

**Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка**

Юрій Галь, Ольга Золота

ПРОЕКТИВНА ГЕОМЕТРІЯ ТА ОСНОВИ ГЕОМЕТРІЇ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

для студентів напряму підготовки 6. 040201 «Математика»

**Дрогобич
2011**

УДК 514.
ББК 22. 151
Г 17

Рекомендовано до друку вченою радою
Дрогобицького державного педагогічного університету
імені Івана Франка як навчально-методичний посібник
(протокол № 9 від 29 вересня 2011 р.)

Рецензенти:

Зарічний М. М., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри геометрії і топології, декан механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка;

Заболоцький М. В., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного моделювання Львівського національного університету імені Івана Франка;

Винницький Б. В., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного аналізу Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Відповідальний за випуск: Комарницька Л. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри математики та методики викладання математики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Галь Юрій. Проективна геометрія та основи геометрії: навчально-методичний посібник [для студентів напряму підготовки 6. 040201 «Математика»] / **Галь Юрій, Золота Ольга.** – Дрогобич: Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, 2011. – 124 с.

Навчально-методичний посібник написано відповідно до програми курсу «Проективна геометрія та основи геометрії» напряму підготовки 6.040201 «Математика» для підготовки фахівців ОКР «Бакалавр», затвердженої вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (протокол № 9 від 29 вересня 2011 р.).

У посібнику висвітлено такі теми: проективна геометрія на прямій, поняття проективної площини, найпростіші факти геометрії проективної площини, проективні перетворення, квадрики та основи геометрії. Посібник призначений для студентів і викладачів математичних спеціальностей університету та вчителів математики середньої школи.

УДК 514.01, 514.12.01, 514.132.01
Галь Ю. М., Золота О. А.
Редакційно-видавничий відділ
Дрогобицького державного педагогічного
університету імені Івана Франка, 2011

Зміст

Передмова	5
---------------------	---

Розділ I. Проективна геометрія на прямій

Розширена евклідова пряма. Проективна пряма	7
Проективна система координат на прямій	10
Подвійне відношення чотирьох точок. Гармонізм	16
Подвійне відношення чотирьох точок на розширеній евклідовій прямій.	21

Розділ II. Поняття проективної площини

Розширена евклідова площина. Проективна площина	29
Проективна система координат.	31
Однорідні афінні координати на розширеній евклідовій площині	34
Криві другого порядку в однорідних афінних координатах	37

Розділ III. Найпростіші факти геометрії проективної площини

Принцип двоїстості. Теорема Дезарга	44
Подвійне відношення чотирьох точок і прямих на площині.	48
Повний чотиривершинник і повний чотиристоронник.	50
Гармонійні властивості деяких чотиривершинників на розширеній евклідовій площині	53

Розділ IV. Проективні перетворення

Проективне відображення прямої на пряму	58
Проективне перетворення прямої. Інволюції	60
Означення та ознака інволюції. Задання.	62
Колінеації	65
Гомології.	69
Гомології на розширеній евклідовій площині.	71

Розділ V. Квадрики

Квадрики та їхня класифікація. Задання квадрики п'ятьма точками	78
Взаємне розташування прямої і квадрики. Поляри і полюси	82
Теорема Паскаля і Бріансона	87
Квадрики на розширеній евклідовій площині	89

Розділ VI. Основи геометрії

Книга «Начала» Евкліда.	100
Еквіваленти V постулату Евкліда	104
Деякі факти геометрії Лобачевського.	106
Взаємне розміщення прямих на площині Лобачевського	112
Вчення про площі в геометрії Лобачевського.	115
Аксиоматична побудова геометрії Гільбертом	117
Література.	123
Предметний покажчик.	124

Передмова

Посібник з проєктивної геометрії та основ геометрії є розширеним курсом лекцій, який протягом багатьох років читався для студентів-математиків в університеті. Цей предмет, на нашу думку, є особливо потрібний для майбутніх вчителів математики. Прикро, що його вилучили із навчальних планів класичних університетів взагалі.

Зважаючи на те, що на вивчення цього курсу відводиться невелика кількість годин (за вибором ВНЗ), автори свідомі того, що виклад деяких питань довелося спростити завдяки відсутності доведень складних тверджень і зосередитися на застосуваннях до розв'язування практичних завдань.

У підручнику багато прикладів для самостійної роботи студентів, завдань для самоконтролю та варіантів контрольних робіт.

Україномовного аналогу ми не зустрічали, тому і вважали за потрібне компенсувати цей недолік.

Посібник містить шість розділів: проєктивна геометрія на прямій та площині, найпростіші факти геометрії проєктивної площини, проєктивні перетворення, квадрики та основи геометрії, що повністю відповідає програмі з цієї дисципліни.

Кожний розділ може використовуватися як для майбутньої роботи вчителя середньої школи, так і в дослідницькій роботі.

Розділ I. Проективна геометрія на прямій

У перші десятиліття XIX століття, одночасно з розвитком досліджень з основ геометрії, виникла особлива галузь знань – проективна геометрія. Джерелом її виникнення були потреби графіки та архітектури. Спочатку проективна геометрія мала доволі обмежену сферу застосувань. Проте в міру зростання вона все більше і більше проникала у різні геометричні області, а в кінці XIX століття дослідження з проективної геометрії та основ елементарної геометрії тісно об'єдналися. Чудовим результатом цього об'єднання була побудова у рамках проективної геометрії глибокої теорії, яка об'єднала в єдину схему геометрії Евкліда, Лобачевського та Рімана.

Як і для евклідової геометрії, основними поняттями у проективній геометрії є поняття точки, прямої та площини. Зміст цих понять розкривається в системі аксіом, яку поділено на три групи: аксіоми належності, порядку та аксіома неперервності.

Розглянемо спочатку **аксіоми I групи**:

I_1 . Якими б не були дві точки A і B , існує пряма a , що проходить через точки A , B .

I_2 . Якими б не були дві різні точки A і B , існує не більше однієї прямої, яка проходить через точки A , B .

I_3 . На кожній прямій є не менше трьох точок. Існують принаймні три точки, що не лежать на одній прямій.

I_4 . Через кожні три точки A , B , C , що не лежать на одній прямій, проходить деяка площина α . На кожній площині є принаймні одна точка.

I_5 . Через кожні три точки A , B , C , що не лежать на одній прямій, проходить не більше, ніж одна площина.

I_6 . Якщо дві точки A , B прямої a лежать на площині α , то кожна точка прямої a лежить на площині α .

I_7 . Якщо дві площини α, β мають спільну точку A , то вони мають принаймні ще одну спільну точку B .

I_8 . Є не менше чотирьох точок, що не лежать в одній площині.

I_9 . Кожні дві прямі, що розміщені в одній площині, мають спільну точку.

Проективні аксіоми належності відрізняються від аксіом порядку елементарної геометрії лише у двох випадках:

- 1) у аксіомі I_3 проективної системи вимагається, щоб на кожній прямій існувало не менше трьох точок (у аксіомі Гільберта вимагається, щоб пряма містила хоча б дві точки);
- 2) проективні аксіоми належності охоплюють вимогу I_9 , яка не ставиться і не виконується в елементарній геометрії. Завдяки аксіомі I_9 у проективній геометрії немає паралельності, оскільки будь-які дві прямі площини перетинаються.

Отже, проективні аксіоми належності містять більше вимог, ніж аксіоми належності елементарної геометрії. З аксіом $I_1 - I_9$ випливає, що:

- 1) пряма і площина завжди мають спільну точку;
- 2) дві площини завжди мають спільну пряму;
- 3) три площини завжди мають спільну точку.

Аксіоми порядку та аксіому неперервності наведемо після введення поняття проективної прямої.

Розширена евклідова пряма. Проективна пряма

У евклідовій площині R_2 візьмемо пучок $\mathcal{S}$ прямих з центром S (множину прямих, які проходять через точку S) і пряму R_1 , яка не проходить через центр пучка. Розглянемо відображення ψ прямої R_1 в пучок $\mathcal{S}$, при якому $\forall A \in R_1$ відповідає пряма $SA \in \mathcal{S}$ (рис. 1), тобто відображення $\psi: R_1 \rightarrow \mathcal{S}$, яке визначається умовою $\psi(A) = (SA)$. Таке відображення називається *перспективним*.

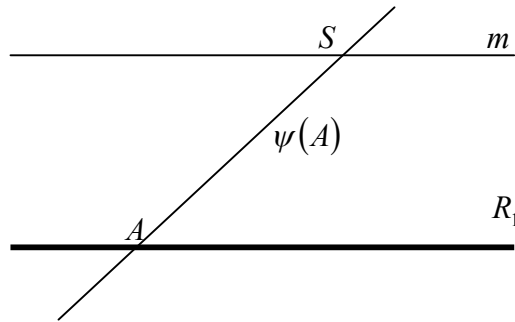


Рис. 1

Відображення ψ ін'єктивне, оскільки з того, що $A \neq B \Rightarrow \psi(A) \neq \psi(B)$. Але воно не сюр'єктивне, оскільки в пучку $\mathcal{S}$ є пряма, яка не має прообразу. Це пряма $m \parallel R_1$. Для того, щоб відображення стало сюр'єктивним, можна:

- 1) з пучка $\mathcal{S}$ забрати пряму m та розглядати відображення $R_1 \rightarrow (\mathcal{S} \setminus \{m\})$ або
- 2) до прямої R_1 приєднати додаткову точку, яку будемо розглядати як прообраз прямої m при перспективному відображенні.

Використаємо другий спосіб.

До прямої R_1 приєднаємо точку M_∞ . Будемо вважати, що $M_\infty = m \cap R_1$. Це дасть можливість розглядати пряму m як образ точки M_∞ при перспективному відображенні.

Означення. Евклідову пряму, доповнену точкою M_∞ , будемо називати *розширеною евклідовою прямою* (і позначати $\bar{R}_1$), а точку M_∞ – *невласною або нескінченно віддаленою точкою* прямої R_1 .

