

Обмеженість розв'язків лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

Шавала О.В.

email: Shavala@ukr.net

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра математики, вул. Стрийська, 3, Дрогобич, Львівська обл., 82100

Знайдено умови на мероморфні в одиничному крузі U функції a_1 , a_0 і g , за яких рівняння $f'' + a_1 f' + a_0 f = g$ має розв'язок, голоморфний і обмежений в U .

Ключові слова: лінійні неоднорідні диференціальні рівняння, обмежені розв'язки.

У праці [1] вивчалось питання, за яких умов на мероморфну в крузі $U = \{z : |z| < 1\}$ функцію a_0 рівняння

$$f'' + a_0 f = 0 \quad (1)$$

має розв'язок, голоморфний і обмежений в U . Зокрема, в [1, с.33] доведено наступне твердження.

Теорема А. Нехай функція a_0 є мероморфною в крузі U і для деякого $t_0 \in [0; 1]$

$$\sup \left\{ \int_{t_0}^1 (1-t) |a_0(te^{i\varphi})| dt : \varphi \in [0; 2\pi] \right\} < +\infty.$$

Тоді, якщо голоморфна в крузі U функція f є в U розв'язком рівняння (1), то вона є обмеженою в U .

Метою даної роботи є узагальнення теореми А для неоднорідного рівняння

$$f'' + a_1 f' + a_0 f = g, \quad (2)$$

в якому a_1 , a_0 , g – функції, мероморфні в U . Для цього нам знадобляться наступні леми

Лема 1. ([2, с.86]) Нехай $c > 0$ і функції $v : [a; b] \rightarrow [0; +\infty)$ та $u : [a; b] \rightarrow [0; +\infty)$ є

такими, що $v \in L_1[a; b]$ і $uv \in L_1[a; b]$. Тоді, якщо для всіх $t \in [a; b]$

$$u(t) \leq c + \int_a^t u(s)v(s)ds,$$

то

$$u(t) \leq c \exp \left(\int_a^t v(s)ds \right), \quad t \in [a; b].$$

Лема 2. Якщо голоморфна в крузі U функція f є розв'язком в U рівняння (2), то функція $a_1 f' + a_0 f - g$ є голоморфною в U і

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) - \int_{z_0}^z (z - \zeta) (a_1(\zeta) f'(\zeta) + a_0(\zeta) f(\zeta) - g(\zeta)) d\zeta$$

для будь-яких $z \in U$ і $z_0 \in U$, де шлях інтегрування лежить в U .

Ця лема отримується безпосередньою перевіркою.

Теорема. Нехай функції a_1 , a_0 і g є мероморфними в крузі U і для деякого $t_0 \in [0; 1]$

$$\sup \left\{ \int_{t_0}^1 \left(|a_1(te^{i\varphi})| + (1-t) |a_1'(te^{i\varphi}) - a_0(te^{i\varphi})| \right) dt : \varphi \in [0; 2\pi] \right\} < +\infty \quad (3)$$

і

$$\sup \left\{ \int_{t_0}^1 (1-t) |g(te^{i\varphi})| dt : \varphi \in [0; 2\pi] \right\} < +\infty. \quad (4)$$

Тоді, якщо голоморфна в крузі U функція f є в U розв'язком рівняння (2), то вона є обмеженою в U .

Доведення. Візьмемо в лемі 2 $z_0 = 0$. Згідно з умовами (3) і (4) всі полюси функцій a_1 , a_0 і g лежать в крузі $\tilde{U} = \{z : |z| < t_0\}$. Нехай $z = re^{i\varphi}$, $s = t_0 e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $0 \leq t_0 < r < 1$. Тоді, подібно, як у [1, с.33]

$$\begin{aligned} f(z) &= f(0) + f'(0)z - \\ &- \int_0^s (z-\zeta)(a_1(\zeta)f'(\zeta) + a_0(\zeta)f(\zeta) - g(\zeta))d\zeta - \\ &- \int_s^z (z-\zeta)(a_1(\zeta)f'(\zeta) + a_0(\zeta)f(\zeta) - g(\zeta))d\zeta. \end{aligned}$$

