

22.161.67

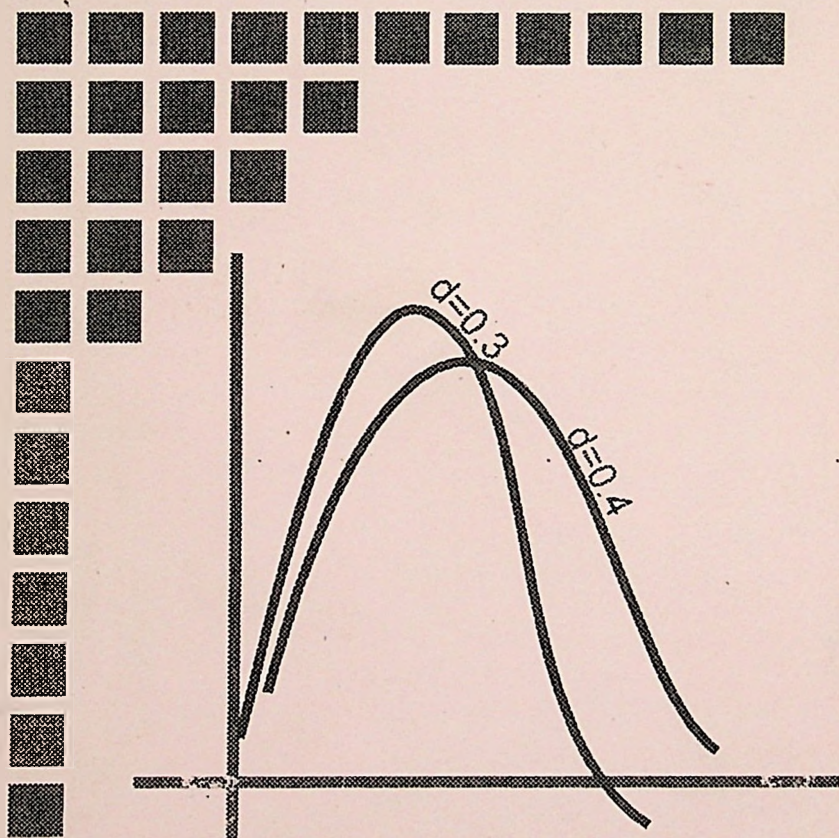
Г 17

ГАЛЬ М.М., ГАЛЬ Ю.М.

ІНТЕГРО - РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ

2

ЧАСТИНА



ДРОГОВИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМ. І. ФРАНКА

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИКИ ВИКЛАДАННЯ
МАТЕМАТИКИ

ГАЛЬ М.М., ГАЛЬ Ю.М.

ІНТЕГРО-РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ

(ЧАСТИНА ДРУГА)

Бібліотека ДДПУ
ім. І. Франка



0642372

282

ДРОГОВИЧ – 2000

УДК 517/083.131/

Існуючі навчальні плани не передбачають читання курсу "Інтегро-різницеві рівняння" в педагогічних інститутах та університетах України. Теорія таких рівнянь широко використовується в науково-дослідній роботі і ввійшла в число математичних дисциплін, які вивчають за рахунок часу, відведеного на спецкурси та спецсемінари. Даний навчальний посібник присвячений застосуванню методу осереднення функціональних поправок до наближеного розв'язування інтегро-різнице-вих рівнянь та дослідженню впливу випадкових збурень на роботу дискретних та неперервних оптимізаторів пропорційного типу.

Розрахований на наукових співробітників, аспірантів, інженерів і студентів педагогічних університетів. Може бути використаний при підготовці магістрів.

В кінці роботи наведений досить повний список літератури з даної тематики.

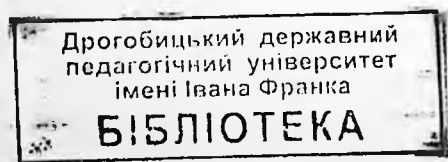
Нумерація формул в кожному розділі починається з початку (на-приклад, 16.2 — формула 16 параграфу 2 відповідного розділу).

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор
Скасків О.Б. (Львівський національний університет
ім. І.Франка)

доктор фізико-математичних наук, професор
Винницький Б.В. (Дрогобицький державний
педагогічний університет ім. І.Франка)

Затверджено до друку Вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету ім. І.Франка від 23.03.2000, протокол №3.

Галь М.М., Галь Ю.М. Інтегро-різницеві рівняння
(частина друга). Дрогобич, 2000 р., стор. 136.



© Галь М.М.

© Галь Ю.М.

З М І С Т

1. Вступ.
2. Розділ 1. Наближене розв'язування лінійних інтегро-різницевих рівнянь. Ст. 25.
 - 2.1. Достатні умови збіжності методу осереднення функціональних поправок в просторі L^2 . Ст. 25.
 - 2.2. Оцінки похибки n – го наближення. Ст. 34.
 - 2.3. Наближене розв'язування системи лінійних інтегро-різницевих рівнянь в просторі L^2 . Ст.37.
 - 2.4. Побудова алгоритмів для наближеного розв'язування інтегро-різницевих рівнянь в просторі L^p . Ст.45.
 - 2.5. Доведення збіжності та оцінки похибки. Ст.50.
 - 2.6. Приклади. Ст.56.
3. Розділ 2. Наближене розв'язування нелінійних інтегро-різницевих рівнянь. Ст. 59.
 - 3.1. Достатні умови збіжності методу осереднення функціональних поправок у випадку рівняння типу Гаммерштейна. Ст.59.
 - 3.2. Оцінка похибки n – го наближення. Ст.66.
 - 3.3. Наближене розв'язування системи нелінійних інтегро-різницевих рівнянь. Ст.68.
 - 3.4. Застосування основного варіанту методу Ю.Д. Соколова до наближеного розв'язування одного класу інтегро-різницевих рівнянь. Ст.76.
 - 3.5. Алгоритм, який враховує специфіку відхилення аргументу. Ст.80.
 - 3.6. Наближене розв'язування одного класу інтегро-різницевих рівнянь в просторі C . Ст.84.
 - 3.7. Приклади. Ст.90.
4. Розділ 3. Дослідження випадкових збурень на роботу дискретних і неперервних оптимізаторів пропорційного типу. Ст.93.
 - 4.1. Постановка задачі. Ст.93.
 - 4.2. Виведення різницєвого рівняння відносно похибки e_n для імпульсної екстремальної системи звичайного типу. Ст.95.

4.3. Виведення різницевого рівняння для імпульсної екстремальної системи з двома спробними кроками. Ст.98.

4.4. Виведення нелінійного інтегро-різницевого рівняння відносно спектральної густини похибки для імпульсної екстремальної системи з двома спробними кроками. Ст.101.

4.5. Достатні умови обмеженості дисперсії похибки пропорційних імпульсних систем екстремального керування при дії випадкових збурень. Ст.103.

4.6. Приклади. Ст.110.

4.7. Додаток. Ст.118.

5. Література. Ст.121.

Вступ.

Під інтегро-різницеви́ми рівняннями будемо розуміти інтегральні рівняння, в які невідома функція входить при різних значеннях аргументу.

До рівнянь такого типу безпосередньо приводять задачі автоматичного керування і теорії автоколиливних систем, задачі теорії ймовірностей, зв'язані з "післядією", різні економічні та біофізичні проблеми.

Наприклад, при дослідженні систем керування з запізненням [9] для перехідного процесу отримано таке інтегро-різнице́ве рівняння

$$\varphi_{\text{вих}}(t) = \varphi_0(t - \theta_1) - \int_0^t \varphi_{\text{вих}}(t - \tau) p_k(\tau - \theta_2) k \tau \, d\tau.$$

Розглядаючи імпульсну екстремальну систему з модуляцією різницевого типу, А.А.Тунік [99] отримав інтегро-різнице́ве рівняння відносно спектральної густини похибки системи

$$G_{\Pi}^*(\bar{\omega}) = G_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) - \frac{a_n^2}{2\pi} |W_E(j\bar{\omega})|^2 \int_{-\pi}^{\pi} G_{\Pi}^*(\bar{\Omega}) G_{\Pi}^*(\bar{\omega} - \bar{\Omega} + \pi) k \bar{\Omega} \, d\bar{\Omega}.$$

Інтегро-різнице́ві рівняння є цікавими ще й тому, що до їх розв'язання зводяться задачі, які описуються за допомогою диференціально-різнице́вих рівнянь, що виникли до початку 18 століття. Ще в роботі І. Бернуллі [8] в 1728 році і трохи пізніше в роботі Л.Ейлера [113] у зв'язку з геометричною задачею про відшукування загального виду лінії, конгруентної своїй еволюті, зустрічаються диференціально-різнице́ві рівняння. В подальшому вивчалися найпростіші класи таких рівнянь. І тільки в кінці 19 і на початку 20 століття зроблено спроби більш менш строго систематизувати вивчення диференціально-різнице́вих рівнянь.

В роботі Е.Шмідта [112] детально вивчено лінійне диференціально-різнице́ве рівняння із сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{q_{n-1}} a_{n-1,k} y^{(n-1)}(x - \Delta_{n-1,k}) + \sum_{k=1}^{q_{n-2}} a_{n-2,k} y^{(n-2)}(x - \Delta_{n-2,k}) + \dots + \sum_{k=1}^{q_0} a_{0,k} y(x - \Delta_{0,k}) = f(x), \quad (1)$$

де коефіцієнти $a_{i,k}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$)- задані дійсні або комплексні числа, а відхилення $\Delta_{i,k}$ - дійсні константи. Вважається, що розв'язок існує на всій дійсній осі.

Одностороннім розв'язком рівняння (1) називається функція $y(x)$, яка на півосі $x \geq x_0$ диференційовна принаймні n раз і задовольняє диференціально-різницеве рівняння (1) (в точці x_0 слід розуміти односторонню похідну). Двохсторонній розв'язок має таку властивість на всій дійсній осі.

Основний результат Е.Шмідта для рівняння (1) полягає в тому, що двухсторонній розв'язок рівняння (1) зростає разом зі своїми похідними до n -го порядку включно не швидше, ніж скінченний степінь x і визначається з точністю до лінійної комбінації $\sum_{\gamma,j} C_{\gamma,j} \varphi_{\gamma,j}(x)$,

де $\varphi_{\gamma,j}(x) = x^{\gamma} e^{i s_j x}$, $\gamma = 0, 1, \dots, \nu_j - 1$; s_j - нулі характеристичної функції

$$A(s) = (is)^n + \sum_{k=1}^{q_{n-1}} a_{n-1,k} (is)^{n-1} e^{-is\Delta_{n-1,k}} + \sum_{k=1}^{q_{n-2}} a_{n-2,k} (is)^{n-2} e^{-is\Delta_{n-2,k}} + \dots + \sum_{k=1}^{q_0} a_{0,k} e^{-is\Delta_{0,k}}, \quad (2)$$

ν_j -кратність нуля s_j , якщо $f(x) = 0(x^{\alpha}) \alpha = const$.

Розв'язок зображається у вигляді комплексного інтеграла. Характерно, що припущення відносно $\Delta_{i,k} \in \mathbb{R}$ і $\Delta_{i,k} > 0$ не є обов'язковим. Для доведення збіжності ряду Фур'є при вивченні рівняння

$$y'(x) = ay(x-1)$$

О. Полосухіна [80] досліджувала корені характеристичної функції

$$A(s) = s - ae^{-s}.$$

Це дало можливість оцінити відповідні лишки.

В цій же роботі досліджується рівняння

$$y'(x) = a(x)y(\alpha(x)) + b(x) \quad (a \leq x \leq b, a \leq \alpha(x) \leq b).$$

а також аналогічні рівняння вищих порядків шляхом зведення їх до інтегральних рівнянь і застосування теорії Фредгольма. При відповідних умовах доводиться існування і єдиність розв'язку, якщо $\alpha(x) \leq x$.

Як відзначено в роботі [71], починаючи приблизно з 1934 року різко збільшується кількість застосувань диференціально-різницевих рівнянь до вивчення найрізноманітніших питань теорії автоматичного керування, теорії ймовірностей і деяких інших теорій [15,107,111].

Ряд важливих результатів, що стосуються дослідження нулів трансцендентної функції (2), яка виникає при розв'язуванні рівняння (1) методом Ейлера, отримано в роботі [82].

В даний час дослідженню та застосуванню диференціально-різницевих рівнянь присвячено досить багато літератури. Відзначимо фундаментальну роботу А.Д. Мишкіса [73], присвячену якісній теорії лінійних диференціальних рівнянь першого і другого порядків з запізнюючим аргументом, монографію Е.Пінні [78], в якій основна увага приділяється лінійним диференціально-різницеvim рівнянням із сталими коефіцієнтами та досліджуються рівняння з малими нелінійностями, а також монографії Р.Беллмана і К.Кука, Л.Е.Ельсгольца [115,116] і С.Б.Норкіна [75].

Обширна і досить повна бібліографія робіт, присвячених теорії диференціально-різницевих рівнянь та їх застосуванню, є в оглядових статтях [71,72,32,33,106].

Однак, як диференціально-різницеві, так і інтегро-різницеві рівняння в замкнутій формі розв'язуються тільки в виключних випадках. Тому все більшого і більшого значення набуває розробка наближених методів розв'язування таких рівнянь.

Наближеним методам розв'язування диференціально-різницевих рівнянь присвячена порівняно невелика кількість робіт, в той час як для диференціальних і інтегральних рівнянь ці питання детально викладені в монографіях І.С.Березіна і Н.П.Жидкова [7], П.С.Бондаренка [11], Ю.В.Воробйова [16], Л.В.Канторовича і В.І.Крилова [35], Л.Коллатца [43].

М.Кравчука [45], А.Н.Крилова [49], Н.М.Крилова [50], Ш.Е.Мікеладзе [63], В.Е.Мілна [64], С.Г.Міхліна і Х.Л.Смолицького [66], Ю.Д.Соколова [92] та інших авторів.

З наближених методів розв'язування диференціально-різницьких рівнянь найбільше розповсюдження отримали: метод Ейлера і параболічні методи, метод розвинення за степенями запізнення, проєкційні методи, ітеративні методи; методи, зв'язані з перетворенням Лапласа, асимптотичні методи і графічні методи. Зупинимось на деяких проєкційних та ітеративних методах.

До проєкційних методів відносяться методи Рітца, Б.Г.Гальоркіна, найменших квадратів, моментів, а також деякі їх модифікації.

Метод Б.Г.Гальоркіна, який є більш загальним, ніж метод Рітца, і який широко використовується при розв'язуванні різних задач математичної фізики і техніки, був вперше запропонований в 1915р. академіком Б.Г.Гальоркіним [17] для наближеного розв'язування диференціальних рівнянь. Довгий час він застосовувався для розв'язування різних прикладних задач без строгого математичного обґрунтування. Збіжність методу Б.Г.Гальоркіна вперше була доведена Г.І.Петровим [76] при розв'язанні задачі про стійкість руху в'язкої рідини, але загальні результати з обґрунтування методу Б.Г.Гальоркіна вперше були отримані в 1942 році академіком М.В.Келдишем [38]. Пізніше цей метод досліджувався і узагальнювався в роботах Л.В.Канторовича [34], С.Г.Міхліна [65], М.А.Красносельського [46, 47], Н.І.Польського [81] та інших авторів.

Проекційні методи застосовувалися для розв'язування різних задач, що описуються диференціально-різницькими рівняннями. В роботі С.С.Гайсаряна [29] результати М.В.Келдиша [38] переносяться на випадок лінійних диференціально-різницькими рівнянь 2-го порядку. В.Б.Колмановський [44] обґрунтував застосування методу Б.Г.Гальоркіна до лінійних диференціально-різницьких рівнянь з відхиляючим аргументом.

К.Б.Бараталісв [2] застосував метод Б.Г.Гальоркіна для наближеного розв'язування крайової задачі

$$L(x) = \frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{dx}{dt} \right) - \lambda \left\{ \frac{d}{dt} [q_0(t)x(t)] + r_0(t)x(t) + \int_0^1 k_0(t,s)x(s)ds + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^v \left[\frac{d}{dt} (q_j(t)x(t-\tau_j(t)) + r_j(t)x(t-\tau_j(t))) + \int_0^1 k_j(t,s)x(s-\tau_j(s))ds \right] \right\} = f(t) \quad (3)$$

$$\begin{cases} x(0) = x(1) = 0, \\ x(t) = 0, t \leq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Вважається, що функції $p(t) > 0, q_0(t), q_j(t), \tau_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, v$) при $t \in [0, 1]$ неперервно диференційовні; $f(t), r_0(t), k_0(t, s), r_j(t), k_j(t, s)$ ($j = 1, \dots, v$)-неперервні функції; λ - взагалі кажучи, комплексний параметр, такий, що задача (3),(4) має єдиний розв'язок. При цих умовах доведена збіжність методу Б.Г.Гальоркіна. В цій же роботі доведено збіжність методу найменших квадратів при застосуванні його до наближеного розв'язування крайової задачі (3),(4), якщо $q_j(t) = 0; j = 1, 2, \dots, v$.

В.П.Рубаник і В.С.Шкільнюк [84] застосували метод квадратів для лінеаризації квазілінійного рівняння з запізнюючим аргументом другого порядку.

В роботі С.Б.Норкіна [75] вивчаються умови застосування методу моментів для знаходження власних значень і власних функцій різних крайових задач з запізненням, зокрема розглядається крайова задача для рівняння

$$y''(x) + \lambda y(x) + M(x)y(x - \Delta(x)) = 0 \quad (5)$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} y(0) = y(\pi) = 0, \\ y(x - \Delta(x)) = 0 \end{cases} \quad \text{при } x - \Delta(x) < 0, \quad (6)$$

де функції $M(x)$ і $\Delta(x) \geq 0$ неперервні на відрізку $[0, \pi]$ λ - комплексний параметр. Ця задача зводиться до інтегро-різницевого рівняння

$$\frac{1}{\lambda} y(x) = \int_0^{\pi} K(x, \xi) y(\xi) d\xi + \int_0^{\pi} K(x, \xi) M(\xi) y(\xi - \Delta(\xi)) d\xi,$$

$$K(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\xi(\pi - x)}{\pi}, & 0 \leq \xi \leq x, \\ \frac{x(\pi - \xi)}{\pi}, & x < \xi \leq \pi. \end{cases}$$

Виявляється, що якщо функція $\Delta(x)$ кусково-диференційовна і

$$\inf_{[0, \pi]} (1 - \Delta'(x)) = m > 0, \quad (7)$$

то можна застосувати метод моментів для обчислення власних значень і власних функцій крайової задачі (5), (6). Але умова (7) є досить жорсткою, бо вона виключає випадки, коли на деякому внутрішньому інтервалі, що належить відрізьку $[0, \pi]$, $x - \Delta(x) \equiv \text{const}$. А.М.Зверкін показав, що наявність таких інтервалів приводить до необмеженості оператора P , який визначається рівністю $Py = M(x)y(x - \Delta(x))$

С.Б.Норкін показав, що якщо

$$x - \Delta(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a, \\ x - \Delta_*(x), & a < x \leq \pi, \end{cases}$$

де кусково-диференційовна функція $\Delta_*(x)$ неперервна на інтервалі $(a, \pi]$, $\Delta_*(a) = a$ і

$$\inf_{[a, \pi]} (1 - \Delta'_*(x)) = m_* > 0,$$

то оператор P буде обмеженим за нормою і в цьому випадку також можна застосувати метод моментів для знаходження власних значень і власних функцій крайової задачі (5), (6).

В.Б.Колмановський [44] ілюструє схему застосування методу моментів до наближеного знаходження власних значень і власних функцій для інтегро-диференціального рівняння з відхиляючим аргументом

$$y^{(2n)}(x) + \lambda y(x) + M(x)y(x - \Delta(x)) + \int_0^{\pi} y(t)K(x, t)dt = -f(x)$$

До ітеративних методів відносяться класичний метод послідовних наближень, метод Ньютона, метод найшвидшого спуску, метод Чаплигіна та їх модифікації.

Ідея методу послідовних наближень виникла ще в 18 столітті при розв'язуванні різних задач небесної механіки. При дослідженні лінійних диференціальних рівнянь цим методом користувався Ліувільє [55], а до задач теорії потенціалу його застосував Нейман [74], але як самостійний метод математичного аналізу він склався лише в 1893 році після опублікування роботи Пікара.

В роботі Беллмана [4] досліджується рівняння

$$y'(x) = a_1 y(x) + a_2 y(x-1) + b_1(x)y(x) + b_2(x)y(x-1) + \sum_{i+j \geq 2} b_{ij}(x)[y(x)][y(x-1)]' \quad (8)$$

при досить малих функціях $b_1(x), b_2(x)$ і при відповідних обмеженнях на ряд, що стоїть в правій частині (8). Операційним методом рівняння (8) зводиться до інтегро-різницевого рівняння, яке розв'язується методом послідовних наближень. В цій роботі вивчається поведінка розв'язку при $x \rightarrow \infty$.

Суть методу послідовних наближень в застосуванні до інтегро-різницевого рівняння

$$y(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b f[\xi, y(\xi), y(\xi - \Delta(\xi))]d\xi \quad (9)$$

полягає в тому, що, виходячи з довільної функції $y_0(x)$, яка належить тому ж простору, в якому розглядається рівняння (9), послідовні наближення знаходяться за формулою

$$y_n(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b f[\xi, y_{n-1}(\xi), y_{n-1}(\xi - \Delta(\xi))]d\xi; n = 1, 2, \dots$$

Якщо функції $\varphi(x)$ та $f[\dots]$ неперервні і функція $f[\xi, y(\xi), y(\xi - \Delta(\xi))]$ задовольняє умову Ліпшица по другому і

третьому аргументах, то при достатньо малому $|\lambda|$ послідовність $\{y_n(x)\}$, як показано в роботі [114], рівномірно збігається до єдиного розв'язку $y(x)$ рівняння (9). Цей результат легко отримується за допомогою принципу стислих відображень [61], до якого приводить метод послідовних наближень, і який вперше був сформульований в 1922 році С.Банахом [1].

Ітеративний метод і деякі його модифікації в застосуванні до наближеного розв'язання диференціальних рівнянь з запізненням, функціональних і різницевих рівнянь розглядались в роботах М.Квапіша [36,37], в яких використовувались деякі ідеї Т.Важевського [12-14].

В ряді робіт для наближеного розв'язування диференціально-різницевих рівнянь застосовувався метод Чаплигіна.

В статті Г.М.Жданова [31] доводиться теорема Чаплигіна про диференціальні нерівності для системи диференціальних рівнянь з запізнюючим аргументом

$$y'_i(x) = f_i[x, y_1(x), \dots, y_{k(n)}; y_1(x - \Delta_1(x)), \dots, y_k(x - \Delta_k(x))] \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

при умові, що праві частини – неперервні функції по всіх аргументах і мають неперервні невід'ємні частинні похідні по всіх аргументах, починаючи з другого, а також розглядається основна початкова задача з неперервними на початкових множинах початковими функціями і наводиться алгоритм для побудови двохсторонніх наближень.

В більш ранній роботі Е.І.Клячко [39] будуються лише односторонні наближення при вивченні умов застосування методу Чаплигіна до наближеного розв'язування диференціального рівняння з запізнюючим аргументом

$$y'(x) = F[x, y(x - \Delta(x))]$$

В обидвох випадках доведена збіжність пропонуванних алгоритмів до розв'язку відповідних задач.

А.Д.Мишкіс [73] показав, що при деяких умовах результати Г.М.Жданова переносяться на більш широкий клас рівнянь, які містять довільну кількість запізнень, залежних, взагалі кажучи, від шуканих функцій.

Метод Чаплигіна застосовувався також до наближеного розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь з відхиляючим аргументом в роботі К.Б.Бараталієва [2].

Перевага ітеративних методів перед іншими в простоті обчислювальної схеми, що дає можливість легко реалізувати їх на обчислювальних машинах. Але круг задач, які розв'язуються ітеративними методами, обмежений тим, що ці методи не завжди збігаються, а якщо збігаються, то дуже повільно. Область застосування проєкційних методів значно ширша від області застосування ітеративних методів, але їх недолік полягає в тому, що часто доводиться розв'язувати системи алгебраїчних рівнянь високого порядку, а це зв'язано з великою обчислювальною роботою особливо при розв'язуванні нелінійних рівнянь. Проєкційні методи найкраще проілюструвати на операторному рівнянні

$$Ax = f, \quad (10)$$

де A – лінійний оператор, який переводить гільбертів простір H в себе, f – відомий елемент, x – шуканий елемент простору H . Наближений розв'язок рівняння (10) шукається у вигляді

$$\vartheta_k = \sum_{i=1}^k C_i \varphi_i \quad (11)$$

де C_i – невідомі константи, $\{\varphi_i\}$ – повна лінійно-незалежна система елементів простору H .

Згідно методу найменших квадратів коефіцієнти C_i знаходяться з умови мінімуму норми нев'язки $\|\varepsilon\| = \|A\vartheta_k - f\|$, в методі Б.Г.Гальоркіна коефіцієнти C_i знаходяться з умови $(\varepsilon, \varphi_i) = 0$, а в методі моментів – з умови $(\varepsilon, \psi_i) = 0$, де $\{\psi_i\}$ – інша лінійно-незалежна система елементів простору H . Метод Рітца є частинним випадком методу Б.Г.Гальоркіна. Підвищення точності наближеного розв'язку в проєкційних методах відбувається за рахунок збільшення k . Але може статись так, що при $k_2 > k_1$ наближення ϑ_{k_2} буде значно гіршим, ніж наближення ϑ_{k_1} . Це явище відсутнє в збіжних ітеративних методах, в яких

ітеративних методах, в яких наступні наближення завжди кращі від попередніх.

В останній час з появою швидкодіючих обчислювальних машин почали розвиватись проєкційно-ітеративні методи, які ввібрали в собі кращі риси проєкційних та ітеративних методів. Ці методи характерні прискореною збіжністю ітеративних процесів, а це дозволяє розширити круг задач, що розв'язуються цими методами і зменшити кількість обчислень. Першим представником проєкційно-ітеративних методів був метод осереднення функціональних поправок, запропонований в 1952 році членом-кореспондентом АН УРСР, професором І.О.Д.Соколовим [92] для наближеного розв'язування диференціальних і інтегральних рівнянь типу Фредгольма, Вольтерра, для розв'язування крайових задач.

Ідея методу осереднення функціональних поправок в застосуванні до інтегрального рівняння типу Фредгольма

$$y(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f[x, \xi, y(\xi)] d\xi$$

полягає в тому, що послідовні наближення знаходяться за формулами

$$y_n(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f[x, \xi, y_{n-1}(\xi) + \alpha_n] d\xi; \quad n = 1, 2, \dots,$$

де

$$\alpha_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b [y_n(x) - y_{n-1}(x)] dx; \quad y_0(x) = 0.$$

В такій формі метод осереднення функціональних поправок є виключно простим з обчислювальної точки зору, має широку область застосування і збігається значно швидше від методу послідовних наближень за рахунок введення функціональних поправок α_n .

В подальшому метод І.О.Д.Соколова розвивався і узагальнювався в роботах багатьох авторів. Перш за все слід відмітити роботи Е.А.Чернишченко [108-110], А.Ю.Лучки [57-60], М.С.Курпеля [53], В.І.Тивончука [94-96].

Е.А.Чернишенко [108] застосувала метод осереднення функціональних поправок до наближеного розв'язування операторних рівнянь виду

$$x = Ax \quad (12)$$

в повному нормованому просторі і довела збіжність алгоритмів

$$x_n = A(x_{n-1} + \alpha_n),$$

де $\alpha_n = S(x_n - x_{n-1})$; $n = 1, 2, \dots$,

S - деякий лінійний оператор осереднення, A - взагалі кажучи нелінійний оператор при умові

$$q_A (1 + 2\|S\|) < 1, \quad (13)$$

q_A - коефіцієнт Ліпшица оператора A . Умова (13) дуже обмежуюча, бо для збіжності методу Ю.Д.Соколова, як пізніше виявилось [53], достатньо умови

$$q_A < 1$$

В роботі [109] вперше було запропоновано за оператор осереднення S брати проекційний оператор, який проектує банахів простір E на його підпростір E^* з базисом, що складається з n ортонормованих функцій $\{\varphi_i(x)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Але достатні умови збіжності запропонованого Е.А.Чернишенко алгоритму для розв'язування лінійного операторного рівняння

$$x = f + Ax$$

були досить обмежувачими, а оцінки похибки n -го наближення грубими. Зокрема, в випадку лінійного інтегрального рівняння Фредгольма

$$y(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi$$

в просторі $L^2(a, b)$ отримано таку достатню умову збіжності

$$\lambda^2 \int_a^b \int_a^b K^2(x, \xi) dx d\xi (1 + 2C_k)^2 < 1 \quad (14)$$

причому $C_k > 0$, $C_k \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Умова (14) не гарантує збіжність методу осереднення функціональних поправок навіть для таких λ , при яких метод послідовних наближень збігається.

А насправді, як показав А.Ю.Лучка [57], метод осереднення функціональних поправок має значно ширшу область застосування, ніж метод послідовних наближень.

Метод Ю.Д.Соколова застосовувався до знаходження власних значень лінійного оператора A в гільбертовому просторі [108], до наближеного розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь [110], а також для розв'язування прикладних задач [19,27,28,101-104].

Глибокі та всесторонні дослідження теорії і застосування методу Ю.Д.Соколова та його модифікацій до лінійних операторних рівнянь в банаховому і гільбертовому просторах зроблені А.Ю.Лучкою і підсумовані в його монографіях [57,59,60]. В одній із робіт А.Ю.Лучки вивчається рівняння

$$Ax = f + Bx, \quad (15)$$

де A, B - лінійні оператори, що діють з банахового простору E_1 в банахів простір E_2 , $f \in E_2$, x - шуканий елемент простору E_1 . В припущенні, що існує обмежений обернений оператор A^{-1} , будеться алгоритм

$$Ax_n = f + B(x_{n-1} + \alpha_n), \quad (16)$$

де α_n визначається з рівняння

$$S\alpha_n = PS(x_n - x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

S - деякий лінійний оператор, що діє з простору E_1 в банахів простір E_3 , такий, що існує обмежений оператор S^{-1} , P - проєкційний оператор, що проєктус простір E_3 на його підпростір E_3^* . В залежності від того чи іншого вибору оператора S можна отримати різні модифікації методу осереднення функціональних поправок.

Необхідною і достатньою умовою збіжності за нормою в E_1 алгоритму (16) до єдиного розв'язку рівняння (15) при будь-якому $f \in E_2$ є умова

$$\|L^n\| < 1 \quad (17)$$

для деякого n , де $L = (I - P)(I - SA^{-1}BS^{-1}P)SA^{-1}BS^{-1}(I - P)$,

I - тотожний оператор, якщо існує обмежений обернений оператор $(I - SA^{-1}BS^{-1}P)^{-1}$

Але умову (17) важко перевірити, тому зручніше користуватись такою достатньою умовою збіжності алгоритму (16):

$$\|L\| < 1$$

Якщо оператор $SA^{-1}BS^{-1}$ цілком неперервний і простір E_3 має розмірність K , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|L_k\| = 0,$$

де $L_k = (I - P_k)(I - SA^{-1}BS^{-1}P_k)^{-1}SA^{-1}BS^{-1}(I - P_k)$, тобто завжди виконується умова $\|L_k\| < 1$ (завжди можна вибрати розмірність простору E_3 так, щоб алгоритм (16) збігався).

У випадку самоспряженості оператора $SA^{-1}BS^{-1}$ і якщо P - оператор ортогонального проектування, то достатня умова збіжності методу $\|L\| < 1$ буде і необхідною.

Якщо оператор $SA^{-1}BS^{-1}$ діє в гільбертовому просторі H , P_k - оператор ортогонального проектування і при деякому k $\|L_k\| < 1$, то при будь-якому $m \geq k$

$$\|L_m\| \leq \|L_k\|.$$

Звідси випливає, що із збіжності методу при деякому k відразу слідує збіжність при $m > k$. А при виконанні достатньої умови збіжності методу послідовних наближень в гільбертовому просторі H метод Ю.Д.Соколова збігається при будь-якому виборі оператора ортогонального проектування P_k . У випадку самоспряженості оператора $SA^{-1}BS^{-1}$ із збіжності методу послідовних наближень завжди випливає збіжність методу осереднення функціональних поправок при будь-якому виборі оператора ортогонального проектування P_k .

Застосування методу осереднення функціональних поправок і його модифікацій до безконечних систем алгебраїчних

диференціальних, інтегральних і інтегро-диференціальних рівнянь, а також до розв'язування задач Діріхле і Неймана для рівняння Пуассона розглядалися в роботах [57,59,60]. В роботі [58] вивчається нестандартний ітераційний процес (проекційний оператор в кожному наближенні залежить від номера наближення) наближеного розв'язування лінійних операторних рівнянь.

Питанням теоретичного обґрунтування і практичного застосування деяких загальних проекційно-ітеративних методів розв'язування лінійних і в основному нелінійних операторних рівнянь присвячені фундаментальні дослідження М.С.Курпеля, які лягли в основу його монографії "Проекційно-ітеративні методи розв'язування операторних рівнянь" [53].

Вкажемо тільки деякі результати М.С.Курпеля, що торкаються наближеного розв'язування загального нелінійного операторного рівняння

$$x = Tx \quad (18)$$

де T - оператор, що діє в деякому банаховому просторі E , x - шуканий елемент простору E .

Згідно з методом осереднення функціональних поправок для наближеного розв'язування рівняння (18) будується алгоритм

$$x_n = T(x_{n-1} + \alpha_n), \quad (19)$$

де

$$\alpha_n = P(x_n - x_{n-1}),$$

P - оператор, який проектує простір E на його підпростір E^* .

Алгоритм (19) може збігатись навіть тоді, коли звичайний ітераційний метод розбіжний. Якщо виконується умова збіжності $q_T < 1$ (q_T - коефіцієнт Ліпшица оператора T) звичайного методу послідовних наближень, то завжди буде збігатись і метод Ю.Д.Соколова, причому, судячи по оцінках, швидкість збіжності останнього буде не меншою від швидкості збіжності методу послідовних наближень.

М.С.Курпель в різних просторах встановив ряд менш обмежуючих достатніх ознак збіжності алгоритму (19)

$$\varepsilon_1 = \frac{q_{Q\Gamma}}{1 - q_{P\Gamma}} < 1, \quad \varepsilon_2 = \frac{q_{Q\Gamma}}{\sqrt{1 - q_{P\Gamma}^2}} < 1,$$

$$\varepsilon_3 = q_{Q\Gamma Q} + q_{Q\Gamma P}(1 - q_{P\Gamma P})^{-1} q_{P\Gamma Q} < 1, \quad Q = I - P, \quad (20)$$

а також відповідні оцінки похибки n -го наближення. З умов (20) видно, що для покращення збіжності оператор P слід вибирати близьким до тотожного.

Якщо $T_x = F(x, x)$, де F - такий оператор, що $F(u, v) \in E$ при $u \in E$ і $v \in E$, то виходячи з довільного наближення $x^{(0)} \in E$, наступні наближення $x^{(n)}$ до розв'язку рівняння (18) визначаються рівняннями

$$x^{(n)} = \Phi_k [x^{(n)}, x^{(n-1)}] \quad i \quad n = 1, 2, \dots, \quad (21)$$

де Φ_k можна знайти за формулами

$$\Phi_1(u, v) = F(u, v), \quad \Phi_i(u, v) = F[u, \Phi_{i-1}(u, v)], \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Виявляється, що якщо оператор F слабо залежить від другого аргументу (тобто його константа Ліпшица по другому аргументу невелика), то швидкість збіжності методу збільшується. Оператор F слід вибирати так, щоб нове рівняння можна було легко розв'язати. В залежності від вибору оператора F отримується той чи інший алгоритм.

Частинний випадок алгоритму (21) ($k = 1$) в загальному вигляді розглядав польський математик Т.Важевський. Якщо ж при цьому

$$F(u, v) = PTu + QTv \quad \text{або} \quad F(u, v) = T(Pu + Qv),$$

то отримуються алгоритми, які узагальнюють метод Ю.Д.Соколова.