Тепер будемо розглядати відображення $\bar{\psi}: \bar{R}_1 \rightarrow \mathcal{S}$, яке на множині власних точок прямої $\bar{R}_1$ діє як ψ , а невласну точку відображає на пряму m .

Таке перспективне відображення $\bar{\psi}$ є одночасно і ін'єктивним, і сюр'єктивним, тобто воно є бієктивним (взаємнооднозначним).

Тепер, користуючись бієктивністю відображення $\bar{\psi}: \bar{R}_1 \rightarrow \mathcal{S}$, ми можемо замість $\bar{R}_1$ розглядати пучок $\mathcal{S}$, назвавши його проективною прямою, а прямі пучка – точками.

Означення. Проективною прямою називається множина P_1 , якщо існує бієктивне відображення $g: P_1 \rightarrow S$, де S – пучок прямих евклідової площини; елементи множини P_1 називаються точками.

Тепер одні і ті ж факти можуть бути виражені як на мові евклідової, так і на мові проективної геометрії:

Мова евклідової геометрії	Мова проективної геометрії
Пучок прямих (S)	Проективна пряма (P_1)
Пряма пучка	Точка

Порядок точок на евклідовій прямій характеризується відношенням «лежати між». На проективній прямій це відношення не має змісту, замість нього вводиться нове відношення – «розділеність пар точок».

У пучку S візьмемо пару прямих A і B і розглянемо дві множини: а) множину, яка складається з прямих A , B і всіх прямих пучка, які розташовані всередині однієї з пар вертикальних кутів, що утворені цими прямими; б) множину, яка складається із прямих A , B і всіх прямих, що розташовані всередині другої пари вертикальних кутів. На мові проективної геометрії ці множини називаються *відрізками*, а прямі A і B – *кінцями відрізків*. Отже, на проективній прямій є два відрізки із спільними кінцями.

Означення. Нехай A, B, C, D – точки проективної прямої. Якщо точки C, D лежать на різних відрізках з кінцями A, B , то пара (C, D) називається такою, що *розділяє* пару (A, B) (позначення: $A, B \div C, D$), якщо на одному – такою, що *не розділяє* (позначення $A, B \nmid C, D$).

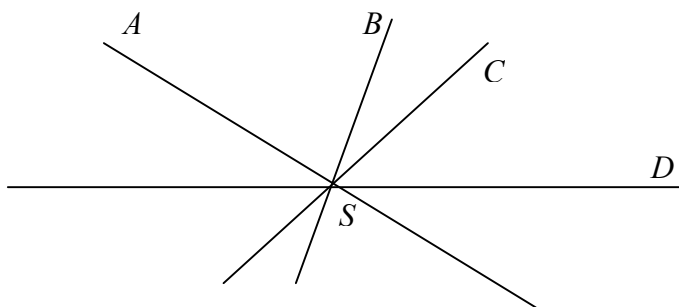


Рис. 2



Рис. 3

На рисунках 2 (пучок) і 3 (розширена евклідова пряма) показано такі пари:

$$A, B \div C, D; A, C \div B, D; A, D \div B, C.$$

Пряма пучка, яка неперервно обертається в ньому, повертається у вихідне положення. Це означає, що проєктивна пряма є *замкнутою*.

Тепер можемо навести **аксіоми порядку**:

II₁. Дві точки A і B прямої ділять усі інші точки цієї прямої на непорожні класи.

II₂. Якщо $A, B \div C, D$, то $C, D \div A, B$.

II₃. Будь-які чотири точки прямої можуть бути єдиним способом розбиті на дві розділені пари.

II₄. Перспективне відображення прямої на пряму зберігає роздільність пар точок.

II₅. Якщо дано п'ять точок A, B, C, D, E однієї прямої, причому $A, B \div C, D$, $A, B \div C, E$, то $A, B \div D, E$.

Аксіома неперервності (Дедекінда)

III. Якщо всі точки відрізка розбити на два непорожні класи так, що кожна точка віднесена до одного і тільки одного з класів, і кожна точка першого класу передує будь-якій точці другого класу, то існує точка, яка виконує це розбиття; вона є або останньою точкою першого класу, і тоді решта точок цього класу передує їй, або першою точкою другого класу, і тоді вона передує усім точкам цього класу.

Проективна система координат на прямій

Введемо систему координат у пучку. Розглянемо на площині R_2 афінну систему координат, початок якої співпадає з центром S пучка, а координатні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ довільні, але не колінеарні (для такої системи будемо використовувати позначення $(S, \vec{e}_i)$). Будь-яка пряма X пучка може бути однозначно визначена напрямним вектором $\vec{x}$ (рис. 4).

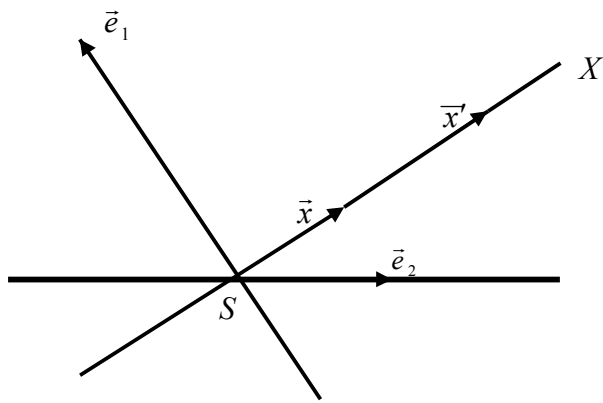


Рис. 4

Тому пара чисел (x_1, x_2) координат вектора $\vec{x}$ характеризує пряму пучка. Однак ця ж пряма може бути задана і будь-яким іншим напрямним вектором $\vec{x}'$. Обидва напрямні вектори є колінеарними і пов'язані відношенням $\vec{x}' = k\vec{x}$ ($k \neq 0$). Тому

пара чисел (kx_1, kx_2) теж характеризує пряму X .

Отже, на проєктивній прямій визначена *проєктивна* система координат, тобто задання точок проєктивної прямої за допомогою чисел. Для позначення координати прямої пучка використовуватимемо позначення $X(x_1 : x_2)$, підкреслюючи тим, що пряма пучка характеризується не самими числами x_1, x_2 , а їхніми відношенням. Іноді координату прямої пучка записують у вигляді матриці-стовпчика, елементами якої є координати одного з напрямних векторів:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Означення. Дві афінні системи координат із спільним початком координат називаються *гомотетичними*, якщо відповідні координатні вектори обох систем відрізняються лише множителем і притому одним і тим же.

Теорема 1.1. Для того, щоб дві системи афінних координат, початок яких є в центрі пучка, визначали одну і ту ж систему координат, необхідно і достатньо, щоб системи були гомотетичними.

Д о в е д е н н я. Достатність. Нехай дві системи координат гомотетичні, тобто $\exists h \neq 0$, при якому

$$\vec{e}'_1 = h\vec{e}_1, \vec{e}'_2 = h\vec{e}_2, \quad (1.1)$$

де $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ – пари базисних векторів афінних систем координат. Доведемо, що напрямний вектор $\vec{x}$ довільної прямої X пучка має у цих системах про-порційні координати. Це буде означати, що обидві системи визначають у пучку одну і ту ж систему проєктивних координат.

Нехай вектор $\vec{x}$ в системі $(S, \vec{e}_i)$ має координати (x_1, x_2) , тобто

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2.$$

Використовуючи (1.1), отримаємо

$$\vec{x} = \frac{x_1}{h} \vec{e}'_1 + \frac{x_2}{h} \vec{e}'_2.$$

Тоді в системі $(S, \vec{e}'_i)$ вектор $\vec{x}'$ має координати $\left(\frac{x_1}{h}, \frac{x_2}{h}\right)$, які є пропорційними до координат вектора в системі $(S, \vec{e}_i)$.

Необхідність. Тепер нехай нам задано, що обидві системи визначають в пучку одну і ту ж систему координат. Це означає, що координати будь-якого вектора, обчислені в одній і в другій системах, пропорційні. А саме, вектор $\vec{e}'_1$, координати якого в системі $(S, \vec{e}'_i)$ утворюють пару $(1, 0)$, в системі $(S, \vec{e}_i)$ має координати $(h_1, 0)$, тобто $\vec{e}'_1 = h_1 \vec{e}_1$. Аналогічно $\vec{e}'_2 = h_2 \vec{e}_2$.

Тепер розглянемо вектор

$$\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 = h_1 \vec{e}_1 + h_2 \vec{e}_2.$$

Його координати в системі $(S, \vec{e}'_i)$ утворюють пару $(1, 1)$, а в системі $(S, \vec{e}_i)$ – пару (h_1, h_2) . За умовою – обидві пари пропорційні і тому $h_1 = h_2$. Позначаючи $h_1 = h_2 = h$, отримуємо формулу (1.1).

Теорему доведено.

Проте для введення проєктивної системи координат ми використовували вектори, які не були елементами пучка. Необхідно знайти спосіб задання проєктивних координат за допомогою прямих пучка, тобто внутрішніми для цього пучка способами.

Теорема 1.2. *Якими б не були три різні точки E_1, E_2, E_0 проєктивної прямої, існує єдина система проєктивних координат, в якій ці три точки мають координати*

$$E_1(1:0), E_2(0:1), E_0(1:1).$$

Д о в е д е н н я проведемо на мові евклідової геометрії.

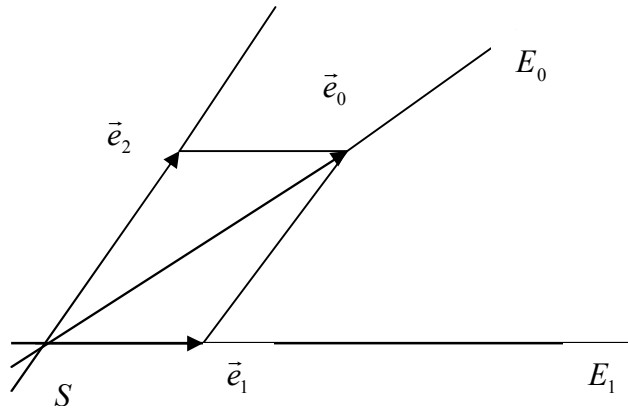


Рис. 5

Існування. Нехай $\vec{e}_0$ – довільний напрямний вектор прямої E_0 пучка S (рис. 5). Розклавши його на складові $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$, які колінеарні прямим E_1 та E_2 , отримуємо $\vec{e}_0 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

Введемо тепер в пучку S систему афінних координат $(S, \vec{e}_i)$. У цій системі вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ та $\vec{e}_0$ мають координати

$$\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1), \vec{e}_0 = (1, 1).$$

Тому система $(S, \vec{e}_i)$ задовольняє умову теореми.

