\eta), e_4(\eta) = 10,743 - \\
& - 12,373 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 8,1138 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + \\
& + 1,6295 \cos(\pi\eta) + 3,7407 \sin(\pi\eta).
\end{aligned} \quad (24)$$

Виконавши відповідні кроки з реалізації методу Гальоркіна відповідно до залежностей (17)-(20) і використанням базисних функцій (24) знаходимо значення вагових коефіцієнтів:

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2,545 \cdot 10^{-5} \\ -8,108 \cdot 10^{-5} \\ -1,651 \cdot 10^{-4} \\ -3,514 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

Маючи значення деформацій вузлів H_j ($j = 1, 2, 3, 4$) можна записати вираз для визначення переміщення мостової опори на основі методу Гальоркіна з базисними тригонометричними функціями

$$\begin{aligned}
u(\eta) = & - \left[-34,960 + 31,948 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + \right. \\
& + 37,972 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 3,0120 \cos(\pi\eta) - \\
& - 14,473 \sin(\pi\eta) \left. \right] \cdot 2,545 \cdot 10^{-5} - \\
& - \left[-34,960 + 49,434 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - \right. \\
& - 49,434 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 3,0120 \cos(\pi\eta) - \\
& + 14,473 \sin(\pi\eta) \left. \right] \cdot 8,108 \cdot 10^{-5} - \\
& - \left[-34,960 + 37,972 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - \right. \\
& + 31,948 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 3,0120 \cos(\pi\eta) - \\
& - 14,473 \sin(\pi\eta) \left. \right] \cdot 1,651 \cdot 10^{-4} - \\
& - \left[10,743 - 12,373 \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - \right. \\
& - 8,1138 \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + 1,6295 \cos(\pi\eta) + \\
& + 3,7407 \sin(\pi\eta) \left. \right] \cdot 3,514 \cdot 10^{-4} = \\
= & -1,122 \cdot 10^{-3} + 1,274 \cdot 10^{-3} \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) + \\
& + 6,182 \cdot 10^{-4} \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - \\
& - 1,520 \cdot 10^{-4} \cos(\pi\eta) - 2,970 \cdot 10^{-4} \sin(\pi\eta).
\end{aligned} \quad (25)$$

На основі отриманих залежностей (25) побудовано розрахунковий алгоритм. Виконані числові дослідження показали, що аналітичний метод та адаптовані наближені схеми на основі методу Гальоркіна адекватні в просторі поліноміальних та тригонометричних базисних функцій. Зокрема, порівняння розв'язків, отриманих на основі вказаних підходів, в точці найбільшого переміщення показує, що відхилення від аналітичного розв'язку у випадку використання проєкційного методу з вибором вказаних базисних функцій становить 0,4% - 0,03%;

5. Висновки

Визначення напружень і зміщень мостової опори є важливим моментом при оцінці її міцності і можливості нормального функціонування в робочому режимі. Запропоновано ефективний підхід до побудови розв'язку задачі про деформацію мостової опори у формі зрізаного конуса під дією зовнішнього силового навантаження. Розвинутий підхід передбачає застосування аналітичного методу і наближеного — проєкційного методу Гальоркіна, який передбачає використання в якості базисних функцій поліноми і тригонометричні функції. Виконано порівняльний аналіз отриманих за вказаними методиками числових результатів, в результаті чого встановлено повну їх адекватність.

Бібліографія

- [1] Андрійків О.Є., Лучко Й.Й., Панько І.М. Розрахунок залишкового ресурсу відповідальних елементів мостів // Зб. наук. праць. Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій. — 2001. — № 3. — С. 19–22.
- [2] Ігнатишин М.І. *Аналіз чисельних методів розрахунку мостових конструкцій* // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій; за заг. ред. Лучка Й.Й. — Львів: Каменяр, 2005. — № 6. — С. 659–668.
- [3] Филоненко С.Ф. *Акустическая эмиссия: Измерение, контроль, диагностика*. — К.: Изд-во КМУГА, 1999. — 305 с.
- [4] Коваль П.М., Фаль А.Є., Стащук П.М. Дослідження технічного стану автодорожнього моста через Русанівську протоку в м. Києві // Зб. наук. праць. Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій. — 2006. — № 8. — С. 36–44.
- [5] Коваль П.М., Лучко Й.Й., Стащук П.М. Оцінка тріщиностійкості бетонів у мостових конструкціях за методом акустичної емісії // Зб. наук. праць. Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій. — 2001. — № 3. — С. 91–99.
- [6] Тимошенко С.П., Гудьер Д. *Теория упругости*. — М.: Наука, 1975. — 575 с.
- [7] Филин А.П. *Прикладная механика твердого деформируемого тела*. Т. 1 — М.: Наука, 1975. — 832 с.
- [8] Образцов И.Ф. *Вариационные методы расчета тонкостенных авиационных пространственных конструкций*. — М.: Машиностроение, 1966. — 392 с.
- [9] Ефимов А.В., Золотарев Ю.Г., Терпигорева В.М. *Математический анализ (специальные разделы). Ч. II. Применение некоторых методов математического и функционального анализа: учеб. Пособие для вузов* — М.: Высш. школа, 1980. — 295 с.
- [10] Мышкис А.Д. *Математика для вузов. Специальные курсы*. — М.: Наука, 1971. — 632 с.
- [11] Коллатц Ф. *Функциональный анализ и вычислительная математика*. — М.: Мир, 1969. — 444 с.
- [12] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа* — М.: Наука, 1968. — 544 с.
- [13] Хатсон В., Тим Д. *Приложения функционального анализа и теории операторов*. — М.: Мир, 1983. — 432 с.
- [14] Гавурин М.К. *Лекции по методам вычислений*. — М.: Наука, 1971. — 248 с.
- [15] Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. *Справочник по сопротивлению материалов* — 2-е изд., перераб. и доп. — К.: Наук. думка, 1988. — 736 с.