При умові $p + q < 1$ (p, q - константи Ліпшица оператора F відповідно по першому і другому аргументу) рівняння (21) єдиним чином розв'язні відносно $x^{(n)}$ при будь-якому k і $x^{(0)} \in E$, і послідовність $\{x^{(n)}\}$ збігається до розв'язку x^* рівняння (18) з оцінкою похибки

$$\|x^* - x^{(n)}\| \leq \varepsilon_k^{n-p+1} (1 - \varepsilon_k)^{-1} \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|, \quad 1 \leq p \leq n,$$

де

$$\varepsilon_k = q^k \left(1 - p \sum_{i=0}^{k-1} q^i \right)^{-1} < 1,$$

причому $\varepsilon_m < \varepsilon_k$, при $m > k$.

В застосуванні до інтегральних рівнянь викладений вище метод узагальнює також метод полос Г.П.Положія і П.Й.Чаленко [79].

М.С.Курпель розглядав також деякі частинні класи нелінійних операторних рівнянь – скінченні і нескінченні системи нелінійних алгебраїчних (трансцендентних) і інтегральних рівнянь, отримав ряд достатніх ознак збіжності різних алгоритмів і відповідні оцінки похибки n -го наближення.

Основний варіант методу Ю.Д.Соколова в застосуванні до інтегральних рівнянь Вольтерра

$$y(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x, \xi) y(\xi) d\xi, \quad (22)$$

де задані функції $\varphi(x)$ і $K(x, \xi)$ розглядаються відповідно в областях $a \leq x \leq a+h$ і $a \leq \xi \leq x \leq a+h$, порівняно з методом послідовних наближень має той суттєвий недолік, що його збіжність до розв'язку відповідного рівняння доводиться не на всьому розглядуваному проміжку $[a, a+h]$, а на деякій його частині $[a, h_0]$, $h_0 < a+h$.

В роботах В.Ш.Тивончука [94-96] в різних просторах будуються і досліджуються нові варіанти методу осереднення функціональних поправок для наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра і лінійних інтегральних рівнянь змішаного типу, в яких усунуто вищезгаданий недолік.

Зокрема, для наближеного розв'язування рівняння (22) будується алгоритм

$$y_n(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x, \xi) [y_{n-1}(\xi) + \alpha_n(x)] d\xi; \quad n = 1, 2, \dots \quad (23)$$

де

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x [y_n(\xi) - y_{n-1}(\xi)] d\xi : y_0(x) = 0, \quad (24)$$

в просторі $\tilde{C}$ обмежених вимірних функцій доводиться рівномірна збіжність цього алгоритму до розв'язку $y(x) \in \tilde{C}$ рівняння (22) на всьому розглядуваному відрізку $[a, a+h]$, отримані різні оцінки похибок n -го наближення.

Л.Е.Кривошеїн і К.Б.Бараталієв [48] досліджували застосування методу осереднення функціональних поправок до наближеного розв'язування двохвимірних нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з відхиляючим аргументом.

В роботах Б.Г.Мосолова [68-70] вивчались нелінійні інтегро-диференціальні рівняння та системи таких рівнянь, лінійні операторні рівняння, а також узагальнено один варіант методу Ю.Д.Соколова, запропонований Ю.М.Молоковичем [67]. Дослідженню методу осереднення функціональних поправок присвячені також роботи [6,10,85,86,93,98,100].

Однак, при умовах, які значно виходять за межі застосування методу послідовних наближень у випадку нелінійних рівнянь поки що не вдається довести збіжність методу осереднення функціональних поправок. Заслуговує на увагу вивчення стійкості методу Ю.Д.Соколова та його узагальнень, а також застосування його до стохастичних рівнянь.

До наближеного розв'язування інтегро-різницевих рівнянь метод осереднення функціональних поправок вперше був застосований в роботах [2,3,48].

К.Б.Бараталієв для наближеного розв'язування інтегро-різницевого рівняння

$$y(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b \sum_{i=0}^m K_i(x, \xi) y(\psi_i(\xi)) d\xi \quad (25)$$

в просторі C пропонує такий алгоритм

$$y_n(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b \sum_{i=0}^m K_i(x, \xi) y_{n-1}(\psi_i(\xi)) + \alpha_m d\xi, \quad (26)$$

$$\alpha_m = \frac{1}{h_i} \int_a^{\psi_i(b)} [y_n(\psi_i(\xi)) - y_{n-1}(\psi_i(\xi))] d\xi, \quad h_i = \psi_i(b) - a \neq 0,$$

$$y_0 = 0.$$

припустивши, що $K_i(\psi_i(x), \xi) \equiv 0$ при $x \in [a, b]$, і $k = 0, 1, \dots, m$.

Доведена збіжність алгоритму (26) до розв'язку рівняння (25), але отримана достатня умова збіжності є досить обмежуючою, а оцінка похибки n -го наближення – грубою. Недолік алгоритму (26) полягає ще й в тому, що в особливому випадку, коли початкова множина вироджується в точку, всі функціональні поправки $\alpha_m \equiv 0$, тобто алгоритм (26) в цьому випадку вироджується у звичайний процес послідовних наближень.

В роботі [2] метод Ю.Д.Соколова застосовується до наближеного розв'язування крайової задачі (3), (4) у випадку, коли

$$q_0(t) = q_j(t) = r_j(t) = 0; \quad j = 1, 2, \dots, v,$$

яка спочатку зводиться до інтегро-різницевого рівняння, а в [3] – до наближеного розв'язування лінійних двохвимірних інтегро-різницевих рівнянь. В статті [48] алгоритм (26) розповсюджується на нелінійні двохвимірні інтегро-диференціальні рівняння з відхиляючим аргументом. Для наближеного розв'язування рівняння (25) при $a = 0$, $b = 1$ К.Б.Бараталієв пропонує також алгоритм, в якому функціональні поправки визначаються з умови мінімуму відповідного функціоналу.

Не дивлячись на те, що теорія інтегральних рівнянь розроблена досить повно в книгах [40, 56, 65, 77, 83, 87, 88, 97], питанням наближеного розв'язування інтегро-різницевих рівнянь присвячено дуже мало робіт.

В даній роботі досліджується питання застосування методу Ю.Д.Соколова до наближеного розв'язування як лінійних, так і нелінійних інтегро-різницевих рівнянь і їх систем, а також до деяких прикладних задач теорії імпульсних екстремальних систем автоматичного керування.

В першому розділі розглядаються лінійні інтегро-різницеві рівняння та їх системи в просторах L^2 і L^n . Отримані достатні умови збіжності, виведені оцінки похибок n -го

наближення. Пропоновані алгоритми ілюструються на прикладах.

Другий розділ присвячений розробці деяких алгоритмів наближеного розв'язування нелінійних інтегро-різницевих рівнянь та їх систем, як з врахуванням відхилення аргументів, так і без їх врахування. Досліджуються нелінійні інтегро-різницеві рівняння типу Гаммерштейна і деякі класи інтегро-різницевих рівнянь в просторі C , якими описуються задачі автоматичного керування. Доводиться збіжність пропонованих алгоритмів і виводяться оцінки похибки n -го наближення.

Третій розділ має прикладний характер. Тут досліджуються три імпульсні екстремальні системи з модуляцією (ІЕСМ): різницевого типу, звичайного типу і система з двома спробними кроками, а також вплив випадкових збурень на роботу дискретних та неперервних оптимізаторів пропорційного типу. Виводяться нелінійні інтегро-різницеві рівняння відносно спектральної густини похибки для імпульсної екстремальної системи з двома спробними кроками. Отримані інтегро-різницеві рівняння є частинними випадками тих рівнянь, які розглядаються в другому розділі. З достатніх умов збіжності методу осереднення функціональних поправок отримані достатні умови обмеженості дисперсії похибок пропорційних імпульсних систем екстремального керування при дії випадкових збурень. Розглянуто приклади конкретних ІЕСМ.

Основні результати даної роботи опубліковані в статтях [18-28, 101-104].

РОЗДІЛ I

НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

§1. ДОСТАТНІ УМОВИ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ ОСЕРЕДНЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПОПРАВОК В ПРОСТОРІ L^2 .

Розглянемо лінійне інтегро-різницеве рівняння

$$y(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b \sum_{r=0}^m K_r(x, \xi) y(\psi_r(\xi)) d\xi, \quad (1.1)$$

в якому: 1) функції $\varphi(x)$, $K_r(x, \xi) \in L^2$ - є дійсні і визначені відповідно в областях: $[a - \tau_0, b]$, $a \leq x \leq b$, $a \leq \xi \leq b$, де $0 \leq x - \psi_r(x) \leq \tau_0 < h$ при $x \in [a, b]$, $h = b - a \neq 0$;

$$2) K_r(x, \xi) \equiv 0 \text{ при } \psi_l(x) \notin [a, b]; \quad (2.1)$$

$r = 0, 1, 2, \dots, m$; $l = 0, 1, 2, \dots, m$; $\psi_l(x)$ - монотонні неперервно-диференційовні функції; 3) λ - регулярне значення.

Для наближеного розв'язування рівняння (1.1) методом Ю.Д.Соколова в першому наближенні покладено

$$y_1(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b \sum_{r=0}^m K_r(x, \xi) \alpha_{1r} d\xi, \quad (3.1)$$

де

$$\alpha_{1r} = \frac{1}{h} \int_a^b y_1(\psi_r(x)) dx \quad (4.1)$$

Підставивши (3.1) в (4.1), дістанемо

$$\alpha_{1r} - \lambda \sum_{l=0}^m a_{rl} \alpha_{1l} = b_{1r}, \quad (5.1)$$

де

$$a_{rl} = \frac{1}{h} \int_a^b \int_a^b K_l(\psi_r(x), \xi) dx d\xi, \quad b_{1r} = \frac{1}{h} \int_a^b \varphi(\psi_r(x)) dx. \quad (6.1)$$

Нехай

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{00} & -\lambda a_{01} & \dots & -\lambda a_{0m} \\ -\lambda a_{10} & 1 - \lambda a_{11} & \dots & -\lambda a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{m0} & -\lambda a_{m1} & \dots & 1 - \lambda a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (7.1)$$

Тоді функціональні поправки α_{lr} однозначно визначаються з системи (5.1)

$$\alpha_{lr} = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{r=0}^m b_{lr} M_{rl}(\lambda),$$

де $M_{rl}(\lambda)$ - алгебраїчне доповнення елемента, що стоїть на перетині r -го рядка і l -го стовпця визначника $D(\lambda)$.

В n -му наближенні покладемо

$$y_n(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b \sum_{r=0}^m K_r(x, \xi) [y_{n-1}(\psi_r(\xi)) + \alpha_{nr}] d\xi, \quad (8.1)$$

де

$$\alpha_{nr} = \frac{1}{h} \int_a^b \delta_n(\psi_r(x)) dx, \quad \delta_n(x) = y_n(x) - y_{n-1}(x); \quad n = 2, 3, \dots \quad (9.1)$$

$$\delta_1(x) = y_1(x).$$

Підставивши (8.1) в (9.1), для визначення функціональних поправок α_{nr} отримаємо таку систему рівнянь

$$\alpha_{nr} - \lambda \sum_{l=0}^m a_{rl} \alpha_{nl} = b_{nr}, \quad (10.1)$$

в якій

$$b_{nr} = \frac{\lambda}{h} \int_a^b \int_a^b \sum_{l=0}^m K_l(\psi_r(x), \xi) [\delta_{n-1}(\psi_l(\xi)) - \alpha_{n-1,l}] dx d\xi. \quad (11.1)$$

При виконанні умови (7.1) з системи (10.1) однозначно знаходимо

$$\alpha_{nl} = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{r=0}^m b_{nr} M_{rl}(\lambda). \quad (12.1)$$

На підставі (8.1), (12.1), (11.1) будемо мати

$$\delta_n(\psi_r(x)) = \lambda \int_a^b \sum_{l=0}^m K_l(\psi_r(x), \xi) [\delta_{n-1}(\psi_l(\xi)) + \alpha_{nl} - \alpha_{n-1,l}] d\xi, \quad (13.1)$$

$$\alpha_{nl} = \frac{\lambda}{hD(\lambda)} \sum_{r=0}^m M_{r,l}(\lambda) \int_a^b \int_a^b \sum_{l=0}^m K_l(\psi_r(x), \xi) [\delta_{n-1}(\psi_l(\xi)) - \alpha_{n-1,l}] dx d\xi \quad (14.1)$$

1. Рівності (13.1), (14.1) можна зобразити так:

$$\delta_n(\psi_r(x)) = \lambda \sum_{l=0}^m \int_a^b [K_l(\psi_r(x), \xi) - K_l(\psi_r(x))] \delta_{n-1}(\psi_l(\xi)) - \\ - \lambda \sum_{p=0}^m \alpha_{n-1,p} \tau_{pl} d\xi + \lambda h \sum_{l=0}^m \alpha_{nl} K_l(\psi_r(x)), \quad (15.1)$$

$$\alpha_{nl} = \frac{\lambda}{hD(\lambda)} \sum_{r=0}^m M_{r,l}(\lambda) \sum_{l=0}^m \int_a^b \int_a^b [K_l(\psi_r(x), \xi) - K_l(\psi_r(x))] \delta_{n-1}(\psi_l(\xi)) - \\ - \lambda \sum_{p=0}^m \tau_{pl} \alpha_{n-1,p} dx d\xi, \quad (16.1)$$

де $K_l(\psi_r(x)) = \frac{1}{h} \int_a^b K_l(\psi_r(x), \xi) d\xi$, τ_{pl} - довільні параметри.

Справді на підставі того, що

$$\int_a^b [K_l(\psi_r(x), \xi) - K_l(\psi_r(x))] d\xi = 0, \text{ маємо} \\ \int_a^b [K_l(\psi_r(x), \xi) - K_l(\psi_r(x))] \left[\delta_{n-1}(\psi_l(\xi)) - \lambda \sum_{p=0}^m \alpha_{n-1,p} \tau_{pl} \right] d\xi = \\ = \int_a^b K_l(\psi_r(x), \xi) [\delta_{n-1}(\psi_l(\xi)) - \alpha_{n-1,l}] d\xi.$$

Відніmemo від обидвоx частин рівності (15.1) вираз $\lambda \sum_{p=0}^m \tau_{pr} \alpha_{np}$,

піднесемо обидві частини до квадрату і проінтегруємо по x .

Отримаємо

$$\begin{aligned} \Phi_{nr} &= \int_a^b \left[\delta_n(\psi_r(x)) - \lambda \sum_{p=0}^m \tau_{pr} \alpha_{np} \right]^2 dx = \\ &= \lambda^2 \int_a^b \left\{ \sum_{l=0}^m [K_l(\psi_r(x)\xi) - K_l(\psi_r(x))] \Delta_{n-1}(\psi_r(\xi)) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=0}^m [hK_l(\psi_r(x)) - \tau_{lr}] \mu_{nl} \right\}^2 dx, \end{aligned}$$

$$\text{де } \Delta_n(\psi_r(x)) = \delta_n(\psi_r(x)) - \lambda \sum_{p=0}^m \tau_{pr} \alpha_{np}.$$

В силу нерівностей Мінковського і Буняковського-Шварца маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\lambda| \sqrt{\Phi_{nr}}} &\leq \sum_{l=0}^m \sqrt{\Phi_{n-1,l}} \int_a^b \int_a^b [K_l(\psi_r(x)\xi) - K_l(\psi_r(x))] dx d\xi + \\ &+ \sum_{l=0}^m |\alpha_{nl}| \sqrt{\int_a^b [hK_l(\psi_r(x)) - \tau_{lr}] dx} \end{aligned} \quad (17.1)$$

Беручи до уваги (16.1), оцінимо α_{nl}

$$\alpha_{nl}^2 \leq \frac{\lambda^2 (m+1)^2}{hD^2(\lambda)} \sum_{r=0}^m M_{nl}^2(\lambda) \sum_{l=0}^m \Phi_{n-1,l} \int_a^b \int_a^b [K_l(\psi_r(x)\xi) - K_l(\psi_r(x))]^2 dx d\xi \quad (18.1)$$

або

$$|\alpha_{nl}| \leq \frac{|\lambda| (m+1)}{\sqrt{h|D(\lambda)|}} \sqrt{\Phi_{n-1}} \sqrt{\sum_{r=0}^m M_{nl}^2(\lambda) \sum_{l=0}^m \int_a^b \int_a^b [K_l(\psi_r(x)\xi) - K_l(\psi_r(x))]^2 dx d\xi}, \quad (19.1)$$

де

$$\Phi_{n-1} = \max_l \Phi_{n-1,l}.$$

Нехай $\tau_{l'} = hK_{l'}$, де $K_{l'} = \frac{1}{h} \int_a^b K_l(\psi_{l'}(x)) dx$. Тоді, ввівши

позначення

$$A_{l'}^2 = \int_a^b \int_a^b K_l^2(\psi_{l'}(x)\xi) dx d\xi, \quad B_{l'}^2 = h \int_a^b K_l^2(\psi_{l'}(x)) dx,$$

на підставі (17.1) і (19.1) будемо мати

$$\sqrt{\frac{\Phi_n}{\Phi_{n-1}}} \leq |\lambda| \max \left\{ \sum_{l=0}^m \left[\sqrt{A_{l'}^2 - B_{l'}^2} + \frac{|\lambda|(m+1)}{|D(\lambda)|} \sqrt{\sum_{r=0}^m M_{rl}^2(\lambda) \sum_{p=0}^m (A_{p'}^2 - B_{p'}^2)} \sqrt{B_{l'}^2 - h^2 K_{l'}^2} \right] \right\}$$

Очевидно при виконанні умови

$$e_1 = |\lambda| \max \left\{ \sum_{l=0}^m \left[\sqrt{A_{l'}^2 - B_{l'}^2} + \frac{|\lambda|(m+1)}{|D(\lambda)|} \sqrt{B_{l'}^2 - h^2 K_{l'}^2} \sqrt{\sum_{r=0}^m M_{rl}^2(\lambda) \sum_{p=0}^m (A_{p'}^2 - B_{p'}^2)} \right] \right\} < 1 \quad (20.1)$$

на підставі скінченності Φ_1 , $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n = 0$, і, враховуючи (18.1),

$\alpha_{nl}^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для всіх l , тобто

$$\int_a^b \delta_n^2(\psi_l(x)) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Легко переконатись, зробивши відповідну заміну змінних, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \delta_n^2(x) dx = 0, \text{ тобто послідовність функцій } \{\psi_n(x)\} \text{ збіга-}$$

ється в собі при виконанні умови (20.1). Тому в силу повноти простору L^2 послідовність $\{\psi_n(x)\}$ збігається при $n \rightarrow \infty$ до деякої функції $y(x) \in L^2$, яка є розв'язком інтегро-різницевого рівняння (1.1)

2. Застосовуючи нерівність Буняковського-Шварца, з рівності (13.1) отримаємо

$$\begin{aligned} \Phi'_{nn} &= \int_a^b [\delta_n(\psi_{l'}(x)) - \alpha_{nn}]^2 dx = \int_a^b \delta_n^2(\psi_{l'}(x)) dx - h\alpha_{nn}^2 \leq \\ &\leq (m+1)\lambda^2 \sum_{l=0}^m \int_a^b \int_a^b K_l^2(\psi_{l'}(x)\xi) dx d\xi \cdot \int_a^b [\delta_{n+1}(\psi_{l'}(\xi)) - \alpha_{n+1,l} + \alpha_{nl}]^2 d\xi - h\alpha_{nn}^2 = \end{aligned}$$

$$= (m+1)\lambda^2 \sum_{l=0}^m \Phi'_{n-1,l} A_{lr}^2 + (m+1)\lambda^2 \sum_{l=0}^m A_{lr}^2 \alpha_{nl}^2 h - h \alpha_{nr}^2. \quad (21.1)$$

Просумувавши нерівності (21.1) по r , будемо мати

$$\sum_{r=0}^m \Phi'_{nr} \leq (m+1)\lambda^2 A^2 \sum_{l=0}^m \Phi'_{n-1,l} - \left[- (m+1)\lambda^2 A^2 \sum_{l=0}^m \alpha_{nl}^2 h, \right.$$

$$\text{де } A^2 = \max_l \sum_{r=0}^m A_{lr}^2.$$

Легко бачити, що при виконанні умови

$$\varepsilon_2 = \sqrt{m+1} |\lambda| A < 1 \quad (22.1)$$

$$\Phi'_{nr} \rightarrow 0 \text{ для всіх } r.$$

Враховуючи (14.1) і (2.1), оцінимо α_{nl}^2

$$\alpha_{nl}^2 \leq \frac{\lambda^2}{hD^2(\lambda)} (m+1)^2 \sum_{r=0}^m M_{rl}^2(\lambda) \sum_{l=0}^m \int_a^b \int_a^b K_l^2(\psi_r(x)\xi) dx d\xi \int_a^b [\delta_{n-1}(\psi_l(\xi)) - \alpha_{n-1,l}] d\xi = \frac{\lambda^2 (m+1)^2}{hD^2(\lambda)} \sum_{r=0}^m M_{rl}^2(\lambda) \sum_{l=0}^m A_{rl}^2 \Phi'_{n-1,l}.$$

Таким чином, α_{nl}^2 , а разом з ним і $\int_a^b \delta_n^2(\psi_l(\xi)) dx$ прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$.

Повторюючи міркування п.1, приходимо до висновку, що послідовність $\{y_n(x)\}$ збігається до розв'язку інтегро-різницевого рівняння (1.1). Отже, відома достатня умова збіжності методу послідовних наближень годиться і для методу осереднення функціональних поправок у випадку лінійного інтегро-різницевого рівняння виду (1.1)

3. Ввівши позначення

$$Z_n(\psi_r(x)) = y_{n-1}(\psi_r(x)) + \alpha_{nr}; \quad K_n(\xi) = \frac{1}{h} \int_a^b K_l(\psi_r(x)\xi) dx,$$

на підставі (8.1), (9.1), (13.1) дістанемо

$$Z_n(\psi, (x)) = \varphi(\psi, (x)) + \lambda \int \sum_{l=0}^m K_{ln}(\xi) Z_n(\psi, (\xi)) d\xi + \\ + \lambda \int \sum_{l=0}^m [K_l(\psi, (x), \xi) - K_{ln}(\xi)] Z_{n-1}(\psi, (\xi)) d\xi.$$

Звідси

$$\delta Z_n(\psi, (x)) = Z_n(\psi, (x)) - Z_{n-1}(\psi, (x)) = \delta_{n-1}(\psi, (x)) - \alpha_{n-1, r} + \alpha_{nr} = \\ = \lambda Z_{rn} + \lambda \sum_{l=0}^m \int_a^b H_{rl}(\psi, (x), \xi) \delta Z_{n-1}(\psi, (\xi)) d\xi, \quad (23.1)$$

де

$$Z_{rn} = \sum_{l=0}^m \int_a^b K_{rl}(\xi) \delta Z_n(\psi, (\xi)) d\xi, \quad H_{lr}(\psi, (x), \xi) = K_l(\psi, (x), \xi) - K_{rl}(\xi)$$

Помножимо обидві частини рівності (23.1) на $K_{rp}(x)$ і проінтегруємо по x , отриману рівність просумуємо по r . Тоді отримаємо

$$Z_{pn} = \lambda \sum_{r=0}^m Z_{rn} \int_a^b K_{rp}(x) dx + \lambda \sum_{r=0}^m \sum_{l=0}^m \int_a^b \int_a^b H_{lr}(\psi, (x), \xi) K_{rp}(x) \delta Z_{n-1}(\psi, (\xi)) dx d\xi = \\ = \lambda \sum_{r=0}^m a_{pr} Z_{rn} + \lambda \sum_{r=0}^m \sum_{l=0}^m \int_a^b N_{lrp}(\xi) \delta Z_{n-1}(\psi, (\xi)) d\xi,$$

де

$$N_{lrp}(\xi) = \int_a^b K_{rp}(x) H_{lr}(\psi, (x), \xi) dx = \int_a^b [K_{rp}(x) - \tau_{rp}] H_{lr}(\psi, (x), \xi) dx.$$

При виконанні умови (7.1) отримана система має розв'язок

$$Z_{rn} = \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{l=0}^m \int_a^b S_{rl}(\xi) \delta Z_{n-1}(\psi, (\xi)) d\xi,$$

де

$$S_{rl}(\xi) = \sum_{q=0}^m \sum_{p=0}^m M_{qp}(\lambda) N_{lpq}(\xi) = \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^m M_{qp}(\lambda) [K_{lpq}(x) - \tau_{lpq}] H_{lr}(\psi, (x), \xi) dx \quad (24.1)$$

підставляючи вираз для Z_{in} в (23.1) і застосовуючи відомі нерівності, будемо мати

$$\sqrt{\int_a^b [\delta Z_n(\psi_r(x))]^2 dx} \leq |\lambda| \sum_{l=0}^m \sqrt{Q_{lr}^2 + \frac{h\lambda^2}{D^2(\lambda)} \int_a^b S_{rl}^2(\xi) d\xi} \cdot \sqrt{\int_a^b [\delta Z_{n+1}(\psi_l(\xi))]^2 d\xi}$$

$$\text{де } Q_{lr}^2 = \int_a^b \int_a^b H_{lr}^2(\psi_r(x), \xi) dx d\xi$$

Тим самим отримано таку достатню ознаку збіжності алгоритму (8.1), (9.1)

$$\varepsilon_3 = |\lambda| \max_r \sum_{l=0}^m \sqrt{Q_{rl}^2 + \frac{h\lambda^2}{D^2(\lambda)} \int_a^b S_{rl}^2(\xi) d\xi} < 0 \quad (25.1)$$

З (24.1) при $\tau_{pq} = K_{pq}$ випливає, що

$$\sqrt{h} S_{rl}(\xi) \leq \sum_{p=0}^m T_{pr} \sqrt{\int_a^b H_{lp}^2(\psi_p(x), \xi) dx},$$

де

$$T_{pr}^2 = h \int_a^b \left\{ \sum_{q=0}^m M_{qr}(\lambda) [K_{pq}(\xi) - K_{pq}] \right\}^2 d\xi.$$

З врахуванням цього достатня умова збіжності (25.1) в спрощеному вигляді записується так

$$\varepsilon_3 = \max_r \sum_{l=0}^m \sqrt{Q_{rl}^2 + \frac{\lambda^2}{D^2(\lambda)} \int_a^b \left[\sum_{p=0}^m T_{pr} \sqrt{\int_a^b H_{lp}^2(\psi_p(x), \xi) dx} \right]^2 d\xi} < 1 \quad (26.1)$$

Достатню ознаку збіжності, аналогічну умові (26.1), можна отримати і іншим шляхом.

Очевидно, рівність (13.1) можна зобразити так

$$\delta_n(\psi_r(x)) = \lambda \int_a^b K_l(\psi_r(x), \xi) \delta Z_n(\psi_l(\xi)) d\xi. \quad (27.1)$$

Тоді на підставі (9.1)

$$\delta_n(\psi_r(x)) - \alpha_{nr} = \lambda \sum_{l=0}^m \int_a^b H_{lr}(\psi_r(x)\xi) dZ_n(\psi_r(\xi)) d\xi$$

Таким чином

$$\sqrt{\Phi'_{nr}} = \sqrt{\int_a^b [\delta_n(\psi_r(x)) - \alpha_{nr}]^2 dx} \leq |\lambda| \sum_{l=0}^m \sqrt{Q_{lr}^2 (\Phi'_{n-1,l} + h\alpha_{nl}^2)}.$$

При певному виборі параметрів τ_{pl} з рівності (16.1) слідує, що

$$\alpha_{nl} = \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{p=0}^m \int_a^b \sum_{q=0}^m M_{pl}(\lambda) [K_{pq}(\xi) - K_{pq}] [\delta_{n-1}(\psi_p(\xi)) - \alpha_{n-1,p}] d\xi$$

Звідси, застосовуючи нерівність Буняковського-Шварца, легко отримуємо оцінку

$$h\alpha_{nl}^2 \leq \frac{\lambda^2}{D^2(\lambda)} \left[\sum_{p=0}^m T_{pl} \sqrt{\Phi'_{n-1,p}} \right]^2$$

В силу цього

$$\sqrt{\Phi'_{nr}} \leq |\lambda| \sum_{l=0}^m Q_{lr} \sqrt{\Phi'_{n-1,l} + \frac{\lambda^2}{D^2(\lambda)} \left[\sum_{p=0}^m T_{pl} \sqrt{\Phi'_{n-1,p}} \right]^2},$$

звідки зразу випливає така достатня умова збіжності $\{\psi_n(x)\}$

$$\varepsilon_3'' = |\lambda| \max_r \sum_{l=0}^m Q_{lr} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{D^2(\lambda)} \left[\sum_{p=0}^m T_{pl} \right]^2} < 1 \quad (28.1)$$

4. Беручи до уваги (15.1) і (16.1), робимо висновок, що

$$\begin{aligned} \Delta_n(\psi_r(x)) &= \delta_n(\psi_r(x)) - \lambda \sum_{p=0}^m \tau_{pr} \alpha_{np} = \lambda \sum_{l=0}^m \int_a^b P_l(\psi_r(x)\xi) \Delta_{n-1}(\psi_r(\xi)) d\xi + \\ &+ \lambda \sum_{l=0}^m [hK_l(\psi_r(x)) - \tau_{lr}] \alpha_{nl} = \lambda \sum_{l=0}^m \int_a^b \{P_l(\psi_r(x)\xi) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{p=0}^m \left[hK_p(\psi_r(x)) - \tau_{pr} \sum_{q=0}^m M_{qp}(\lambda) [K_{iq}(\xi) - K_{iq}] \right] \Delta_{n-1}(\psi_r(\xi)) d\xi$$

де

$$P_i(\psi_r(x)\xi) = K_i(\psi_r(x)\xi) - K_i(\psi_r(x))$$

Очевидно,

$$\sqrt{\Phi_{nr}} = \sqrt{\int_a^b \Delta_n^2(\psi_r(x)) dx} \leq$$

$$\leq |\lambda| \sum_{i=0}^n \sqrt{\int_a^b \int_a^b \left\{ P_i(\psi_r(x)\xi) + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{p=0}^m \left[hK_p(\psi_r(x)) - \tau_{pr} \sum_{q=0}^m M_{qp}(\lambda) [K_{iq}(\xi) - K_{iq}] \right] \right\}^2 dx d\xi} \cdot \sqrt{\Phi_{n-1,j}}$$

Остаточно звідси дістанемо ще одну достатню умову збіжності досліджуваного алгоритму, яка узагальнює умову (20.1):

$$\varepsilon_n = |\lambda| \max_r \sum_{i=0}^n \sqrt{\int_a^b \int_a^b \left\{ P_i(\psi_r(x)\xi) + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{p=0}^m \left[hK_p(\psi_r(x)) - \tau_{pr} \sum_{q=0}^m M_{qp}(\lambda) [K_{iq}(\xi) - K_{iq}] \right] \right\}^2 dx d\xi} < 1 \quad (29.1)$$

§2. Оцінки похибки n -го наближення.

При виведенні оцінок похибки n -го наближення в кожному конкретному випадку будемо користуватися відомою формулою

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} |\delta_i(x)| \leq A_n \frac{\varepsilon^{n-1}}{1-\varepsilon} \quad (1.2)$$

Тому перш за все необхідно оцінити $\delta_n(\psi_r(x))$.

1. На основі (15.1) і (16.1) маємо

$$\delta_n(\psi_r(x)) = \lambda \sum_{i=n+1}^{\infty} \left\{ P_i(\psi_r(x)\xi) + \frac{\lambda h}{D(\lambda)} \sum_{p=0}^m K_p(\psi_r(x)) \sum_{q=0}^m M_{qp}(\lambda) [K_{iq}(\xi) - K_{iq}] \right\} \Delta_{n-1}(\psi_r(\xi)) d\xi$$

Застосовуючи нерівність Буняковського-Шварца, отримасмо:

$$|\delta_n(\psi_r(x))| \leq |\lambda| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sqrt{\int_a^b \left\{ P_i(\psi_r(x)\xi) + \frac{\lambda h}{D(\lambda)} \sum_{p=0}^m K_p(\psi_r(x)) \sum_{q=0}^m M_{qp}(\lambda) [K_{iq}(\xi) - K_{iq}] \right\}^2 dx} \cdot \sqrt{\Phi_{n-1,j}}$$

Оскільки $\sqrt{\Phi_{n-1}} \leq \varepsilon_1^{n-2} \sqrt{\Phi_1}$ і $\sqrt{\Phi_{n-1}} \leq \varepsilon_4^{n-2} \sqrt{\Phi_1}$, то звідси відразу випливають дві оцінки

$$\left\{ \int_a^b |y(x) - y_n(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \leq A_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_1^{n-1}}{1 - \varepsilon_1}, \quad (2.2)$$

$$\left\{ \int_a^b |y(x) - y_n(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \leq A_{\varepsilon_4} \frac{\varepsilon_4^{n-1}}{1 - \varepsilon_4}, \quad (3.2)$$

де

$$A_{\varepsilon_1} = A_{\varepsilon_4} = |\lambda| \sqrt{M \Phi_1} \max_r \sum_{l=0}^m \left[\int_a^b \left\{ P_l(\nu_r(x)\xi) + \frac{\lambda J_l}{D(\lambda)} \sum_{p=0}^m K_{rp}(\nu_r(x)) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sum_{q=0}^m M_{rp}(\lambda) [K_{lq}(\xi) - K_{lq}] \right\} dx d\xi \right] \quad (4.2)$$

$M = \max_r \sup_s \psi'_r(\chi_r(s))$, $\chi_r(s)$ - функція, обернена до фу-

нкції $\psi_r(x)$.

2.3 (13.1), враховуючи оцінку для α_{n1}^2 , яка легко отримується на підставі (14.1), будемо мати:

$$|\delta_n(\nu_r(x))| \leq |\lambda| \sum_{l=0}^m \sqrt{\int_a^b K_l^2(\nu_r(x)\xi) d\xi} \sqrt{\Phi'_{n-1,l}} + \frac{\lambda^2(m+1)^2}{D^2(\lambda)} \sum_{r=0}^m M_{n1}^2(\lambda) \sum_{p=0}^m A_{pr}^2 \Phi'_{n-1,p} \leq \\ \leq |\lambda| \sum_{l=0}^m \sqrt{\int_a^b K_l^2(\nu_r(x)\xi) d\xi} \cdot \sqrt{1 + \frac{\lambda^2(m+1)^2}{D^2(\lambda)} \sum_{r=0}^m M_{n1}^2(\lambda) \max_p A_{pr}^2} \cdot \sqrt{\sum_{q=0}^m \Phi'_{n-1,q}} \quad (5.2)$$

$$\text{Беручи до уваги, що } \sqrt{\sum_q \Phi'_{n-1,q}} \leq \varepsilon_2^{(n-2)} \sqrt{\sum_q \Phi'_{1,q}}, \quad (5.2)$$

легко отримується оцінка типу (2.2), (3.2), в якій

$$A_{\varepsilon_2} = |\lambda| \sqrt{M \sum_{q=0}^m \Phi'_{1,q}} \max_r \sum_{l=0}^m A_{lr} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2(m+1)^2}{D^2(\lambda)} \sum_{r=0}^m M_{n1}^2(\lambda) \max_p A_{pr}^2} \quad (6.2)$$

3. Виходячи з (27.1)

$$|\delta_n(\nu_r(x))| \leq |\lambda| \sum_{l=0}^m \sqrt{\int_a^b K_l^2(\nu_r(x)\xi) d\xi} \max_p \sqrt{\int_a^b [\delta Z_2(\nu_r(\xi))]^2 d\xi}.$$

Оскільки

$$\max_p \sqrt{\int_a^h [\delta Z_n(\psi_p(\xi))] d\xi} \leq \varepsilon_3^{n-2} \max_p \sqrt{\int_a^h [\delta Z_2(\psi_p(\xi))] d\xi}.$$

то залишається оцінити $\left\{ \int_a^h [\delta Z_2(\psi_p(\xi))] d\xi \right\}^{1/2}$. Для цього скористаємося оцінкою для α_{np}^2 при $n = 2$

$$\sqrt{\int_a^h [\delta Z_2(\psi_p(\xi))] d\xi} = \sqrt{\Phi'_{1p} + h\alpha_{2p}^2} \leq \sqrt{\Phi'_{1p} + \frac{\lambda^2(m+1)^2}{D^2(\lambda)} \sum_{r=0}^m M_{rp}^2(\lambda) \sum_{q=0}^m A_{rp}^2 \Phi'_{1q}},$$

Отже

$$A_{c_2} = A_{c_1} = |\lambda| \sqrt{M} \max_r \sum_{l=0}^m A_{lr} \max_p \sqrt{\Phi'_{1p} + \frac{\lambda^2(m+1)^2}{D^2(\lambda)} \sum_{r=0}^m M_{rp}^2(\lambda) \sum_{q=0}^m A_{rp}^2 \Phi'_{1q}} \quad (7.2)$$

Нерівність (5.2) тепер можна переписати так

$$|\delta_n(\psi_r(x))| \leq |\lambda| \sum_{l=0}^m \sqrt{\int_a^h K_l^2(\psi_r(x)\xi) d\xi} \cdot \sqrt{1 + \frac{\lambda^2(m+1)^2}{D^2(\lambda)} \sum_{r=0}^m M_{rl}^2(\lambda) \sum_{p=0}^m A_{rp}^2} \cdot \sqrt{\Phi'_{n-1}}$$

де

$$\Phi'_{n-1} = \max_q \Phi'_{n-1,q}$$

Внаслідок того, що $\sqrt{\Phi'_{n-1}} \leq (\varepsilon_3^n)^{n-2} \sqrt{\Phi'_1}$,

$$A_{c_2} = |\lambda| \sqrt{M \Phi'_1} \max_r \sum_{l=0}^m A_{lr} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2(m+1)^2}{D^2(\lambda)} \sum_{r=0}^m M_{rl}^2(\lambda) \sum_{p=0}^m A_{rp}^2} \quad (8.2)$$

Таким чином, отримана така оцінка похибки n -го наближення

$$\left\{ \int_a^h (y(x) - y_n(x))^2 dx \right\}^{1/2} \leq A_{c_2} \frac{(\varepsilon_3^n)^{n-1}}{1 - \varepsilon_3^n} \quad (9.2)$$

Результати, отримані в §§1.2, можна сформулювати у вигляді теореми.