Єдиність. Нехай $(S, \vec{e}_i)$ та $(S, \vec{e}'_i)$ – дві системи афінних координат в пучку, які визначають у цьому пучку проєктивні системи координат, що задовольняють умови теореми. Необхідно довести, що вони визначають одну у ту ж систему проєктивних координат. Тому відповідно за теоремою 1 для цього необхідно довести гомотетичність обох систем.

Вектор $\vec{e}_1$ у системі $(S, \vec{e}_i)$ і вектор $\vec{e}'_1$ в системі $(S, \vec{e}'_i)$ мають координати $(1, 0)$. За умовою, такі ж координати має і напрямний вектор прямої E_1 . Тому, $\vec{e}_1 \parallel \vec{e}'_1$. Аналогічно робимо висновок, що $\vec{e}_2 \parallel \vec{e}'_2$. Оскільки $\vec{e}'_1 = h_1 \vec{e}_1$, $\vec{e}'_2 = h_2 \vec{e}_2$, $\vec{e}'_0 = h_0 \vec{e}_0$, то

$$\vec{e}'_0 = h_0(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = h_1 \vec{e}_1 + h_2 \vec{e}_2$$

і $h_1 = h_2 = h_0$, що доводить гомотетичність систем координат.

Теорему доведено.

Отже, *проєктивна система координат однозначно визначається трійкою точок*. Ці точки називаються *фундаментальними точками* системи координат. При цьому E_1 та E_2 , крім того, називаються *координатними*, а E_0 – *одичною*.

Систему координат R , що визначається фундаментальними точками E_1, E_2, E_0 будемо позначати $R = (E_1, E_2, E_0)$ або $R = (E_i)$.

Знайдемо залежність між координатами однієї і тієї ж проективної прямої в різних системах координат. Це зручно зробити в термінах, що стосуються пучка (на мові евклідової геометрії).

Нехай $(S, \vec{e}_i)$ та $(S, \vec{e}'_i)$ – дві системи афінних координат і X – будь-яка пряма пучка S . Позначимо через $\vec{x}$ один з напрямних векторів прямої X . Тоді його пара координат є координатою прямої X . Позначимо через X стовпчик із координат вектора $\vec{x}$ в системі $(S, \vec{e}_i)$; стовпчик із координат цього ж вектора в системі $(S, \vec{e}'_i)$ позначимо через X' . Ці стовпчики пов'язані відношенням

$$X' = PX, \quad (1.2)$$

де P – неособлива квадратна матриця другого порядку, яка задає перехід від пари векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ до пари векторів $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$, а саме:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \text{ якщо } \begin{cases} \vec{e}'_1 = p_{11}\vec{e}_1 + p_{21}\vec{e}_2, \\ \vec{e}'_2 = p_{12}\vec{e}_1 + p_{22}\vec{e}_2. \end{cases}$$

Стовпці X і X' визначені з точністю до ненульового множника. Рівняння $X' = PX$ необхідно розуміти як твердження пропорційності стовпців X' та PX , тому рівняння *переходу однієї системи проективних координат до другої* в матричній формі будемо записувати у такому вигляді:

$$\lambda X' = PX$$

або

$$\begin{cases} \lambda x'_1 = p_{11}x_1 + p_{12}x_2, \\ \lambda x'_2 = p_{21}x_1 + p_{22}x_2, \end{cases}$$

де λ – коефіцієнт пропорційності ($\lambda \neq 0$). Матриця у рівнянні (1.2) визначена з *точністю до множника*.

Рівняння переходу можна записати і в іншому вигляді

$$\mu X = QX',$$

де $\mu = \lambda^{-1}$, $Q = P^{-1}$ або

$$\begin{cases} \mu x_1 = q_{11}x'_1 + q_{12}x'_2, \\ \mu x_2 = q_{21}x'_1 + q_{22}x'_2. \end{cases} \quad (1.3)$$

На проєктивній прямій P_1 усі точки рівноправні. На розширеній евклідовій прямій $\bar{R}_1$ неособлива точка відіграє особливу роль. Якщо цю точку взяти за одну із фундаментальних точок проєктивної системи координат, то отримаємо систему проєктивних координат особливого вигляду.

Означення. Проективна система координат $R = (E_1, E_2, E_0)$ на розширеній евклідовій прямій $\bar{R}_1$ називається *системою однорідних афінних координат*, якщо точка E_1 невласна.

Звичайна система афінних координат на нерозширеній прямій R_1 називається *неоднорідною*. Вона визначається двома точками – початком координат O і точкою E , координата якої дорівнює 1. Якщо $O = E_2$ і $E = E_0$, то система однорідних координат на $\bar{R}_1$ і система неоднорідних координат на R_1 називаються *відповідними*.

Перевага однорідної системи координат перед неоднорідною полягає в тому, що в однорідній системі невласна точка має визначені координати. За **теоремою 1.2** випливає, що ці координати дорівнюють $(1:0)$.

Теорема 1.3. Власна точка X прямої R_1 , що має неоднорідну координату x , у відповідній однорідній системі має координату $(x:1)$.

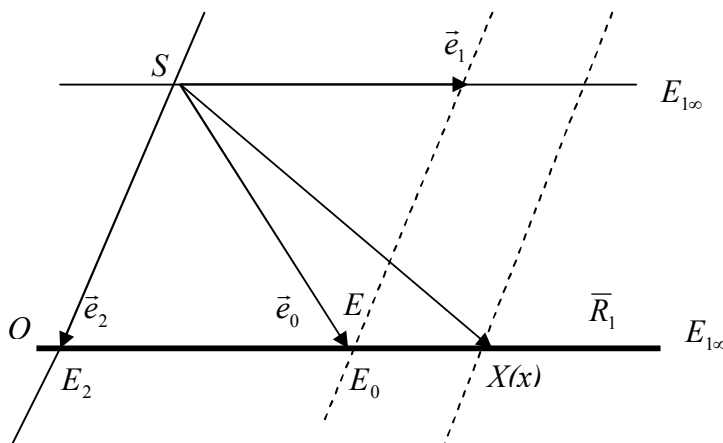


Рис. 6

Д о в е д е н н я. Нехай неоднорідна система афінних координат на прямій R_1 задається точками O і E . Тоді відповідна однорідна система координат на $\bar{R}_1$ задається точками $E_{1\infty}$, $E_2 = O$, $E_0 = E$.

Приведемо пряму $\bar{R}_1$ у перспективну відповідність з деяким пучком S , центр якого виберемо довільним (рис. 6). У цьому пучку визначимо систему координат $(S, \vec{e}_i)$ так, щоб вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_0 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ були напрямними для прямих $SE_{1\infty}, SE_2, SE_0$, поклавши

$$\vec{e}_1 = \overrightarrow{E_2 E_0}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{SE_2}, \vec{e}_0 = \overrightarrow{SE_0}.$$

Тоді прямі $SE_i, i = 1, 2, 0$ у пучку і, як наслідок, точки $E_i, i = 1, 2, 0$ на прямій будуть мати координати $(1 : 0), (0 : 1), (1 : 1)$ відповідно. У зв'язку з тим координати довільної точки $X \in R_1$ будуть дорівнювати координатам прямої SX в пучку, які своєю чергою рівні координатам напрямного вектора прямої. За напрямний вектор прямої SX зручніше взяти вектор SX , який має координати $(x, 1)$. Тоді координатою точки X буде пара $(x : 1)$.

Теорему доведено.

Подвійне відношення чотирьох точок. Гармонізм

Якщо A і B – координатні стовпці двох різних точок проективної прямої, а C – координатний стовпець якої-небудь третьої точки цієї ж прямої, то можна підібрати такі числа α і β , що буде виконуватися рівність

$$C = \alpha A + \beta B.$$

Справді, якщо

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

то α і β визначаються із системи:

$$\begin{cases} c_1 = \alpha a_1 + \beta b_1, \\ c_2 = \alpha a_2 + \beta b_2, \end{cases}$$

визначник якої відмінний від нуля, оскільки стовпці A і B , як координатні стовпці різних точок, непропорційні.

Означення. Нехай A, B, C, D – координатні стовпці чотирьох різних точок проективної прямої і $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ такі числа, що

$$C = \alpha A + \beta B, \quad D = \alpha' A + \beta' B.$$

Тоді число $\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}$ називається *подвійним (або складним) відношенням чотирьох точок* A, B, C, D . Будемо записувати це так:

$$(ABCD) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

Теорема 1.4. Нехай A, B, C, D – четвірка точок проективної прямої і A_1, B_1, C_1, D_1 – їхні довільні координатні стовпці в одній проективній системі координат, а A_2, B_2, C_2, D_2 – в іншій. Тоді, якщо

$$\begin{cases} C_1 = \alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1, \\ D_1 = \alpha'_1 A_1 + \beta'_1 B_1; \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = \alpha_2 A_2 + \beta_2 B_2, \\ D_2 = \alpha'_2 A_2 + \beta'_2 B_2; \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\text{то} \quad \frac{\beta_1}{\alpha_1} : \frac{\beta'_1}{\alpha'_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} : \frac{\beta'_2}{\alpha'_2}.$$

Д о в е д е н н я. Як ми вже говорили, координатні стовпці цих точок у різних системах пов'язані співвідношеннями

$$xA_2 = PA_1, \quad yB_2 = PB_1, \quad zC_2 = PC_1, \quad tD_2 = PD_1,$$

де P – матриця переходу від однієї системи до другої, а x, y, z, t – коефіцієнти пропорційності.