Далі, аналогічно як у [3, с. 237], [4, с. 76], скористаємось рівністю

$$\begin{aligned} &\int_s^z (z-\zeta)a_1(\zeta)f'(\zeta)d\zeta = \\ &= \int_s^z ((z-\zeta)a_1(\zeta)f(\zeta))'_\zeta d\zeta - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-\int_s^z ((z-\zeta)a_1(\zeta))'_\zeta f(\zeta)d\zeta = \\ &= -(z-s)a_1(s)f(s) - \\ &-\int_s^z (-a_1(\zeta) + (z-\zeta)a'_1(\zeta))f(\zeta)d\zeta. \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} f(z) &= f(0) + f'(0)z - \\ &- \int_0^s (z-\zeta)(a_1(\zeta)f'(\zeta) + a_0(\zeta)f(\zeta) - g(\zeta))d\zeta + \\ &+ (z-s)a_1(s)f(s) + \int_s^z (z-\zeta)g(\zeta)d\zeta + \\ &+ \int_s^z (-a_1(\zeta) + (z-\zeta)(a'_1(\zeta) - a_0(\zeta)))f(\zeta)d\zeta \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} |f(re^{i\varphi})| &\leq |f(0)| + |f'(0)|r + |re^{i\varphi} - t_0 e^{i\varphi}| |a_1(t_0 e^{i\varphi})| |f(t_0 e^{i\varphi})| + \\ &+ \int_0^{t_0} |re^{i\varphi} - te^{i\varphi}| |a_1(te^{i\varphi})f'(te^{i\varphi}) + a_0(te^{i\varphi})f(te^{i\varphi}) - g(te^{i\varphi})| dt + \int_{t_0}^r |re^{i\varphi} - te^{i\varphi}| |g(te^{i\varphi})| dt + \\ &+ \int_{t_0}^r (|a_1(te^{i\varphi})| + |re^{i\varphi} - te^{i\varphi}| |a'_1(te^{i\varphi}) - a_0(te^{i\varphi})|) |f(te^{i\varphi})| dt \leq \\ &\leq c + \int_{t_0}^r (|a_1(te^{i\varphi})| + |re^{i\varphi} - te^{i\varphi}| |a'_1(te^{i\varphi}) - a_0(te^{i\varphi})|) |f(te^{i\varphi})| dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{де } c &= |f(0)| + |f'(0)|r + \sup \left\{ (1-t_0) |a_1(t_0 e^{i\varphi})| |f(t_0 e^{i\varphi})| + \right. \\ &\left. + \int_0^{t_0} (1-t) |a_1(te^{i\varphi})f'(te^{i\varphi}) + a_0(te^{i\varphi})f(te^{i\varphi}) - g(te^{i\varphi})| dt + \int_{t_0}^1 (1-t) |g(te^{i\varphi})| dt : \varphi \in [0; 2\pi] \right\}. \end{aligned}$$

Оскільки всі полюси функцій a_1 , a_0 і g лежать в крузі $\tilde{U} = \{z : |z| < t_0\}$, функція

$a_1 f' + a_0 f - g$ є голоморфною в U , то, враховуючи (4), отримуємо, що $c < +\infty$. Тому на підставі леми 1 маємо

$$|f(re^{i\varphi})| \leq c \exp \left(\int_{t_0}^r (|a_1(te^{i\varphi})| + |re^{i\varphi} - te^{i\varphi}| |a'_1(te^{i\varphi}) - a_0(te^{i\varphi})|) dt \right).$$

Звідси та з умови (3) отримуємо потрібне твердження.

Оцінки для $|f(re^{i\varphi})|$ за умови, що функції a_1, a_0 і g є голоморфними в U отримано у [5].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Винницький Б. В. Обмеженість розв'язків лінійного диференціального рівняння другого порядку і одна крайова задача для рівняння Бесселя / Б. В. Винницький, О. В. Шавала // Математичні Студії. – 2008. – Т.30, №1. – С.31–41.
[2] Laine I. Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations / I. Laine – Berlin:

Walter de Gruyter, 1993. – 341p.

- [3] Heittokangas J. Growth estimates for solutions of linear complex differential equations / J. Heittokangas, R. Korhonen, J. Rättyä // Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. – 2004. – V.29. – P.233–246.
[4] Шавала О. В. Деякі властивості лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з мероморфними коефіцієнтами: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Дрогобич. – 2008. – 127 с.
[5] Heittokangas J. Growth estimates for solutions of nonhomogeneous linear complex differential equations / J. Heittokangas, R. Korhonen, J. Rättyä // Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. – 2009. – V.34. – P.145–156.