Теорема 1. Якщо виконуються умови 1) – 3) і (7.1) то нерівності (20.1), (22.1), (25.1), (26.1), (28.1), (29.1) будуть достатніми ознаками збіжності в середньому послідовності функцій

кци $\{y_n(x)\}$ при $n \rightarrow \infty$ до функції $y(x) \in L^2$, яка є розв'язком рівняння (1.1). При цьому мають місце оцінки похибки (2.2), (3.2), (9.2), а також аналогічні оцінки, які відповідають рівностям (6.2) і (7.2).

§3. НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ В ПРОСТОРІ L^2 .

Алгоритм, викладений в §1, можна застосувати і до системи лінійних інтегро-різницевих рівнянь

$$y_i(x) = \varphi_i(x) + \lambda \sum_{j=0}^k \int_a^b \sum_{r=0}^m K_r^{ij}(x, \xi) y_j(\psi_r(\xi)) d\xi, \quad i = 0, 1, \dots, k. \quad (1.3)$$

при аналогічних припущеннях відносно функцій $\varphi_i(x)$,

$K_r^{ij}(x, \xi)$, $\psi_r(x)$ і параметра λ .

Для наближеного розв'язування системи (1.3) в першому наближенні покладемо

$$y_{il}(x) = \varphi_i(x) + \lambda h \sum_{j=0}^k \sum_{r=0}^m \alpha_{ilr} K_r^{ij}(x), \quad (2.3)$$

де

$$K_r^{ij}(x) = \frac{1}{h} \int_a^b K_r^{ij}(x, \xi) d\xi, \quad (3.3)$$

$$\alpha_{ilr} = \frac{1}{h} \int_a^b y_{il}(\psi_r(x)) dx. \quad (4.3)$$

Підставляючи (2.3) в (4.3), для визначення α_{ilr} дістанемо таку систему рівнянь

$$\alpha_{ilr} - \lambda h \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m K_{lr}^{ij} \alpha_{ijl} = \frac{1}{h} \int_a^b \varphi_i(\psi_r(x)) dx, \quad (5.3)$$

де
$$K_{lr}^{ij} = \frac{1}{h} \int_a^b K_l^{ij}(\psi_r(x)) dx.$$

Нехай визначник системи (5.3) $\overline{D}(\lambda) \neq 0$. Тоді ця система має єдиний розв'язок

$$\alpha_{pl} = \frac{1}{h\overline{D}(\lambda)} \sum_{i=0}^k \sum_{p=0}^m M_{pl}^{ij}(\lambda) \int_a^b \varphi_i(\psi_p(x)) dx,$$

де $M_{pl}^{ij}(\lambda)$ - алгебраїчне доповнення елемента $- \lambda h K_{pl}^{ij}$ визначника $\overline{D}(x)$.

Далі в n -ному наближенні покладемо

$$\begin{aligned} y_{in}(x) &= \varphi_i(x) + \lambda \sum_{j=0}^k \int_a^b \sum_{r=0}^m K_r^{ij}(x, \xi) [y_{j,n-1}(\psi_r(\xi)) + \alpha_{jnr}] d\xi = \\ &= \varphi_i(x) + \lambda \sum_{j=0}^k \int_a^b \sum_{r=0}^m K_r^{ij}(x, \xi) y_{j,n-1}(\psi_r(\xi)) d\xi + \lambda h \sum_{j=0}^k \sum_{r=0}^m \alpha_{jnr} K_r^{ij}(x), \end{aligned} \quad (6.3)$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_{inr} &= \frac{1}{h} \int_a^b \delta_{in}(\psi_r(x)) dx; \quad \delta_{in}(x) = y_{in}(x) - y_{i,n-1}(x); \\ \delta_{il}(x) &= y_{il}(x). \end{aligned} \quad (7.3)$$

З (6.3) і (7.3) для визначення α_{inr} отримаємо систему

$$\alpha_{inr} - \lambda h \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m K_{lr}^{ij} \alpha_{jnl} = \frac{\lambda}{h} \sum_{j=0}^k \int_a^b \int_a^b \sum_{p=0}^m K_l^{ij}(\psi_p(x), \xi) [\delta_{j,n-1}(\psi_l(\xi)) - \alpha_{j,n-1,l}] d\xi dx \quad (8.3)$$

Розв'язавши цю систему при умові, що $\overline{D}(\lambda) \neq 0$, дістанемо

$$\alpha_{jnl} = \frac{\lambda}{h\overline{D}(\lambda)} \sum_{i=0}^k \sum_{p=0}^m M_{pl}^{ij}(\lambda) \sum_{q=0}^k \int_a^b \int_a^b \sum_{r=0}^m K_l^{iq}(\psi_p(x), \xi) [\delta_{q,n-1}(\psi_r(\xi)) - \alpha_{q,n-1,r}] d\xi dx \quad (9.3)$$

На підставі (6.3) можна написати

$$\delta_{in}(\psi_r(x)) = \lambda \sum_{j=0}^k \int_a^b \sum_{l=0}^m K_l^{ij}(\psi_r(x), \xi) [\delta_{j,n-1}(\psi_l(\xi)) - \alpha_{j,n-1,l} + \alpha_{inl}] d\xi \quad (10.3)$$

Легко переконатись, що вирази (9.3) і (10.3) можна зобразити так

$$\alpha_{jnl} = \frac{\lambda}{h\overline{D}(\lambda)} \sum_{i=0}^k \sum_{p=0}^m M_{pl}^{ij}(\lambda) \sum_{q=0}^k \int_a^b \int_a^b \sum_{r=0}^m [K_l^{iq}(\psi_p(x), \xi) -$$

$$-K_l^{ij}(\psi_r(x))\left[\delta_{q,n-1}(\psi_l(\xi)) - \lambda \sum_{s=0}^k \sum_{p=0}^m \alpha_{s,n-1,p} \tau_{pl}^{qs}\right] dx d\xi, \quad (11.3)$$

$$\delta_m(\psi_r(x)) = \lambda \sum_{l=0}^k \int_a^b \sum_{l=0}^m \left[K_l^{ij}(\psi_r(x)\xi) - K_l^{ij}(\psi_r(x)) \right] \left[\delta_{l,n-1}(\psi_l(\xi)) - \right. \\ \left. - \lambda \sum_{s=0}^k \sum_{p=0}^m \alpha_{s,n-1,p} \tau_{pl}^{is} \right] d\xi + \lambda h \sum_{l=0}^k \sum_{l=0}^m \alpha_{lml} K_l^{ij}(\psi_r(x)). \quad (12.3)$$

Покладаючи для скорочення запису

$P_l^{ij}(\psi_r(x)\xi) = K_l^{ij}(\psi_r(x)\xi) - K_l^{ij}(\psi_r(x))$, з рівності (12.3) дістаємо

$$\Delta_m(\psi_r(x)) = \delta_{im}(\psi_r(x)) - \lambda \sum_{s=0}^k \sum_{p=0}^m \alpha_{snp} \tau_{pr}^{is} = \\ = \lambda \sum_{j=0}^k \int_a^b \sum_{l=0}^m P_l^{ij}(\psi_r(x)\xi) \Delta_{j,n-1}(\psi_l(\xi)) d\xi + \lambda \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m \left[h K_l^{ij}(\psi_r(x)) - \tau_{lr}^{ij} \right] \alpha_{lml}$$

Застосовуючи нерівності Мінковського і Буняковського-

Шварца, при $\tau_{lr}^{ij} = h K_{lr}^{ij}$ будемо мати

$$\sqrt{\Phi_{\varepsilon r}} = \sqrt{\int_a^b \int_a^b \Delta_m^2(\psi_r(x)) dx} \leq |\lambda| \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m \sqrt{\int_a^b \int_a^b [P_l^{ij}(\psi_r(x)\xi)] dx d\xi} \cdot \sqrt{\Phi_{j,n-1,l}} + \\ + |\lambda| h \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m |\alpha_{lml}| \sqrt{\int_a^b [K_l^{ij}(\psi_r(x)) - K_{lr}^{ij}] dx} \quad (13.3)$$

Щоб оцінити $|\alpha_{lml}|$, формулу (11.3) перепишемо в спрощеному вигляді

$$\alpha_{lml} = \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{i=0}^k \sum_{p=0}^m M_{pl}^{ij}(\lambda) \sum_{q=0}^k \int_a^b \sum_{l=0}^m \left[K_{lp}^{iq}(\xi) - K_{lp}^{iq} \right] \delta_{q,n-1}(\psi_l(\xi)) d\xi,$$

де

$$K_{lp}^{iq}(\xi) = \frac{1}{h} \int_a^b K_l^{iq}(\psi_p(x)\xi) dx.$$

Звідси

$$|\alpha_{inl}| \leq \frac{|\lambda|}{|D(\lambda)|} \sum_{j=0}^k T_l^{ij} \sqrt{\Phi_{n-1}}, \quad (14.3)$$

де

$$(T_l^{ij}) = \int_a^b \left\{ \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^k M_{pl}^{ij}(\lambda) \sum_{l=0}^m [K_{lp}^{ij}(\xi) - K_{lp}^{ij}] \right\}^2 d\xi, \quad \overline{\Phi}_{n-1} = \max_{q,l} \Phi_{q,n-1,l}$$

Отже, нерівність (13.3) можна зобразити так

$$\sqrt{\Phi_{inr}} \leq |\lambda| \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m \left\{ \int_a^b \int_a^b [P_r^{ij}(\psi_r(x)) \xi] dx d\xi + \frac{h|\lambda|}{D(\lambda)} \sum_{s=0}^k T_l^{sj} \sqrt{\int_a^b [K_{lr}^{ij}(\psi_r(x)) - K_{lr}^{ij}] dx} \right\} \cdot \sqrt{\Phi_{n-1}},$$

звідки робимо висновок, що при умові

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_i = |\lambda| \max_{l,r} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m \left\{ \sqrt{\int_a^b \int_a^b [P_r^{ij}(\psi_r(x)) \xi] dx d\xi} + \right. \\ \left. + \frac{h|\lambda|}{D(\lambda)} \sum_{s=0}^k T_l^{sj} \sqrt{\int_a^b [K_{lr}^{ij}(\psi_r(x)) - K_{lr}^{ij}] dx} \right\} < 1. \end{aligned} \quad (15.3)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Phi} = 0$ і за формулою (14.3) $\alpha_{inl} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для всіх

j, l , тобто $\int_a^b \delta_{jn}^2(\psi_r(x)) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Очевидно, що $\int_a^b \delta_{jn}^2(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, а

це доводить збіжність алгоритму (6.3), (7.3).

2. Виведемо достатню умову збіжності алгоритму, яка узагальнює умову (22.1). З рівності (10.3) випливає, що

$$\begin{aligned} \Phi'_{inr} &= \int_a^b [\delta_{in}(\psi_r(x)) - \alpha_{inr}]^2 dx = \int_a^b \delta_{in}^2(\psi_r(x)) dx - h \alpha_{inr}^2 \leq \\ &\leq \lambda^2 (k+1)(m+1) \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m [A_{lr}^{ij}] \Phi'_{i,n-1,l} + \lambda^2 (k+1)(m+1) \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m \alpha_{inl}^2 [A_{lr}^{ij}] - h \alpha_{inr}^2 \end{aligned}$$

де

$$[A_{lr}^{ij}] = \int_a^b \int_a^b [K_{lr}^{ij}(\psi_r(x)) \xi] dx d\xi.$$

Просумуємо по i та r обидві частини останньої нерівності

$$\sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^{m_i} \Phi_{ir} \leq \lambda^2 (k+1)(m+1) \bar{A}^2 \sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^{m_i} \Phi'_{i,n-1,r} = \left\{ 1 - \lambda^2 (k+1)(m+1) \bar{A}^2 \right\} \sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^{m_i} h \alpha_{ir}^2,$$

$$\text{де } \bar{A}^2 = \max_{i,j} \sum_{l=0}^k \sum_{r=0}^{m_l} [A_{lr}^{ij}].$$

Отже, при

$$\bar{\varepsilon}_2 = |\lambda| \sqrt{(k+1)(m+1)} \bar{A} < 1 \quad (16.3)$$

$\Phi'_{ir} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ для всіх i, r . Неважко перекоонатись, що для

$$\tau_{rl}^{js} = \begin{cases} 0 & (j \neq s, p \neq l) \\ \frac{1}{\lambda} & (j = s, p = l) \end{cases} \quad \Phi_{ir} = \Phi'_{ir}. \text{ Тому на підставі (14.3)}$$

$\alpha_{jnl} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Тим самим доведено, що послідовність $\{\psi_{in}(x)\}$

збігається до розв'язку системи інтегро-різницевих рівнянь (1.3)

3. З формул (6.3), (7.3) і (10.3) маємо

$$Z_{in}(\Psi_r(x)) = y_{i,n-1}(\Psi_r(x)) + \alpha_{ir} = \varphi_i(\Psi_r(x)) +$$

$$+ \lambda \sum_{j=0}^k \int \sum_{l=0}^m K_{lr}^{ij}(\xi) Z_{jn}(\Psi_l(\xi)) d\xi +$$

$$+ \lambda \sum_{j=0}^k \int \sum_{l=0}^m H_{lr}^{ij}(\Psi_r(x), \xi) Z_{j,n-1}(\Psi_l(\xi)) d\xi,$$

$$\text{де } H_{lr}^{ij}(\Psi_r(x), \xi) = K_{lr}^{ij}(\Psi_r(x), \xi) - K_{lr}^{ij}(\xi)$$

Звідси

$$\delta Z_{in}(\Psi_r(x)) = Z_{in}(\Psi_r(x)) - Z_{i,n-1}(\Psi_r(x)) = \delta_{i,n-1}(\Psi_r(x)) - \alpha_{i,n-1,r} +$$

$$+ \alpha_{ir} = \lambda Z_{ir} + \lambda \sum_{j=0}^k \int \sum_{l=0}^m H_{lr}^{ij}(\Psi_r(x), \xi) \delta Z_{j,n-1}(\Psi_l(\xi)) d\xi, \quad (17.3)$$

$$\text{де } Z_{ir} = \sum_{j=0}^k \int \sum_{l=0}^m K_{lr}^{ij}(\xi) \delta Z_{jn}(\Psi_l(\xi)) d\xi.$$

Помноживши обидві частини рівності (17.3) на $K_{ri}^{si}(x)$, проінтегрувавши по x і просумувавши по i, r , дістанемо

$$Z_{s, m} - \lambda h \sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^m K_{rp}^{si} Z_{i, m-r} = \lambda \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m \int_a^b N_{lp}^{js}(\xi) \delta Z_{j, m-l}(\Psi_l(\xi)) d\xi,$$

де

$$\begin{aligned} N_{lp}^{js}(\xi) &= \sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^m \int_a^b H_{lr}^{ij}(\Psi_r(x), \xi) K_{rp}^{si}(x) dx = \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^m \int_a^b [K_{rp}^{si}(x) - \tau_{rp}^{si}] H_{lr}^{ij}(\Psi_r(x), \xi) dx. \end{aligned}$$

Якщо $\overline{D}(\lambda) \neq 0$, то наша система має розв'язок

$$\begin{aligned} Z_{i, m-r} &= \frac{\lambda}{\overline{D}(\lambda)} \sum_{s=0}^k \sum_{p=0}^m M_{pr}^{si}(\lambda) \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m \int_a^b N_{lp}^{js}(\xi) \delta Z_{j, m-l}(\Psi_l(\xi)) d\xi = \\ &= \frac{\lambda}{\overline{D}(\lambda)} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m \int_a^b S_{rl}^{ij}(\xi) \delta Z_{j, m-l}(\Psi_l(\xi)) d\xi, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} S_{rl}^{ij}(\xi) &= \sum_{s=0}^k \sum_{p=0}^m M_{pr}^{si}(\lambda) N_{lp}^{js}(\xi) = \\ &= \sum_{s=0}^k \sum_{p=0}^m M_{pr}^{si}(\lambda) \sum_{i=0}^k \sum_{r=0}^m \int_a^b [K_{rp}^{si}(x) - \tau_{rp}^{si}] H_{lr}^{ij}(\Psi_r(x), \xi) dx. \end{aligned} \quad (18.3)$$

Отриманий вираз для $Z_{i, m-r}$ підставимо в (17.3)

$$\delta Z_{i, m-r}(\Psi_r(x)) = \lambda \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m \int_a^b \left[H_{lr}^{ij}(\Psi_r(x), \xi) + \frac{\lambda}{\overline{D}(\lambda)} S_{rl}^{ij}(\xi) \right] \delta Z_{j, m-l}(\Psi_l(\xi)) d\xi.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \sqrt{\int_a^b [\delta Z_{i, m-r}(\Psi_r(x))]^2 dx} &\leq |\lambda| \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m \sqrt{[Q_{lr}^{ij}] + \frac{\lambda^2 h}{\overline{D}^2(\lambda)} \int_a^b [S_{rl}^{ij}(\xi)]^2 d\xi} \times \\ &\times \sqrt{\int_a^b [\delta Z_{j, m-l}(\Psi_l(\xi))]^2 d\xi}, \end{aligned}$$

$$\text{де } [Q_{lr}^y] = \int_a^b \int_a^b [H_{lr}^{ij}(\Psi_r(x), \xi)] dx d\xi.$$

Таким чином, з останньої нерівності відразу випливає достатня ознака збіжності, яка узагальнює умову (25.1),

$$\bar{\varepsilon}_3 = |\lambda| \max_{i,r} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m \sqrt{[Q_{lr}^y] + \frac{h\lambda^2}{D^2(\lambda)} \int_a^b [S_{rl}^{ij}(\xi)] d\xi} < 1, \quad (19.3)$$

Цю ознаку збіжності можна переписати в більш простому, але разом з цим і в більш жорсткому вигляді

$$\bar{\varepsilon}_3 = |\lambda| \max_{i,r} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m \sqrt{[Q_{lr}^y] + \frac{h\lambda^2}{D^2(\lambda)} \int_a^b \left\{ \sum_{s=0}^k T_r^{si} \sqrt{\int_a^b [H_{lr}^{ij}(\Psi_r(x), \xi)] dx} \right\}^2 d\xi} < 1, \quad (20.3)$$

оскільки $S_{rl}^{ij}(\xi) \leq \sum_{s=0}^k T_r^{si} \max_{i,r} \sqrt{\int_a^b [H_{lr}^{ij}(\Psi_r(x), \xi)] dx}$, це випливає

з (18.3) при $\tau_{rp}^{si} = K_{rp}^{si}$.

Формулу (10.3) зобразимо так

$$\delta_m(\Psi_r(x)) = \lambda \sum_{j=0}^k \int_a^b \sum_{l=0}^m K_{rl}^{ij}(\Psi_r(x), \xi) \delta Z_{jl}(\Psi_l(\xi)) d\xi, \quad (21.3)$$

звідки з урахуванням (7.3) будемо мати

$$\delta_m(\Psi_r(x)) - \alpha_{mr} = \lambda \sum_{j=0}^k \int_a^b \sum_{l=0}^m H_{lr}^{ij}(\Psi_r(x), \xi) \delta Z_{jl}(\Psi_l(\xi)) d\xi.$$

Звідси

$$\sqrt{\Phi'_{mr}} = \sqrt{\int_a^b [\delta_m(\Psi_r(x)) - \alpha_{mr}] dx} \leq |\lambda| \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m Q_{lr}^{ij} \sqrt{\Phi'_{j,n-1,l} + h\alpha_{jnl}^2}.$$

$$\text{Як випливає з (11.3), при } \tau_{rl}^{qs} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } q \neq s, p \neq l \\ \frac{1}{\lambda}, & \text{якщо } q = s, p = l \end{cases}$$

оцінка (14.3) набере вигляду $|\alpha_{jnl}| \leq \frac{|\lambda|}{D(\lambda)} \sum_{l=0}^k T_l'' \sqrt{\Phi'_{n-1}}$.

Тому

$$\sqrt{\Phi'_{inr}} \leq |\lambda| \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m Q_{lr}^{ij} \sqrt{1 + \frac{h\lambda^2}{D^2(\lambda)} \left(\sum_{i=0}^k T_l'' \right)^2} \cdot \sqrt{\Phi'_{n-1}}, \text{ і при умові}$$

$$\bar{\varepsilon}_3'' = |\lambda| \max_{l,r} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m Q_{lr}^{ij} \sqrt{1 + \frac{h\lambda^2}{D^2(\lambda)} \left(\sum_{i=0}^k T_l'' \right)^2} < 1 \quad (22.3)$$

алгоритм (6.3), (7.3) збігається.

4. Легко переконатись, що з (11.3) і (12.3) слідує

$$\Delta_{in}(\Psi_r(x)) = \delta_{in}(\Psi_r(x)) - \lambda \sum_{s=0}^k \sum_{p=0}^m \alpha_{snp} \tau_{pr}^{is} = \lambda \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m \int_a^b \{ P_l^{ij}(\Psi_r(x)) \xi +$$

$$+ \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{q=0}^k \sum_{s=0}^m [hK_s^{iq}(\Psi_r(x)) - \tau_{sr}^{iq}] \sum_{i=0}^k \sum_{p=0}^m M_{ps}^{iq}(\lambda) [K_{lp}^{ij}(\xi) - K_{lp}^{ij}] \Delta_{j,n-1}(\Psi_l(\xi)) d\xi$$

Піднесемо обидві частини цієї нерівності до квадрату, проінтегруємо по x і добудемо з обох частин квадратний корінь. Тоді будемо мати

$$\sqrt{\Phi'_{inr}} = \sqrt{\int_a^b \Delta_{in}^2(\Psi_r(x)) dx} \leq |\lambda| \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m \sqrt{\int_a^b \int_a^b \{ \dots \}^2 dx d\xi} \cdot \sqrt{\Phi'_{n-1}}.$$

Тим самим отримано ще одну достатню ознаку збіжності, яка узагальнює умови (29.1) і (15.3)

$$\bar{\varepsilon}_4 = |\lambda| \max_{l,r} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^m \sqrt{\int_a^b \int_a^b \{ P_l^{ij}(\Psi_r(x)) \xi + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{q=0}^k \sum_{s=0}^m [hK_s^{iq}(\Psi_r(x)) - \tau_{sr}^{iq}] \times$$

$$\times \sum_{i=0}^k \sum_{p=0}^m M_{ps}^{iq}(\lambda) [K_{lp}^{ij}(\xi) - K_{lp}^{ij}]^2 dx d\xi} < 1. \quad (23.3)$$

Отже, доведена така теорема:

Теорема 2. Якщо виконуються умови, аналогічні умовам 1) – 3) §1 і $D(\lambda) \neq 0$, то нерівності (15.3), (16.3), (19.3), (20.3), (22.3), (23.3) будуть достатніми ознаками збіжності в серед-

ньому послідовності функцій $\{y_n(x)\}$ при $n \rightarrow \infty$ по координатно до функції $y_1(x) \in L^2$, які є розв'язками системи рівнянь (1.3).

Згущення. Достатні ознаки збіжності, викладені в §§ 1, 3, а також оцінки похибки n -го наближення §2 є узагальненнями відповідних умов і оцінок для інтегральних рівнянь типу Фредгольма, отриманих в роботах [57, 92].

§4. ПОБУДОВА АЛГОРИТМІВ ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ В ПРОСТОРІ L^p .

Для простоти в просторі L^p розглянемо рівняння

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi - \Delta(\xi)) d\xi, \quad (1.4)$$

в якому 1) λ – регулярне значення; 2) інтервал (a, b) – скінченний або нескінченний; 3) комплексно значні функції $f(x), K(x, \xi)$ від дійсних змінних x, ξ задані відповідно в областях: $[a - \tau_0, b]$ $a \leq x, \xi \leq b$ і задовольняють умови

$$\left\{ \int_a^b \left[\int_a^b |K(x - \Delta(x), \xi)|^q d\xi \right]^{p/2} dx \right\}^{1/p} < \infty, \\ \left\{ \int_a^b |f(x - \Delta(x))|^p dx \right\}^{1/p} < \infty; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (2.4)$$

$$\int_a^b |f(x - \Delta(x))| dx < \infty, \quad \int_a^b \text{vrai max}_{\xi} |K(x - \Delta(x), \xi)| dx < \infty \quad (p=1, q=\infty) \quad (3.4)$$

$$\text{vrai max}_x |f(x - \Delta(x))| < \infty, \quad \text{vrai max}_x \int_a^b |K(x - \Delta(x), \xi)| d\xi < \infty \quad (p=\infty, q=1) \quad (4.4)$$

4) $0 \leq \Delta(x) \leq \tau_0$ (особливий випадок не виключається), $\Delta(x)$ -неперервна функція, при чому $\Delta'(\delta(x)) \neq 1$, де $\delta(x)$ - функція, обернена до функції $F(x) = x - \Delta(x)$, $K(x - \Delta(x), \xi) \equiv 0$, якщо $F(x) \notin (a, b)$

За нульове наближення беремо довільну функцію $y_0(x) \in L^p$. В n -ому наближенні покладемо

$$y_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) [y_{n-1}(\xi - \Delta(\xi)) + \alpha_n(\xi)] d\xi, \quad (6.4)$$

$$\text{де } \alpha_n(x) = \int_a^b S_k(x, \eta) \delta_n(\eta - \Delta(\eta)) d\eta, \quad (7.4)$$

$$\delta_n(x) = y_n(x) - y_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, \dots,$$

$S_k(x, \eta)$ - довільна функція, яка задовольняє умови

$$S_k(x, \eta) = \int_a^b S_k(x, \xi) S_k(\xi, \eta) d\xi, \quad (8.4)$$

$$\left\{ \int_a^b \left[\int_a^b |S_k(x, \eta)|^q d\eta \right]^{p/q} dx \right\}^{1/p} < \infty \quad (9.4)$$

Враховуючи (7.4) і (8.4), n -е наближення зобразимо так

$$y_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) y_{n-1}(\xi - \Delta(\xi)) d\xi + \lambda \int_a^b M_k(x, \xi) [\alpha_n(\xi) - \alpha_{n-1}(\xi)] d\xi,$$

$$\text{де } M_k(x, \xi) = \int_a^b K(x, t) S_k(t, \xi) dt.$$

Отже,

$$\delta_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \delta_{n-1}(\xi - \Delta(\xi)) d\xi + \lambda \int_a^b M_k(x, \xi) [\alpha_n(\xi) - \alpha_{n-1}(\xi)] d\xi$$

і для визначення $\alpha_n(x)$ отримаємо лінійне інтегро-різницеве рівняння

$$\alpha_n(x) = \lambda \int_a^b S_k(x, \eta) \int_a^b K(\eta - \Delta(\eta), \xi) \beta_{n-1}(\xi - \Delta(\xi)) d\xi d\eta + \\ \lambda \int_a^b S_k(x, \eta) \int_a^b M_k(\eta - \Delta(\eta), \xi) [\alpha_n(\xi) - \alpha_{n-1}(\xi)] d\xi d\eta.$$

Очевидно, ввівши позначення

$$H_k(x, \xi) = \int_a^b S_k(x, \eta) M_k(\eta - \Delta(\eta), \xi) d\eta, \quad (10,4)$$

$$\varepsilon_{n-1}(x) = f(x) - y_{n-1}(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) y_{n-1}(\xi - \Delta(\xi)) d\xi, \quad (11.4)$$

$$g_{n-1}(x) = \int_a^b S_k(x, \eta) \beta_{n-1}(\eta - \Delta(\eta)) d\eta, \quad (12.4)$$

будемо мати

$$\alpha_n(x) = g_{n-1}(x) + \lambda \int_a^b H_k(x, \xi) \alpha_n(\xi) d\xi.$$

Припустимо, що λ не є власним значенням ядра $H_k(x, \xi)$. Тоді $\alpha_n(x)$ можна виразити через резольвенту

$$\alpha_n(x) = g_{n-1}(x) + \lambda \int_a^b R_k(x, \xi, \lambda) g_{n-1}(\xi) d\xi \quad (13.4)$$

$$\text{де } R_k(x, \xi, \lambda) = H_k(x, \xi) + \lambda \int_a^b H_k(x, t, \lambda) R_k(x, t, \lambda) dt.$$

І. Нехай $\{\varphi_i(x)\}$ і $\{\psi_i(x)\}$ системи лінійно-незалежних функцій, що належать відповідно просторам L^p і L^q .

Тоді функціональні поправки можна визначити за формулою

$$\alpha_n(x) = \sum_{i=1}^k C_m \varphi_i(x) \quad (14.4)$$

в якій коефіцієнти C_m визначаються з умов

$$\int_a^b [\alpha_n(x) - \delta_n(x - \Delta(x))] \overline{\Psi}_i(x) dx = 0; \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (15.4)$$

Підставивши (14.4) в (15.4), для визначення C_{nj} дістанемо систему алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^k \gamma_{ij} C_{nj} = \int_a^b \overline{\Psi}_i(x) \delta_n(x - \Delta(x)) dx,$$

де

$$\gamma_{ij} = \int_a^b \varphi_j(x) \overline{\Psi}_i(x) dx.$$

Нехай

$$D_k = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{k1} & \dots & \gamma_{kk} \end{vmatrix} \neq 0,$$

тоді

$$C_{nj} = \sum_{i=1}^k \frac{D_{ij}}{D_k} \int_a^b \overline{\Psi}_i(x) \delta_n(x - \Delta(x)) dx, \quad (16.4)$$

де D_{nj} - алгебраїчне доповнення елемента γ_{ij} . Тепер рівність (14.4) прийме вигляд (7.4), в якій

$$S_k(x, \eta) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{D_{ij}}{D_k} \varphi_j(x) \overline{\Psi}_i(\eta) \quad (17.4)$$

Легко бачити, що функція $S_k(x, \eta)$ задовольняє умови (8.4), (9.4), тому алгоритми (6.4), (14.4), (15.4) є частинним випадком алгоритму (6.4), (7.4).

Якщо системи функцій $\{\varphi_i(x)\}$ і $\{\Psi_i(x)\}$ - біортогональні і нормовані, то формули (16.4), (17.4) переписуться так

$$C_m = \int_a^b \overline{\Psi}_i(x) \delta_n(x - \Delta(x)) dx,$$

$$S_k(x, \eta) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(x) \overline{P}_i(\eta)$$

2. Коефіцієнти C_m можна також визначити з умов

$$\int_a^b \varepsilon_n(x - \Delta(x)) \overline{P}_i(x) dx = 0; \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (18.4)$$

де нев'язка $\varepsilon_n(x)$ визначається за формулою, аналогічною до (11.4).

Легко переконатись, що алгоритм (6.4), (14.4), (18.4) є частинним випадком загального алгоритму (6.4), (7.4).

Справді, з рівностей (6.4), (11.4) слідує

$$\begin{aligned} \int_a^b \delta_n(x - \Delta(x)) \overline{P}_i(x) dx &= \lambda \int_a^b \overline{P}_i(x) \int_a^b K(x - \Delta(x), \xi) \mu_n(\xi) d\xi dx = \\ &= \sum_{j=1}^k \gamma'_{ij} C_{mj}, \end{aligned} \quad (19.4)$$

$$\text{де } \gamma'_{ij} = \lambda \int_a^b \overline{P}_i(x) \int_a^b K(x - \Delta(x), \xi) p_j(\xi) d\xi dx.$$

При умові

$$D'_k = \begin{vmatrix} \gamma'_{11} & \dots & \gamma'_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma'_{k1} & \dots & \gamma'_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

система (19.4) має єдиний розв'язок

$$C_{mj} = \sum_{i=1}^k \frac{D'_{ij}}{D'_k} \int_a^b \overline{P}_i(x) \delta_n(x - \Delta(x)) dx,$$

де D'_{ij} - алгебраїчне доповнення елемента γ'_{ij} визначника D'_k .

Отже, при

$$S_k(x, \eta) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{D'_{ij}}{D'_k} \varphi_j(x) \overline{P}_i(\eta)$$

рівність (14.4) еквівалентна рівності (7.4), що і треба було довести.

Зауваження. У випадку простору L^2 коефіцієнти C_m можна визначити з умови мінімуму функціоналів $\int_a^b \epsilon_n(x - \Delta(x)) dx$.

При цьому не важко показати, що запропонований алгоритм також буде частинним випадком алгоритму (6.4), (7.4).

§5. ДОВЕДЕННЯ ЗБІЖНОСТІ ТА ОЦІНКИ ПОХИБКИ.

1. Доведемо збіжність алгоритму (6.4), (7.4). З (6.4) і (11.4) випливає

$$\begin{aligned} \delta_n(x) = & \lambda \int_a^b [K(x, \xi) - M_k(x, \xi)] [\delta_{n-1}(\xi - \Delta(\xi)) - \alpha_{n-1}(\xi)] d\xi + \\ & + \lambda \int_a^b K(x, \xi) Z_n(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\epsilon_{n-1}(x) = \lambda \int_a^b [K(x, \xi) - M_k(x, \xi)] [\delta_{n-1}(\xi - \Delta(\xi)) - \alpha_{n-1}(\xi)] d\xi \quad (2.5)$$

Підставивши (2.5) в (12.4) і отриманий результат в (13.4), буде мати

$$\alpha_n(x) = \lambda \int_a^b \int_a^b Q_k(x, \eta, \lambda) [K(\eta - \Delta(\eta), \xi) - M_k(\eta - \Delta(\eta), \xi)] Z_{n-1}(\xi) d\xi d\eta \quad (3.5)$$

де

$$Q_k(x, \eta, \lambda) = S_k(x, \eta) + \lambda \int_a^b S_k(t, \eta) R_k(x, t, \lambda) dt, \quad (4.5)$$

$$Z_n(x) = \delta_n(x - \Delta(x)) - \alpha_n(x)$$

На підставі (1.5) і (3.5)

$$\delta_n(\eta - \Delta(\eta)) = \int_a^b \Omega_k(\xi, \eta, \lambda) Z_{n-1}(\xi) d\xi, \quad (5.5)$$

де

$$\Omega_k(\xi, \eta, \lambda) = \lambda K(\eta - \Delta(\eta)\xi) - \lambda M_k(\eta - \Delta(\eta)\xi) + \\ + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(\eta - \Delta(\eta)\lambda) Q_k(t, \eta, \lambda) [K(\eta - \Delta(\eta)\xi) - M_k(\eta - \Delta(\eta)\xi)] t \eta dt$$

Тому, враховуючи (4.5), (5.5) і (7.4), отримаємо

$$Z_n(x) = \int_a^b L_k(\xi, x, \lambda) Z_{n-1}(\xi) d\xi, \quad (6.5)$$

$$\text{де } L_k(\xi, x, \lambda) = \Omega_k(\xi, x, \lambda) - \int_a^b S_k(x, \eta) \Omega_k(\xi, \eta, \lambda) d\eta.$$

Застосовуючи нерівність Гельдера, з (5.5) і (6.5) маємо

$$\left\{ \int_a^b [\delta_n(\eta - \Delta(\eta))]^p d\eta \right\}^{1/p} \leq \Omega_k(\lambda) \left\{ \int_a^b [Z_{n-1}(\xi)]^p d\xi \right\}^{1/p}, \\ \left\{ \int_a^b [Z_n(x)]^p dx \right\}^{1/p} \leq L_k(\lambda) \left\{ \int_a^b [Z_{n-1}(\xi)]^p d\xi \right\}^{1/p} \leq L_k^{n-1}(\lambda) \left\{ \int_a^b [Z_1(\xi)]^p d\xi \right\}^{1/p} \quad (7.5)$$

де

$$\Omega_k(\lambda) = \left\{ \int_a^b \left[\int_a^b [\Omega_k(\xi, \eta, \lambda)]^q d\xi \right]^{p/q} d\eta \right\}^{1/p} \\ L_k(\lambda) = \left\{ \int_a^b \left[\int_a^b [L_k(\xi, x, \lambda)]^q d\xi \right]^{p/q} dx \right\}^{1/p}$$

Нарешті

$$\left\{ \int_a^b [\delta_n(\eta - \Delta(\eta))]^p d\eta \right\}^{1/p} \leq \Omega_k(\lambda) L_k^{n-2}(\lambda) \left\{ \int_a^b [Z_1(\xi)]^p d\xi \right\}^{1/p}.$$

$$\text{Якщо } L_k(\lambda) < 1, \text{ то } \left\{ \int_a^b [\delta_n(\eta - \Delta(\eta))]^p d\eta \right\}^{1/p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Легко довести, що $\left\{ \int_a^b |\delta_n(x)|^p dx \right\}^{1/p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Але простір L^p

повний, тому звідси випливає існування границі $y^*(x)$ послідовності $\{y_n(x)\}$. Очевидно, $y^*(x) \in L^p$ і є розв'язком рівняння (1.4).