Помноживши перші дві з формул (1.4) зліва на матрицю P , отримуємо

$$zC_2 = \alpha_1 xA_2 + \beta_1 yB_2, \quad tD_2 = \alpha'_1 xA_2 + \beta'_1 yB_2.$$

Порівнюючи ці співвідношення із другою парою формул (4), побачимо, що

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 x}{z}, \quad \beta_2 = \frac{\beta_1 y}{z}, \quad \alpha'_2 = \frac{\alpha'_1 x}{t}, \quad \beta'_2 = \frac{\beta'_1 y}{t}.$$

Тому

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2} : \frac{\beta'_2}{\alpha'_2} = \frac{\frac{\beta_1 y}{z}}{\frac{\alpha_1 x}{z}} : \frac{\frac{\beta'_1 y}{t}}{\frac{\alpha'_1 x}{t}} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} : \frac{\beta'_1}{\alpha'_1}.$$

Теорему доведено.

В означенні подвійного відношення ми вимагаємо, щоб усі чотири точки були різними. Вимога неспівпадіння точок A і B необхідна для того, щоб були можливими відношення $C = \alpha A + \beta B$, $D = \alpha' A + \beta' B$. Оскільки точки першої пари не

співпадають з точками другої пари, то всі коефіцієнти відмінні від нуля, тому у формулі $(ABCD) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}$ немає ділення на нуль.

Далі цю вимогу можна дещо послабити. Для цього до множини дійсних чисел приєднаємо нове число, яке позначатимемо ∞ . Числу ∞ припишемо такі властивості:

$$\frac{m}{\infty} = \infty (m \neq 0); \quad \frac{m}{\infty} = 0 (m \neq \infty); \quad m \cdot \infty = \infty (m \neq 0).$$

Тепер обмежимося вимогою, щоб лише три точки A, B, C були різними; точка D може співпадати з будь-якою з них (відмітимо, що оскільки C не співпадає ні з A , ні з B , то $\frac{\beta}{\alpha} \neq 0$, $\frac{\beta}{\alpha} \neq \infty$):

1) $D = A$. У цьому випадку $\beta' = 0, \alpha' \neq 0$, тому $\frac{\beta'}{\alpha'} = 0$ і $\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} = \infty$. Отже, $(ABCA) = \infty$.

2) $D = B$. Тут аналогічно отримуємо $(ABCB) = 0$.

3) $D = C$. У цьому випадку $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'}{\alpha'}$, тому $(ABCC) = 1$.

Теорема 1.5. Нехай задано три різні точки A, B, C на проєктивній прямій і подвійне відношення $(ABCD) = h$. Цими умовами точка D визначається однозначно.

Д о в е д е н н я. Якщо $h = \infty$ або $h = 0$, то положення точки D визначено: вона співпадає з A або з B . Тому вважаємо, що $h \neq \infty$, $h \neq 0$.

Звернемося до формул $C = \alpha A + \beta B$, $D = \alpha' A + \beta' B$. Тут $\frac{\beta'}{\alpha'}$ – шукане, а $\frac{\beta}{\alpha}$ – відоме, причому $\frac{\beta}{\alpha} \neq \infty$, $\frac{\beta}{\alpha} \neq 0$. Тому маємо, що $\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\beta}{\alpha h}$. Тепер координатний стовпець точки D знаходиться з точністю до множника, який і визначає її положення на прямій.

Теорему доведено.

Наступна теорема показує, як проєктивні координати пов'язані з подвійним відношенням.

Теорема 1.6. Нехай на проєктивній прямій задана система координат $R(E_1, E_2, E_0)$ і точка $X(x_1 : x_2)$. Тоді $(E_1 E_2 E_0 X) = x_1 : x_2$.

Д о в е д е н н я. За умовою

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

тому

$$\begin{cases} E_0 = E_1 + E_2, \\ X = x_1 E_1 + x_2 E_2 \end{cases}$$

Тоді за означенням

$$(E_1 E_2 E_0 X) = \frac{1}{1} : \frac{x_2}{x_1} = x_1 : x_2.$$

Теорему доведено.

Теорема 1.7. Для того, щоб пари точок A, B та C, D були розділеними (нерозділеними), необхідно і достатньо, щоб подвійне відношення $(ABCD)$ було від'ємним (додатнім).

Символічно умову цієї теореми можна записати у такому вигляді:

$$(ABCD) < 0 \Leftrightarrow A, B \div C, D,$$

$$(ABCD) > 0 \Leftrightarrow A, B \ddot{\div} C, D.$$

Д о в е д е н н я. Для доведення застосуємо мову евклідової геометрії. Як звичайно, стовпці A, B, C, D – координатні стовпці відповідних прямих пучка (рис. 8). Вони також є координатними стовпцями напрямних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ заданих прямих.

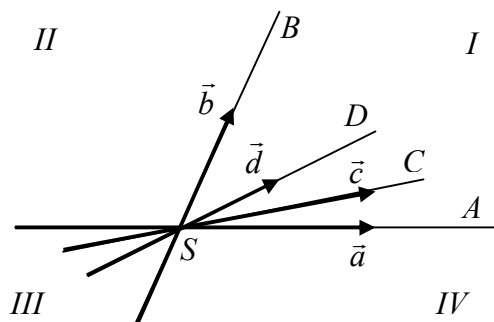


Рис. 8

У пучку введемо афінну систему координат з координатними векторами $\vec{a}, \vec{b}$ і розкладемо за цими векторами вектори $\vec{c}, \vec{d}$

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \quad \vec{d} = \alpha' \vec{a} + \beta' \vec{b}.$$

Зрозуміло, що ці ж коефіцієнти будуть в

розкладах $C = \alpha A + \beta B$, $D = \alpha' A + \beta' B$. Тому за означенням подвійного відношення отримуємо

$$(ABCD) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

Якщо $\frac{\beta}{\alpha} > 0$ і $\frac{\beta'}{\alpha'} > 0$, то обидві координати вектора $\vec{c}$ будуть одного знаку; те ж відноситься і до вектора $\vec{d}$. Це означає, що прямі C і D розташовані в I і III чвертях.

Якщо $\frac{\beta}{\alpha} < 0$ і $\frac{\beta'}{\alpha'} < 0$, то прямі C і D є у II і IV чвертях.

У двох випадках прямі C і D є в одній парі вертикальних кутів, утворених прямими A і B , тобто точки C і D (на мові евклідової геометрії) належать одному і тому ж із двох відрізків, утворених точками A і B . Тому, якщо $(ABCD) > 0$, то $A, B \div C, D$.

Аналогічно показуємо, що з $(ABCD) < 0$ випливає, що $A, B \nmid C, D$.

Теорему доведено.

Теорема 1.8. При зміні порядку точок у четвірці подвійне відношення змінюється за такими правилами:

1) при перестановці пар подвійне відношення не змінюється:

$$(CDAB) = (ABCD);$$

2) при перестановці точок однієї пари подвійне відношення змінюється на обернене:

$$(ABDC) = \frac{1}{(ABCD)};$$

3) при перестановці крайніх точок подвійне відношення змінюється на доповнення до 1:

$$(DBCA) = 1 - (ABCD).$$

Д о в е д е н н я.

1) Розв'язавши систему $C = \alpha A + \beta B$, $D = \alpha' A + \beta' B$ відносно стовпців A і B , отримаємо

$$A = \frac{\beta'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} C + \frac{\beta}{\alpha'\beta - \alpha\beta'} D; \quad B = \frac{\alpha'}{\alpha'\beta - \alpha\beta'} C + \frac{\alpha}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} D.$$

Звідси

$$(CDAB) = \frac{\frac{\beta}{\alpha'\beta - \alpha\beta'}}{\frac{\beta'}{\alpha'\beta - \alpha\beta'}} : \frac{\frac{\alpha}{\alpha'\beta - \alpha\beta'}}{\frac{\alpha'}{\alpha'\beta - \alpha\beta'}} = \frac{\beta}{\beta'} : \frac{\alpha}{\alpha'} = (ABCD).$$

2) Доведення другої частини тривіальне:

$$(ABDC) = \frac{\beta'}{\alpha'} : \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{(ABCD)}.$$

3) розв'язавши систему $C = \alpha A + \beta B$, $D = \alpha' A + \beta' B$ відносно стовпців C і A , отримаємо:

$$C = \frac{\alpha}{\alpha'} D + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha'} B; \quad A = \frac{1}{\alpha'} D - \frac{\beta'}{\alpha'} B.$$

Звідки:

$$(DBCA) = \frac{\frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha'}}{\frac{\alpha}{\alpha'}} : \frac{\frac{\beta'}{\alpha'}}{\frac{1}{\alpha'}} = \frac{-\alpha'\beta + \alpha\beta'}{\alpha\beta'} = 1 - \frac{\alpha'\beta}{\alpha\beta'} = 1 - (ABCD).$$

Теорему доведено.

Означення. Четвірка точок A, B, C, D , яка характеризується умовою $(ABCD) = -1$, називається *гармонійною*.

Такі четвірки відіграють у проєктивній геометрії дуже важливу роль і володіють властивостями:

1°. У гармонійній четвірці пари розділяють одна другу.

2°. Гармонізм не порушується при таких перестановках (у четвірках), які не змінюють складу пар.

Подвійне відношення чотирьох точок на розширеній евклідовій прямій

Означення. Простим відношенням (ABC) трьох точок A, B, C евклідової прямої називається відношення, в якому C ділить напрямлений відрізок $\overline{AB}$: $(ABC) = \overline{AC} / \overline{CB}$. Нагадаємо, що часткою від ділення вектора $\vec{a}$ на колінеарний йому ненульовий вектор $\vec{b}$ називається число λ , яке задовольняє умову $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

Нехай тепер одна з точок невласна. За теоремою 1.8 про перестановку точок можна добитися, щоб ця точка була останньою в четвірці.