Виведемо оцінку похибки n -го наближення. Для цього, враховуючи (5.5) і (7.5), оцінимо $\delta_n(\eta - \Delta(\eta))$

$$|\delta_n(\eta - \Delta(\eta))| \leq \Omega_k(\eta, \lambda) L_k^{n-2}(\lambda) \left\{ \int_a^b |Z_1(\xi)|^p d\xi \right\}^{1/p},$$

$$\text{де } \Omega_k(\eta, \lambda) = \left\{ \int_a^b |\Omega_k(\xi, \eta, \lambda)|^q d\xi \right\}^{1/q}.$$

Отже,

$$|y^*(\eta - \Delta(\eta)) - y_n(\eta - \Delta(\eta))| \leq \Omega_k(\eta, \lambda) \left\{ \int_a^b |Z_1(\xi)|^p d\xi \right\}^{1/p} \frac{L_k^{n-1}(\lambda)}{1 - L_k(\lambda)}$$

і остаточно дістанемо оцінку

$$\begin{aligned} \left\{ \int_a^b |y^*(x) - y_n(x)|^p dx \right\}^{1/p} &\leq \overline{M}^{1/p} \left\{ \int_a^b |\Omega_k(\eta, \lambda)|^p d\eta \right\}^{1/p} \times \\ &\times \left\{ \int_a^b |Z_1(\xi)|^p d\xi \right\}^{1/p} \cdot \frac{L_k^{n-1}(\lambda)}{1 - L_k(\lambda)}, \end{aligned} \quad (8.5)$$

де $\overline{M} = \sup_x [1 - \Delta'(\delta(x))]$ (мається на увазі та вітка, яка забезпечує найбільше значення виразу $1 - \Delta'(\delta(x))$). Таким чином доведено така теорема

Теорема 3*. Нехай виконуються умови 1) – 4) і $L_k(\lambda) < 1$.

Тоді послідовність функцій $\{y_n(x)\}$, яка визначається рівностями (6.4), (7.4), збігається при $n \rightarrow \infty$ до функції $y^*(x) \in L^p$, що є розв'язком інтегро-різницевого рівняння (1.4). При цьому має місце оцінка похибки (8.5).

Зауваження 1. Справедливе твердження: якщо виконуються умови 1) – 4) і $V(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b S_k(x, \eta) V(\eta) d\eta$, $V(x) \in L^p$ то $L_k(\lambda) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Доведення цього твердження відразу випливає з теореми 3 [57]. Тепер можна зробити висновок, що при достатньо великих k завжди можна вибрати функцію $S_k(x, \eta)$ так, щоб виконувалась достатня умова збіжності методу осереднення функціональних поправок.

2. У випадку алгоритмів (6.4), (14.4), (15.4) і (6.4), (14.4), (18.4) також можна користуватись достатньою умовою збіжності $L_k(\lambda) < 1$ і оцінкою похибки (8.5) при відповідному виборі функції $S_k(x, \eta)$, оскільки, як було показано вище, вони є частинними випадками загального алгоритму (6.4), (7.4). Але для алгоритму (6.4), (14.4), (18.4) можна вивести і інші достатні умови збіжності, а також оцінки похибки n -го наближення. Виходячи з (6.4), (11.4) і (14.4), після нескладних перетворень отримаємо

$$\varepsilon_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varepsilon_{n-1}(\xi - \Delta(\xi)) d\xi - \lambda \sum_{j=1}^k C_{mj} T_j(x) \quad (9.5)$$

де

$$T_j(x) = \int_a^b K(x, \xi) \rho_j(\xi) d\xi - \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) K(\xi - \Delta(\xi), t) \rho_j(t) dt d\xi.$$

* Твердження типу альтернативи Фредгольма є в роботі [62], в якій розглядається рівняння, аналогічне до (1.4) в просторі C .

Підставляючи (9.5) в (18.4), для визначення C_{nj} дістанемо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^k C_{ni} T_{ij} = \int_a^b \int_a^b K(x - \Delta(x), \xi) \varepsilon_{n-1}(\xi - \Delta(\xi)) \overline{P}_i(x) dx d\xi, \quad (10.5)$$

$$\text{в якій } T_{ij} = \int_a^b T_j(x - \Delta(x)) \overline{P}_i(x) dx.$$

Нехай визначник системи (10.5) $d_k \neq 0$. Тоді ця система має єдиний розв'язок

$$C_{nj} = \sum_{i=1}^k \frac{d_{ij}}{d_k} \int_a^b \int_a^b K(x - \Delta(x), \xi) \varepsilon_{n-1}(\xi - \Delta(\xi)) \overline{P}_i(x) dx d\xi, \quad (11.5)$$

підставивши який в (9.5), будемо мати

$$\varepsilon_n(x) = \int_a^b \overline{L}_k(x, \xi, \lambda) \varepsilon_{n-1}(\xi - \Delta(\xi)) d\xi, \quad (12.5)$$

де

$$\overline{L}_k(x, \xi, \lambda) = \lambda K(x, \xi) - \lambda \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{d_{ij}}{d_k} T_j(x) \int_a^b K(x - \Delta(x), \xi) \overline{P}_i(x) dx$$

Застосовуючи нерівність Гельдера до виразу (12.5), маємо

$$\varepsilon_n = \left\{ \int_a^b |\varepsilon_n(x - \Delta(x))|^p dx \right\}^{1/p} \leq \overline{L}_k(\lambda) \varepsilon_{n-1} \leq \overline{L}_k^{n-1}(\lambda) \varepsilon_1 \quad (13.5)$$

$$\text{де } \overline{L}_k(\lambda) = \left\{ \int_a^b \left[\int_a^b |\overline{L}_k(x - \Delta(x), \xi, \lambda)|^q d\xi \right]^{p/q} dx \right\}^{1/p}.$$

На підставі (6.4), (11.4) і (11.5) робимо висновок, що

$$\begin{aligned}\delta_n(x - \Delta(x)) &= \varepsilon_{n-1}(x - \Delta(x)) + \lambda \int_a^b K(x - \Delta(x), \xi) \chi_n(\xi) d\xi = \\ &= \varepsilon_{n-1}(x - \Delta(x)) + \lambda \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{d_{ij}}{d_k} \int_a^b \int_a^b K(x - \Delta(x), \xi) \chi_{n-1}(\xi - \Delta(\xi)) \times \\ &\times \overline{\Psi}_i(\lambda) dx d\xi \int_a^b K(x - \Delta(x), t) p_j(t) dt\end{aligned}$$

Звідси, використовуючи нерівності Мінковського і Гельдера, отримаємо

$$\left\{ \int_a^b |\delta_n(x - \Delta(x))|^p dx \right\}^{1/p} \leq C \varepsilon_{n-1} \quad (14.5)$$

де

$$C = 1 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{|d_{ij}|}{d_k} |\lambda| \int_a^b \overline{\Psi}_i(x) \sqrt[p]{\int_a^b |K(x - \Delta(x), \xi)|^q d\xi} dx \sqrt[p]{\int_a^b \int_a^b |K(x - \Delta(x), t) p_j(t)|^r dt}^p dx$$

Отже, якщо $\overline{L}_k(\lambda) < 1$, то $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а разом з ним і

$$\left\{ \int_a^b |\delta_n(x)|^p dx \right\}^{1/p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

В силу повноти простору L^p послідовність $\{y_n(x)\}$, яка визначається рівностями (6.4), (14.4), (18.4), збігається до деякої функції $y^*(x) \in L^p$, що очевидно, є розв'язком рівняння (1.4)

З нерівностей (14.5) і (13.5) відразу випливає оцінка похибки n -го наближення

$$\left\{ \int_a^b |y^*(x) - y_n(x)|^p dx \right\}^{1/p} = \overline{M}^{1/p} \left\{ \int_a^b |\varepsilon_1(x - \Delta(x))|^p dx \right\}^{1/p} \cdot C \frac{\overline{L}_k^{n-1}(\lambda)}{1 - \overline{L}_k(\lambda)} \quad (16.5)$$

Тим самим доведена теорема.

Теорема 4. Якщо виконується умова 1)-4), (15.5) і $d_k \neq 0$, то алгоритм (6.4), (14.4), (18.4) збігається до розв'язку рівняння (1.4). При цьому має місце оцінка похибки (16.5).

Зуваження 2. Все викладене в §§4,5 легко переноситься на більш загальні рівняння виду (1.1) і на їх системи виду (1.3).

§6. ПРИКЛАДИ

1. Легко перекоонатись, що інтегро-різницеве рівняння

$$y(x) = x^2 + \lambda x \int_0^1 \xi y(\xi - \sqrt{\xi}) d\xi \quad (1.6)$$

має єдиний розв'язок

$$y(x) = x^2 + \frac{5\lambda x}{28(15 = \lambda)} \quad (2.6)$$

при довільному λ , крім $\lambda = -15$. При $\lambda = -40$ алгоритм (8.1), (9.1) вже в першому наближенні дає точний розв'язок

$$y_1(x) = y(x) = x^2 + \frac{2}{7}x$$

Достатні ознаки збіжності (20.1), (22.1), (25.1), (26.1) і (28.1), (29.1) визначають відповідно такі інтервали, в яких метод осереднення функціональних поправок напевно збіжний

$$\begin{aligned} -9 \leq \lambda < 16,286...; & \quad |\lambda| < 9,486...; \\ -9,30... < \lambda < 11,52...; & \quad -7,85... < \lambda < 11,17...; \\ -8,34... < \lambda < 18,55...; \end{aligned}$$

в той час, як метод послідовних наближень збіжний при $|\lambda| < 9,486...;$

У випадку $|\lambda| = 1$

$$y(x) = x^2 + \frac{5}{448}x \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_4 \approx 0,052; \quad \varepsilon_2 \approx 0,105; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon'_3 = \varepsilon''_3 \approx 0,086.$$

Якщо через $\bar{y}_i(x); \quad i = 1, 2, 3;$ позначити відповідні наближення розв'язку рівняння (1.6), отримані методом послідовних наближень, то, виходячи з $y_0(x) = \bar{y}(x) = 0$, для інтегралу

$$U^2 = \int_0^1 (y_{\text{нм}} - y)^2 dx \quad \text{дістанемо такі значення}$$

$$\bar{U}_1^2 \approx 4,1 \cdot 10^{-5}; \quad U_1^2 \approx 5,9 \cdot 10^{-6}$$

$$\overline{U}_2^2 \approx 1,8 * 10^{-7};$$

$$U_2^2 \approx 1,2 * 10^{-9}$$

$$\overline{U}_3^2 \approx 8,3 * 10^{-10};$$

$$U_3^2 \approx 2,4 * 10^{-12}$$

2. Розглянемо інтегро-різницеве рівняння

$$y'(x) = \frac{13}{6}x + \frac{23}{105} + \int_0^1 (\sqrt{\xi} - x)y(\xi - \xi^2) d\xi, \quad (4.6)$$

яке має точний розв'язок $y(x)=x+1$.

Нехай $p=q=2$, $k=1$, $y_0(x)=0$, $\varphi_1(x)=\psi_1(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (орто-нормовані на відрізку $[-1;1]$ поліноми Лежандра). Для даного рівняння достатні ознаки збіжності алгоритмів (6.4), (14.4), (15.4) і (6.4), (14.4), (18.8) відповідно виконуються

$$L_1(1) \approx 0,22457 < 1; \quad \overline{L}_1(1) \approx 0,03468 < 1.$$

Легко бачити, що тут маємо особливий випадок, бо початкова множина вироджується в точку нуль, запізнююча функція $(x)=x^2$ перетворюється в початковій точці в нуль і на відрізку $[0;1]$ зростає не швидше від x .

Згідно з алгоритмом (6.4), (14.4), (15.4) в першому наближенні маємо

$$y_1(x) = \frac{13}{6}x + \frac{23}{105} + \alpha_1 \int_0^1 (\sqrt{\xi} - x) d\xi = \frac{13}{6}x + \frac{23}{105} + \alpha_1 \left(\frac{2}{3} - x \right),$$

$$\int_0^1 \left[\alpha_1 - \frac{13}{6}(x - x^2) - \frac{23}{105} - \alpha_1 \left(\frac{2}{3} - x + x^2 \right) \right] \frac{\sqrt{2}}{2} dx = 0;$$

$$\alpha_1 = \frac{731}{630};$$

$$y_1(x) = \frac{317}{315}x + \frac{134}{135} \approx 1,00635x + 0,99259.$$

Аналогічно в другому наближенні будемо мати

$$y_2(x) \approx 0,99996x + 1,00005$$

Алгоритм (6.4), (14.4), (18.4) в перших двох наближеннях дає

$$\overline{y}_1(x) \approx 0,99373x + 1,00101,$$

$$\overline{y}_2(x) \approx 0,99996x + 1,00001$$

Таблиця 1

x	$y(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$	$\bar{y}_1(x)$	$\bar{y}_2(x)$	$y_d(x)$
0.0	1.00000	0.99259	1.00005	1.00101	1.0001	0.97702
0.2	1.20000	1.19386	1.20004	1.19976	1.200002	1.18398
0.4	1.40000	1.39513	1.40003	1.39850	1.399994	1.39094
0.6	1.60000	1.59640	1.60003	1.59725	1.599986	1.59791
0.8	1.80000	1.79767	1.80002	1.79599	1.799978	1.80487
1.0	2.00000	1.99894	2.00001	1.99474	1.99997	2.01183

З таблиці 1 видно, що обидва запропоновані алгоритми для даного прикладу дають приблизно однаковий результат, в той час, як алгоритм К.Б.Бараталієва [3] в цьому випадку перетворюється в звичайний процес послідовних наближень і в шостому наближенні ($Y_6(x)$) дає гірший результат, ніж перше наближення, отримане методом осереднення функціональних поправок.

Таблиця 2

N	Похибка отримана при застосуванні алгоритму (6.4), (14.4), (15.4)		Похибка отримана при застосуванні алгоритму (6.4), (14.4), (18.4)	
	Точне значення	Обчислене за формулою (8.5)	Точне значення	Обчислене за формулою (16.5)
1	0,00447	0,03681	0,00279	0,02797
2	0,000024	0,00827	0,000015	0,000972

Отже, оцінки похибок n -го наближення (8.5) і (16.5) децю завищені, однак в багатьох випадках ними цілком успішно можна користуватись.

РОЗДІЛ II

НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

§1. ДОСТАТНІ УМОВИ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ ОСЕРЕДНЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПОПРАВОК У ВИПАДКУ РІВНЯННЯ ТИПУ ГАММЕРШТЕЙНА.

Розглянемо інтегро-різницеве рівняння виду

$$y(x) = \varphi(x) + \int_a^b K(x, \xi) f[\xi, y - \Delta_1 y(\xi), \dots, y(\xi - \Delta_k(\xi))] d\xi \quad (1.1)$$

в якому $\varphi(x)$ -- неперервна функція на відрізку $[a, \tau_0, b]$, -- неперервна функція від своїх аргументів в області

$$P: \{x \in [a, b]; \quad m_j \leq y(x - \Delta_j(x)) \leq M_j, \quad \} \quad j = 1, 2, \dots, K; \quad K(x, \xi) -$$

обмежене ядро першого роду (неперервне майже скрізь) або полярне ядро виду

$$K(x, \xi) = \frac{\bar{K}(x, \xi)}{|x - \xi|^\rho}; \quad 0 \leq \rho \leq 1,$$

$\bar{K}(x, \xi)$ -- неперервна функція при $x \in [a, b]$, $\xi \in [a, b]$, $j(x)$ -- також неперервні функції, причому $0 < j(x) \leq \tau_j$ при $x \in [a, b]$, $\tau_0 = \max_j \tau_j$; $K(x - \Delta_j(x), \xi) \equiv 0$ при $x - \Delta_j(x) < a$.

Для наближеного розв'язання рівняння (1.1) в першому наближенні покладемо

$$y_1(x) = \varphi(x) + \int_a^b K(x, \xi) (\xi; \alpha_{11}; \dots; \alpha_{k1}) d\xi,$$

де

$$\alpha_{11} = \frac{1}{h} \int_a^b y_1(x - \Delta_1(x)) dx; \quad h = b - a > 0 \quad y_0(x) = 0.$$

Звідси для визначення α_{11} дістанемо систему рівнянь

$$h\alpha_{jn} = \int_a^b \varphi(x - \Delta_{jn}(x)) dx + \int_a^b \int_a^b K(x - \Delta_{jn}(x), \xi) (\xi, \alpha_{1j}, \dots, \alpha_{kj}) d\xi dx. \quad (2.1)$$

В n-ому наближенні покладемо

$$y_n(x) = \varphi(x) + \int_a^b K(x, \xi) [\xi, y_{n-1}(\xi - \Delta_1(\xi)) + \alpha_{1n}; \dots; y_{n-1}(\xi - \Delta_k(\xi)) + \alpha_{kn}] d\xi, \quad (3.1)$$

де

$$\alpha_{jn} = \frac{1}{h} \int_a^b \delta_{jn}(x - \Delta_j(x)) dx; \quad \delta_{jn}(x) = y_n(x) - y_{n-1}(x). \quad (4.1)$$

Підставивши (3.1) в (4.1), будемо мати

$$h\alpha_{jn} = \int_a^b \int_a^b K(x - \Delta_j(x), \xi) \{ [\xi, y_{n-1}(\xi - \Delta_1(\xi)) + \alpha_{1n}; \dots; y_{n-1}(\xi - \Delta_k(\xi)) + \alpha_{kn}] - [\xi, y_{n-2}(\xi - \Delta_1(\xi)) + \alpha_{1,n-1}; \dots; y_{n-2}(\xi - \Delta_k(\xi)) + \alpha_{k,n-1}] \} d\xi dx \quad (5.1)$$

Нехай

$$\leq [x, y(x - \Delta_1(x)); \dots; y(x - \Delta_k(x))] \leq F,$$

$$\bar{F} = \max(|\cdot|, |F|), \quad N_j = \frac{1}{h} \int_a^b \int_a^b |K(x - \Delta_j(x), \xi)| d\xi dx,$$

$$L = \sup_x \int_a^b |K(x, \xi)| d\xi \quad (6.1)$$

Якщо виконуються умови

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_x [\varphi(x - \Delta_j(x)) + \bar{F}] \int_a^b |K(x - \Delta_j(x), \xi)| dx + N_j(\bar{F} -) \leq M, \\ \inf_x [\varphi(x - \Delta_j(x)) - \bar{F}] \int_a^b |K(x - \Delta_j(x), \xi)| dx - N_j(\bar{F} -) \geq m, \end{array} \right. \quad (6.1)$$

то легко довести, що система рівнянь (2.1) має єдиний дійсний розв'язок, який задовольняє умову $m_j < \alpha_{j1} < M_j$, а система рівнянь (5.1) має єдиний дійсний розв'язок, який задовольняє умову $|\alpha_{jm}| \leq N_j(F^-)$. При цьому

$$|v_{n-1}(x) - \varphi(x)| \leq L\bar{F}, \quad m_j \leq y_{n-1}(x - \Delta_j(x)) + \alpha_{jm} \leq M_j.$$

Ввівши позначення

$$Z_{jm}(x - \Delta_j(x)) = y_{n-1}(x - \Delta_j(x)) + \alpha_{jm}; \quad K_j(\xi) = \frac{1}{h} \int_a^b K(x - \Delta_j(x), \xi) d\xi$$

$$R_j(x - \Delta_j(x), \xi) = K(x - \Delta_j(x), \xi) - K_j(\xi),$$

на підставі (3.1) і (5.1) будемо мати

$$\begin{aligned} Z_{jm}(x - \Delta_j(x)) &= \varphi(x - \Delta_j(x)) + \int_a^b R_j(x - \Delta_j(x), \xi) [\xi, \\ &Z_{1,n-1}(\xi - \Delta_1(\xi)), \dots, Z_{k,n-1}(\xi - \Delta_k(\xi))] d\xi + \\ &+ \int_a^b K_j(\xi) [\xi, Z_{1n}(\xi - \Delta_1(\xi)), \dots, Z_{kn}(\xi - \Delta_k(\xi))] d\xi. \end{aligned}$$

Надалі будемо вважати, що в області P функція задовольняє умову Ліпшица

$$|(\xi, Z_1, \dots, Z_k) - (\xi, \bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_k)| \leq \sum_{s=1}^k A_s(\xi) |Z_s - \bar{Z}_s|. \quad (7.1)$$

Тоді

$$\begin{aligned} |\delta Z_{jm}(x - \Delta_j(x))| &= |Z_{jm} - Z_{j,n-1}| = |\delta_{n-1}(x - \Delta_j(x)) - \alpha_{j,n-1} + \alpha_{jm}| \leq \\ &\leq \sum_{s=1}^k \int_a^b |R_j(x - \Delta_j(x), \xi)| \cdot |\delta Z_{s,n-1}(\xi - \Delta_s(\xi))| A_s(\xi) d\xi + \\ &+ \sum_{s=1}^k \int_a^b |K_j(\xi)| \cdot |\delta Z_{sn}(\xi - \Delta_s(\xi))| A_s(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Якщо ядро $K(x - \Delta_j(x), \xi) \in L^2$, то

$$\begin{aligned} \|\delta Z_m\| \leq & \sum_{s=1}^k \sqrt{\int_a^b \int_a^b R_j^2(x - \Delta_j(x), \xi) A_s^2(\xi) d\xi dx} \|\delta Z_{s, n-1}\| + \\ & + \sum_{s=1}^k \sqrt{h \int_a^b K_j^2(\xi) A_s^2(\xi) d\xi} \cdot \|\delta Z_{sm}\|. \end{aligned} \quad (9.1)$$

З нерівності (8.1) і (9.1) відразу випливають дві достатні ознаки збіжності (відповідно рівномірної і збіжності в середньому) методу Д. Д. Соколова, аналогічні умовам М. С. Курпеля [53] для інтегральних рівнянь без відхилення аргументу

$$E_1 = \frac{A}{1-B} < 1 \quad (B < 1); \quad \bar{E}_1 = \frac{C}{1-D} < 1 \quad (D < 1); \quad (10.1)$$

де

$$A = \max_j \sup_x \sum_{s=1}^k \int_a^b |R_j(x - \Delta_j(x), \xi)| A_s(\xi) d(\xi);$$

$$B = \max_j \sum_{s=1}^k \int_a^b |K_j(\xi)| A_s(\xi) d\xi,$$

$$C = \max_j \sum_{s=1}^k \sqrt{\int_a^b \int_a^b R_j^2(x - \Delta_j(x), \xi) A_s^2(\xi) d\xi dx};$$

$$D = \max_j \sum_{s=1}^k \sqrt{h \int_a^b |K_j(\xi)| A_s^2(\xi) d\xi},$$

2. Помноживши нерівність (8.1) на $|K_p(x)| A_j(x)$ і проінтегрувавши обидві частини по x , отримаємо

$$\begin{aligned} \int_a^b |\delta z_{jn}(x - \Delta_j(x))| \cdot |K_p(x)| A_j(x) dx \leq & N_{pj} P_{jn} + \\ & + \sum_{s=1}^k \int_a^b Q_{pjs}(\xi) \delta z_{s, n-1}(\xi - \Delta(\xi)) |d\xi, \end{aligned} \quad (11.1)$$

де

$$N_{pm} = \int_a^b |K_p(x)| A_j(x) dx, \quad P_{pm} = \sum_{s=1}^k \int_a^b \delta z_{s,m}(\xi - \Delta_s(\xi)) |K_j(\xi)| \cdot A_s(\xi) d\xi,$$

$$Q_{pjs}(\xi) = A_s(\xi) \int_a^b \{ |R_j(x - \Delta_j(x), \xi)| - |K_p(x)| A_j(x) \} dx.$$

Просумувавши (11.1) по j , дістанемо систему нерівностей

$$P_{pm} \leq \sum_{s=1}^k N_{pj} P_{pm} + \sum_{j=1}^k \sum_{s=1}^k \int_a^b Q_{pjs}(\xi) |\delta z_{s,m-1}(\xi - \Delta_s(\xi))| d\xi; \quad p = 1, 2, \dots, k,$$

яка має розв'язок

$$P_{pm} \leq \frac{1}{D} \sum_{s=1}^k \int_a^b |\delta z_{s,m-1}(\xi - \Delta_s(\xi))| B_{js}(\xi) d\xi, \quad (12.1)$$

де

$$B_{js}(\xi) = \sum_{q=1}^k \sum_{p=1}^k D_{qj} Q_{qps}(\xi); \quad q = 1, 2, \dots, k,$$

при умові, що

$$D = \begin{vmatrix} 1 - N_{11} & \dots & -N_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ -N_{k1} & \dots & 1 - N_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

і всі алгебраїчні доповнення $D_{qj} > 0$.

З нерівностей (8.1) і (12.1) випливає

$$|\delta z_{pm}(x - \Delta_j(x))| \leq \sum_{s=1}^k \int_a^b [|R_j(x - \Delta_j(x), \xi) A_s(\xi) + \frac{1}{D} B_{js}(\xi)] \cdot |\delta z_{s,m-1}(\xi - \Delta_s(\xi))| d\xi \quad (13.1)$$

У випадку інтегрованості ядра $K(x - \Delta_j(x), \xi)$ разом з своїм квадратом будемо мати

$$\|\delta z_m\| \leq \sum_{s=1}^k \sqrt{\int_a^b \int_a^b [|R_j(x - \Delta_j(x), \xi) A_s(\xi) + \frac{1}{D} B_{\mu}(\xi)]^2 d\xi dx} \cdot \|\delta z_{s,n-1}\| \quad (14.1)$$

Звідси дістанемо, ще дві більш загальні достатні умови збіжності методом осереднення функціональних поправок

$$\varepsilon_2 = \max_j \sup_x \sum_{s=1}^k \int_a^b [R_j(x - \Delta_j(x), \xi) A_s(\xi) + \frac{1}{D} B_{\mu}(\xi)] d\xi < 1, \quad (15.1)$$

$$\varepsilon_2 = \max_j \sum_{s=1}^k \sqrt{\int_a^b \int_a^b [R_j(x - \Delta_j(x), \xi) A_s(\xi) + \frac{1}{D} B_{\mu}(\xi)]^2 d\xi dx} < 1 \quad (16.1)$$

Можна користуватись більш простими, але разом з цим і більш грубими умовами

$$\varepsilon_2 = C + \max_j \sum_{s=1}^k \frac{1}{D} \sqrt{h \int_a^b B_{\mu}^2(\xi) d\xi} < 1, \quad (17.1)$$

$$\varepsilon_2 = C \left(1 + \max_j \sum_{q=1}^k \sum_{p=1}^k \frac{D q_j}{D} \sqrt{h \int_a^b K_q^2(x) A_p^2 dx} \right) < 1, \quad (18.1)$$

отриманими з умови (16.1) за допомогою відомих інтегральних нерівностей.

3. На основі (3.1), (5.1) і (7.1) маємо

$$|\delta_n(x - \Delta_j(x)) - \alpha_{jm}| \leq \sum_{s=1}^k \int_a^b |R_j(x - \Delta_j(x), \xi)| \cdot |\delta z_{s,n}(\xi - \Delta_s(\xi))| A_s(\xi) d\xi.$$

Тому

$$\begin{aligned} \sqrt{\phi_{jm}} &= \sqrt{\int_a^b [\delta_n(x - \Delta_j(x)) - \alpha_{jm}]^2 dx} \leq \\ &\leq \sum_{s=1}^k \sqrt{\int_a^b \int_a^b R_j^2(x - \Delta_j(x), \xi) A_s^2(\xi) d\xi dx} \cdot \sqrt{\phi_{s,n-1} + h \alpha_{s,n}^2}. \end{aligned}$$

Виходячи з (5.1) і (7.1), оцінимо $|\alpha_{sn}|$

$$|\alpha_m| \leq \sum_{p=1}^k N_{ip} |\alpha_{pm}| + \sum_{p=1}^k \int_a^b \beta_{n-1}(\xi - \Delta_s(\xi)) - \alpha_{p,n-1} | \cdot | K_p(\xi) | A_p(\xi) d\xi.$$

При умовах $D > 0$ і $D_{qs} > 0$ остання система нерівностей має розв'язок

$$|\alpha_{sn}| \leq \frac{1}{D} \sum_{p=1}^k \int_a^b \sum_{q=1}^k D_{qs} \beta_{n-1}(\xi - \Delta_s(\xi)) - \alpha_{p,n-1} | \cdot | K_q(\xi) | A_p(\xi) d\xi. \quad (19.1)$$

тобто

$$h\alpha_{sn}^2 \leq \frac{1}{D^2} \left[\sum_{p=1}^k T_{ps} \sqrt{\phi_{p,n-1}} \right]^2$$

де

$$T_{ps}^2 = h \int_a^b \sum_{q=1}^k D_{qs} [K_q(\xi) | A_p(\xi)]^2 d\xi.$$

Нарешті,

$$\begin{aligned} \sqrt{\phi_{jn}} &\leq \sum_{q=1}^k \sqrt{\int_a^b \int_a^b R_j(x - \Delta_j(x), \xi) A_s^2(\xi) d\xi dx} \cdot \\ &\cdot \sqrt{\phi_{s,n-1} + \frac{1}{D^2} \left[\sum_{p=1}^k T_{ps} \sqrt{\phi_{p,n-1}} \right]^2}. \end{aligned} \quad (20.1)$$

Звідси отримаємо таку достатню умову збіжності

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = \max_j \sum_{s=1}^k \sqrt{\int_a^b \int_a^b R_j^2(x - \Delta_j(x), \xi) A_s^2(\xi) d\xi dx} \cdot \\ \sqrt{1 + \frac{1}{D^2} \left(\sum_{p=1}^k T_{ps} \right)^2} < 1 \end{aligned} \quad (21.1)$$

§2. Оцінка похибки n-го наближення.

При виведенні оцінок похибки n-го наближення будемо користуватись позначеннями

$$\delta_n = \max_j \sup_x |\delta z_{jn}(x - \Delta_j(x))|;$$

$$\delta = \max_j \sup_x |y_1(x - \Delta_j(x)) - \alpha_{j1}|;$$

$$\bar{\delta}_n = \max_j \left\{ \int_a^b |\delta z_{jn}(x - \Delta_j(x))|^2 dx \right\}^{1/2};$$

$$\bar{\delta} = \max_j \left\{ \int_a^b |y_1(x - \Delta_j(x)) - \alpha_{j1}|^2 dx \right\}^{1/2}$$

Тоді на підставі (8.1), (9.1), (13.1) і (14.1) отримаємо

$$\delta_n \leq \mathcal{E}_i, \delta_{n-1} \leq \dots \leq \mathcal{E}_i^{n-2} \delta_2; \quad \bar{\delta}_n \leq \mathcal{E}_i^{n-2} \bar{\delta}_2; \quad i = 1, 2.$$

Враховуючи (3.1) і (7.1) будемо мати

$$\begin{aligned} |\delta_n(x)| &\leq \sum_{s=1}^k \int_a^b |K(x, \xi)| \cdot |\delta z_{sn}(\xi - \Delta_s(\xi))| A_s(\xi) d\xi \leq \\ &\leq \sum_{s=1}^k |K(x, \xi)| A_s(\xi) d\xi \delta_2 \mathcal{E}_i^{n-2}; \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Приймаючи до уваги (19.1), робимо висновок

$$\delta_2 = \max_j \sup_x |\delta z_{j2}(x - \Delta_j(x))| \leq$$

$$\leq \delta \max_j \left(1 + \frac{1}{D} \sum_{p=1}^k \int_a^b \sum_{q=1}^k D_{pq} |K_q(\xi)| A_s(\xi) d\xi \right).$$

остаточно дістанемо дві оцінки

$$|y(x) - y_n(x)| \leq A_{\mathcal{E}_j} \frac{\mathcal{E}_i^{n-1}}{1 - \mathcal{E}_i}; \quad i = 1, 2,$$

де

$$A_{\varepsilon_1} = A_{\varepsilon_2} = \delta \max_i \left(1 + \frac{1}{D} \sum_{p=1}^k \int_a^b \sum_{q=1}^k D_{pq} |K_{pq}(\xi)| A_s(\xi) d\xi \right) \cdot \text{Цілком} \\ \cdot \sup_x \sum_{s=1}^k \int_a^b |K(x, \xi)| A_s(\xi) d\xi.$$

аналогічно можна вивести такі оцінки

$$\left\{ \int_a^b |y(x) - y_n(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq A_{\varepsilon_i} \cdot \frac{\varepsilon_i^{n-1}}{1 - \varepsilon_i} \quad i = 1, 2, \quad (2.2)$$

де

$$A_{\varepsilon_1} = A_{\varepsilon_2} = \bar{\delta} \max_j \sqrt{1 + \frac{1}{D^2} \left(\sum_{p=1}^k T_{pj} \right)^2} \times \\ \times \sum_{s=1}^k \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, \xi) A_s^2(\xi) d\xi dx}.$$

На основі (19.1) – (21.1) з (3.1) слідує

$$|\delta_n(x)| \leq \sum_{s=1}^k \sqrt{\int_a^b K^2(x, \xi) A_s^2(\xi) d\xi} \times \\ \times \sqrt{1 + \frac{1}{D^2} \left(\sum_{p=1}^k T_{ps} \right)^2} \cdot \sqrt{\phi_1} \cdot \bar{\varepsilon}_3^{n-2},$$

де

$$\phi_n = \max_s \phi_{sn}.$$

Звідси

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \bar{\delta} \sup_x \sum_{s=1}^k \sqrt{\int_a^b K^2(x, \xi) A_s^2(\xi) d\xi} \cdot \\ \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{D^2} \left(\sum_{p=1}^k T_{ps} \right)^2} \cdot \frac{\bar{\varepsilon}_3^{n-1}}{1 - \varepsilon_3} \quad (3.2)$$

Результати §1.2 можна сформулювати в вигляді теореми.

Теорема 5. Якщо функція f – неперервна, задовольняє умову Літшиця (7.1) і виконуються нерівності (6.1), а також хоч би

одна з нерівностей (10.1) (або відповідно (15.1), (16.1), (17.1), (18.1), (21.1) при $D>0$ і $D_{ij}>0$), то при $n \rightarrow \infty$ послідовність $\{y_n(x)\}$ збігається до функції $y(x)$, яка є розв'язком нелінійного інтегро-різницевого рівняння (1.1). При цьому мають місце оцінки похибки n -го наближення (1.2), (2.2), (3.2).

§3. НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Дослідимо питання про застосування методу осереднення функціональних поправок до наближеного розв'язування системи інтегро-різницевих рівнянь типу Фредгольма

$$y_i(x) = \varphi_i(x) + \int_a^b K_i(x, \xi) f_i[\xi, y_1(\xi - \Delta_1(\xi)); \dots; y_1(\xi - \Delta_k(\xi)); y_2(\xi - \Delta_1(\xi)), \dots, y_2(\xi - \Delta_k(\xi)), \dots, y_k(\xi - \Delta_1(\xi)), \dots, y_k(\xi - \Delta_k(\xi))] d\xi; \quad i = 1, \dots, k, \quad (1.3)$$

в якому $\varphi_i(x)$ — неперервні функції на відрізку $[a - \tau_0, b]$, f_i — неперервні функції від своїх аргументів в області $R: \{x \in [a, b], \quad m_{ij} \leq y_i(x - \Delta_j(x)) \leq M_{ij}\} \quad i, j = 1, 2, \dots, k,$

які задовольняють умову Ліпшица

$$|f_i(\xi, y_{11}; y_{12}; \dots; y_{kk}) - f_i(\xi, \bar{y}_{11}; \bar{y}_{12}; \dots; \bar{y}_{kk})| \leq \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^k A_{i+rs}(\xi) |y_{rs} - \bar{y}_{rs}|, \quad (2.3)$$

$K_i(x, \xi)$ — ядра, які задовольняють ті ж умови, що і функція $K(x, \xi)$ в §1 цього розділу, $\Delta_j(x)$ — неперервні функції, причому $0 \leq \Delta_j(x) \leq \tau_j$ при $x \in [a, b]$, $\tau_0 = \max_j \tau_j$.

Для наближеного розв'язування системи (1.3) в першому наближенні покладемо

$$y_i^{(1)}(x) = \varphi_i(x) + \int_a^b K_i(x, \xi) f_i(\xi, \alpha_{11}; \alpha_{12}; \dots; \alpha_{kk}) d\xi,$$

де

$$\alpha_{ij}^{(1)} = \frac{1}{h} \int_a^b y_i^{(1)}(x - \Delta_j(x)) dx; \quad y_i^{(0)} = 0.$$

Звідси для визначення $\alpha_{ij}^{(1)}$ дістанемо таку систему рівнянь

$$h\alpha_{ij}^{(1)} = \int_a^b \varphi_i(x - \Delta_j(x)) dx + \int_a^b \int_a^b K_i(x - \Delta_j(x), \xi) \cdot f_i(\xi, \alpha_{11}; \alpha_{12}; \dots; \alpha_{kk}) d\xi \quad (3.3)$$

В n-ому наближенні будемо мати

$$y_i^{(n)}(x) = \varphi_i(x) + \int_a^b K_i(x, \xi) f_i[\xi, y_1^{(n-1)}(\xi - \Delta_1(\xi)) + \alpha_{11}^{(n)}; \dots; y_k^{(n-1)}(\xi - \Delta_k(\xi)) + \alpha_{kk}^{(n)}] d\xi, \quad (4.3)$$

де

$$\alpha_{ij}^{(n)} = \frac{1}{h} \int_a^b \delta_i^{(n)}(x - \Delta_j(x)) dx, \quad \delta_i^{(n)}(x) = y_i^{(n)}(x) - y_i^{(n-1)}(x) \quad (5.3)$$

З рівностей (4.3) і (5.3) дістанемо

$$h\alpha_{ij}^{(n)} = \int_a^b \int_a^b K_i(x - \Delta_j(x), \xi) \{ f_i[\xi, y_1^{(n-1)}(\xi - \Delta_1(\xi) + \alpha_{11}^{(n)}); \dots; y_k^{(n-1)}(\xi - \Delta_k(\xi) + \alpha_{kk}^{(n)})] - f_i[\xi, y_1^{(n-2)}(\xi - \Delta_1(\xi)) + \alpha_{11}^{(n-1)}; \dots; y_k^{(n-2)}(\xi - \Delta_k(\xi)) + \alpha_{kk}^{(n-1)}] \} d\xi dx \quad (6.3)$$

Нехай

$$f_i \leq f_i[x, y_1(x - \Delta_1(x)), y_2(x - \Delta_2(x)), \dots, y_k(x - \Delta_k(x))] \leq F_i,$$

$$\overline{F}_i = \max(|f_i|, |F_i|), \quad N_{ij} = \frac{1}{h} \int_a^b \int_a^b K_i(x - \Delta_j(x), \xi) |d\xi| dx,$$

$$L_i = \sup_x \int_a^b \int_a^b |K_i(x, \xi)| d\xi.$$

Якщо виконуються умови

$$\begin{cases} \sup_x [\varphi_i(x - \Delta_i(x)) + \bar{F}_i \int_a^b |K_i(x - \Delta_i(x), \xi)| d\xi] + N_{ij}(F_i - f_i) \leq M_{ij}, \\ \inf_x [\varphi_i(x - \Delta_i(x)) - \bar{F}_i \int_a^b |K_i(x - \Delta_i(x), \xi)| d\xi] - N_{ij}(F_i - f_i) \geq m_{ij}, \end{cases} \quad (7.3)$$

то неважко довести, що система рівнянь (3.3) має єдиний дійсний розв'язок, який задовольняє умову $m_{ij} < \alpha_{ij}^{(1)} < M_{ij}$, а система рівнянь (6.3) має єдиний дійсний розв'язок, який задовольняє умову $|\alpha_{ij}^{(n)}| \leq N_{ij}(F_i - f_i)$. При цьому

$$|y_i^{(n-1)} - \varphi_i(x)| \leq L_i \bar{F}_i; m_{ij} \leq y_i^{(n-1)}(x - \Delta_i(x)) + \alpha_{ij}^{(n)} \leq M_{ij};$$

1. Поклавши

$$Z_{ij}^{(n)}(x - \Delta_j(x)) = (y_i^{(n-1)}(x - \Delta_j(x)) + \alpha_{ij}^{(n)});$$

$$K_{ij}(\xi) = \frac{1}{h} \int_a^b |K_i(x - \Delta_j(x), \xi)| dx,$$

$$R_{ij}(x - \Delta_j(x), \xi) = K_i(x - \Delta_j(x), \xi) - K_{ij}(\xi),$$

на підставі (4.3) і (6.3) будемо мати

$$Z_{ij}^{(n)}(x - \Delta_j(x)) = \varphi_i(x - \Delta_j(x)) + \int_a^b R_{ij}(x - \Delta_j(x), \xi) f_i[\xi,$$

$$Z_{11}^{(n-1)}(\xi - \Delta_1(\xi)), \dots, Z_{kk}^{(n-1)}(\xi - \Delta_k(\xi))] d\xi +$$

$$+ \int_a^b K_{ij}(\xi) f_i[\xi, Z_{11}^{(n)}(\xi - \Delta_1(\xi)), \dots, Z_{kk}^{(n)}(\xi - \Delta_k(\xi))] d\xi.$$

Тоді

$$\begin{aligned} & |\delta Z_{ij}^{(n)}(x - \Delta_j(x))| = |Z_{ij}^{(n)} - Z_{ij}^{(n-1)}| = \delta_{ij}^{(n-1)}(x - \Delta_j(x)) - \alpha_{ij}^{(n-1)} + \alpha_{ij}^{(n-1)} \\ & \leq \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^k \int_a^b |R_{ij}(x - \Delta_j(x), \xi) \cdot \delta Z_{is}^{(n)}(\xi - \Delta_s(\xi))| A_{is}(\xi) d\xi + \\ & + \int_a^b K_{ij}(\xi) \cdot |\delta Z_{is}^{(n)}(x - \Delta_s(x))| A_{is}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Якщо ядра $K_{ij}(x - \Delta_j(x), \xi)$ належать простору L^2 , то

$$\begin{aligned} \|\delta Z_{ij}^{(n)}\| & \leq \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^k \left[\sqrt{\int_a^b \int_a^b R_{ij}^2(x - \Delta_j(x), \xi) A_{is}^2(\xi) d\xi dx} \|\delta Z_{ij}^{(n-1)}\| + \right. \\ & \left. + \sqrt{h \int_a^b K_{ij}^2(\xi) A_{is}^2(\xi) d\xi} \|\delta Z_{ij}^{(n)}\| \right]. \quad (9.3) \end{aligned}$$

З нерівностей (8.3) і (9.3) випливають дві достатні умови збіжності методом осереднення функціональних поправок відповідно в просторах C і L^2 :

$$\widehat{\mathcal{E}}_1 = \frac{\widehat{A}}{1 - \widehat{B}} < 1 \quad (\widehat{B} < 1); \quad \widehat{\mathcal{E}}_1 = \frac{\widehat{C}}{1 - \widehat{D}} \quad (\widehat{D} < 1), \quad (10.3)$$

де

$$\widehat{A} = \max_{i,j} \sup_x \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^k \int_a^b |R_{ij}(x - \Delta_j(x), \xi) A_{ts}(\xi)| d\xi;$$

$$\widehat{B} = \max_{i,j} \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^k \int_a^b |K_{ij}(\xi) A_{ts}(\xi)| d\xi;$$

$$\widehat{C} = \max_{i,j} \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^k \sqrt{\int_a^b \int_a^b R_{ij}^2(x - \Delta_j(x), \xi) A_{ts}^2(\xi) d\xi dx},$$

$$\widehat{D} = \max_{i,j} \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^k \sqrt{h \int_a^b K_{ij}^2(\xi) A_{ts}^2(\xi) d\xi}.$$

2. Помноживши нерівність (8.3) на $|K_{pq}(x)|A_{pq}(x)$; $p, q=1, \dots, k$, і проінтегрувавши обидві частини по x , отримаємо

$$\int_a^b |\delta Z_{ij}^{(n)}(x - \Delta_i(x))| \cdot |K_{pq}(x)| A_{pq}(x) dx \leq N_{pq}^{ij} P_{ij}^{(n)} + \\ + \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^k \int_a^b Q_{tsj}^{ipq}(\xi) |\delta Z_{ts}^{(n-1)}(\xi - \Delta_s(\xi))| d\xi, \quad (11.3)$$

де

$$N_{pq}^{ij} = \int_a^b |K_{pq}(x)| A_{pq}(x) dx; \quad P_{ij}^{(n)} = \\ = \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^k \int_a^b |\delta Z_{ts}^{(n)}(\xi - \Delta_s(\xi))| \cdot |K_{ij}(\xi)| A_{pq}(\xi) d\xi, \\ Q_{tsj}^{ipq}(\xi) = A_{ts}(\xi) \int_a^b |R_{ij}(x - \Delta_j(x), \xi)| \cdot |K_{pq}(x)| A_{pq}(x) dx.$$

Просумувавши (11.3) по i, j дістанемо таку систему нерівностей:

$$P_{pq}^{(n)} \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k N_{pq}^{ij} P_{ij}^{(n)} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^k \int_a^b Q_{tsj}^{ipq}(\xi) |\delta Z_{ts}^{(n-1)}(\xi - \Delta_s(\xi))| d\xi,$$

яка має розв'язок

$$P_{ij}^{(n)} \leq \frac{1}{\widetilde{D}_1} \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^k \int_a^b |\delta Z_{ts}^{(n-1)}(\xi - \Delta_s(\xi))| \cdot B_{ts}^q(\xi) d\xi, \quad (12.3)$$

де

$$B_{ts}^q(\xi) = \sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^k \sum_{l=1}^k \sum_{r=1}^k \widehat{D}_{lr}^q Q_{tsq}^{plr}(\xi),$$

при умові, що визначник цієї системи $\widetilde{D}_1 > 0$ і всі алгебраїчні доповнення $\widehat{D}_b^q > 0$.

З нерівностей (8.3) і (12.3) маємо

$$|\delta Z_{is}^{(n-1)}(x - \Delta_j(x))| \leq \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^k \int_a^b [R_{ij}(x - \Delta_j(x), \xi) | A_{is}(\xi) + \frac{1}{\tilde{D}_i} B_{is}''(\xi)] \cdot |\delta Z_{is}^{(n-1)}(\xi - \Delta_s(\xi))| d\xi \quad (13.3)$$

У випадку інтегровності ядер $K_i(x - \Delta_j(x), \xi)$ разом з своїми квадратами будемо мати

$$\|\delta Z_{ij}^{(n)}\| \leq \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^k \sqrt{\int_a^b \int_a^b [R_{ij}(x - \Delta_j(x), \xi) | A_{is}(\xi) + \frac{1}{\tilde{D}_i} B_{is}''(\xi)]^2 d\xi dx} \cdot \|\delta Z_{is}^{(n-1)}\| \quad (14.3)$$

Звідси дістанемо ще дві більш загальні достатні умови збіжності, які відповідають умовам (15.1) і (16.1)

$$\widehat{\mathcal{E}}_2 = \max_{i,j} \sup_x \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^k \int_a^b [R_{ij}(x - \Delta_j(x), \xi) | A_{is}(\xi) + \frac{1}{\tilde{D}_i} B_{is}''(\xi)] d\xi < 1, \quad (15.3)$$

$$\widehat{\mathcal{E}}_2 = \max_{i,j} \sup_x \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^k \sqrt{\int_a^b [R_{ij}(x - \Delta_j(x), \xi) | A_{is}(\xi) + \frac{1}{\tilde{D}_i} B_{is}''(\xi)]^2 d\xi dx} < 1. \quad (16.3)$$

За допомогою нерівностей Мінковського і Буняковського-Шварца з (16.3) легко отримати достатні умови

$$\bar{E}'_2 = \bar{C} + \max_{i,j} \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^k \frac{1}{\tilde{D}_i} \sqrt{h \int_a^b [B_{is}''(\xi)]^2 d\xi} < 1, \quad (17.3)$$

$$\widetilde{\mathcal{E}}_2'' = \bar{C} (1 + \max_{i,j} \sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^k \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^k \frac{\tilde{D}_{tr}''}{\tilde{D}_i}).$$

$$\sqrt{h \int_a^b |K_b(x)|^2 A_{ipq}(x) dx} < 1, \quad (18.3)$$

більш жорсткі ($\widetilde{\mathcal{E}}_2 \leq \widetilde{\mathcal{E}}_2' \leq \widetilde{\mathcal{E}}_2''$), але разом з тим і більш прості.

2. На основі (4.3), (6.3) і (2.3) маємо

$$|\delta_i^{(n)}(x - \Delta_i(x)) - \alpha_{ij}^{(n)}| \leq \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^k \int_a^b |R_{ij}(x - \Delta_j(x), \xi)| \cdot \\ \cdot |\delta Z_{ts}^{(n)}(\xi - \Delta_s(\xi), \xi) A_{its}(\xi) d\xi,$$

Звідки

$$\sqrt{\Phi_{ij}^{(n)}} = \sqrt{\int_a^b [\delta_i^{(n)}(x - \Delta_j(x)) - \alpha_{ij}^{(n)}]^2 dx} \leq \\ \leq \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^k \sqrt{\int_a^b \int_a^b R_{ij}(x - \Delta_j(x), \xi) A_{its}^2(\xi) d\xi dx} \times \\ \times \sqrt{\Phi_{ts}^{(n-1)} + h[\alpha_{ts}^{(n)}]^2} \quad (19.3)$$

Оцінимо $|\alpha_{ts}^{(n)}|$, виходячи з (6.3) і (2.3),

$$|\alpha_{ij}^{(n)}| \leq \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^k N_{ij}^{ts} |\alpha_{ts}^{(n)}| + \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^k \int_a^b |\delta_i^{(n-1)}(\xi - \Delta_s(\xi)) - \alpha_{ts}^{(n-1)}| \cdot \\ \cdot |K_{ij}(\xi)| A_{its}(\xi) d\xi$$

При умовах $\bar{D}_1 > 0$ і $\bar{D}_{ij}^{ts} > 0$ ця система нерівностей має розв'язок

$$|\alpha_{ts}^{(n)}| \leq \frac{1}{\bar{D}_1} \sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^k \int_a^b \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \bar{D}_{ij}^{ts} |\delta_p^{(n-1)}(\xi - \Delta_q(\xi)) - \alpha_{pq}^{(n-1)}| \cdot \\ \cdot |K_{ij}(\xi)| A_{ipq}(\xi) d\xi,$$

з якого легко зробити висновок, що

$$h[\alpha_{ts}^{(n)}]^2 \leq \frac{1}{\bar{D}_1^2} \left[\sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^k T_{pq}^{ts} \sqrt{\phi_{pq}^{(n-1)}} \right]^2,$$

де

$$[T_{pq}^{ts}]^2 = h \int \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \bar{D}_{ij}^{ts} |K_{ij}(\xi)| A_{pq}(x) \right]^2 d\xi.$$

Тепер нерівність (19.3) можна переписати так

$$\sqrt{\phi_{ij}^{(n)}} \leq \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^k \sqrt{\int_a^b \int_a^b R_{ij}(x - \Delta_j(x), \xi) A_{ts}^2(\xi) d\xi dx}.$$

$$\cdot \sqrt{\phi_{ts}^{(n-1)} + \frac{1}{\bar{D}_1^2} \left[\sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^k T_{pq}^{ts} \sqrt{\phi_{pq}^{(n-1)}} \right]^2},$$

звідки дістанемо таку достатню умову збіжності алгоритму (4.3), (5.3)

$$\widetilde{\Xi}_3 = \max_{i,j} \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^k \sqrt{\int_a^b \int_a^b R_{ij}(x - \Delta_j(x), \xi) A_{ts}^2(\xi) d\xi dx}.$$

$$\cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\bar{D}_1^2} \left(\sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^k T_{pq}^{ts} \right)^2} < 1 \quad (20.3)$$

Таким чином, доведена теорема.

Теорема 6. Якщо функції f_i -- неперервні, задовольняють умову (2.3) і виконуються нерівності (7.3), а також хоч би одна з нерівностей (10.3) (або відповідно (15.3), (16.3), (17.3), (18.3), (20.3) при $\bar{D}_1 > 0$ і $\bar{D}_{ij}^{ts} > 0$), то при $n \rightarrow \infty$ послідовність $\{y_i^{(n)}(x)\}$ збігається покоординатно до граничного значення $y_i(x)$, яке буде розв'язком системи нелінійних інтегро-різницевих рівнянь (1.3).

§ 4. ЗАСТОСУВАННЯ ОСНОВНОГО ВАРІАНТУ МЕТОДУ Ю.Д.СОКОЛОВА ДО НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОГО КЛАСУ ІНТЕГРО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ.

Метод осереднення функціональних поправок можна застосовувати також до наближеного розв'язування нелінійного інтегро-різницевого рівняння

$$y(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f[\xi, y(\xi - \Delta_1(x)), \dots, y(\xi - \Delta_k(x))] d\xi, \quad (1.4)$$

в якому f неперервна функція від своїх аргументів в області

$$\bar{P}: \{\xi \in [a, b], m_j \leq y(\xi - \Delta_j(x)) \leq M_j\}; \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

а відносно функцій $\varphi(x)$, $K(x, \xi)$, $\Delta_j(x)$ зроблені ті ж припущення, що і в § 1 цього розділу; λ -- регулярне значення, $\Delta_j(x) = 0$ для $x < a$.

1. Згідно з основним варіантом методу Ю.Д.Соколова в першому наближенні покладемо

$$y_1(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi; \alpha_1; \dots; \alpha_1) d\xi,$$

де

$$\alpha_1 = \frac{1}{h} \int_a^b J_1(x) dx, \quad h = b - a > 0, \quad y_0(x) = 0.$$

Тоді для визначення α_1 дістанемо рівняння

$$h\alpha_1 = \int_a^b \varphi(x) dx + \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) f(\xi, \alpha_1, \dots, \alpha_1) d\xi dx. \quad (2.4)$$

В n -ому наближенні будемо мати

$$y_n(x) = \varphi(x) +$$

$$+ \lambda \int_a^b K(x, \xi) f[\xi, y_{n-1}(\xi - \Delta_1(x)) + \alpha_n; \dots; y_{n-1}(\xi - \Delta_K(x)) + \alpha_n] d\xi \quad (3.4)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{h} \int_a^b [y_n(x) - y_{n-1}(x)] dx, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} h\alpha_n &= \\ &= \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \{f[\xi; y_{n-1}(\xi - \Delta_1(x)) + \alpha_n; \dots; y_{n-1}(\xi - \Delta_K(x)) + \alpha_n] - \\ &- f[\xi; y_{n-2}(\xi - \Delta_1(x)) + \alpha_{n-1}; \dots; y_{n-2}(\xi - \Delta_K(x)) + \alpha_{n-1}]\} d\xi dx \end{aligned} \quad (5.4)$$

Нехай в області $\bar{P}$

$$f' \leq f[\xi, y(\xi - \Delta_1(x)), \dots, y(\xi - \Delta_K(x))] \leq F',$$

$$\bar{F}' = \max(|f'|, |F'|),$$

$$N = \frac{|\lambda|}{h} \int_a^b \int_a^b |K(x, \xi)| d\xi dx, \quad L' = |\lambda| \sup_x \int_a^b |K(x, \xi)| d\xi$$

Очевидно, при виконанні умов

$$\begin{cases} \sup_x [\varphi(x) + |\lambda| \bar{F}' \int_a^b |K(x, \xi)| d\xi] + N(F' - f') \leq \max_j M_j = M \\ \inf_x [\varphi(x) - |\lambda| \bar{F}' \int_a^b |K(x, \xi)| d\xi] - N(F' - f') \geq \max_j m_j = m \end{cases} \quad (6.4)$$

рівняння (2.4) має єдиний дійсний розв'язок, який задовольняє умову $m < \alpha_1 < M$, а рівняння (5.4) має єдиний дійсний розв'язок, який задовольняє умову $|\alpha_n| < N(F' - f')$; $n = 2, 3, \dots$

При цьому $|y_{n-1}(x) - \varphi(x)| \leq L' \bar{F}'$; $m \leq y_{n-1}(x) + \alpha_n \leq M$

2. Ввівши позначення $z_n(x) = y_{n-1}(x) + \alpha_n$, на підставі (3.4) і (5.4) маємо

$$z_n(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b W[x, \xi, z_{n-1}(\xi - \Delta_1(x)), \dots, z_{n-1}(\xi - \Delta_K(x))] d\xi + \\ + \frac{\lambda}{h} \int_b^a \int_a^b K(x, \xi) f[\xi, z_n(\xi - \Delta_1(x)), \dots, z_n(\xi - \Delta_K(x))] d\xi dx,$$

де

$$W[x, \xi, z_{n-1}(\xi - \Delta_1(x)), \dots, z_{n-1}(\xi - \Delta_K(x))] = \\ = K(x, \xi) f[\xi, z_{n-1}(\xi - \Delta_1(x)), \dots, z_{n-1}(\xi - \Delta_K(x))] - \\ - \frac{1}{h} \int_a^b K(x, \xi) f[\xi, z_{n-1}(\xi - \Delta_1(x)), \dots, z_{n-1}(\xi - \Delta_K(x))] dx$$

Будем вважати, що в області $\bar{P}$ функції f і W задовольняють умову Ліпшица відповідно (7.1) і умову

$$|W(x, \xi, z_1, \dots, z_k) - W(x, \xi, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k)| \leq \sum_{s=1}^k B_s(x, \xi) |z_s - \bar{z}_s| \quad (7.4)$$

Тоді

$$|\delta z_n(x)| = |z_n(x) - z_{n-1}(x)| = |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x) - \alpha_{n-1} + \alpha_n| \leq \\ \leq |\lambda| \int_b^a \sum_{s=1}^k B_s(x, \xi) |\delta z_{n-1}(\xi - \Delta_s(x))| d\xi + \frac{|\lambda|}{h} \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \times \\ \times \sum_{s=1}^k A_s(\xi) |\delta z_n(\xi - \Delta_s(x))| d\xi dx.$$

Якщо

$$\|\delta z_n\| = \sup_{x \in [a-1, b]} |\delta z_n(x)|, \text{ то}$$

$$\|\delta z_n\| \leq \frac{|\lambda|}{G} \sup_x \int_a^b \sum_{s=1}^k B_s(x, \xi) d\xi \|\delta z_{n-1}\|, \text{ де}$$

$$G = 1 - \frac{|\lambda|}{h} \int_a^b \int_a^b |K(x, \xi)| \sum_{s=1}^k A_s(\xi) d\xi dx,$$

$$\text{і при умові } \varepsilon_4 = \frac{|\lambda|}{G} \sup_x \int_a^b \sum_{s=1}^k B_s(x, \xi) d\xi < 1 \quad (8.4)$$

алгоритм (3.4), (4.4) збігається.

3. Оцінимо похибку n -го наближення. На основі (3.4), (7.1) і (4.4) будемо мати:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq |\lambda| \int_a^b \int_a^b |K(x, \xi)| \sum_{s=1}^k A_s(\xi) |\delta z_n(\xi - \Delta_s(x))| d\xi \leq$$

$$\leq |\lambda| \int_a^b \int_a^b |K(x, \xi)| \sum_{s=1}^k A_s(\xi) d\xi [\|y_1 - \alpha_1\| + |\alpha_2|] \cdot \varepsilon_4^{n-2}$$

$$|\alpha_2| \leq \frac{|\lambda|}{h} \int_a^b \int_a^b |K(x, \xi)| \sum_{s=1}^k A_s(\xi) [y_1(\xi - \Delta_s(x)) - \alpha_1 + |\alpha_2|] h \xi dx.$$

Звідки

$$|\alpha_2| \leq \frac{|\lambda|}{Gh} \int_a^b \int_a^b |K(x, \xi)| \sum_{s=1}^k A_s(\xi) d\xi dx \|y_1 - \alpha_1\|$$

Остаточно дістанемо таку оцінку:

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \frac{|\lambda|}{G} \sup_x \int_a^b \int_a^b |K(x, \xi)| \sum_{s=1}^k A_s(\xi) d\xi \|y_1 - \alpha_1\| \cdot \frac{\varepsilon_4^{n-1}}{1 - \varepsilon_4} \quad (9.4)$$

Отже, має місце теорема

Теорема 7. Нехай виконуються умови (7.1), (7.4), (6.4), (8.4). Тоді при $n \rightarrow \infty$ послідовність функцій $\{y_n(x)\}$, яка визначається рівностями (3.4), (4.4), збігається до розв'язку $y(x)$ нелінійного інтегро-різницєвого рівняння (1.4) з оцінкою похибки (9.4).

§ 5. АЛГОРИТМ, ЯКИЙ ВРАХОВУЄ СПЕЦИФІКУ ВІДХИЛЕННЯ АРГУМЕНТУ

Для наближеного розв'язування рівняння (1.4) побудуємо алгоритм, який враховує специфіку відхилення аргументу, в зв'язку з чим в першому наближенні покладемо:

$$y_1(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f[\xi; \alpha_{11}; \dots; \alpha_{k1}] d\xi,$$

де

$$\alpha_{j1} = \frac{1}{h^2} \int_a^b \int_a^b y_1(\xi - \Delta_j(x)) dx d\xi; \quad j = 1, 2, \dots, k$$

або

$$h^2 \alpha_{j1} = \int_a^b \int_a^b \varphi(\xi - \Delta_j(x)) dx d\xi + \lambda \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(\xi - \Delta_j(x), \eta) \cdot f(\eta; \alpha_{11}; \dots; \alpha_{k1}) d\eta dx d\xi \quad (1.5)$$

В n-ому наближенні отримаємо

$$y_n(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f[\xi, y_{n-1}(\xi - \Delta_1(x) + \alpha_{1n}); \dots; y_{n-1}(\xi - \Delta_k(x)) + \alpha_{kn}] d\xi \quad (2.5)$$

$$\text{де } \alpha_{jn} = \frac{1}{h^2} \int_a^b \int_a^b [y_n(\xi - \Delta_j(x)) - y_{n-1}(\xi - \Delta_j(x))] dx d\xi \quad (3.5)$$

або

$$h^2 \alpha_{jn} = \lambda \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(\xi - \Delta_j(x), \eta) \{ f[\eta, y_{n-1}(\eta - \Delta_1(\xi - \Delta_j(x))) + \alpha_{1n}; \dots; y_{n-1}(\eta - \Delta_k(\xi - \Delta_j(x))) + \alpha_{kn}] - f[\eta, y_{n-2}(\eta - \Delta_1(\xi - \Delta_j(x))) + \alpha_{1,n-1}; \dots; y_{n-2}(\eta - \Delta_k(\xi - \Delta_j(x))) + \alpha_{k,n-1}] \} d\eta dx d\xi \quad (4.5)$$

Достатні умови, при яких існує єдиний розв'язок рівнянь (1.5) і (4.5), в цьому випадку мають такий вигляд

$$\begin{cases} \sup_{x, \xi} [\varphi(\xi - \Delta_j(x)) + |\lambda| \bar{F}' \int_a^b \int_a^b |K(\xi - \Delta_j(x), \eta)| d\eta] + N_j(F' - f') \leq M_j, \\ \inf_{x, \xi} [\varphi(\xi - \Delta_j(x)) - |\lambda| \bar{F}' \int_a^b \int_a^b |K(\xi - \Delta_j(x), \eta)| d\eta] - N_j(F' - f') \geq m_j \end{cases} \quad (5.5)$$

де

$$N_j = \frac{|\lambda|}{h^2} \int_a^b \int_a^b \int_a^b |K(\xi - \Delta_j(x), \eta)| d\eta dx d\xi,$$

причому

$$m_j < \alpha_{j1} < M_j; \quad |\alpha_{jn}| < N_j(F' - f'); \quad n = 2, 3, \dots;$$

$$|y_{n-1}(x) - \varphi(x)| \leq L' F'; \quad m_j \leq y_{n-1}(\xi - \Delta_j(x)) + \alpha_{jn} \leq M_j$$

1. Для доведення збіжності алгоритма (2.5), (3.5) введемо позначення:

$$z_{jn}(\xi - \Delta_j(x)) = y_{n-1}(\xi - \Delta_j(x)) + \alpha_{jn}.$$

Тоді, виходячи з (2.5) і (4.5), будемо мати

$$\begin{aligned} z_{jn}(\xi - \Delta_j(x)) &= \varphi(\xi - \Delta_j(x)) + \lambda \int_a^b W_j[x, \xi, \eta, z_{1,n-1}(\eta - \Delta_1(\xi - \Delta_j(x))), \\ &\dots, z_{k,n-1}(\eta - \Delta_k(\xi - \Delta_j(x)))] d\eta + \frac{\lambda}{h^2} \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(\xi - \Delta_j(x), \eta) f[\eta, z_{1n}(\eta - \\ &- \Delta_1(\xi - \Delta_j(x))), \dots, z_{kn}(\eta - \Delta_k(\xi - \Delta_j(x)))] d\eta dx d\xi \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
& W_j[x, \xi, \eta, z_{1,n-1}(\eta - \Delta_1(\xi - \Delta_j(x))), \dots, z_{k,n-1}(\eta - \Delta_k(\xi - \Delta_j(x)))] = \\
& = K(\xi - \Delta_j(x), \eta) f[\eta, z_{1,n-1}(\eta - \Delta_1(\xi - \Delta_j(x))), \dots, z_{k,n-1}(\eta - \\
& - \Delta_k(\xi - \Delta_j(x)))] - \frac{1}{h^2} \int_a^b \int_a^b K(\xi - \Delta_j(x), \eta) f[\eta, z_{1,n-1}(\eta - \Delta_1(\xi - \Delta_j(x))), \dots, \\
& \dots, z_{k,n-1}(\eta - \Delta_k(\xi - \Delta_j(x)))] dx d\xi.
\end{aligned}$$

Нехай функції f, W_j задовольняють умову Ліпшица, зокрема

$$|W_j(x, \xi, \eta, z_1; z_2; \dots; z_k) - W_j(x, \xi, \eta, \bar{z}_1; \bar{z}_2; \dots; \bar{z}_k)| \leq \sum_{s=1}^k C_{js}(x, \xi, \eta) |z_s - \bar{z}_s|$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned}
& |\delta z_{jn}(\xi - \Delta_j(x))| \leq |\lambda| \int_a^b \sum_{s=1}^k C_{js}(x, \xi, \eta) |\delta z_{s,n-1}(\eta - \Delta_s(\xi - \Delta_j(x)))| d\eta + \\
& + \frac{|\lambda|}{h^2} \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(\xi - \Delta_j(x), \eta) \left| \sum_{s=1}^k A_s(\eta) |\delta z_{s,n}(\eta - \Delta_s(\xi - \Delta_j(x)))| \right| d\eta dx d\xi \\
& j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \|\delta z_n\| \leq |\lambda| \max_j \sup_{\substack{x \in [a, \tau_n, b] \\ \xi \in [a, b]}} \int_a^b \sum_{s=1}^k C_{js}(x, \xi, \eta) d\eta \|\delta z_{n-1}\| + \\
& + \frac{|\lambda|}{h^2} \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(\xi - \Delta_j(x), \eta) \left| \sum_{s=1}^k A_s(\eta) d\eta dx d\xi \right| \|\delta z_n\|,
\end{aligned}$$

де

$$\|\delta z_n\| = \max_j \sup_{\substack{x \in [a, \tau_n, b] \\ \xi \in [a, b]}} |\delta z_{jn}(\xi - \Delta_j(x))|.$$

Звідси отримаємо таку достатню умову збіжності алгоритму (2.5), (3.5)

$$\varepsilon_s = \frac{|\lambda|}{G} \max_j \sup_{x, \xi} \int_a^b \sum_{s=1}^k C_{js}(x, \xi, \eta) d\eta < 1, \quad (6.5)$$

де

$$G' = 1 - \max_j \frac{|\lambda|}{h^2} \int_a^b \int_a^b \int_a^b |K(\xi - \Delta_j(x), \eta)| \left| \sum_{s=1}^k A_s(\eta) \right| d\eta dx d\xi.$$

2. Виведемо оцінку похибки n -го наближення. Легко бачити, що

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| &\leq |\lambda| \int_a^b |K(x, \xi)| \left| \sum_{s=1}^k A_s(\xi) \right| |\delta z_{sn}(\xi - \Delta_s(x))| d\xi \leq \\ &\leq |\lambda| \int_a^b |K(x, \xi)| \left| \sum_{s=1}^k A_s(\xi) \right| d\xi - \\ &- \max_{s, l} \sup_{x \in \xi, \eta} |y_l(\eta - \Delta_s(\xi - \Delta_l(x))) + \alpha_{s2} - \alpha_{s1}| \varepsilon_5^{n-2}. \end{aligned}$$

3 (2.5), (3.5) і (7.1) після нескладних перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} |\alpha_{s2}| &\leq \frac{|\lambda|}{h^2} \int_a^b \int_a^b \int_a^b |K(\xi - \Delta_s(x), \eta)| \left| \sum_{l=1}^k A_l(\eta) \right| \times \\ &\times |y_l(\eta - \Delta_l(\xi - \Delta_s(x))) + \alpha_{l2} - \alpha_{l1}| d\eta dx d\xi = \sum_{l=1}^k N'_{sl} |\alpha_{l2}| + \\ &+ \frac{|\lambda|}{h^2} \sum_{l=1}^k \int_a^b \int_a^b \int_a^b |K(\xi - \Delta_s(x), \eta)| \cdot |y_l(\eta - \Delta_l(\xi - \Delta_s(x))) - \alpha_{l1}| \times \\ &\times A_l(\eta) d\eta dx d\xi \end{aligned} \quad (7.5)$$

де

$$N'_{sl} = \frac{|\lambda|}{h^2} \int_a^b \int_a^b \int_a^b |K(\xi - \Delta_s(x), \eta)| A_l(\eta) d\eta dx d\xi.$$

Нехай

$$D' = \begin{vmatrix} 1 - N'_{11} & \dots & -N'_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ -N'_{k1} & \dots & 1 - N'_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

і всі алгебраїчні доповнення $D'_{qs} > 0$. Тоді система нерівностей (7.5) має розв'язок:

$$|\alpha_{s2}| \leq \frac{|\lambda|}{h^2 D'} \sum_{l=1}^k \int_a^b \int_a^b \sum_{q=1}^k D'_{qs} |K(\xi - \Delta_q(x), \eta)| A_l(\eta) d\eta dx d\xi \times \\ \times \max_{q,l} \sup_{x, \xi, \eta} |y_l(\eta - \Delta_l(\xi - \Delta_q(x))) - \alpha_{l1}|.$$

Таким чином, отримуємо оцінку:

$$|y(x) - y_n(x)| \leq |\lambda| \sup_x \sum_{s=1}^k \int_a^b |K(x, \xi)| A_s(\xi) [1 + \frac{|\lambda|}{h^2 D'} \times \\ \times \sum_{l=1}^k \int_a^b \int_a^b \sum_{q=1}^k D'_{qs} |K(\xi - \Delta_q(x), \eta)| A_s(\eta) d\eta dx d\xi] \cdot \|y_1 - \alpha_{11}\| \cdot \frac{\varepsilon_s^{n-1}}{1 - \varepsilon_s} \quad (8.5)$$

Алгоритм (2.5), (3.5) дає можливість більш точно відшукати розв'язок, але об'єм обчислювальної роботи порівняно з алгоритмом (3.4), (4.4) збільшується. Як підсумок, маємо теорему.