Подвійне відношення чотирьох точок розширеної евклідової прямої, з яких перші три – власні, а четверта – невласна, дорівнює простому відношенню перших трьох точок, взятого з протилежним знаком, тобто

$$(ABCD_{\infty}) = -(ABC) = -\overrightarrow{AC} / \overrightarrow{CB}.$$

Теорема 1.9. *Для того, щоб четвірка точок розширеної евклідової прямої, яка містить одну невласну і три власні точки, була гармонійною, необхідно і достатньо, щоб точка, яка є в парі з невласною, була серединою відрізка, який утворений другою парою.*

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Вважаємо, що в гармонійній четвірці невласною є остання точка, $(ABCD_{\infty}) = -1$. Тоді $(ABC) = -(-1)$ або $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

Достатність. Нехай точка, що перебуває в одній парі з невласною, ділить пополам відрізок, утворений другою парою. Доведемо, що ця четвірка є гармонійною. При цьому потрібно розглядати чотири випадки залежно від місця невласної точки в четвірці.

Нехай, наприклад, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BD}$ і точка A_{∞} – невласна. Тоді

$$(A_{\infty}BCD) = (CDA_{\infty}B) = (DCBA_{\infty}) = -(DCB) = -\overrightarrow{DB} / \overrightarrow{BC} = -1,$$

Тобто дана четвірка є гармонійною. В інших трьох випадках доведення аналогічні.

Теорему доведено.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте аксіоми проєктивної геометрії.
2. Що таке розширена евклідова пряма та проєктивна пряма?
3. Як вводиться проєктивна система координат на прямій?
4. Запишіть рівняння переходу від однієї системи координат до іншої.
5. Сформулюйте означення подвійного відношення чотирьох точок.
6. Як змінюється подвійне відношення при зміні порядку точок у четвірці?
7. Яка четвірка точок називається гармонійною?

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Задано дві системи проєктивних координат на прямій P_1 :
 $R = R(E_i)$ і $R' = R(E'_i)$, причому відомі координати точок E'_i , $i = 1, 2, 0$ у системі R :

$$E'_1(0:1), E'_2(1:2), E'_0(2:-1).$$

Знайти рівняння переходу від однієї системи до другої.

Розв'язок. Рівняння переходу будемо шукати у вигляді (1.3):

$$\begin{cases} \mu x_1 = q_{11}x'_1 + q_{12}x'_2, \\ \mu x_2 = q_{21}x'_1 + q_{22}x'_2. \end{cases}$$

Нам відомі координати фундаментальних точок E'_i у двох координатних системах

Точки	E'_1	E'_2	E'_0
У системі R	0 : 1	1 : 2	2 : -1
У системі R'	1 : 0	0 : 1	1 : 1

Підставляючи ці координати в рівняння переходу, отримуємо шість рівнянь. При цьому слід пам'ятати, що коефіцієнт пропорційності μ для кожної з трьох точок має своє значення. Тоді отримуємо:

$$\begin{cases} 0 = q_{11}, & \mu_2 = q_{12}, & 2\mu_0 = q_{11} + q_{12}, \\ \mu_1 = q_{21}; & 2\mu_2 = q_{22}; & -\mu_0 = q_{21} + q_{22}. \end{cases}$$

Значення q_{ij} із перших чотирьох рівнянь підставляємо у два останні:

$$\begin{cases} 2\mu_0 = \mu_2, \\ -\mu_0 = \mu_1 + 2\mu_2. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо $\mu_1 = -5\mu_0$, $\mu_2 = 2\mu_0$, тому

$$q_{11} = 0, \quad q_{12} = 2\mu_0, \quad q_{21} = -5\mu_0, \quad q_{22} = 4\mu_0.$$

Оскільки матриця Q визначена з точністю до множника, то, поклавши $\mu_0 = 1$, отримуємо $q_{11} = 0$, $q_{12} = 2$, $q_{21} = -5$, $q_{22} = 4$. Тоді рівняння переходу мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \mu x_1 = 2x'_2, \\ \mu x_2 = -5x'_1 + 4x'_2. \end{cases}$$

Приклад 2. *Задано координати двох точок проєктивної прямої в координатних системах з попереднього прикладу: $A(1:-1)$ у системі R' і $B(2:3)$ у системі R . Знайти координати точки A у системі R і точки B у системі R' .*

Розв'язок. Скористаємося рівняннями перетворення координат, які знайдені при розв'язуванні прикладу 1. Для точки A отримуємо

$$\begin{cases} \mu x_1 = 2 \cdot (-1) = -2, \\ \mu x_2 = -5 \cdot 1 + 4(-1) = -9. \end{cases}$$

Тому $x_1 : x_2 = 2 : 9$ і $A(2:9)$.

Для точки B маємо

$$\begin{cases} 2\mu = 2x'_2, \\ 3\mu = -5x'_1 + 4x'_2, \end{cases}$$

звідки $x'_2 = \mu$, $x'_1 = \frac{1}{5}\mu$, тобто $x'_1 : x'_2 = 1 : 5$ і, як наслідок, $B(1:5)$.

Приклад 3. *На евклідовій прямій R_1 задано своїми неоднорідними координатами точки $E_1(-1)$, $E_2(4)$, $E_0(1)$, $A(-2)$. Знайти координати точки A у проєктивній системі координат $R(E_i)$.*

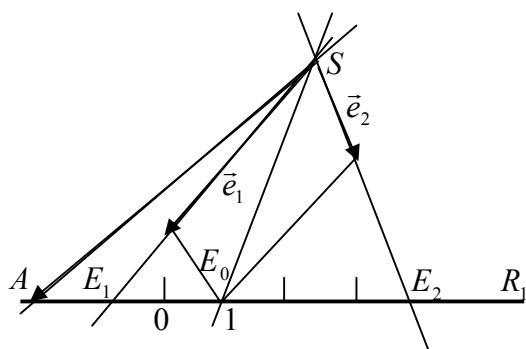


Рис. 7

Розв'язок. Розглянемо перспективне відображення цієї прямої R_1 у який-небудь пучок S і введемо у пучку систему координат $(S, \bar{e}_i)$, узгоджену із системою $R(E_i)$ на прямій $\bar{R}_1$. За координатні вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ ми повинні взяти складові напрямного вектора прямої SE_0 (краще за все взяти

вектор $\vec{SE}_0$), якщо його розкласти на прямі SE_1, SE_2 (рис. 7). Для визначення координат точки A тепер достатньо визначити координати напрямного вектора прямої SA , наприклад, вектора $\vec{SA}$ у системі $(S, \vec{e}_i)$.

Оскільки $|E_1E_0| : |E_0E_2| = 2 : 3$, то

$$\vec{SE}_1 = \frac{5}{3}\vec{e}_1, \vec{SE}_2 = \frac{5}{2}\vec{e}_2, E_2E_1 = \frac{5}{3}\vec{e}_1 - \frac{5}{2}\vec{e}_2.$$

Тому

$$E_1A = \frac{1}{5}E_2E_1 = \frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2.$$

Тоді

$$\vec{SA} = \frac{5}{3}\vec{e}_1 + \left(\frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2\right) = 2\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2.$$

Отже, координати вектора $\vec{SA} = \left(2; -\frac{1}{2}\right)$. Це і є координати точки A у системі

$$R(E_i): A\left(2; -\frac{1}{2}\right) \text{ або } A(4; -1).$$

Приклад 4. На проєктивній прямій задано точки $A(1:-1)$, $B(-2:1)$, $C(1:3)$, $D(1:0)$. Знайти подвійне відношення $(ABCD)$.

Розв'язок. Для знаходження подвійного відношення потрібно лінійно виразити стовпці C і D через A і B , тобто знайти $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ із співвідношень

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ці рівняння рівносильні наступним:

$$\begin{cases} 1 = \alpha - 2\beta, \\ 3 = -\alpha + \beta, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = \alpha' - 2\beta', \\ 0 = -\alpha' + \beta', \end{cases}$$

звідки визначаємо $\alpha = -7, \beta = -4, \alpha' = -1, \beta' = -1$.

Отже,

$$(ABCD) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{-4}{-7} : \frac{-1}{-1} = \frac{4}{7}.$$

Приклад 5. Задано дві системи проєктивних координат на прямій: $R = R(E_i)$ та $R' = R(E'_i)$, причому відомо координати точок $E_i, i = 1, 2, 0$ у системі

$R: E'_1(0:1), E'_2(1:2), E'_0(2:-1)$. Задано координати точки $B(2:3)$ у системі R і точки $A(1:-1)$ у системі R' . Знайти координати точки B у системі R' і точки A у системі R .

Розв'язок. Позначимо невідомі координати точки B у системі R' через $x'_1:x'_2$. За теоремою 1.6 маємо: $x'_1:x'_2 = (E'_1E'_2E'_0B)$. Отже, нам потрібно знайти подвійне відношення чотирьох точок, координати яких у системі R відомі. Оскільки

$$E'_0 = -5E'_1 + 2E'_2, \quad B = -E'_1 + 2E'_2,$$

то

$$(E'_1E'_2E'_0B) = \frac{2}{-5} : \frac{2}{-1} = \frac{1}{5}$$

і $B(1:5)$.

Знаходження координат точки A у системі R – обернена задача. За цією ж теоремою

$$(E'_1E'_2E'_0A) = x'_1:x'_2 = 1:(-1) = -1.$$

Оскільки координатні стовпці точок E_i , A пов'язані співвідношеннями

$$E'_0 = -5E'_1 + 2E'_2, \quad A = \alpha'E'_1 + \beta'E'_2,$$

то

$$(E'_1E'_2E'_0A) = \frac{2}{-5} : \frac{\beta'}{\alpha'} = -1,$$

звідки $\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{2}{5}$ і можна покласти $\alpha' = 5, \beta' = 2$. Тому

$$A = 5E'_1 + 2E'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix},$$

тобто в системі R буде $A(2:9)$.

Завдання для самостійної роботи

1. На проєктивній прямій задано дві системи координат R та R' , пов'язані наступними рівняннями переходу:

$$\begin{cases} \lambda x_1 = x'_1 + x'_2, \\ \lambda x_2 = 2x'_1 - x'_2. \end{cases}$$

Знаючи координати точки у системі R' : $C(-3:1)$, знайти її координати у системі R . Знаючи координати точок у системі R : $E(1:-1)$, $F(2:7)$, знайти їхні координати в системі R' .