Теорема 8. Якщо функції f і W_j задовольняють умову Ліпшица і виконують умови (5.5), (6.5), то алгоритм (2.5), (3.5), збігається до розв'язку рівняння (1.4) і при $D' > 0, D'_{qs} > 0$ має місце оцінка похибки n -го наближення (8.5).

§6. НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОГО КЛАСУ ІНТЕГРО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ В ПРОСТОРІ C .

Розглянемо нелінійне інтегрово-різницеве рівняння (частинні випадки його часто зустрічаються в задачах автоматичного керування) виду

$$y(x) = \varphi(x) + \sum_{r=1}^k a_r \int_a^b K_r(x, \xi) f_r[y(x+b), y(\xi), y(\xi - \Delta_r(x))] d\xi, \quad (1.6)$$

в якому f_r -- неперервні функції від своїх аргументів в області $\bar{R}: \{ \xi \in [a, b], m \leq y \leq M \}$, $\varphi(x)$ -- неперервна функція на відрізку $[a - \tau_0, b]$, $K_r(x, \xi)$ -- обмежені ядра першого роду (неперервні майже скрізь) або полярні ядра виду, вказаного в §1

цього розділу, при $x \in [a, b]$, $\xi \in [a, b]$, $\Delta_r(x)$ -- неперервні функції, причому $0 \leq \Delta_r(x) \leq \tau$ при $x \in [a, b]$, $\tau = \max_r \tau$, $\tau_0 = \max_r \tau$, $K_r(x, \xi) \equiv 0$ при $x \in [a, b]$.

Для наближеного розв'язування рівняння (1.6) згідно з методом осереднення функціональних поправок в першому наближенні покладемо:

$$y_1(x) = \varphi(x) + \sum_{r=1}^k a_r f_r(\alpha_1; \alpha_1; \alpha_1) \int_a^b K_r(x, \xi) d\xi, \quad (2.6)$$

$$\text{де } \alpha_1 = \frac{1}{h} \int_a^b y_1(x) dx, \quad h = b - a > 0, \quad y_0(x) = 0. \quad (3.6)$$

З рівностей (2.6) і (3.6) видно, що α_1 визначається з рівняння

$$h\alpha_1 = \int_a^b \varphi(x) dx + \sum_{r=1}^k a_r f_r(\alpha_1; \alpha_1; \alpha_1) \int_a^b \int_a^b K_r(x, \xi) dx d\xi. \quad (4.6)$$

В n -ому наближенні будемо мати

$$y_n(x) = \varphi(x) + \sum_{r=1}^k a_r \int_a^b K_r(x, \xi) f_r[y_{n-1}(x+b) + \alpha_n; y_{n-1}(\xi - \Delta_r(x)) + \alpha_n] d\xi, \quad (5.6)$$

$$\text{де } \alpha_n = \frac{1}{h} \int_a^b [y_n(x) - y_{n-1}(x)] dx \quad (6.6)$$

$$\text{і } h\alpha_n = \sum_{r=1}^k a_r \int_a^b \int_a^b K_r(x, \xi) \{f_r[y_{n-1}(x+b) + \alpha_n; y_{n-1}(\xi) + \alpha_n; y_{n-1}(\xi - \Delta_r(x)) + \alpha_n] - f_r[y_{n-2}(x+b) + \alpha_{n-1}; y_{n-2}(\xi) + \alpha_{n-1}; y_{n-2}(\xi - \Delta_r(x)) + \alpha_{n-1}]\} dx d\xi. \quad (7.6)$$

1. Нехай в області $\bar{R}$ функції

$$f_r \leq f_r[y(x+b), y(\xi), y(\xi - \Delta_r(x))] \leq F_r$$

задовольняють умову Ліпшица

$$1) |f_r(z_1, z_2, z_3) - f_r(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)| \leq \sum_{s=1}^3 A_{sr} |z_s - \bar{z}_s| \quad (8.6)$$

і виконуються умови:

$$2) \begin{cases} \sup_x [\varphi(x) + \sum_{r=1}^k |a_r| \bar{F} \int_a^b |K_r(x, \xi)| d\xi] + N(F - f) \leq M \\ \inf_x [\varphi(x) + \sum_{r=1}^k |a_r| \bar{F} \int_a^b |K_r(x, \xi)| d\xi] - N(F - f) \leq m \end{cases} \quad (9.6)$$

де

$$f = \min_r f_r; \quad F = \max_r F_r; \quad \bar{F} = \max(|f|, |F|);$$

$$N = \sum_{r=1}^k \frac{|a_r|}{h} \int_a^b \int_a^b |K_r(x, \xi)| dx d\xi,$$

$$3) \quad \frac{1}{h} \sum_{r=1}^k |a_r| \int_a^b \int_a^b |K_r(x, \xi)| dx d\xi \sum_{s=1}^3 A_{sr} < 1. \quad (10.6)$$

Розглянемо функцію

$$\theta(c) = C - \frac{1}{h} \int_a^b \varphi(x) dx - \frac{1}{h} \sum_{r=1}^k a_r f_r(c, c, c) \int_a^b \int_a^b K_r(x, \xi) dx d\xi.$$

На основі нерівностей (9.6) будемо мати:

$$\theta(m) \leq m - \inf_x [\varphi(x) + \bar{F} \sum_{r=1}^k |a_r| \int_a^b |K_r(x, \xi)| d\xi] + N(F - f) < 0$$

$$\theta(M) \leq M - \sup_x [\varphi(x) + \bar{F} \sum_{r=1}^k |a_r| \int_a^b |K_r(x, \xi)| d\xi] - N(F - f) < 0$$

Отже, рівняння (4.6) має дійсний розв'язок α_1 , який лежить в інтервалі (m, M) . Умова (10.6) забезпечує єдиність цього розв'язку. Справді, якщо б рівняння (4.6) на інтервалі (m, M) мало б ще один розв'язок α_1' , то неважко переконатись, що

$$|\alpha'_i - \alpha_i| \leq \frac{1}{h} \sum_{r=1}^k |a_r| \int_a^b \int_a^b |K_r(x, \xi)| dx d\xi \sum_{s=1}^i A_s |\alpha'_i - \alpha_i|,$$

а це можливо внаслідок нерівності (10.6) лише при $\alpha'_i - \alpha_i = 0$.

Тепер розглянемо функцію

$$\begin{aligned} \Psi_n(C) = & C - \frac{1}{h} \sum_{r=1}^k a_r \int_a^b \int_a^b K_r(x, \xi) \{ f_r[y_{n-1}(x+b) + c; y_{n-1}(\xi) + c; \\ & y_{n-1}(\xi - \Delta_r(x)) + c] - f_r[y_{n-2}(x+b) + \alpha_{n-1}; y_{n-2}(\xi) + \alpha_{n-1}; \\ & y_{n-2}(\xi - \Delta_r(x)) + \alpha_{n-1}] \} dx d\xi. \end{aligned}$$

Легко бачити, що

$$\Psi_n[-N(F-f)] \leq 0, \quad \Psi_n[N(F-f)] \geq 0; \quad n=2, 3, \dots,$$

тобто рівняння $\Psi_n(C) = 0$, а разом з тим і рівняння (7.6) має дійсний розв'язок α_n в проміжку $(-N(F-f), N(F-f))$. Єдиність цього розв'язку для всіх $n=2, 3$, доводиться аналогічно випадку $n=1$.

З (5.6), (9.6), а також з нерівності $|\alpha_n| < N(F-f)$ відразу випливає, що

$$|y_{n-1}(x) - \varphi(x)| \leq LF, \quad (11.6)$$

де

$$L = \sum_{r=1}^k |a_r| \sup_x \int_a^b |K_r(x, \xi)| d\xi,$$

і

$$m \leq y_{n-1}(x) + \alpha_n \leq M. \quad (12.6)$$

Тим самим доведена теорема.

Теорема 9. Якщо в області $\bar{R}$ виконуються умови 1)-3), то рівняння (4.6) має єдиний дійсний розв'язок α_1 в проміжку (m, M) , а рівняння (7.6) має єдиний дійсний розв'язок α_n який задовольняє умову

$$|\alpha_n| < N(F-f), \quad n = 2, 3, \dots$$

При цьому виконуються нерівності (11.6) і (12.6).

2. Доведемо збіжність алгоритму (5.6), (6.6) і оцінимо похибку n -го наближення. Ввівши позначення

$$Z_n(x) = y_{n-1}(x) + \alpha_n,$$

на підставі (5.6) і (7.6) отримаємо

$$Z_n(x) = \varphi(x) + \sum_{r=1}^k a_r \int_a^b V_r[x, \xi, Z_{n-1}(x+b); Z_{n-1}(\xi), + \\ + Z_{n-1}(\xi - \Delta_r(x))] d\xi + \frac{1}{h} \sum_{r=1}^k a_r \int_a^b \int_a^b K_r(x, \xi) f_r[Z_n(x+b), Z_n(\xi - \Delta_r(x))] d\xi dx,$$

де

$$V_r[x, \xi, Z_{n-1}(x+b); Z_{n-1}(\xi), Z_{n-1}(\xi - \Delta_r(x))] = \\ = K_r(x, \xi) f_r[Z_{n-1}(x+b), Z_{n-1}(\xi), Z_{n-1}(\xi - \Delta_r(x))] - \\ - \frac{1}{h} \int_a^b K_r(x, \xi) f_r[Z_{n-1}(x+b), Z_{n-1}(\xi), Z_{n-1}(\xi - \Delta_r(x))] dx.$$

Нехай в області $\bar{R}$ функція V_r задовольняє умову

$$|V_r(x; \xi; Z_1; Z_2; Z_3) - V_r(x; \xi; \bar{Z}_1; \bar{Z}_2; \bar{Z}_3)| \leq \sum_{s=1}^3 B_{sr}(x, \xi) |Z_s - \bar{Z}_s|.$$

Тоді

$$|\delta Z_n(x)| = |Z_n(x) - Z_{n-1}(x)| = |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x) - \alpha_{n-1} + \alpha_n| \leq \\ \leq \sum_{r=1}^k |a_r| \int_a^b [B_{1r}(x, \xi) |\delta Z_{n-1}(x+b)| + B_{2r}(x, \xi) |\delta Z_{n-1}(\xi)| + \\ + B_{3r}(x, \xi) |\delta Z_{n-1}(\xi - \Delta_r(x))|] d\xi + \\ + \frac{1}{h} \sum_{r=1}^k |a_r| \int_a^b \int_a^b K_r(x, \xi) [A_{1r} |\delta Z_n(x+b)| + \\ + A_{2r} |\delta Z_n(\xi)| + A_{3r} |\delta Z_n(\xi - \Delta_r(x))|] d\xi dx.$$

Вибравши відповідним чином норму, звідси будемо мати:

$$\|\delta Z_n\| \leq \frac{1}{G} \sum_{r=1}^k |a_r| \int_a^b \int_a^b \sum_{s=1}^3 B_{sr}(x, \xi) \|\delta Z_{n-1}\|,$$

де

$$\overline{G} = 1 - \frac{1}{h} \sum_{r=1}^k |a_r| \int_a^b \int_a^b K_r(x, \xi) d\xi dx \sum_{s=1}^3 A_{sr}.$$

Очевидно, нерівність

$$\mathcal{E}_6 = \frac{1}{G} \sum_{r=1}^k |a_r| \sup_x \int_a^b \sum_{s=1}^3 B_{sr}(x, \xi) d\xi < 1 \quad (13.6)$$

буде достатньою ознакою збіжності алгоритму (5.6). Приймаючи до уваги (5.6), (8.6) і (6.6), дістанемо

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| &\leq \sum_{r=1}^k |a_r| \int_a^b |K_r(x, \xi)| [A_{1r} |\delta Z_n(x+b)| + \\ &+ A_{2r} |\delta Z_n(\xi)| + A_{3r} |\delta Z_n(\xi - \Delta_r(x))|] d\xi \leq \\ &\leq \sum_{r=1}^k |a_r| \left| \sum_{s=1}^3 A_{sr} \int_a^b |K_r(x, \xi)| d\xi \|\delta Z_n\| \right| \leq \\ &\leq \sum_{r=1}^k |a_r| \sum_{s=1}^3 A_{sr} \int_a^b |K_r(x, \xi)| d\xi (\|y_1 - \alpha_1\| + |\alpha_2|) \mathcal{E}_6^{n-2}, \\ |\alpha_2| &\leq \frac{1}{h} \sum_{r=1}^k |a_r| \int_a^b \int_a^b |K_r(x, \xi)| d\xi dx \sum_{s=1}^3 A_{sr} (\|y_1 - \alpha_1\| + |\alpha_2|), \end{aligned}$$

звідки

$$|\alpha_2| \leq \frac{1}{h\overline{G}} \sum_{r=1}^k |a_r| \int_a^b \int_a^b |K_r(x, \xi)| d\xi dx \sum_{s=1}^3 A_{sr} \|y_1 - \alpha_1\|.$$

Остаточно дістанемо оцінку

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \frac{1}{G} \sum_{r=1}^k |a_r| \sum_{s=1}^3 A_{sr} \sup_x \int_a^b K_r(x, \xi) d\xi \cdot \|y_1 - \alpha_1\| \cdot \frac{\varepsilon_6^{m-1}}{1 - \varepsilon_6} \quad (14.6)$$

Таким чином, має місце наступна теорема.

Теорема 10. Для збіжності алгоритму (5.6), (6.6) до розв'язку нелінійного інтегро-різницевого рівняння (1.6) при вказаних вище припущеннях відносно функцій f_r і V_r достатньо, щоб виконувалась умова (13.6). При справедливій оцінці (14.6).

§7. ПРИКЛАДИ.

1. Легко перевірити, що нелінійне інтегро-різницеве рівняння

$$y(x) = x - 8 \int_0^1 \xi y^2\left(\frac{\xi}{2}\right) d\xi$$

має два розв'язки $y(x) = x - \frac{3}{4}$ і $y(x) = x - \frac{1}{6}$.

Алгоритм (3.1), (4.1) в першому наближенні дає

$$y_1(x) = x - 8 \int_0^1 \xi \alpha_1^2 d\xi = x - 4\alpha_1^2, \quad y_0(x) = 0,$$

$$\alpha_1 = \int_0^1 y_1\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - 4\alpha_1^2\right) dx = \frac{1}{4} - 4\alpha_1^2.$$

Звідси

$$\alpha_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{8}; \quad \alpha_1^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{32}$$

і

$$y_1(x) = x - \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

В другому наближенні вищезгаданий алгоритм дає точний розв'язок в той час, як звичайний ітераційний метод Пікара тут розбіжний.

Похибка першого наближення відповідно рівна

$$|y(x) - y_1(x)| \approx |x - 0.75 - x + 0.6545| \approx 0.0955,$$

$$|y(x) - y_1(x)| \approx |x - 0.1667 - x + 0.0955| \approx 0.0712,$$

$$\int_0^1 [y(x) - y_1(x)]^2 dx \approx 0.00912; \quad \int_0^1 [y(x) - y_1(x)] dx \approx 0.00507.$$

2. Розглянемо інтегро-різницеве рівняння

$$y(x) = \frac{61}{60}x - \frac{1}{40}x^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 x\xi^3 y(\xi - x) y(\xi - 1) d\xi, \quad (2.7)$$

яке має точний розв'язок: $y(x) = x$.

Згідно основного варіанту методу осереднення функціональних поправок (3.4), (4.4) в першому наближенні будемо мати

$$y_1(x) = \frac{61}{60}x - \frac{1}{40}x^2 + \frac{1}{8}x\alpha_1^2; \quad y_0(x) = 0,$$

де

$$\alpha_1 = \int_0^1 y_1(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\alpha_1^2,$$

звідки

$$\alpha_1 \approx 8 \pm 7.483.$$

Тут слід взяти друге значення для α_1 ($\alpha_1 \approx 0.517$), бо умови (6.4) гарантують існування α_1 в інтервалі $(-1.2202; 1.195)$; $M \approx 1.195$; $m \approx -1.2202$.

Тому остаточно в першому наближенні будемо мати

$$y_1(x) \approx 1.0501x - 0.0250x^2.$$

Достатня умова збіжності алгоритму (3.4), (4.4) для даного прикладу виконується $\varepsilon_4 \approx 0.1756 < 1$.

Алгоритм (2.5), (3.5), який враховує специфіку відхилення аргументу, в застосуванні до наближеного розв'язування рівняння (2.7) в першому наближенні дає

$$y_1(x) = \frac{61}{60}x - \frac{1}{40}x^2 + \frac{1}{8}\alpha_{11}\alpha_{21}x,$$

де

$$\alpha_{11} = \int_0^1 \int_0^1 \bar{y}_1(\xi - x) dx d\xi \approx -0.0042;$$

$$\alpha_{21} = \int_0^1 \int_0^1 \bar{y}_1(\xi - 1) dx d\xi \approx -0.5168.$$

Отже,

$$y_1(x) \approx 1.0169x - 0.0250x^2.$$

Таблиця 3

$y(x) = x$	$y_1(x)$	$\bar{y}_1(x)$
0.00	0.0000	0.0000
0.25	0.2609	0.2526
0.50	0.5188	0.5022
0.75	0.7735	0.7486
1.00	1.0251	0.9919

З таблиці 3 видно, що вже в першому наближенні алгоритм (2.5), (3.5) дає більш точні значення, ніж алгоритм (3.4), (4.4), однак, об'єм обчислювальної роботи більший, бо в випадку застосування алгоритму (2.5), (3.5) для кожного відхилення аргументу доводиться знаходити відповідну функціональну поправку.

РОЗДІЛ III

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ВИПАДКОВИХ ЗБУРЕНЬ НА РОБОТУ ДИСКРЕТНИХ І НЕПЕРЕРВНИХ ОПТИМІЗАТОРІВ ПРОПОРЦІЙНОГО ТИПУ

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо імпульсні екстремальні системи, в яких величина робочого кроку пропорційна відхиленню від екстремуму. Як відомо, такі системи використовують зовнішній пошуковий сигнал модуляції для визначення положення робочої точки відносно екстремуму.

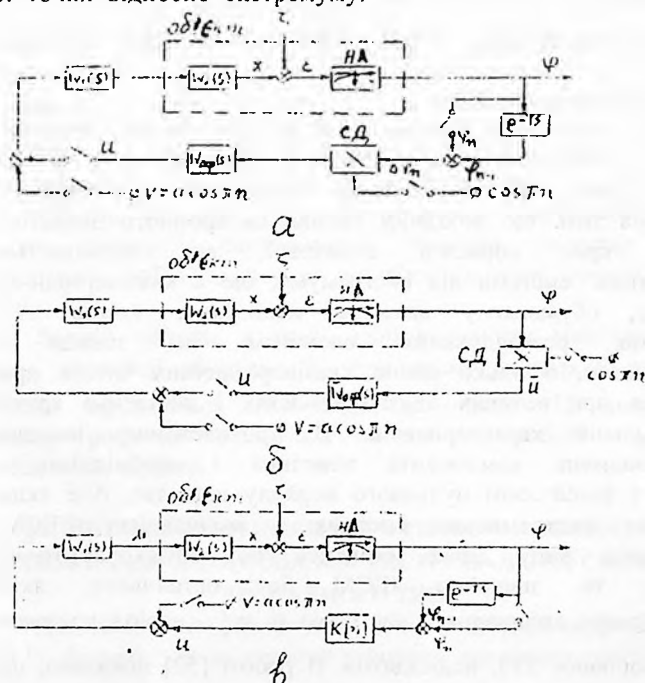


Рис. I

Пропорційні імпульсні системи оптимізації мають дві різновидності: 1) системи з синхронними детекторами різницевого типу (рис.1,а), добре описані в роботі В.М.Кунцевича [52], і звичайного типу (рис.1,б), опис яких є в роботі А.А.Фельдбаума [105]; 2) системи з двома спробними кроками (рис.1,в), робота яких також описана в статті [105]. Основна відмінність систем з двома спробними кроками від систем з синхронними детекторами полягає в тому, що частота спробних кроків в системах з двома спробними кроками в два рази більша від частоти робочих кроків, в той час як в системах з синхронними детекторами спробний крок суміщений в часі з робочим кроком. Ця обставина відображена на схемі (рис.1,в) наявністю змінного коефіцієнта підсилення $K[n] = \frac{1}{2} [1 + (-1)^n]$, який здійснює поділ частоти в два рази.

На виході синхронного детектора деколи доцільно включати низькочастотний фільтр з фіксатором нульового порядку (рис.1,а,б). Необхідність включення цих елементів викликана тим, що вихідний сигнал синхронного детектора містить крім корисної складової, яка визначається відхиленням системи від екстремуму, ще й квазіперіодичну складову, обумовлену впливом нелінійних членів. Але включення розглядуваних елементів не завжди є обов'язковим, оскільки вплив квазіперіодичних членів проявляється при великих неузгодженостях і достатньо крутій екстремальній характеристиці. В прогилежному випадку квазіперіодична компонента невелика і необхідність в фільтрі з фіксатором нульового порядку відпадає. Але якщо імпульсна екстремальна система з модуляцією (ІЕСМ) різницевого типу може обійтись без низькочастотного фільтру, то звичайна ІЕСМ без останнього, який відфільтровує коливання з частотою $\omega = \frac{\pi}{T}$ (період коливань $(-1)^n$ дорівнює $2T$), недієздатна. В роботі [52] показано, що в усталеному режимі квазіперіодичні компоненти зникають в ІЕСМ різницевого типу і залишаються в звичайних ІЕСМ.

Різницева ІЕСМ має кращі динамічні властивості порівняно з системою з двома спробними кроками (більша швидкодія).

В усіх трьох системах об'єкт апроксимується послідовним з'єднанням лінійної інерційної ланки $W_2(s)$ і нелінійної параболічної ланки. Збурення ζ , яке є стаціонарною випадковою функцією від часу з нормальним розподілом і нульовим максимальним сподіванням, діє на вхід нелінійної ланки.

Похибку систем ε зобразимо в вигляді двох складових: $e(s)$ — складової від регулюючої дії $u(z)$ і $m(s)$ — складової похибки від модулюючої дії $v(z)$. Якщо $m(s)$ існує як під час перехідного, так і під час усталеного процесів, і є періодичною функцією часу, закон зміни якої нам відомий, то $e(s)$ існує тільки під час перехідного процесу (в усталеному режимі $e(s) = 0$). Далі нас буде цікавити складова похибки $e(s)$, яка має випадковий характер. Похибки розглядатимемо тільки в дискретні моменти часу.

Відомо, що при дії шуму з певною критичною величиною дисперсії екстремальна система перестає бути дієздатною, тобто дисперсія похибки системи починає зростати.

Задача полягає в тому, щоб визначити максимальний рівень дисперсії збурення ζ при якому дисперсія похибки системи залишається обмеженою величиною. Це дозволить оцінити граничні можливості систем при роботі в умовах випадкових збурень.

§2. ВИВЕДЕННЯ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ ВІДНОСНО ПОХИБКИ ε_N ДЛЯ ІМПУЛЬСНОЇ ЕКСТРЕМАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНОГО ТИПУ

Для ІЕСМ звичайного типу (рис. 1, а), в якій керуючий сигнал U формується за першою різницею показника екстремуму [52]:

$$U_n = \Delta \varphi_n \cos \pi n, \quad (1.2)$$

в роботі [100] показано, що похибка $e(s)$ в дискретні моменти часу визначається таким різницевою рівнянням

$$e_n + W_c(E)[(-1)^n a_H e_n^2] = W_n(E) \zeta_n, \quad (2.2)$$

де

$$W_c(E) = \frac{W_\wedge(E)(1 + E^{-1})}{K_1 W_\wedge(E)(1 + E^{-1}) + 1}, \quad (3.2)$$

$$W_\Pi(E) = \frac{1}{K_1 W_\wedge(E)(1 + E^{-1}) + 1}, \quad (4.2)$$

$$K_1 = 2a_M a_H, W_\wedge(E) = W_1 W_2(E) W_{\text{оф}}(E), \quad Ex_n = x_{n+1}. \quad (5.2)$$

$W_\wedge(E)$ є передаточною функцією лінійної частини системи, а

$$W_{\text{оф}} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s(\tau_{\text{оф}} s + 1)} \quad (6.2)$$

є передаточна функція послідовного з'єднання фільтра з фіксатором нульового порядку, a_M – амплітуда модулюючої дії на виході інерційної частини об'єкта, тобто амплітуда модуляції a , приведена до входу екстремальної ланки, a_H – кривина параболи, T – інтервал дискретності, $\tau_{\text{ф}}$ – стала часу фільтра.

Виразам (3.2) і (4.2) відповідають дискретні перетворення:

$$W_c^*(z) = \frac{W_\wedge^*(z)(z + 1)}{K_1 W_\wedge^*(z)(z + 1) + z}, \quad (7.2)$$

$$W_\Pi^*(z) = \frac{z}{K_1 W_\wedge^*(z)(z + 1) + z}, \quad (8.2)$$

Виведемо різницеве рівняння відносно похибки e_n , аналогічне рівнянню (2.2), для ІЕСМ звичайного типу (рис.1, б) з законом керування [52]

$$\bar{U}_n = \varphi_n \cos \Pi n. \quad (9.1)$$

Враховуючи поділ похибки системи $E = x + \zeta$ на похибку від регулюючої дії

$$e(s) = W_1(s) W_2(s) u(z) + \zeta(s) \quad (10.2)$$

і на похибку від модулюючої дії

$$m(s) = W_1(s)W_2(s)u(z),$$

запишемо вираз для сигналу на вході екстремальної ланки в вигляді (рис. 1, б):

$$E_n = a_M(-1)^n + e_n, \quad (11.2)$$

де a_M має той же зміст, що і в випадку різницевої ІЕСМ.

Тоді на виході екстремальної ланки в дискретні моменти часу отримаємо

$$\varphi_n = -a_n[a_M(-1)^n + e_n]^2 = -a_n(a_M^2 + e_n^2) - 2a_M a_n e_n(-1)^n \quad (12.2)$$

На виході синхронного детектора будемо мати

$$\bar{U}_n = \varphi(-1)^n = -a_n(a_M^2 + e_n^2)(-1)^n - 2a_M a_n e_n$$

Як видно з цього виразу, сигнал на виході синхронного детектора містить квазіперіодичні складові, для фільтрації яких в звичайній ІЕСМ обов'язково присутній низькочастотний фільтр з фіксатором нульового порядку $\bar{W}_{\phi}(\delta)$, без якого можна обійтися в різницевій ІЕСМ.

На виході лінійної частини системи будемо мати

$$x_n = -\bar{W}_\wedge(E)[a_n(a_M^2 + e_n^2)(-1)^n + 2a_M a_n e_n] \quad (13.2)$$

де $\bar{W}_\wedge(E)$ визначається рівністю, аналогічною (5.2), при цьому (13.2), очевидно, відповідає першому доданку рівності (10.2). З рівностей (13.2) і (10.2) дістанемо різницеве рівняння динаміки системи відносно похибки e_n в дискретні моменти часу

$$[1 + 2a_M a_n \bar{W}_\wedge(E)]e_n + a_n \bar{W}_\wedge(E)(-1)^n e_n^2 = \zeta_n - a_n \bar{W}_\wedge(E)a_M^2(-1)^n,$$

яке неважко звести до виду

$$e_n + \bar{W}_\wedge(E)[a_n(-1)^2 e_n^2] = \bar{W}_n(E)\zeta_n - \bar{W}_c(E)a_n a_M^2(-1)^n, \quad (14.2)$$

де

$$\overline{W}_e(E) = \frac{W_\wedge(E)}{K_1 W_\wedge(E) + 1}, \quad (15.2)$$

$$\overline{W}_n(E) = \frac{1}{K_1 W_\wedge(E) + 1}, \quad (16.2)$$

K_1 визначається однією з формул (5.2).

Як показано в додатку, другий член правої частини (14.2) в практичних випадках приймає дуже мале значення, тому цим членом можна знехтувати. Тоді рівняння (14.2) буде мати вигляд, аналогічний рівнянню (2.2) з тією лише різницею, що $\overline{W}_e(E)$ і $\overline{W}_n(E)$ визначаються за допомогою формул (15.2) і (16.2), а не (3.2) і (4.2).

Різницевою рівнянням виду (2.2) для звичайної і різницевої ІЕСМ відповідає структурна схема, зображена на рис.2 (в випадку різницевої ІЕСМ сигнал β відсутній).

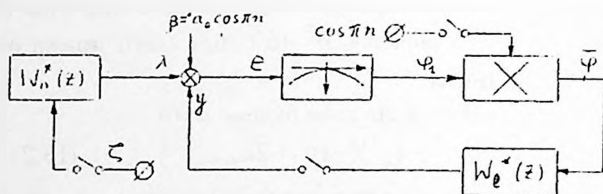


Рис. 2

§3. ВИВЕДЕННЯ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ ІМПУЛЬСНОЇ ЕКСТРЕМАЛЬНОЇ СИСТЕМИ З ДВОМА ПРОБНИМИ КРОКАМИ

Виведемо нелінійне різницеве рівняння відносно випадкової похибки ІЕСМ з двома спробними кроками *рис.1,в), закон керування якої має вигляд [105]

$$\Delta \mu_n = -\alpha K [n] \Delta \phi_{n-1} + a(-1)^n \quad (1.3)$$

де μ_n -- регулююча дія в дискретні моменти часу,

α — коефіцієнт підсилення, φ_n — показник екстремуму,
 a — амплітуда модуляції.

Випадкова похибка системи в дискретні моменти часу рівна

$$e_n = \zeta_n + \tilde{W}_\Lambda(E)U_n, \quad (2.3)$$

де

$$\tilde{W}_\Lambda(E) = W_1 W_2(E).$$

Враховуючи рівності (11.2) і (12.2), запишемо вирази для координат на виходах ланки, яка обчислює першу різницю $(\Delta\varphi_{n-1})$, і ланки з коефіцієнтом $K[n]$ відповідно

$$\Delta\varphi_{n-1} = \varphi_n - \varphi_{n-1} = -a_H(e_n^2 - e_{n-1}^2) - 2a_H a_M (-1)^n (e_n + e_{n-1}),$$

$$U_n = K[n]\Delta\varphi_{n-1} = -\frac{1}{2}a_H(e_n^2 - e_{n-1}^2)(-1)^n - \frac{1}{2}a_H(e_n^2 - e_{n-1}^2) - \\ - a_H a_M (-1)^n (e_n + e_{n-1}) - a_H a_M (e_n + e_{n-1})$$

Тоді на виході лінійної частини об'єкта будемо мати

$$\tilde{W}_\Lambda(E)U_n = -\frac{1}{2}a_H \tilde{W}_\Lambda(E)(-1)^n (1 - E^{-1})e_n^2 - \frac{1}{2}a_H \tilde{W}_\Lambda(E)(1 - E^{-1})e_n^2 - \\ - a_H a_M \tilde{W}_\Lambda(E)(-1)^n (1 + E^{-1})e_n - a_H a_M \tilde{W}_\Lambda(E)(1 + E^{-1})e_n \quad (3.3)$$

Підставивши (3.3) в (2.3), дістанемо нелінійне різницеве рівняння відносно похибки e_n в дискретні моменти часу

$$e_n + a_H a_M \tilde{W}_\Lambda(E)(1 + E^{-1})e_n + a_H a_M \tilde{W}_\Lambda(E)(-1)^n (1 + E^{-1})e_n + \\ + \frac{1}{2}a_H \tilde{W}_\Lambda(E)(-1)^n (1 - E^{-1})e_n^2 + \frac{1}{2}a_H \tilde{W}_\Lambda(E)(1 - E^{-1})e_n^2 = \zeta_n$$

або*

$$e_n + \tilde{W}_e(E)(-1)^n (1 + E^{-1})e_n + \rho a \tilde{W}_e \left[+ (-1)^n \right] (1 - E^{-1})e_n^2 = \tilde{W}_n(E)\zeta_n, \quad (4.3)$$

* Параметри і передаточні функції для ПЕСМ з двома спробними кроками будемо позначати з хвильскою.

§4. ВИВЕДЕННЯ НЕЛІНІЙНОГО ІНТЕГРО-РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ ВІДНОСНО СПЕКТРАЛЬНОЇ ГУСТИНИ ПОХИБКИ ДЛЯ ІМПУЛЬСНОЇ ЕКСТРЕМАЛЬНОЇ СИСТЕМИ З ДВОМА СПРОБНИМИ КРОКАМИ.

Виходячи з структурної схеми (рис.2), при дослідженні випадкових процесів імпульсної екстремальної системи різницевого типу в роботі [100] методом балансу спектральних густин і математичних сподівань [54] показано, що усереднене за часом математичне сподівання похибки системи рівне нулю, а спектральна густина похибки визначається нелінійним інтегро-різницеvim рівнянням

$$G_{\Pi}^*(\omega) = G_{\lambda\lambda}^*(\omega) - \frac{a_{\Pi}^2}{2\pi} |W_{\Pi}^*(j\omega)|^2 \int G_{\Pi}^*(\bar{\omega}) G_{\Pi}^*(\omega - \bar{\omega} + \pi) d\bar{\omega}, \quad (1.4)$$

$$\text{де, } G_{\lambda\lambda}^*(\omega) = |W_{\Pi}^*(j\omega)|^2 G_{\zeta\zeta}^*(\omega), \quad (2.4)$$

$G_{\zeta\zeta}^*(\omega)$ – спектральна густина збурення, $\bar{\omega} = \omega T$.

В §2 цього розділу було показано, що звичайна ІЕСМ описується різницеvim рівнянням такого ж виду, як і ІЕСМ різницевого типу. Тому нелінійне інтегро-різницеve рівняння спектральної густини похибки ІЕСМ звичайного типу ідентичне рівнянню (1.4) з тією лише різницею, що $\overline{W}_{\Pi}(E)$ і $\overline{W}_{\Pi}(E)$ визначаються для звичайної ІЕСМ за формулами (15.2) і (16.2).

Виведемо нелінійне інтегро-різницеve рівняння відносно спектральної густини похибки для ІЕСМ з двома спробними кроками. З структурної схеми (мал.3) випливає, що спектральна густина похибки останньої ІЕСМ визначається із співвідношення (баланс спектральних густин)

$$\tilde{G}_{\lambda\lambda}^* = \tilde{G}_{\Pi}^* + \tilde{G}_{\Pi\Pi}^* + \tilde{G}_{\Pi\Pi}^* \quad (3.4)$$

$$\text{Очевидно, } \tilde{G}_{\Pi\Pi}^*(\omega) = |1 + e^{-j\omega}|^2 \tilde{G}_{\Pi}^*(\omega),$$

$$\tilde{G}_{\Pi\Pi}^*(\omega) = \frac{1}{2} \tilde{G}_{\Pi\Pi}^*(\omega + \pi) = \frac{1}{2} |1 - e^{-j\omega}|^2 \tilde{G}_{\Pi}^*(\omega + \pi),$$

$$\tilde{G}_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) = \frac{1}{2} \left| 1 - e^{-j\bar{\omega}} \right|^2 \left| \tilde{W}_l^*(j\bar{\omega}) \right|^2 \tilde{G}_{ll}^*(\bar{\omega} + \pi), \quad (4.4)$$

З іншого боку, в статті [100] показано, що

$$\tilde{G}_{ff}^*(\bar{\omega}) = \frac{a_n^2}{\pi} \left| 1 - e^{-j\bar{\omega}} \right|^2 \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}_{ll}^*(\bar{\Omega}) \tilde{G}_{ll}^*(\bar{\omega} - \bar{\Omega}) l \bar{\Omega} d\bar{\Omega}.$$

Тоді,

$$\tilde{G}_{ff}^*(\bar{\omega}) = \frac{a_n^2}{\pi} \left| 1 - e^{-j\bar{\omega}} \right|^2 \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}_{ll}^*(\bar{\Omega}) \tilde{G}_{ll}^*(\bar{\omega} - \bar{\Omega}) l \bar{\Omega} d\bar{\Omega} + \frac{a_n^2}{\pi} \left| 1 - e^{-j\bar{\omega}} \right|^2 \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}_{ll}^*(\bar{\Omega}) \tilde{G}_{ll}^*(\bar{\omega} - \bar{\Omega} + \pi) l \bar{\Omega} d\bar{\Omega},$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{yy}^*(\bar{\omega}) &= \frac{\rho^2 a_n^2}{\pi} \left| 1 - e^{-j\bar{\omega}} \right|^2 \left| \tilde{W}_l^*(j\bar{\omega}) \right|^2 \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}_{ll}^*(\bar{\Omega}) \tilde{G}_{ll}^*(\bar{\omega} - \bar{\Omega}) l \bar{\Omega} d\bar{\Omega} + \\ &+ \frac{\rho^2 a_n^2}{2\pi} \left| 1 + e^{-j\bar{\omega}} \right|^2 \left| \tilde{W}_l^*(j\bar{\omega}) \right|^2 \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}_{ll}^*(\bar{\Omega}) \tilde{G}_{ll}^*(\bar{\omega} - \bar{\Omega} + \pi) l \bar{\Omega} d\bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Підставивши (4.4) і (5.4) в (3.4), для визначення спектральної густини похибки ІЕСМ з двома спробними кроками отримаємо таке нелінійне інтегро-різницеве рівняння

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\eta\eta}^*(\bar{\omega}) &= \tilde{G}_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) - \frac{1}{2} P(\bar{\omega}) \tilde{G}_{ll}^*(\bar{\omega} - \pi) - \frac{\rho^2 a_n^2}{\pi} P(\bar{\omega}) \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}_{ll}^*(\bar{\Omega}) \tilde{G}_{ll}^*(\bar{\omega} - \bar{\Omega}) l \bar{\Omega} d\bar{\Omega} - \\ &- \frac{\rho^2 a_n^2}{2\pi} Q(\bar{\omega}) \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}_{ll}^*(\bar{\Omega}) \tilde{G}_{ll}^*(\bar{\omega} - \bar{\Omega} + \pi) l \bar{\Omega} d\bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

де

$$P(\bar{\omega}) = \left| 1 - e^{-j\bar{\omega}} \right|^2 \left| \tilde{W}_l^*(j\bar{\omega}) \right|^2, \quad (7.4)$$

$$Q(\bar{\omega}) = \left| 1 + e^{-j\bar{\omega}} \right|^2 \left| \tilde{W}_l^*(j\bar{\omega}) \right|^2, \quad (8.4)$$

$$\tilde{G}_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) = \left| \tilde{W}_n^*(j\bar{\omega}) \right|^2 \tilde{G}_{\zeta\zeta}^*(\bar{\omega}), \quad (9.4)$$

Тут було враховано, що функція $\tilde{G}_{ll}^*(\bar{\omega})$ періодична з періодом 2π і тому $\tilde{G}_{ll}^*(\bar{\omega} + \pi) = \tilde{G}_{ll}^*(\bar{\omega} - \pi)$.

§5. ДОСТАТНІ УМОВИ ОБМЕЖЕНОСТІ ДИСПЕРСІЇ ПОХИБКИ ПРОПОРЦІЙНИХ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ПРИ ДІЇ ВИПАДКОВИХ ЗБУРЕНЬ.

Розв'язавши рівняння (1.4) і (6.4) відносно спектральної густини похибки, неважко перейти до дисперсії похибки. Для наближеного розв'язування нелінійних інтегро-різницевих рівнянь (1.4) і (6.4) доцільно застосовувати метод осереднення функціональних поправок [92], збіжність якого для більш загальних нелінійних інтегро-різницевих рівнянь доведена в §6 другого розділу. Ефективність цього методу в застосуванні до даної задачі підкреслюється ще і тим, що функціональні поправки α_i мають тут цілком визначений фізичний зміст, а саме $\alpha_1 = D_{n,1}$ - перше наближення дисперсії сигналу похибки, а $\alpha_i (i = 2, 3, \dots)$ зв'язане з i -им наближенням дисперсії сигналу похибки за допомогою такої рекурентної формули

$$\alpha_i = D_{n,i} - D_{n,i-1} (i = 2, 3, \dots).$$

Доведення збіжності методу Ю.Д. Соколова (§6 другого розділу) с обґрунтуванням застосування цього методу до наближеного розв'язування інтегро-різницевих рівнянь (1.4) і (6.4), а відповідні ознаки збіжності дають можливість отримати достатні умови обмеженості дисперсії сигналу похибки відповідної ІЕСМ.

Із умови (13.6) другого розділу випливає, що для рівняння (1.4) в випадку системи різницевого типу достатньою ознакою збіжності методу осереднення функціональних поправок є нерівність

$$\varepsilon_0 = \frac{a_n^2 \sup_{\bar{\omega}} [B_1(\bar{\omega}) + B_2(\bar{\omega})]}{1 - \frac{a_n^2}{2\pi} (A_1 + A_2) \int_{-\pi}^{\pi} |W_i^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega}} < 1, \quad (1.5)$$

де $A_i, B_i(\bar{\omega}), i = 1, 2$; - коефіцієнти Ліпшица для функцій відповідно

$$f_i = G_n^*(\bar{\omega}) G_n^*(\bar{\omega} - (\bar{\omega} + \pi)).$$

$$V_1 = |W_n^*(j\bar{\omega})|^2 G_n^*(\bar{\omega}) G_n^*(\bar{\omega} - (\bar{\omega} + \pi)) - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |W_n^*(j\bar{\omega})|^2 G_n^*(\bar{\omega}) G_n^*(\bar{\omega} - (\bar{\omega} + \pi)) l\bar{\omega}$$

$$\text{Нехай } G_n^*(\bar{\omega}) = t_1, G_n^*(\bar{\omega} - (\bar{\omega} + \pi)) = t_2.$$

$$\text{Тоді } A_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t_1} = G_n^*(\bar{\omega} - (\bar{\omega} + \pi)) < M;$$

$$A_2 = \frac{\partial f_2}{\partial t_2} = G_n^*(\bar{\omega}) < M;$$

$$B_i(\bar{\omega}) = \frac{\partial V_1}{\partial t_i} < M |W_i^*(j\bar{\omega})|^2 - \frac{m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |W_i^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega}; \quad i = 1, 2,$$

де $m \in M$, як це видно з умов (9.6) попереднього розділу, задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} \sup_{\bar{\omega}} \left[G_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) + a_n^2 M^2 |W_i^*(j\bar{\omega})|^2 \right] + \frac{a_n^2}{2\pi} (M^2 - m^2) \int_{-\pi}^{\pi} |W_i^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega} \leq M, \\ \inf_{\bar{\omega}} \left[G_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) - a_n^2 M^2 |W_i^*(j\bar{\omega})|^2 \right] - \frac{a_n^2}{2\pi} (M^2 - m^2) \int_{-\pi}^{\pi} |W_i^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega} \geq m \end{cases}$$

або в спрощеному і більш жорсткому вигляді

$$\begin{cases} a_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} |W_i^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega} M^2 - 2\pi M + \int_{-\pi}^{\pi} G_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) l\bar{\omega} \leq 0, \\ a_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} |W_i^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega} m^2 + 2\pi m - \int_{-\pi}^{\pi} G_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) l\bar{\omega} \leq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

(спектральна густина $G_n^*(\bar{\omega})$ - функція парна).

Розв'язавши нерівності (2.5), будемо мати

$$M \geq \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - a_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} |W_i^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega} \int_{-\pi}^{\pi} G_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) l\bar{\omega}}}{a_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} |W_i^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega}}$$

$$m \leq \frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 + a_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} |W_l^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega} \int_{-\pi}^{\pi} G_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) l\bar{\omega}}}{a_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} |W_l^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega}}$$

Умову (1.5) можна переписати так

$$\varepsilon_0 = \frac{a_n^2 (M - m) \int_{-\pi}^{\pi} |W_l^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega}}{\pi - a_n^2 (M) \int_{-\pi}^{\pi} |W_l^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega}} < 1$$

або з врахуванням оцінок для m і M

$$2\pi - 2\sqrt{\pi^2 - a_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} |W_l^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega} \int_{-\pi}^{\pi} G_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) l\bar{\omega}} < \\ < \sqrt{\pi^2 + a_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} |W_l^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega} \int_{-\pi}^{\pi} G_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) l\bar{\omega}}$$

Звідси отримаємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} G_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) l\bar{\omega} < \frac{(3 + 8\sqrt{6})^2}{25a_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} |W_l^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega}} \approx \frac{0,9\pi^2}{a_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} |W_l^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega}}. \quad (3.5)$$

Ввівши позначення

$$D_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) l\bar{\omega}, D_{\delta\delta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |W_l^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega}, \quad (4.5)$$

нерівність (3.5) зведеться до вигляду

$$D_{\lambda\lambda} < \frac{0,225}{a_n^2 D_{\delta\delta}}. \quad (5.5)$$

Це і буде достатньою умовою, при якій метод осереднення функціональних поправок збігається, а дисперсія похибки ІЕСМ різницевого типу обмежена.

Неважко переконатись (див. оцінку (14.6) другого розділу), що похибку n -го наближення дисперсії похибки ІЕСМ різницевого типу можна оцінити так

$$\begin{aligned}
 |D_{ll} - D_{ll,n}| &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_{ll}^*(\bar{\omega}) - G_{ll,n}^*(\bar{\omega})| d\bar{\omega} \leq \\
 &\leq \max_{s=1,2} \sup_{\bar{\omega} \in \bar{\Omega}} \left[\left| G_{\lambda\lambda}^*(\bar{\Omega} - \Delta_s(\bar{\omega})) - a_n^2 \alpha_1^2 |W_l^* [j(\bar{\Omega} - \Delta_s(\bar{\omega}))]|^2 \right| \right] \cdot \\
 &\cdot \frac{a_n^2 M \int_{-\pi}^{\pi} |W_l^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega}}{\pi - a_n^2 M \int_{-\pi}^{\pi} |W_l^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega}} \cdot \frac{\varepsilon_6^{n-1}}{1 - \varepsilon_6},
 \end{aligned} \quad (6.5)$$

де

$$\Delta_1(\bar{\omega}) = 0; \Delta_2(\bar{\omega}) = \bar{\omega} + \pi; \alpha_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_{ll,1}^*(\bar{\omega}) d\bar{\omega}.$$

2. Для звичайної ІЕСМ умова (5.5) перепишеться так

$$\bar{D}_{\lambda\lambda} < \frac{0,225}{a_n^2 \bar{D}_{\delta\delta}}, \quad (7.5)$$

$$\text{де } \bar{D}_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{G}_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) d\bar{\omega}, \quad \bar{D}_{\delta\delta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{W}_l^*(j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega}, \quad (8.5)$$

$$\bar{G}_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) = |\bar{W}_l^*(j\bar{\omega})|^2 \bar{G}_{\zeta\zeta}^*(\bar{\omega}), \quad (9.5)$$

а оцінка похибки n -го наближення дисперсії похибки ІЕСМ звичайного типу має вигляд

$$\begin{aligned}
 |\bar{D}_{ll} - \bar{D}_{ll,n}| &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{G}_{ll}^*(\bar{\omega}) - \bar{G}_{ll,n}^*(\bar{\omega})| d\bar{\omega} \leq \\
 &\leq \max_{s=1,2} \sup_{\bar{\omega} \in \bar{\Omega}} \left[\left| \bar{G}_{\lambda\lambda}^*(\bar{\Omega} - \Delta_s(\bar{\omega})) - a_n^2 \bar{\alpha}_1^2 |\bar{W}_l^* [j(\bar{\Omega} - \Delta_s(\bar{\omega}))]|^2 - \bar{\alpha}_1 \right| \right] \cdot
 \end{aligned}$$

$$\frac{a_n^2 \overline{M} \int_{-\pi}^{\pi} |\overline{W}_l^* (\overline{\omega})|^2 d\overline{\omega}}{\pi - a_n^2 \overline{M} \int_{-\pi}^{\pi} |\overline{W}_l^* (\overline{\omega})|^2 d\overline{\omega}} \frac{\overline{\varepsilon}_6^{n-1}}{1 - \overline{\varepsilon}_6}, \quad (10,5)$$

$$\text{де } \overline{\varepsilon}_6 = \frac{a_n^2 (\overline{M} - \overline{m}) \int_{-\pi}^{\pi} |\overline{W}_l^* (\overline{\omega})|^2 d\overline{\omega}}{\pi - a_n^2 \overline{M} \int_{-\pi}^{\pi} |\overline{W}_l^* (\overline{\omega})|^2 d\overline{\omega}} < 1; \overline{\alpha}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{G}_{ll}^* (\overline{\omega}) l \overline{\omega} d\overline{\omega},$$

а $\overline{m}$ і $\overline{M}$ можна визначити, розв'язавши нерівності

$$\begin{cases} a_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} |\overline{W}_l^* (\overline{\omega})|^2 d\overline{\omega} \overline{M}^2 - 2\pi \overline{M} + \int_{-\pi}^{\pi} \overline{G}_{ll}^* (\overline{\omega}) l \overline{\omega} d\overline{\omega} \leq 0, \\ a_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} |\overline{W}_l^* (\overline{\omega})|^2 d\overline{\omega} \overline{m}^2 + 2\pi \overline{m} - \int_{-\pi}^{\pi} \overline{G}_{ll}^* (\overline{\omega}) l \overline{\omega} d\overline{\omega} \leq 0. \end{cases}$$

3. Легко бачити що нелінійне інтегро-різницеве рівняння (6.4) відносно спектральної густини похибки ІЕСМ з двома спробними кроками є частинним випадком рівняння (1.6) (розділ другий) при

$$k=3; a_1 = -\frac{1}{4\pi}; a_2 = 2a_3 = -\frac{\rho^2 a_n^2}{\pi}; k_1 = k_2 = P(\overline{\omega}), k_3 = Q(\overline{\omega})$$

Коефіцієнти Ліпшица для функцій

$$f_1 = \tilde{G}_{ll}^* (\overline{\omega} - \pi); f_2 = \tilde{G}_{ll}^* (\overline{\omega}) \tilde{G}_{ll}^* (\overline{\omega} - \overline{\omega});$$

$$f_3 = \tilde{G}_{ll}^* (\overline{\omega}) \tilde{G}_{ll}^* (\overline{\omega} - \overline{\omega} + \pi),$$

$$V_1 = P(\overline{\omega}) \tilde{G}_{ll}^* (\overline{\omega} - \pi) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\overline{\omega}) \tilde{G}_{ll}^* (\overline{\omega} - \pi) l \overline{\omega} d\overline{\omega},$$

$$V_2 = P(\overline{\omega}) \tilde{G}_{ll}^* (\overline{\omega}) \tilde{G}_{ll}^* (\overline{\omega} - \overline{\omega}) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\overline{\omega}) \tilde{G}_{ll}^* (\overline{\omega}) \tilde{G}_{ll}^* (\overline{\omega} - \overline{\omega}) l \overline{\omega} d\overline{\omega},$$

$$V_3 = Q(\bar{\omega}) \tilde{G}_{ii}^* (\bar{\Omega}) \tilde{G}_{ii}^* (\bar{\omega} - \bar{\Omega} + \pi) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q(\bar{\omega}) \tilde{G}_{ii}^* (\bar{\Omega}) \tilde{G}_{ii}^* (\bar{\omega} - \bar{\Omega} + \pi) d\bar{\omega}$$

можна оцінити так

$$A_{11} = 1; A_{21} = A_{31} = A_{12} = A_{13} = 0; A_{22} < \tilde{M}; A_{32} < \tilde{M}; A_{23} < \tilde{M};$$

$$B_{11}(\bar{\omega}) < P(\bar{\omega}) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\bar{\omega}) d\bar{\omega}; B_{21}(\bar{\omega}) = B_{31}(\bar{\omega}) = B_{12}(\bar{\omega}) = B_{23}(\bar{\omega}) = 0,$$

$$B_{12}(\bar{\omega}) < \tilde{M}P(\bar{\omega}) - \frac{\tilde{m}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\bar{\omega}) d\bar{\omega}; i = 2, 3;$$

$$B_{13}(\bar{\omega}) < \tilde{M}Q(\bar{\omega}) - \frac{\tilde{m}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q(\bar{\omega}) d\bar{\omega}; i = 2, 3.$$

Тоді достатня умова збіжності методу осереднення функціональних поправок в застосуванні до наближеного розв'язування інтегро-різницевого рівняння (6.4) має вигляд

$$\tilde{\varepsilon}_6 = \frac{(\tilde{M} - \tilde{m})R}{\pi - \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} P(\bar{\omega}) d\bar{\omega} - R\tilde{M}} < 1, \quad (11.5)$$

$$\text{де } R = \rho^2 a_n^2 \left[2 \int_{-\pi}^{\pi} P(\bar{\omega}) d\bar{\omega} + \int_{-\pi}^{\pi} Q(\bar{\omega}) d\bar{\omega} \right],$$

$\tilde{m}$ і $\tilde{M}$ задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} \sup_{\bar{\omega}} \left[\tilde{G}_{\lambda\lambda}^* (\bar{\omega}) + \tilde{M}^2 \left(\frac{1}{2} P(\bar{\omega}) + 2\rho^2 a_n^2 Q(\bar{\omega}) \right) \right] + \left[\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\bar{\omega}) d\bar{\omega} + \frac{R}{2\pi} \right] (\tilde{M}^2 - \tilde{m}^2) \leq \tilde{M}, \\ \inf_{\bar{\omega}} \left[\tilde{G}_{\lambda\lambda}^* (\bar{\omega}) - \tilde{M}^2 \left(\frac{1}{2} P(\bar{\omega}) + 2\rho^2 a_n^2 Q(\bar{\omega}) \right) \right] - \left[\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\bar{\omega}) d\bar{\omega} + \frac{R}{2\pi} \right] (\tilde{M}^2 - \tilde{m}^2) \geq \tilde{m}^2 \end{cases}$$

Або в спрощеному і більш жорсткому вигляді

$$\begin{cases} R\tilde{M}^2 - 2\pi\tilde{M} + \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}_{\lambda\lambda}^* (\bar{\omega}) d\bar{\omega} \leq 0, \\ R\tilde{m}^2 + 2\pi\tilde{m} - \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}_{\lambda\lambda}^* (\bar{\omega}) d\bar{\omega} \leq 0. \end{cases}$$

Розв'язавши ці нерівності і підставивши отримані оцінки для $\tilde{m}$ і $\tilde{M}$ в умову (11.5), дістанемо

$$2\pi - 2\sqrt{\pi^2 - R \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) d\bar{\omega}} < \sqrt{\pi^2 + R \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) d\bar{\omega}},$$

звідки

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) d\bar{\omega} < \frac{0,9\pi^2}{R}$$

або

$$\tilde{D}_{\lambda\lambda} < \frac{0,225}{\rho^2 a_n^2 (2\tilde{D}_{pp} + \tilde{D}_{qq})}, \quad (12.5)$$

$$\text{де } \tilde{D}_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) d\bar{\omega}, \quad \tilde{D}_{pp} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\bar{\omega}) d\bar{\omega},$$

$$\tilde{D}_{qq} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q(\bar{\omega}) d\bar{\omega}. \quad (13.5)$$

Умова (12.5) є достатньою умовою обмеженості дисперсії похибки ІЕСМ з двома спробними кроками. Похибку n -го наближення дисперсії похибки розглядуваної ІЕСМ, як це впливає з (14.6), можна оцінити так

$$\begin{aligned} |\tilde{D}_{ll} - \tilde{D}_{ll,n}| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}_{ll}^*(\bar{\omega}) d\bar{\omega} - \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}_{ll,n}^*(\bar{\omega}) d\bar{\omega} \right| \leq \\ &\leq \frac{\frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} P(\bar{\omega}) d\bar{\omega} + R\tilde{M}}{\pi - \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} P(\bar{\omega}) d\bar{\omega} - R\tilde{M}} \left\| \tilde{G}_{ll,1}^* - \tilde{\alpha}_1 \right\| \frac{\tilde{\varepsilon}_6^{n-1}}{1 - \tilde{\varepsilon}_6}. \end{aligned} \quad (14.5)$$

§6. ПРИКЛАДИ.

1. Нехай $W_1(s) = \frac{1}{s}$; $W_2(s) = \frac{\alpha}{s\tau + 1}$; $W_{\text{вф}}(s) = 1$.

Тоді $W_1^* = \frac{\alpha(1-d)\varepsilon}{(z-1)(z-d)}$; $W_2^*(z) = \frac{\delta(z+1)}{z^2 + \xi z + \sigma}$;

$$W_n^*(z) = \frac{(z-1)(z-d)}{z^2 + \xi z + \sigma},$$

де $\xi = k(1-d) - (1+d)$, $\sigma = k(1-d) + d$, $\delta = \alpha(1-d)$,

$d = e^{-\frac{T}{\tau}}$, $k = k_1\alpha$, α - коефіцієнт підсилення лінійної частини.

Припустимо, що на вхід ІЕСМ різницевого типу (мал. 1, а) діє випадкове збурення ζ з кореляційною функцією і спектральною густиною відповідно

$$R_{\zeta\zeta}[m] = D_{\zeta\zeta} e^{-\frac{T}{\tau_m}|m|}; \quad G_{\zeta\zeta}^*(\bar{\omega}) = D_{\zeta\zeta} \frac{1 - e^{-\frac{2T}{\tau_m}}}{\left| e^{j\bar{\omega}} - e^{-\frac{T}{\tau_m}} \right|^2}. \quad (1.6)$$

Підставивши (1.6) в (2.4) і отриманий вираз в (4.5), знайдемо $D_{\lambda\lambda}$, при цьому інтеграл (4.5) обчислюється за допомогою

білінійного перетворення $z = e^{j\bar{\omega}} = \frac{1+\omega}{1-\omega}$ з послідовною

заміною ω на $j\nu$ [51,54]. Після цього $D_{\lambda\lambda}$ виражається через інтеграл виду

$$I_3 = \frac{1}{2\pi j} \int \frac{q_3(\nu)h\nu}{h_3(\nu)h_3(-\nu)}$$

(корені $h_3(\nu)$ лежать в верхній півплощині) значення якого наведено в [51]. З врахуванням викладеного вище отримаємо

$$D_{\lambda\lambda} = D_{\zeta\zeta} \frac{(1+d)(1-k)p_1^2 + (k+kd+1-d)p_1p_2}{(1-k)(1+d)p_1^2 + (1-d)(1-k)^2p_1p_2 + k(1-k)(1-d)p_2^2} \quad (2.6)$$

$$\text{де } \psi_1 = 2sh \frac{T}{2\tau_m}; \psi_2 = 2ch \frac{T}{2\tau_m}.$$

Аналогічно отримується вираз для $D_{\delta\delta}$

$$D_{\delta\delta} = \frac{\alpha^2}{k(1-k)} \quad (3.6)$$

В роботі [100] показано, що коефіцієнт k можна зобразити так

$$k = k_0 \frac{1-d}{1+d},$$

де $k_0 = a\alpha_n\alpha^2$. Тому що k_0 визначається добутком незалежних один від одного параметрів, то k_0 можна вважати коефіцієнтом підсилення системи.

Умова (5.5) на підставі формули (2.6)

$$D_{\zeta\zeta} < \frac{0,225(1-k)[(1+d)\psi_1^2 + (1-d)(1-k)\psi_1\psi_2 + k(1-d)\psi_2^2]}{a_n^2 D_{\delta\delta} [(1+d)(1-k)\psi_1^2 + (k+kd+1-d)\psi_1\psi_2]} \quad (4.6)$$

На рис. 4,а наведені залежності критичної дисперсії $D_{\zeta\zeta}$ від k_0

для випадків $d=0,3$ і $d=0,4$ при $\alpha = 0,2$; $a_n = 0,5$; $\frac{T}{\tau_m} = 0,3$. Тим

самим отримані області дисперсії похибки ІЕСМ різницевого типу. На рис. 4,б наведені залежності першого наближення дисперсії $D_{\eta,\lambda}$, розрахованого при критичній дисперсії $D_{\lambda\lambda}$, від

k_0 в випадках $d=0,3$ і $d=0,4$, а також залежності відносної дис-

персії сигналу похибки $\chi = \frac{D_{\eta,\lambda}}{D_{\zeta\zeta(\kappa P)}}$ від k_0 в вище наведених ви-

падках. Для $d=0,3$ достатня умова (5.5) виконується при $k_0 \in [0,1;1,5]$, а для $d=0,4$ - при $k_0 \in [0,2;1,9]$ в випадку $D_{\zeta\zeta} = 1$. З

рис. 4,а видно, що існує такий коефіцієнт підсилення системи k_0 , при якому область обмеженості дисперсії похибки при дії

на систему випадкового збурення максимальна. Цей результат добре узгоджується з результатами моделювання ІЕСМ при дії детермінованих збурень [99], де також отримана екстремальна

залежність критичної швидкості наростання збурення від коефіцієнта підсилення ІЕСМ.

2. Виберемо $W_1(s)$ і $W_2(s)$ такими ж, як і в прикладі 1, а

$$W_{\text{вф}}(z) = \frac{1-d_{\phi}}{z-d_{\phi}}. \text{ Тоді } \overline{W}_1^* = \frac{\alpha(1-d)(1-d_{\phi})}{(z-1)(z-d)(z-d_{\phi})};$$

$$\overline{W}_1^*(z) = \frac{\delta z}{z^3 - \xi_1 z^2 + \xi_2 z - \xi_3}; \quad \overline{W}_n^*(z) = \frac{1}{z^3 - \xi_1 z^2 + \xi_2 z - \xi_3},$$

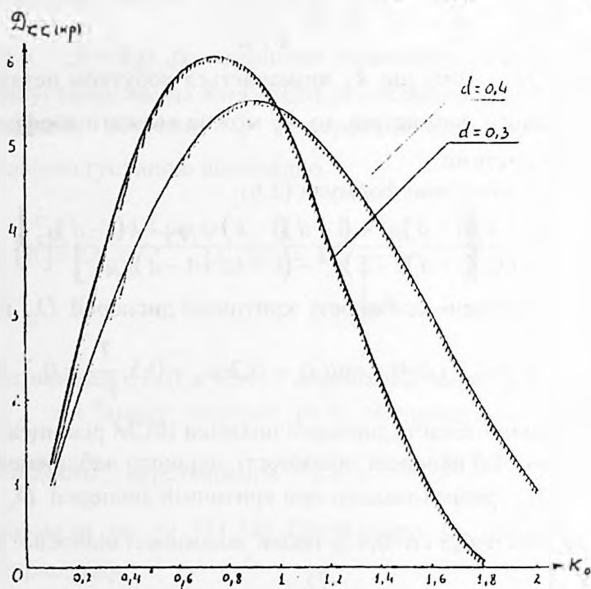


Рис. 4, а

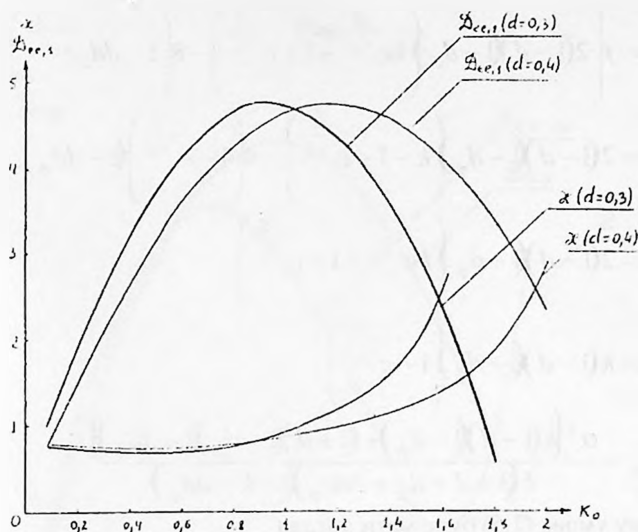


Рис. 4, б

де

$$\delta = \alpha(1-d)(1-d_\phi)\xi_1 = 1 + d + d_\phi; \xi_2 = d + d_\phi + dd_\phi + k(1-d)(1-d_\phi)$$

$$\xi_3 = dd_\phi; d_\phi = -\frac{T}{\tau_\phi}.$$

Припустимо, що на вході ІЕСМ звичайного типу (рис. 1,б) діє випадкове збурення з кореляційною функцією і спектральною густиною (1.6). Інтеграли (8.5) обчислимо методом, вказаним в прикладі 1. Тоді будемо мати

$$\overline{D}_{\lambda\lambda} = 4jD_{\text{cc}} \left(1 - e^{-\frac{2T}{\tau_m}} \right) \frac{b_0(-a_1a_4 + a_2a_3) - a_0(a_3b_1 - a_1b_2)}{a_0(a_0a_3^2 + a_1^2a_4 - a_1a_2a_3)},$$

де

$$b_0 = (1+d)^2(1+d_\phi), b_1 = 2[(1+d^2)(1+d_\phi^2) - 4dd_\phi],$$

$$b_2 = (1-d)^2(1-d_\phi), a_0 = \left(1 + e^{-\frac{T}{\tau_m}} \right) [2(1+d_\phi)(1+d) + k(1-d)(1-d_\phi)]$$

$$a_1 = j \left[2(1-d)(1-d_\phi) \left(k e^{-\frac{T}{\tau_m}} + 1 + e^{-\frac{T}{\tau_m}} \right) - 8 \left(1 - dd_\phi e^{-\frac{T}{\tau_m}} \right) \right],$$

$$a_2 = 2(1-d)(1-d_\phi) \left(k - 1 - e^{-\frac{T}{\tau_m}} \right) - 4 \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau_m}} \right) (1 - dd_\phi),$$

$$a_3 = 2(1-d)(1-d_\phi) \left(k e^{-\frac{T}{\tau_m}} + 1 - e^{-\frac{T}{\tau_m}} \right),$$

$$a_4 = k(1-d)(1-d_\phi) \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau_m}} \right);$$

$$\overline{D}_{\delta\delta} = \frac{\alpha^2 [k(1-d)(1-d_\phi) + (1+d)(1+d_\phi)(1-dd_\phi)]}{k(3+d+d_\phi+3dd_\phi)(1-k-dd_\phi)}.$$

Тому умова (7.5) буде мати вигляд

$$\overline{D}_{\zeta\zeta} < \frac{0,05625 a_0 (a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3)}{a_u^2 \overline{D}_{\delta\delta} j \left(1 - e^{-\frac{2T}{\tau_m}} \right) [b_0 (-a_1 a_4 + a_2 a_3) - a_0 (a_3 b_1 - a_1 b_2)]} \quad (5.6)$$

При цьому коефіцієнт підсилення $k = 2a_M a_H \alpha$ обмежений умовою стійкості Шур-Кона для $\overline{W}_I(E)$ і $\overline{W}_II(E)$

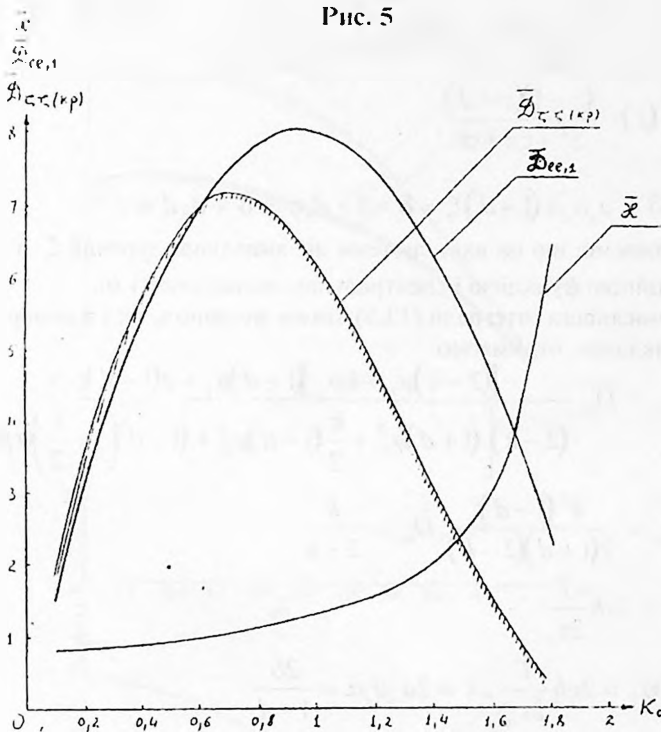
$$k < \frac{1 + dd_\phi (d + d_\phi - dd_\phi) - (d + d_\phi)}{(1-d)(1-d_\phi)}. \quad (6.6)$$

На рис. 5 показана залежність критичної дисперсії $\overline{D}_{\zeta\zeta}$ від коефіцієнта підсилення системи k_0 для

$d = 0,4; d_\phi = 0,4; a_u = 0,5; \frac{T}{\tau_m} = 0,3$, а також залежності $\overline{D}_{II,1}$ і

$\overline{\chi} = \frac{\overline{D}_{II,1}}{\overline{D}_{\zeta\zeta}}$ від k_0 .

Рис. 5



Порівнюючи рис.5 з рис.4, неважко переконатися, що ІЕСМ звичайного і різницевого типів в тому вигляді, в якому вони розглядаються в даній роботі, поведуть себе приблизно однаково при дії випадкових збурень. Однак треба зауважити, що ІЕСМ різницевого типу розглядалася у прикладі 1 без низькочастотного фільтру з фіксатором нульового порядку. Включення останнього в різницеву ІЕСМ приведе до збільшення області обмеженості дисперсії помилки ІЕСМ різницевого типу і зробить її "кращою" в порівнянні з ІЕСМ звичайного типу.

3. У випадку системи з двома спробними кроками (рис.1,в) W_1 і W_2 виберемо так, як і в попередніх прикладах. Тоді

$$\tilde{W}_1^* = \frac{\alpha(1-d)z}{(z-1)(z-d)}, \quad \tilde{W}_1^*(z) = \frac{\delta z}{z^2 + \xi z + \sigma},$$

$$\tilde{W}_n^*(z) = \frac{(z-1)(z-d)}{z^2 + \xi z + \sigma},$$

де $\delta = a_n a_m \alpha (1-d)\xi = \delta - 1 - d, \sigma = \delta + d, d = e^{-\frac{T}{\tau_m}}$.

Вважаємо, що на вхід системи діє випадкове зурення ζ з кореляційною функцією і спектральною щільністю (1.6).