2. На проєктивній прямій задано дві системи координат R і R' . Знайти рівняння переходу від однієї системи до другої, якщо відомі координати фундаментальних точок E'_0, E'_1, E'_2 системи R' у системі R : $E'_0(1:1), E'_1(1:0), E'_2(1:2)$.
3. На евклідовій прямій задані своїми неоднорідними координатами точки проєктивної системи координат: $E_0(0), E_1(1), E_2(-1)$. Знайти проєктивні координати точки $B(3)$.
4. Знайти подвійне відношення $(ABCD)$ наступної четвірки точок проєктивної прямої: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
5. Задано три точки і подвійне відношення четвірки точок проєктивної прямої: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (ABCD) = -1$. Знайти четверту точку.
6. Задано точки $A(1:2), B(2:-1), C(1:0)$. Знайти точку D таку, щоб була гармонійною наступна четвірка: A, D, B, C .
7. Задано неоднорідні афінні координати трьох власних точок розширеної евклідової прямої: $A = (3), B = (-1), C = (2)$. Знайти $(ABCD_\infty)$, де D_∞ – невласна точка даної прямої.

Завдання для контрольної роботи

1. На проєктивній прямій задано дві системи координат R і R' . Знайти рівняння переходу від однієї системи до другої, якщо відомі координати фундаментальних точок E'_0, E'_1, E'_2 системи R' у системі R :
а) $E'_0(1:2), E'_1(1:0), E'_2(0:1)$;

б) $E'_0(0:1), E'_1(1:1), E'_2(-1:1)$.

2. На евклідовій прямій задані своїми неоднорідними координатами точки проективної системи координат: $E_0(0), E_1(1), E_2(-1)$. Знайти проективні координати точок: а) $C(-2)$; б) $D(-3)$.

3. Знайти подвійне відношення $(ABCD)$ наступної четвірки точок проективної прямої:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

4. Задано три точки і подвійне відношення четвірки точок проективної прямої:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (ABCD)=1$;

б) $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, (ABCD)=-2$.

Знайти четверту точку.

5. Задано точки $A(1:2), B(2:-1), C(1:0)$. Знайти точку D таку, щоб була гармонійною наступна четвірка: а) A, B, D, C ; б) D, A, B, C .

6. Задано неоднорідні афінні координати трьох власних точок розширеної евклідової прямої: $A=(a), B=(b), C=(c)$. Знайти: а) $(ABCD_\infty)$; б) $(CD_\infty BA)$, де D_∞ – невласна точка даної прямої.

7. Довести, що якщо $(ABXY)=\alpha$, то $\alpha(ABMX)=(ABMY)$ для довільної точки $M \in (AB)$.

Розділ II. Поняття проєктивної площини

Розширена евклідова площина. Проективна площина

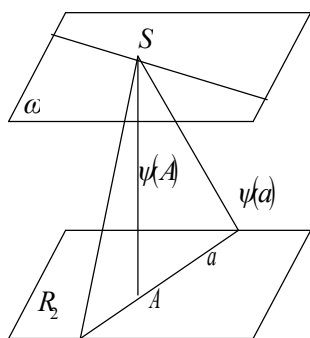
Виходячи з перспективного відображення множини точок евклідової прямої в пучок прямих, ми прийшли до поняття розширеної евклідової прямої та проєктивної прямої. Аналогічні дії приводять до поняття розширеної евклідової площини та проєктивної площини.

У тривимірному евклідовому просторі R_3 розглянемо в'язку S прямих і площин, тобто множину всіх прямих і площин, які проходять через одну точку S , яка називається *центром* в'язки.

Візьмемо тепер площину R_2 , яка не проходить через центр в'язки, і будемо розглядати множину всіх точок і прямих цієї площини. Нас буде цікавити поки лише одне відношення між точками і прямими площини R_2 – відношення інцидентності.

Точка і пряма (площина) називаються *інцидентними*, якщо точка лежить на прямій (площині); пряма і площина називаються *інцидентними*, якщо пряма лежить на площині. Позначати інцидентність будемо знаками належності та включення: $A \in a$, $A \in \alpha$, $a \subset \alpha$.

Розглянемо тепер відображення $R_2 \rightarrow S$, яке називається *перспективним* і



полягає в тому, що кожна точка $A \in R_2$ відображається на пряму SA , а кожна пряма $a \subset R_2$ – на площину (Sa) , тобто на площину, що проходить через S і a (рис. 8).

Відображення ψ визначається так:

$$\psi(A) = (SA), \quad \psi(a) = (Sa).$$

Рис. 8

Відображення ψ – ін'єктивне, але воно не є сюр'єктивне, оскільки площина $\omega \in S$, $\omega \parallel R_2$, не має в R_2 прообразу. Не мають прообразів і всі прямі в'язки, які

містяться в цій площині. Надалі площину ω і розміщені у ній прямі будемо називати *особливими*.

Основною властивістю перспективного відображення ψ є збереження (в обидві сторони) інцидентності:

$$A \in a \Leftrightarrow \psi(A) \in \psi(a).$$

З метою «виправити» перспективне відображення площини у в'язку так, щоб воно стало бієктивним, доповнимо площину R_2 новими елементами – прообразами особливих прямих та особливої площини.

Точки, які додаються до площини R_2 , будемо називати *невласними* або *нескінченно віддаленими* точками площини і позначатимемо A_∞ . При цьому кожній особливій прямій в'язки ставиться у відповідність одна і тільки одна невласна точка, яка приймається за прообраз цієї прямої.

Означення. Множина a_∞ всіх невластных точок називається *невласною* або *нескінченно віддаленою прямою*. Ця пряма береться за прообраз цієї особливої площини в'язки.

Означення. Площина R_2 з приєднаними до неї невластними елементами називається *розширеною евклідовою площиною* та позначається $\bar{R}_2$.

Отже, тепер маємо бієктивне відображення $\bar{\psi} : \bar{R}_2 \rightarrow \mathcal{S}$ і $a_\infty \cap \bar{R}_2 = A_\infty$, $\omega \cap \bar{R}_2 = a_\infty$.

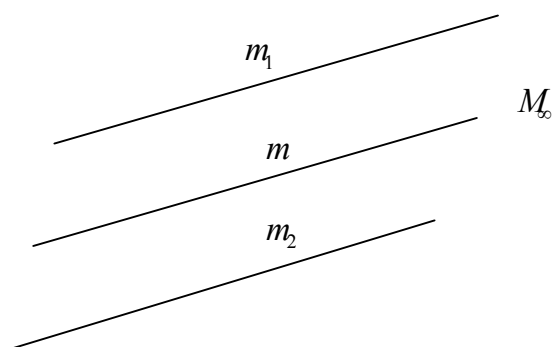


Рис. 9

Властивості невластных елементів:

1°. На кожній власній прямій розширеної евклідової площини є невласна точка і притому лише одна (рис. 9).

2°. Паралельні прямі розширеної евклідової площини перетинаються у невластній точці (або паралельні прямі на розширеній евклідовій площині утворюють пучок із невластним центром).

Теорема 2.1. *Існує єдина пряма, інцидентна двом довільним точкам розширеної евклідової площини.*

Теорема 2.2. *Існує єдина точка, інцидентна двом довільним прямим розширеної евклідової площини.*

Означення. Нехай P_2 – множина, яка складається з елементів двох видів, що називаються відповідно *точками* і *прямими*, причому точки та прямі пов'язані відношенням *інцидентності*. Якщо існує бієктивне відображення $g: P_2 \rightarrow \mathcal{S}$, де $\mathcal{S}$ – в'язка прямих і площин, при якому кожна точка $A \in P_2$ відображається на пряму в'язки, а кожна пряма $a \in P_2$ – на площину в'язки і зберігається інцидентність, то P_2 називається *проективною площиною*.

Мова евклідової геометрії	Мова проективної геометрії
В'язка прямих і площин ($\mathcal{S}$)	Проективна площина (P_2)
Пряма в'язки	Точка
Площина в'язки	Пряма
Інцидентність	Інцидентність

Теорема 2.3. *Існує єдина пряма, інцидентна двом різним точкам проективної площини.*

Проективна система координат

Проективні координати на площині вводяться таким же способом, як і на прямій.

Будемо використовувати евклідову термінологію. Нехай задано в'язку $\mathcal{S}$ з центром S і афінну систему координат $(S, \vec{e}_i)$, де $i=1, 2, 3$. Тоді будь-яка пряма X в'язки може бути задана своїм напрямним вектором $\vec{x}$, а останній – трійкою (x_1, x_2, x_3) своїх координат в системі $(S, \vec{e}_i)$. Клас пропорційних трійок з представником (x_1, x_2, x_3) називається *проективною координатою прямої* X в'язки. Будемо використовувати наступні позначення:

$$X(x_1 : x_2 : x_3), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Теорема про те, що гомотетичні системи координат визначають у в'язці одну і ту ж проєктивну систему координат має місце і в даному випадку.

Теорема 2.4. *Якими б не були чотири точки E_1, E_2, E_3, E_0 проєктивної площини, з яких ніякі три неколінеарні (тобто не лежать на одній прямій), існує єдина система проєктивних координат, у якій ці три точки мають координати:*

$$E_1(1:0:0), E_2(0:1:0), E_3(0:0:1), E_0(1:1:1).$$

Точки E_1, E_2, E_3, E_0 називаються *фундаментальними* точками, крім того, E_1, E_2, E_3 називаються *координатними*, а точка E_0 — *одичною*. Прямі E_1E_2, E_1E_3, E_2E_3 називаються *координатними прямими*.

Рівняння перетворення проєктивних координат для випадку площини можна записати так

$$\mu X = QX'$$

або

$$\begin{cases} \mu x_1 = q_{11}x'_1 + q_{12}x'_2 + q_{13}x'_3, \\ \mu x_2 = q_{21}x'_1 + q_{22}x'_2 + q_{23}x'_3, \\ \mu x_3 = q_{31}x'_1 + q_{32}x'_2 + q_{33}x'_3. \end{cases}$$

Нехай в деякій системі проєктивних координат задано координати трьох точок

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Вектори $\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3), \vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ є напрямними векторами відповідних прямих в'язки. Тому умова колінеарності точок A, B, C є умовою компланарності векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точки $A(a_1 : a_2 : a_3)$ та $B(b_1 : b_2 : b_3)$. Візьмемо довільну точку $X(x_1 : x_2 : x_3)$, яка лежить на (AB) . Рівняння прямої AB буде умовою колінеарності точок A, B, X

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.1)$$

або

$$x_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Зауважимо, що хоча б один із коефіцієнтів останнього рівняння відмінний від нуля. Це впливає із непропорційності стовпців A і B .

Теорема 2.5. *Будь-яке лінійне однорідне рівняння*

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0, \quad (2.2)$$

коефіцієнти якого утворюють ненульову трійку (u_1, u_2, u_3) , є рівнянням деякої прямої.

Означення. Клас пропорційних ненульових трійок з представником (u_1, u_2, u_3) називається *координатою прямої*, яка визначається рівнянням (2.2).

Пряму будемо позначати так: $u = (u_1, u_2, u_3)$.

Рівняння прямої іноді будемо записувати у матричному вигляді

$$uX = 0.$$

Оскільки визначник (2.1) дорівнює 0, то його стовпці лінійно залежні. Оскільки точки A і B різні, то другий та третій стовпці незалежні і тому перший стовпець можна представити як їхню лінійну комбінацію

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{cases} x_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 \\ x_2 = \alpha a_2 + \beta b_2 \\ x_3 = \alpha a_3 + \beta b_3 \end{cases} \text{ — це параметричне рівняння прямої.}$$

Знайдемо умову, при якій три прямі проходять через одну точку (належать одному пучку). Ці прямі мають спільну точку тоді і тільки тоді, коли система:

$$\begin{cases} l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 = 0 \\ m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = 0 \\ n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = 0 \end{cases}$$

має ненульовий розв'язок. З алгебри відомо, що це буде тоді, коли

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Це і є умова належності трьох прямих одному пучку.

Умова того, що пряма $u(u_1 : u_2 : u_3)$ належить пучку, що визначається прямими $l(l_1 : l_2 : l_3)$ та $m(m_1 : m_2 : m_3)$ може бути записана так

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже,

$$u = \lambda l + \mu m$$

або

$$\begin{cases} u_1 = \lambda l_1 + \mu m_1 \\ u_2 = \lambda l_2 + \mu m_2 \\ u_3 = \lambda l_3 + \mu m_3 \end{cases} \text{ — параметричне рівняння пучка.}$$

Однорідні афінні координати на розширеній евклідовій площині

Означення. Проективна система координат $R(E_1, E_2, E_3, E_0)$ на розширеній евклідовій площині називається *системою однорідних афінних координат*, якщо координатні точки E_1, E_2 невласні.

Звичайна система афінних координат на нерозширеній площині називається *неоднорідною*. Вона може бути задана осями і точкою E з координатами $(1, 1)$, оскільки при цих умовах легко знаходиться початок координат та орти осей.

називаються *відповідними*, якщо виконуються такі умови:

$$O = E_3, \quad (OX) = (E_3 E_{1\infty}), \quad (OY) = (E_3 E_{2\infty}), \quad E = E_0. \quad (2.3)$$

Теорема 2.6. *Власна точка площини $\bar{R}_2$,*

яка має неоднорідні координати (x, y) , у відповідній однорідній системі має координати $(x : y : 1)$. Невласна точка площини $\bar{R}_2$, яка визначається прямою з напрямним вектором $\vec{c} = (a, b)$, в однорідній системі має координати $(a : b : 0)$.

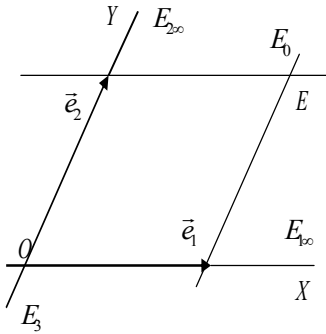


Рис. 10

Д о в е д е н н я. Нехай неоднорідна система координат на площині R_2 задана осями OX, OY і точкою $E(1, 1)$. Тоді відповідна однорідна система на $\bar{R}_2$ згідно (2.3) задається невластими точками $E_{1\infty}, E_{2\infty}$ осей OX, OY , точкою E_3 перетину осей та точкою $E_0 = E$.

Приведемо площину $\bar{R}_2$ в перспективну відповідність з деякою в'язкою $\mathcal{S}$. У цій в'язці встановимо систему координат $(S, \bar{e}_i)$, де $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ – орти осей неоднорідної системи координат і $\bar{e}_3 = \overrightarrow{SE_3}$ (рис. 11).

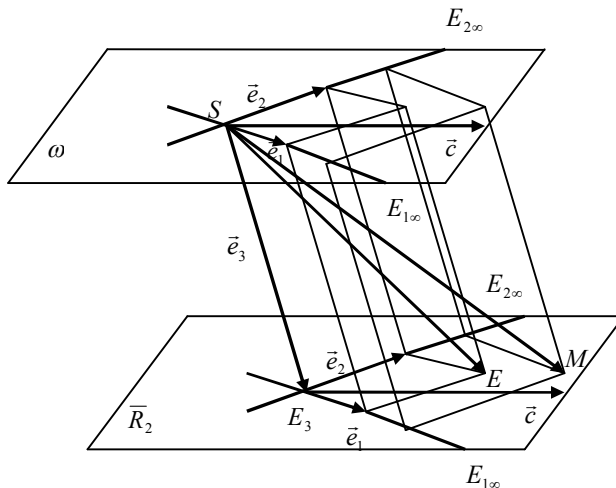


Рис. 11

Легко бачити, що при цьому $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \overrightarrow{SE_0}$, тобто напрямний вектор $\overrightarrow{SE_0}$ прямої SE_0 має координати $(1, 1, 1)$.

Тоді прямі SE_i у в'язці і, як наслідок, точки $E_i, i = 1, 2, 3, 0$ на площині будуть мати координати відповідно $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$, $(1 : 1 : 1)$. Тому координати довільної точки $M \in \bar{R}_2$ будуть дорівнювати координатам напрямного вектора прямої SM .

У випадку, коли M – власна точка, за напрямний вектор прямої SM можна взяти вектор $\overrightarrow{SM}$, який в системі $(S, \vec{e}_i)$ має координати $(x, y, 1)$. Тому однорідною координатою точки M буде клас трійок з представником $(x, y, 1)$.

Якщо точка M невласна, то за напрямний вектор прямої SM можна взяти вектор $\vec{c}$, який в системі $(S, \vec{e}_i)$ має координати $(a, b, 0)$, а визначена ним невласна точка в однорідній системі координат – $(a : b : 0)$.

Теорему доведено.

Наслідок. *Однорідні афінні координати $(x_1 : x_2 : x_3)$ власної точки пов'язані з її неоднорідними координатами (x, y) у відповідній системі співвідношеннями:*

$$x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}. \quad (2.4)$$

Справді, за доведеною теоремою трійки (x_1, x_2, x_3) та $(x, y, 1)$ належать одному класові еквівалентності, тобто пропорційні, звідки і випливає це співвідношення. У цих формулах немає ділення на нуль, оскільки для будь-якої власної точки $x_3 \neq 0$.

Рівняння прямої в неоднорідних координатах має вигляд

$$Ax + By + C = 0.$$

Її напрямний вектор має координати $(B, -A)$. За теоремою 2.6 невласна точка M_∞ цієї прямої має координати $(B : -A : 0)$.

У рівнянні прямої перейдемо до однорідних координат за формулами (2.4):

$$A \frac{x_1}{x_3} + B \frac{x_2}{x_3} + C = 0.$$

Тобто

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0.$$

Криві другого порядку в однорідних афінних координатах

Нам відомі канонічні рівняння не вироджених кривих другого порядку, які належать різним афінним класам, – еліпса, гіперболи і параболі

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y^2 = 2px.$$

Ці рівняння після переходу за формулами (2.4) до однорідних координат і множення на x_3^2 приймають такий вигляд:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = x_3^2, \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = x_3^2, \quad x_2^2 = 2px_1x_3.$$

Криві площини $\bar{R}_2$, що відповідають останнім рівнянням, можуть відрізнятися від еліпса, гіперболи та параболі не власними точками, проте ми збережемо для них попередні назви.

Визначимо, як розташовані ці криві відносно не власної прямої a_∞ , для чого розв'яжемо рівняння кожної кривої спільно з рівнянням $x_3 = 0$.

У випадку еліпса отримуємо лише нульовий розв'язок $(0:0:0)$. Тому *еліпс не власних точок не має*.

У випадку гіперболи отримуємо точки $K_\infty(a:b:0)$ та $L_\infty(a:-b:0)$. Перша з них лежить на асимптоті $x_2 = \frac{b}{a}x_1$, а друга – на асимптоті $x_2 = -\frac{b}{a}x_1$. Отже, *гіпербола має дві не власні точки – не власні точки її асимптот*.

У випадку параболі обидві точки перетину співпадають в одній точці $M_\infty(1:0:0)$, яка лежить на осі параболі $x_2 = 0$. Отже, *парабола торкається не власної прямої у не власній точці*.