Обчисливши інтеграли (13.5) таким же чином, як і в попередніх прикладах, отримаємо

$$\tilde{D}_{\lambda\lambda} = \tilde{D}_{\zeta\zeta} \frac{[(2-k)\psi_1 + k\psi_2][(1+d)\psi_1 + 2(1-d)\psi_1\psi_2]}{(2-k) \left[(1+d)\psi_1^2 + \frac{k}{2}(1-d)\psi_2^2 + (1-d) \left(1 - \frac{k}{2} \right) \psi_1\psi_2 \right]},$$

$$\tilde{D}_{pp} = \frac{k^2(1-d)}{2(1+d)(2-k)}, \quad \tilde{D}_{qq} = \frac{k}{2-k},$$

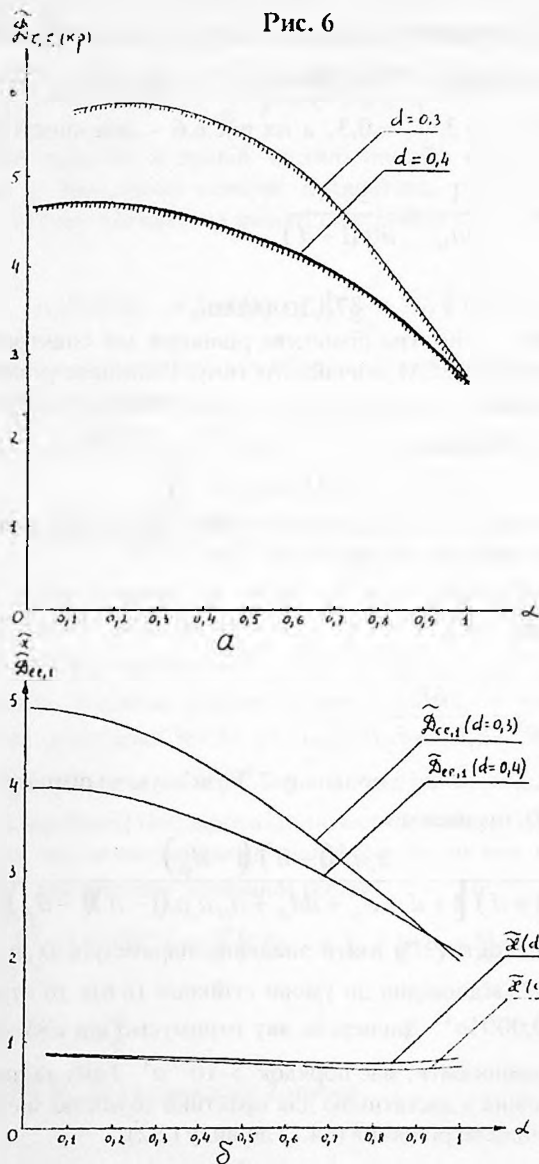
$$\psi_1 = 2sh \frac{T}{2\tau_m}$$

$$\text{де } \psi_2 = 2ch \frac{T}{2\tau_m}, \quad k = 2a_n a_m \alpha = \frac{2\delta}{1-d}.$$

З нерівності (12.5) випливає умова, при якій дисперсія помилки системи з двома спробними кроками буде обмеженою

$$\tilde{D}_{\lambda\lambda} < \frac{0,225}{\rho^2 a_n^2 (\tilde{D}_{pp} + \tilde{D}_{qq})} \frac{(2-k)[2(1+d)\psi_1^2 + k(1-d)\psi_2^2 + (1-d)(2-k)\psi_1\psi_2]}{2\psi_1 [(2-k)\psi_1 + k\psi_2][(1+d) + 2(1-d)\psi_2]} \quad (76)$$

Рис. 6



На рис.6,а показані залежності $\tilde{D}_{\zeta^* (\alpha, \rho)}$ від коефіцієнта підсилення лінійної частини системи α у випадках $d=0,3$ і $d=0,4$ при $a_n = 0,5$; $a = 3$; $\frac{T}{\tau_m} = 0,3$. а на рис.6,б - залежності $\tilde{D}_{H_1}$ і $\tilde{\chi}$ від α , де $\rho = \frac{1}{2a_M} = \frac{1+d}{a\alpha(1-d)}$.

§7. ДОДАТОК.

Знайдемо інтегро-різницеве рівняння для спектральної густини помилки ІЕСМ звичайного типу. Різницеве рівняння відносно помилки e_n даної ІЕСМ, як було показано в §2, має вигляд (14.2). Позначимо

$$a_0(-1)^n = \overline{W}_l(E) a_M^2 a_n (-1)^n. \quad (1.7)$$

Нехай лінійна частина системи має таку ж структуру, як і в прикладі 2 з попереднього параграфу. Тоді [149]

$$a_M = a\alpha \frac{1-d}{2(1+d)},$$

а

$$\overline{W}_l(E) = \frac{\delta E}{E^3 - \xi_1 E^2 + \xi_2 E - \xi_3},$$

де $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \delta$ - сталі з прикладу 2. Розв'язуючи різницеве рівняння (1.7), отримаємо

$$a_0 = \frac{a^2}{8} \frac{a_n \alpha^3 (1-d)^3 (1-d_\phi)}{(1+d)^2 [1+d+d_\phi+dd_\phi+a_M a_n \alpha (1-d)(1-d_\phi)]} \quad (2.7)$$

Якщо в рівності (2.7) взяти значення параметрів α, a_n, d, d_ϕ з прикладу 2 (відповідно до умови стійкості (6.6)), то отримаємо, що $a_0 \approx 0,0001 a^2$. Дисперсія, яку отримуємо від цієї квазіперіодичної компоненти, має порядок $5 \cdot 10^{-9} a^4$. Тому такими величинами можна з достатньою для практики точністю знехтувати і звести різницеве рівняння (14.2) до виду (2.2).

Далі враховуючи, що спектральна густина сигналу на виході нелінійної квадратичної ланки (рис. 2) визначається [149] так

$$\overline{G}_{\phi, \Omega}(\bar{\omega}) = 2\pi a_n^2 \overline{D}_n^2 \delta(\bar{\omega}) + \frac{a_n^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}_n^*(\bar{\Omega}) \tilde{G}_n^*(\bar{\omega} - \bar{\Omega}) / \bar{\Omega} \, d\bar{\Omega} \quad (3.7)$$

де перший доданок в правій частині показує наявність сталої складової у вихідному спектрі квадратора, отримаємо спектральну густина сигналу на виході синхронного детектора у вигляді

$$\overline{G}_{\phi \bar{\omega}}^*(\bar{\omega}) = \frac{\pi}{2} a_n^2 \overline{D}_n^2 [\delta(\bar{\omega} - \pi) + \delta(\bar{\omega} + \pi)] + \frac{a_n^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}_n^*(\bar{\Omega}) \tilde{G}_n^*(\bar{\omega} - \bar{\Omega} + \pi) / \bar{\Omega} \, d\bar{\Omega}$$

а спектральна густина сигналу оберненого зв'язку визначається тоді із співвідношення

$$\begin{aligned} \overline{G}_{\gamma \bar{\omega}}^*(\bar{\omega}) = & \frac{\pi}{2} a_n^2 \overline{D}_n^2 |\overline{W}_l^*(j\bar{\omega})|^2 [\delta(\bar{\omega} - \pi) + \delta(\bar{\omega} + \pi)] + \\ & + \frac{a_n^2}{2\pi} |\overline{W}_l^*(j\bar{\omega})|^2 \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}_n^*(\bar{\Omega}) \tilde{G}_n^*(\bar{\omega} - \bar{\Omega} + \pi) / \bar{\Omega} \, d\bar{\Omega} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Перший доданок правої частини (4.7) відповідає проходженню квазіперіодичної компоненти з частотою $\bar{\omega} = \pi$ через еквівалентну лінійну частину $\overline{W}_l^*(z)$. У випадку різницевої ІЕСМ цей доданок тотожно рівний нулеві. Дійсно, в чисельнику $\overline{W}_l^*(z)$ для різницевої ІЕСМ міститься згідно з (7.2) множник $(z + 1)$. При $\bar{\omega} = \pi, z + 1 = e^{j\bar{\omega}} + 1 = 0$, тому $\overline{W}_l^*(j\pi) = 0$. З цих міркувань в роботі [149] відповідний член був опущений.

Покажемо, що цьому доданку відповідає безмежно мала дисперсія $\overline{D}$ і для випадку звичайної ІЕСМ

$$\begin{aligned} \overline{D} = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi}{2} a_n^2 \overline{D}_n^2 |\overline{W}_l^*(j\bar{\omega})|^2 [\delta(\bar{\omega} - \pi) + \delta(\bar{\omega} + \pi)] / \bar{\omega} \, d\bar{\omega} = \\ = & \frac{1}{2} a_n^2 \overline{D}_n^2 |\overline{W}_l^*(j\pi)|^2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Для функції $\overline{W}_l^*(z)$ з прикладу 2 маємо

$$\bar{D} = \frac{a_n^2 \bar{D}_n^2}{2} \left(\frac{\delta}{1 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3} \right)^2 \approx 0,00004 \bar{D}_n^*.$$

Звідси випливає, що цим доданком на практиці також можна знехтувати. Малі величини для $\bar{D}$ і a_0 отримуємо внаслідок того, що фізично вони задають дисперсії сигналів з частотою $\bar{\omega} = \pi$, що містить низькочастотний фільтр з фіксатором нульового порядку, призначений для нівелювання саме цих квазіперіодичних складових.

Спектральна густина помилки визначається з рівняння балансу спектральних густин [67]*

$$\bar{G}_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) = \bar{G}_{\mu\mu}^*(\bar{\omega}) + \bar{G}_{\gamma\gamma}^*(\bar{\omega}) \quad (6.7)$$

Підставляючи вираз (4.7) в (6.7) з врахуванням малості $\bar{D}$, отримаємо

$$\bar{G}_{\mu\mu}^*(\bar{\omega}) = \bar{G}_{\lambda\lambda}^*(\bar{\omega}) - \frac{a_n^2}{2\pi} |\bar{W}_l^*(j\bar{\omega})|^2 \int_{-\pi}^{\pi} \bar{G}_{\mu\mu}^*(\bar{\Omega}) \bar{G}_{\mu\mu}^*(\bar{\omega} - \bar{\Omega} + \pi) d\bar{\Omega} \quad (7.7)$$

* В роботах [53], [67] показано, що $\bar{G}_{\gamma\gamma}^*(\bar{\omega}) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Банах (Banach S.), Sur les operations dans les ensembles abstraits et leurs application aux equations integrales, Fund. Math., т.III, 1922.

2. Бараталиев К.Б., Решение системы интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами и дополнительными условиями, Материалы 12-й науч. конф. проф.-препод. состава физ.-матем. фак., секция матем., Изд-во АН Кирг. ССР, Фрунзе, 1964, 80-83.

3. Бараталиев К.Б., Приближенное решение интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами, Доклады третьей сибирской конференции по математике и механике, Изд-во Томского ун-та, Томск, 1964, 248-250.

4. Бараталиев К.Б., Применение метода Ю.Д. Соколова к решению интегральных уравнений с отклоняющимся аргументом, Труды по математике, физике и механике, в.21, Изд-во Фрунзенского политехнического ин-та, Фрунзе, 1965, 59-69.

5. Бараталиев К.Б., Решение обобщенной начальной задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, Труды по математике, физике и механике, в.21, Изд-во Фрунзенского политехнического ин-та, Фрунзе, 1965, 43-58.

6. Бараталиев К.Б., Приближенное решение линейных двумерных интегральных уравнений с отклоняющимся аргументом методом Ю.Д. Соколова. Материалы XIII науч. конф. проф.-препод. состава физ.-матем. фак., секция матем., Изд-во "Мектеп", Фрунзе, 1965, 16-18.

7. Бараталиев К.Б., Приближенное решение интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии, в.3, Изд-во "Илим", Фрунзе, 1965, 69-83.

8. Беллман (Bellman R.), On the existence and boundness of solutions of non-linear differential-difference equations, Ann. of math., 50, 2, 1949, 347-355.

9. Беллман и Кук (Bellman R. and Cooke K.L.), Differential-difference equations, New-York - London, Acad. Press, 1963.

10. Бельтюков Б.Д., Построение быстросходящихся итерационных алгоритмов для решения интегральных уравнений, Сибирский математический журнал. т.6, №6, 1965, 1415-1419.

11. Березин И.С. и Жидков Н.П., Методы вычислений, т. I и II, Физматгиз, М., 1962.

12. Бернулли (Bernoulli J.), *Meditationes de chordis vibrantibus*, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 3, 1728, 13-28.

13. Блох З.Ш., Интегральные уравнения для систем регулирования с запаздыванием, Науч. докл. высш. школы, Электромех. и автом., №2, 1958, 55-58.

14. Богданова Л.П., О приближенном решении одного класса нелинейных интегральных уравнений с постоянными пределами, Труды научной конференции инженеров, аспирантов и младших научных сотрудников института математики АН УССР, Изд-во АН УССР, К., 1963, 63-72.

15. Бондаренко П.С., Дослідження обчислювальних алгоритмів наближеного інтегрування диференціальних рівнянь методом скінчених різниць. Вид-во Київського ун-ту, К., 1962.

16. Важевский (Wazewski T.), *Sur la methode des approximations successives*, *Ann. Soc. Polon. Math.*, v.16, 1938, 214-215.

17. Важевский (Wazewski T.), *Sur une extension du procede de Jungermann pour etablir la convergence des approximations successives au cas des equations differentielles ordinaires*, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. math., astr. et phys.* v.8, №1, 1960, 43-46.

18. Важевский (Wazewski T.), *Sur un procede de prouver la convergence des approximations successives sans utilisation des series de comparaison*, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. math., astr. et phys.* v.8, №1, 1960, 47-52.

19. Виккер Д.А., Эффект запаздывания в процессах автоматического регулирования, Авт. и телемех., №6, 1937, 59-76.

20. Воробьев Ю.В., Метод моментов в прикладной математике, Физматгиз, М., 1958.

21. Галеркин Б.Г., Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластин, Вестник инженеров и техников, №19, 1915, 897-908.

22. Галь М.М., Про достатні умови збіжності методу Ю.Д. Соколова для інтегральних рівнянь з відхиляючим аргументом. Тези доповідей VIII звітної наукової конференції інституту, секція фіз.-матем. наук, Дрогобич, 1966, 59-63.

23. Галь М.М., Приближенное решение интегральных уравнений с запаздывающим аргументом методом Ю.Д.Соколова. УМЖ, т.18, №6, 1966, 102-107.

24. Галь М.М., Обоснование применения метода осреднения функциональных поправок для определения спектральной плотности ошибки импульсной экстремальной системы с модуляцией /ИЭСМ/, УМЖ, т.19, №3, 1967, 95-103.

25. Галь М.М., Про достатні умови збіжності методу осереднення функціональних поправок для нелінійних інтегродіференціальних рівнянь, Третя наукова конференція молодих математиків України, "Наукова думка", К., 1967, 289-294.

26. Гайсарян С.С., К обоснованию метода Галеркина для уравнений с запаздывающим аргументом, ПММ, т.25, №3, 1961, 587-590.

27. Гайсарян С.С., К обоснованию метода Б.Г. Галеркина решения краевых задач для уравнений с отклоняющимся аргументом, Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Изд-во ун-та дружбы народов, т.1, 1962, 69-75.

28. Грузинцев Г., Обь одномъ линейномъ функціональномъ уравненіи, Сообщ. Харьк. мат. общ. (2), т.XIII, №6, 1913, 276-292.

29. Давенпорт В.Б. и Рут В.Л., Введение в теорию случайных сигналов и шумов, Изд-во ИЛ, М., 1960.

30. Жданов Г.М., О приближенном решении системы дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом, УМН, т.16, №1(97), 1961, 143-148.

31. Зверкин А.М., Общее решение линейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом, Науч. докл. высшей школы, физ.-матем. науки, №1, 1959, 30-37.

32. Зверкин А.М., Каменский Г.А., Норкин С.Б., Эльсгольц Л.Э., Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, УМН, т.17, №2(104), 1962, 77-164.

33. Зверкин А.М., Каменский Г.А., Норкин С.Б., Эльсгольц Л.Э., Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, II, Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Изд-во ун-та дружбы народов, т.2, 1963, 3-49.

34. Канторович Л.В., Функциональный анализ и прикладная математика, УМН. т.3, №6, 1948, 89-185.

35. Канторович Л.В. и Крылов В.И., Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, М.-Л., 1962,

36. Квапиш (Kwapisz M.), On the iterative method of solving differential equations with retardations, Roczniki Polsk. Towarzystwa Matemat., Ser.I, Prace matematyczne, IX.I, 1965, 57-68.

37. Квапиш (Kwapisz M.), O pewnej metodzie kolejnych przyblizen i jakosciowych zagadnieniach rownan rozniczkowo-funkcyjnych i roznicowych w przestrzeni Banacha, Zeszyty naukowe politechniki Gdanskiej, 79 Matematyka, №4, 1965, 3-73.

38. Квапиш (Kwapisz M.), О существовании и единственности решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве, Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Изд-во ун-та дружбы народов, т.4, 1967, 96-110.

39. Квапиш (Kwapisz M.), О существовании и единственности решения и сходимости последовательных приближений для функциональных уравнений типа Вольтерра в банаховом пространстве, Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Изд-во ун-та дружбы народов, т.4, 1967, 123-138.

40. Келдыш М.В., О методе Б.Г. Галеркина для решения краевых задач, Изв. АН СССР, сер. матем., т.6, №6, 1942, 309-330.

41. Клямко Э.И., Некоторые применения метода Чаплыгина к приближенному решению дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, УМН. т.12, №4(76), 1957, 305-312.

42. Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1953.

43. Колмановский В.Б., Приближенные методы решения краевых задач и задач на собственные функции и собственные значения для интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Изд-во ун-та дружбы народов, т.4, 1967, 187-196.

44. Колмановский В.Б., К работе С.С. Гайсаряна "К обоснованию метода Б.Г. Галеркина решения краевых задач для уравнений с отклоняющимся аргументом". Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Изд-во ун-та дружбы народов, т.4, 1967, 284-285.

45. Кравчук М., Застосування способу моментів до розв'язання лінійних диференціальних та інтегральних рівнянь, Вид-во Укр. Акад. наук, К., I, 1932, II, 1936.

46. Красносельский М.А., Сходимость метода Галеркина для нелинейных уравнений, ДАН СССР, т.73, №6, 1950, 1121-1124.

47. Красносельский М.А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, М., 1956.

48. Кривошеин Л.Е., К приближенному решению некоторых интегро-дифференциальных уравнений, Уч. зап. физ.-матем. фак. Кир. ун-та, в.4, ч.2, 1957, 39-68.

49. Кривошеин Л.Е. и Бараталиев К.Б., К приближенному решению двумерных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Материалы XIII науч. конф. проф.-препод. состава физ.-матем. фак., секция матем. Изд-во «Мактеп», Фрунзе, 1965, 50-53.

50. Крылов А.Н., Лекции о приближенных вычислениях, ГГТИ, М., 1954.

51. Крылов Н.М., Приближенное решение основных проблем математической физики, Изд-во АН УССР. К., 1931.

52. Кузин Л.Т., Расчет и проектирование дискретных систем управления. Машгиз, М., 1962.

53. Кунцевич В.М., Импульсные самонастраивающиеся экстремальные системы автоматического управления, Изд-во "Техника", К., 1966.

54. Курпель Н.С., О некоторых приближенных методах решения нелинейных уравнений в специальных банаховых пространствах. Труды научной конференции инженеров, аспирантов и младших научных сотрудников Института математики АН УССР, Изд-во АН УССР, К., 1963, 57-62.

55. Курпель Н.С., О приближенном решении нелинейных операторных уравнений методом Ю.Д. Соколова, УМЖ, т.15, №3, 1963, 309-314.

56. Курпель Н.С., Оцінки похибки проєкційного методу та методу Ю.Д. Соколова для нелінійних рівнянь в координатному просторі, ДАН УРСР, №9, 1963, 1135-1139.

57. Курпель М.С., Про один наближений метод розв'язування лінійних операторних рівнянь в гільбертовому просторі, ДАН УРСР, №10, 1963, 1275-1279.

58. Курпель Н.С., Достаточные условия сходимости метода Ю.Д. Соколова при приближенном решении нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна, Сб. "Приближенные методы решения дифференциальных уравнений", Изд-во АН УССР, К., 1963, 47-53.

59. Курпель Н.С., О некоторых приближенных методах решения нелинейных операторных уравнений в координатном пространстве, УМЖ, т.16, №1, 1964, 115-120.

60. Курпель Н.С., Условия сходимости и оценки погрешности одного общего итеративного метода решения линейных операторных уравнений, В кн.: Первая республиканская математическая конференция молодых исследователей, в.1, Изд-во АН УССР, К., 1965, 418-427.

61. Курпель Н.С., О существовании и единственности решения одного класса нелинейных операторных уравнений, В кн.: Первая республиканская математическая конференция молодых исследователей, в.1, Изд-во АН УССР, К., 1965, 428-434.

62. Курпель М.С., Про одне узагальнення методу осереднення функціональних поправок, ДАН УРСР, №8, 1965, 1005-1009.

63. Курпель М.С., Збіжність і оцінки похибки деяких загальних ітеративних методів розв'язування операторних рівнянь, ДАН УРСР, №11, 1965, 1423-1427.

64. Курпель Н.С., Некоторые общие приближенные методы решения операторных уравнений, Международный конгресс математиков, Тезисы кратких научных сообщений, секция 14, М., 1966, 39.

65. Курпель М.С., Збіжність і оцінки похибки одного проекційно-ітеративного методу розв'язування операторних рівнянь, В кн.: Друга наукова конференція молодих математиків України, "Наукова думка", К., 1966, 361-365.

66. Курпель М.С., Про один проекційно-ітеративний метод розв'язування операторних рівнянь, ДАН УРСР, серія А, №3, 1967, 218-222.

67. Лившиц Н.А., Пугачев В.Н., Вероятностный анализ систем автоматического управления, т. II, Изд-во "Советское радио". М., 1963.

68. Лиувиль (Liouville J.), Sur le developpement des fonctions ou parties des fonctions en series dont les divers termes sont assujetis a satisfaire a une meme equation differentielle du second ordre, contenant un parametre variable, Journal de math pur. et appl., I, 1836, II, 1837

69. Ловитт У., Линейные интегральные уравнения, Гостехиздат, М., 1957.

70. Лучка А.Ю., Достаточное условие сходимости метода осреднения функциональных поправок, ДАН СССР, т.122, №2, 1958, 179-182.

71. Лучка А.Ю., Приближенное решение интегральных уравнений Фредгольма методом осреднения функциональных поправок, УМЖ, т.12, №1, 1960, 32-45.

72. Лучка А.Ю., Приближенное решение линейных операторных уравнений в пространстве Банаха методом Ю.Д. Соколова, УМЖ, т.13, №1, 1961, 39-52.

73. Лучка А.Ю., Наближене розв'язання безконечних систем алгебраїчних рівнянь методом Ю.Д. Соколова, ДАН УРСР, №2, 1961, 146-149.

74. Лучка А.Ю., Про наближене розв'язання лінійних операторних рівнянь в просторі Банаха методом Ю.Д. Соколова, ДАН УРСР, №4, 1961, 424-428.

75. Лучка А.Ю., Наближене розв'язання безкінечних систем лінійних інтегральних рівнянь методом Ю.Д. Соколова, ДАН УРСР, №9, 1962, 1149-1153.

76. Лучка А.Ю., Наближене розв'язання нескінченних систем лінійних диференціальних рівнянь методом Ю.Д. Соколова, ДАН УРСР, №5, 1963, 563-567.

77. Лучка А.Ю., Теория и применение метода осреднения функциональных поправок, Изд-во АН УССР, К., 1963.

78. Лучка А.Ю., Про застосування методу Ю.Д. Соколова до розв'язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона, ДАН УРСР, №4, 1965, 426-429.

79. Лучка А.Ю., Про застосування методу Ю.Д. Соколова до розв'язання зовнішньої задачі Неймана для рівняння Пуассона, ДАН УРСР, №5, 1965, 547-550.

80. Лучка А.Ю., Приближенное решение операторных уравнений итерационно-проекционным методом, Международный конгресс математиков, Тезисы кратких научных сообщений, секция 14, М., 1966, 41.

81. Лучка А.Ю. и Курпель Н.С., Об одном нестационарном итерационном методе приближенного решения линейных операторных уравнений. УМЖ, т.16, №3, 1964, 389-395.

82. Люстерник Л.А. и Соболев В.И., Элементы функционального анализа, "Наука", М., 1965.

83. Меджитов М., Об интегральных и интегро-дифференциальных уравнениях с отклоняющимся аргументом, Сб. "Исследования по дифференциальным уравнениям и их применению", Изд-во "Наука", Алма-Ата, 1965, 87-94,

84. Микеладзе Ш.Е., Численные методы математического анализа, Гостехиздат, М., 1953.

85. Милн В.Э., Численное решение дифференциальных уравнений, Изд-во ИЛ, М., 1955.

86. Михлин С.Г., О сходимости метода Галеркина, ДАН СССР, т.61, №2, 1948, 197-199.

87. Михлин С.Г., Некоторые достаточные условия сходимости метода Галеркина, Уч. записки ЛГУ, №135, сер. матем. наук, в.21, 1950, 3-23.

88. Михлин С.Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, Физматгиз, М., 1959.

89. Михлин С.Г. и Смолицкий Х.Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, "Наука", М., 1965.

90. Молокович Ю.М., Об одном приближенном методе решения линейных интегральных уравнений, Изв. высш. уч. зав., Матем., №5/12/, 1959, 164-170.

91. Мосолов Б.Г., Об одном приближенном методе решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения, Изв. АН Уз ССР, сер. физ.-матем. наук, №2, 1961, 41-51.

92. Мосолов Б.Г., Об одном приближенном методе решения линейных операторных уравнений в метрическом пространстве L^2 , Изв. АН УзССР, сер. физ.-матем. наук, №5, 1961, 29-34.

93. Мосолов Б.Г., Приближенное решение операторных уравнений методом Ю.Д. Соколова, Изв. АН Уз ССР, сер. физ.-матем. наук, №5, 1963, 26-29.

94. Мосолов Б.Г., Приближенное решение линейных нагруженных интегральных уравнений методом Ю.Д. Соколова, Сб. "Интегрирование некоторых дифференциальных уравнений математической физики", Изд-во "Наука", Уз ССР, Ташкент, 1964, 168-182.

95. Мосолов Б.Г., Приближенное решение операторных уравнений первого рода методом осреднения функциональных поправок, Сб. "Вопросы вычислительной математики и техники", в.7, Изд-во "Наука", Ташкент, 1965, 20-26.

96. Мосолов Б.Г., Приближенное решение систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений методом осреднения функциональных поправок, Сб. "Вопросы кибернетики и вычислительной математики", в.2, Изд-во "Фан" АН Уз ССР, Ташкент, 1966, 66-73.

97. Мышкис А.Д., Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, УМН. т.4, №5(33), 1949, 99-141.

98. Мышкис А.Д., Дополнительные библиографические материалы к статье "Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом", УМН. т.5, №2(36), 1950, 148-154.

99. Мышкис А.Д., Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, Гостехиздат, М.-Л., 1951.

100. Мышкис А.Д., Замечание к статье Жданова "О приближенном решении системы дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом", УМН, т.16, №2,(98), 1961, 131-133.

101. Нейман (Neumann C.), Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential, Leipzig, 1877.

102. Норкин С.Б., О применении метода моментов для вычисления собственных значений и собственных функций однородной краевой задачи с запаздывающим аргументом, Науч. доклады высшей школы, физ.-матем. науки, №5, 1958, 40-46.

103. Норкин С.Б., О применении метода моментов для вычисления собственных значений и собственных функций некоторых краевых задач с запаздыванием, Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Изд-во ун-та дружбы народов, т.3, 1965, 233-238.

104. Норкин С.Б., Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом, "Наука", М., 1965.

105. Петров Г.И., Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости, ПММ, т.4, №3, 1940, 3-12.

106. Петровский И.Г., Лекции по теории интегральных уравнений, "Наука", М., 1965.

107. Пинни Э., Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения, ИЛ, М., 1961,

108. Положий Г.М., Пахарева Н.А., Степаненко И.З., Бондаренко П.С., Великоиваненко И.М., Математический практикум, Физматгиз, М., 1960.

109. Положий Г.М. і Чаленко П.Й., Метод смуг розв'язування інтегральних рівнянь, ДАН УРСР, №4, 1962, 427-431.

110. Полосухина (Polossuchina O.), ber eine besondere Klasse von differentialen Funktionalgleichungen, Zrich, 1910.

111. Польский Н.И., Некоторые обобщения метода Б.Г. Галеркина, ДАН СССР, т.86, №3, 1952, 469-472.

112. Понтрягин Л.С., О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций, ИАН, сер. матем., №6, 1942, 115-134.

113. Привалов И.И., Интегральные уравнения. Изд-во ОНТИ, М.-Л., 1937.

114. Рубаник В.П., Шкильнюк В.С., Линеаризация нелинейных уравнений с запаздывающим аргументом по методу наименьших квадратов. Науч. ежегодник Черновицкого ун-та за 1959 год, физ.-матем. фак., 1960, 545-548.

115. Сабиров Т. и Есаян А.Р., К вопросу о сходимости метода осреднения функциональных поправок, ДАН Тадж. ССР, т.9, №1, 1966, 8-12.

116. Сиренко В.Х., О численной реализации метода осреднения функциональных поправок, УМЖ, т.13, №4, 1961, 51-66.

117. Смирнов В.И., Курс высшей математики, т.4, Физматгиз, М., 1958.

118. Смирнов Н.С., Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений, ОНТИ, М., 1936.

119. Соколов Ю.Д., Об одной задаче теории неустановившихся движений грунтовых вод, УМЖ, т.5, №2, 1953, 159-170.

120. Соколов Ю.Д., К теории плоской неустановившейся фильтрации грунтовых вод, УМЖ, т.6, №2, 1954, 218-232.

121. Соколов Ю.Д., Про наближене розв'язання основного рівняння динаміки підйимального каната, ДАН УРСР, №1, 1955, 21-25.

122. Соколов Ю.Д., Об одной осесимметричной задаче теории неустановившихся движений грунтовых вод, УМЖ, т.7, №1, 1955, 101-111.

123. Соколов Ю.Д., Про один метод наближеного розв'язання лінійних інтегральних та диференціальних рівнянь, ДАН УРСР, №2, 1955, 107-111.

124. Соколов Ю.Д., Про визначення динамічних зусиль в шахтних підйимальних канатах, Прикладна механіка, т.1, №1, 1955, 23-35.

125. Соколов Ю.Д., О методе осреднения функциональных поправок, УМЖ, т.9, №1, 1957, 82-100.

126. Соколов Ю.Д., О применении метода осреднения функциональных поправок к нелинейным интегральным уравнениям, УМЖ, т.9, №4, 1957, 394-412.

127. Соколов Ю.Д., О приближенном решении линейных интегральных уравнений типа Вольтерра, УМЖ, т.10, №2, 1958, 193-208.

128. Соколов Ю.Д., Об одном методе приближенного решения нелинейных интегральных уравнений с переменными пределами, УМЖ, т.10, №4, 1958, 419-433.

129. Соколов Ю.Д., О применении метода осреднения функциональных поправок к линейным относительно производных дифференциальным уравнениям параболического типа, УМЖ, т.12, №2, 1960, 181-195.

130. Соколов Ю.Д., Об одном методе приближенного решения систем линейных интегральных уравнений. УМЖ, т.13, №4, 1961, 79-87.

131. Соколов Ю.Д., Об одном методе приближенного решения систем нелинейных интегральных уравнений с постоянными пределами, УМЖ, т.15, №1, 1963, 58-70.

132. Соколов Ю.Д., О достаточных признаках сходимости метода осреднения функциональных поправок, УМЖ, т.17, №3, 1965, 91-103.

133. Соколов Ю.Д., Метод осреднения функциональных поправок, Изд-во "Наукова думка", К., 1967.

134. Стоницький А.А., Наближене розв'язування методом Ю.Д. Соколова безконечної системи інтегральних рівнянь Вольтерра, залежних від параметра, ДАН УРСР, №12, 1963, 1555-1559.

135. Тивончук В.И., О применении метода осреднения функциональных поправок к решению линейных интегральных уравнений типа Вольтерра. Труды науч. конф. инж., асп. и мл. науч. сотр. Института математики АН УССР, Изд-во АН УССР, К., 1963, 73-76.

136. Тивончук В.І., Про застосування методу Ю.Д. Соколова до розв'язування лінійних інтегральних рівнянь змішаного типу, ДАН УРСР, №8, 1964, 1014-1018.

137. Тивончук В.І., Про оцінку похибки одного варіанта методу Ю.Д. Соколова розв'язання лінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра та рівнянь змішаного типу, ДАН УРСР, №10, 1964, 1281-1284.

138. Тивончук В.І., Про розв'язування лінійних інтегральних рівнянь змішаного типу за допомогою одного варіанта методу Ю.Д. Соколова, ДАН УРСР, №12, 1964, 1559-1563.

139. Тивончук В.И., О решении линейных интегральных уравнений типа Вольтерра при помощи одного варианта метода Ю.Д. Соколова, УМЖ, т.17, №1, 1965, 77-83.

140. Тивончук В.И., О решении линейных интегральных уравнений Вольтерра и уравнений смешанного типа в пространстве L^p при помощи одного варианта метода Ю.Д. Соколова, УМЖ, т.17, №4, 1965, 133-139.

141. Тивончук В.И., О решении линейных интегральных уравнений типа Вольтерра и уравнений смешанного типа при помощи одного варианта метода Ю.Д. Соколова, В кн.: Первая республиканская математическая конференция молодых исследователей, в.1. Изд-во АН УССР, К., 1965, 628-635.

142. Тивончук В.И., Об одном варианте метода осреднения функциональных поправок для решения линейных интегральных уравнений смешанного типа, Дифферен. урав., т.2, №9, 1966, 1228-1238.

143. Тивончук В.І., Про один варіант методу осереднення функціональних поправок розв'язування лінійних інтегральних рівнянь змішаного типу, В кн.: Друга наукова конференція молодих математиків України, "Наукова думка", К., 1966, 601-606.

144. Трикоми Ф., Интегральные уравнения, ИИ, М., 1960.

145. Тукалевская Н.И., Численная реализация метода осреднения функциональных поправок для интегральных уравнений типа Вольтерра. Труды науч. конф. инж., асп. и мл. науч. сотр. Института математики АН УССР. Изд-во АН УССР, К., 1963, 77-83.

146. Туник А.А., Галь М.М., Об ограниченности дисперсии ошибки пропорциональных импульсных систем экстремального управления при воздействии случайных возмущений, Известия АН СССР. Техническая кибернетика, №3, 1968, 147-160.

147. Туник А.А., Галь М.М., Исследование влияния случайных возмущений на работу дискретных оптимизаторов пропорционального типа, Поиск экстремума, Изд-во Томского ун-та, Томск, 1969, 43-52.

148. Тунік А.А., Порівняльне дослідження двох класів імпульсних систем екстремального керування, Автоматика, №1, 1964, 8-18.

149. Тунік А.А., Розрахунок флуктуаційної похибки в дискретних екстремальних системах з синхронним детектором, Автоматика, №2, 1965, 29-38.

150. Фельдбаум А.А., Установившийся процесс в простейшей дискретной экстремальной системе при наличии случайных помех, Автоматика и телемеханика, т.20, №8, 1959, 1056-1070.

151. Хан В., Обзор теории дифференциально-разностных уравнений с постоянными и переменными отклонениями, Периодический сборник переводов иностранных статей, Математика, т.5, №6, 1961, 73-98.

152. Цыпкин Я.З., Устойчивость систем с запаздывающей обратной связью, Автоматика и телемеханика, т.7, №2-3, 1946, 107-129.

153. Чанг (Chang S.S.L.), Optimization of the Adaptive Functions by z-transform Method, Appl. and Ind., 49, July, 1960.

154. Чернышенко Э.А., Исследование сходимости и установление оценки погрешности метода усреднения в полном нормированном пространстве, УМЖ, т.6, №3, 1954, 305-313.

155. Чернышенко Е.А., Метод осереднення в застосуванні до визначення власних значень операторного рівняння, ДАН УРСР, №3, 1955, 217-221.

156. Чернышенко Е.А., Про один варіант методу осереднення, ДАН УРСР, №1, 1956, 10-12.

157. Чернышенко Э.А., Об одном методе приближенного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, УМЖ, т.10, №1, 1958, 89-100.

158. Чернышенко Э.А., О приближенном решении краевой задачи с дифференциальным уравнением теплопроводности, Днепронетровск, 1959.

159. Чистяков Н.И., Об учете влияния фазового запаздывания в усилителе на автоматическую подстройку, Электросвязь, №7, 1940, 27-29.

160. Швець І.Г., Федоров В.Й. і Боднарчук В.Г., Застосування деяких наближених методів до розв'язання рівнянь теплопровідності у роторах турбін, Збірн. праць Ін-ту теплоенерг., АН УРСР. в.18, 1960, 3-15.

161. Шмидт (Schmidt E.), ber eine Klasse linearer funktionalen Differentialgleichungen, Math. Ann., 70, 1911, 499-524.

162. Эйлер (Euleri L.), Investigatio curvarum quae evolutae sui similes producant, Comm. Acad. Sci. Imper. Petropolitanae ad annum MDCCXL, XII, 1750, 3-52.

163. Эльсгольц Л.Э., Приближенные методы интегрирования дифференциально-разностных уравнений, УМН, т.8, №4(56), 1953, 81-93.

164. Эльсгольц Л.Э., Качественные методы в математическом анализе, Гостехиздат, М., 1955.

165. Эльсгольц Л.Э., Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, "Наука", М., 1964.

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ГАЛІЬ М.М. ГАЛІЬ ІО.М.

ІНТЕГРО-РІЗНЕЦЕВІ РІВНЯННЯ

(ЧАСТИНА ДРУГА)

Підписано до друку 12.10.2000 р.
Формат 60х84/16. Папір офсетний. Зам. 1562.

Поліграфічна фірма "Коло"
Дрогобич, вул. Бориславська, 8
тел. 2-90-60