Якщо умовно зобразити не власну пряму у вигляді власної, то не вироджені криві другого порядку будуть виглядати так (рис. 12):

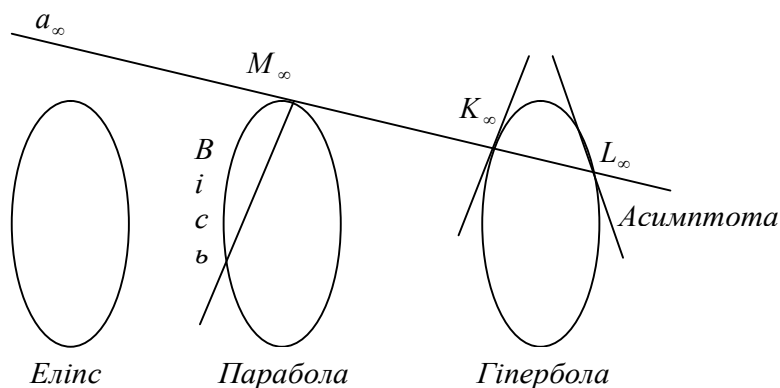


Рис. 12

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення розширеної евклідової площини та проєктивної площини.
2. Як чином вводиться проєктивна система координат на площині?
3. Запишіть рівняння прямої та пучка.
4. У чому полягає відмінність між однорідною та неоднорідною афінними системами координат?
5. Як пов'язані однорідні афінні координати власної точки з її неоднорідними координатами?

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти точку перетину прямих $u(2:-1:1)$ та $v(1:3:-2)$.

Розв'язок. Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases},$$

яка складена з рівнянь даних прямих, знаходимо

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 : 5 : 7.$$

Це i є координати точки перетину.

Приклад 2. Знайти точку перетину прямої $u(2:-1:1)$ з прямою, яка проходить через точки $A(2:-1:0)$ і $B(3:-3:1)$.

Розв’язок. Розв’яжемо цю задачу за допомогою параметричних рівнянь прямої AB , які мають вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha + 3\beta \\ x_2 = -\alpha - \beta \\ x_3 = \beta \end{cases}.$$

Визначимо, при яких значеннях параметрів α і β координати біжучої точки прямої AB задовольняють рівняння прямої u . Маємо

$$2(2\alpha + 3\beta) - (-\alpha - 3\beta) + \beta = 0$$

або після спрощення: $\alpha + 2\beta = 0$. Можна покласти $\alpha = 2$, $\beta = -1$ або взяти будь-які інші пропорційні значення α і β . З параметричних рівнянь прямої AB при цих значеннях параметрів отримуємо $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Тому шукана точка має координати $(1:1:-1)$.

Приклад 3. Задано чотири точки: $A(5:1:0)$, $B(1:0:0)$, $C(2:3:1)$, $D(1:-1:2)$. Знайти координати точки $M = (AB) \cap (CD)$.

Розв’язок. Позначимо координати шуканої точки M через $(x_1 : x_2 : x_3)$. Тоді з того, що $M \in (AB)$ випливає, що $M = \alpha A + \beta B$ або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки $x_3 = 0$.

Аналогічно, з $M \in (CD)$ випливає $M = \gamma C + \delta D$ або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Щоб в останньому рівнянні отримати $x_3 = 0$, покладемо $\gamma = 2$, $\delta = -1$. Отримуємо

$$M = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $l(2:-1:1)$, $m(1:1:-1)$ і точку $A(2:-1:3)$.

Розв'язок. Можна знайти спочатку координати точки $B = l \cap m$, а потім знайти рівняння шуканої прямої за двома відомими точками.

Розв'яжемо задачу, використовуючи умову належності трьох прямих (l , m і шуканої u) одному пучку. Тому $u = \lambda l + \mu m$ або

$$(u_1, u_2, u_3) = \lambda(2, -1, 1) + \mu(1, 1, -1) = (2\lambda + \mu, -\lambda + \mu, \lambda - \mu),$$

де (u_1, u_2, u_3) – координати шуканої прямої u , рівняння якої тепер можна записати у такому вигляді:

$$(2\lambda + \mu)x_1 + (-\lambda + \mu)x_2 + (\lambda - \mu)x_3 = 0.$$

Отримане рівняння задовольняють координати точки A . Тому

$$(2\lambda + \mu) \cdot 2 + (-\lambda + \mu) \cdot (-1) + (\lambda - \mu) \cdot 3 = 0,$$

звідки після спрощення отримуємо $4\lambda - \mu = 0$. Поклавши $\lambda = 1$, $\mu = 4$, знаходимо $u = (6, 3, -3)$. Скоротивши координати на 3, отримаємо рівняння шуканої прямої

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Приклад 5. До якого афінного класу належить крива другого порядку

$$x^2 + 4xy + 3y^2 + x - 1 = 0?$$

Розв'язок. Однорідне рівняння цієї кривої

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1x_3 - x_3^2 = 0$$

розв'язуємо спільно з рівнянням невласної прямої $x_3 = 0$. Отримуємо

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 0$$

або

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 4\frac{x_1}{x_2} + 3 = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно $x_1 : x_2$, отримуємо два значення:

$(x_1 : x_2)' = -1$, $(x_1 : x_2)'' = -3$. Отже, ця крива має дві невласні точки $(-1:1:0)$ і $(-3:1:0)$. Тому, це або гіпербола, або пара перетинних прямих.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти рівняння прямих, які проходять через точки:

а) $A(1:4:3)$ і $B(2:1:3)$;

б) $A(2:-1:0)$ і $B(0:1:0)$.

2. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ і $2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$ і через точку $(4:-2:5)$.

3. Задано координати точок:

$$A = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти координати точки перетину (AB) і (CD) .

4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих

$$l: 3x_1 - x_2 + 6x_3 = 0, \quad m: x_2 - 4x_3 = 0 \quad \text{і точку } A(1:-2:3).$$

5. Задано шість точок A_i :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Довести, що точки $P = (A_1A_2) \cap (A_4A_5)$, $Q = (A_2A_3) \cap (A_5A_6)$, $R = (A_3A_4) \cap (A_6A_1)$ лежать на одній прямій.

6. Знайти однорідні афінні координати точок евклідової площини, заданих своїми неоднорідними координатами:

$$O(0;0), \quad A(1;0), \quad B(0;1), \quad C(2;5), \quad D(-3;1).$$

7. В однорідних афінних координатах знайти рівняння прямої, яка проходить через невласні точки прямих

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \text{та} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$$

Завдання для контрольної роботи

1. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки:

а) $C(-2:0:1)$ і $D(3:-2:1)$;

б) $E(1:1:-1)$ і $F(-1:0:1)$.

2. Знайти точку перетину прямої, яка проходить через точки:

а) $A(1:4:2)$ і $B(2:6:1)$ з прямою $u:3x_1 - 4x_3 = 0$;

б) $A(-4:-3:2)$ і $B(2:0:6)$ з прямою $u:x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$.

3. Задано координати чотирьох точок A, B, C, D . Знайти координати точки перетину M прямих AB і CD , якщо

а) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

4. Задано чотири прямі:

а) $a:3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, c:2x_1 + x_3 = 0,$
 $b:4x_1 - x_2 = 0, d:x_1 - x_2 + x_3 = 0;$

б) $a:x_1 + x_2 - x_3 = 0, c:x_1 - x_2 - x_3 = 0,$
 $b:2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, d:2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$

Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки $a \cap b$ і $c \cap d$.

5. Задано шість точок A_i :

а) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Довести, що точки $P = (A_1A_2) \cap (A_4A_5), Q = (A_2A_3) \cap (A_5A_6), R = (A_3A_4) \cap (A_6A_1)$ лежать на одній прямій.

6. У проєктивній системі координат R задано координати фундаментальних точок проєктивної системи координат R' :

$$E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E'_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

- а) формули переходу від однієї системи координат до другої;
- б) координати точки A в системі R , якщо відомі її координати в системі R' :

$$A(-4:0:1).$$

7. Визначити, до яких афінних класів можуть належати криві:

- а) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$;
- б) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 209 = 0$.

Розділ III. Найпростіші факти геометрії проективної площини

Принцип двоїстості. Теорема Дезарга

Нехай задана проективна площина P_2 . Розглянемо відображення f . Щоб визначити його, введемо на P_2 проективну систему координат і будемо вважати образом кожної точки A пряму a з тими ж координатами і навпаки:

$$f: A(a_1 : a_2 : a_3) \leftrightarrow a(a_1 : a_2 : a_3).$$

Так, наприклад, образом прямої $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$ буде точка $(2 : -1 : 3)$.

Із визначення відображення f зрозуміло, що воно залежить від вибору системи координат і що таких відображень існує нескінченно багато.

Оскільки площину P_2 ми розуміємо як сукупність належних їй точок і прямих, то відображення f є відображенням P_2 на себе. Такого роду перетворення проективної площини називаються *кореляціями*.

Відображення f зберігає властивість інцидентності:

$$A \in b \Leftrightarrow f(A) \ni f(b).$$

Справді, умова інцидентності точки $A(a_1 : a_2 : a_3)$ і прямої $b(b_1 : b_2 : b_3)$ має вигляд

$$b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = 0.$$

Але в такий спосіб записується умова інцидентності прямої $f(A)$ та точки $f(b)$.

Означення. Будемо називати фігури (під фігурою розуміємо множину, яка складається з точок і прямих) *двоїстими*, якщо одна з них може бути отримана з іншою за допомогою відображення f .

Наведемо приклади двоїстих фігур.

- 1) *Точка та неінцидентна їй пряма* $(A, a, A \notin a)$. Справді, нехай $A = E_1$, $E_2, E_3 \in a$. Тоді координати цієї точки і прямої одні і ті ж $A = a = (1 : 0 : 0)$.

- 2) Множина точок, які лежать на прямій, і пучок прямих, центр якого неінцидентний цій прямій. Двоїстість цих фігур впливає з першого прикладу та збереження інцидентності при відображенні f .
- 3) Фігурою, двоїстою до тривершинника¹, буде деякий тривершинник. Якщо вершини даного тривершинника взяти за координатні точки, то зрозуміло, що тривершинник двоїстий до самого себе.

Принцип двоїстості. Нехай справедлива будь-яка теорема, що стосується точок і прямих проективної площини і відношення інцидентності між ними. Тоді справедлива і двоїста теорема, яку отримаємо, якщо в даній теоремі замінити місцями слова «точка» і «пряма».

Теорема Дезарга. Нехай задано два тривершинники, між їхніми вершинами та сторонами встановлено взаємно-однозначну відповідність. Якщо при цьому три прямі, інцидентні парам відповідних вершин, інцидентні одній точці, то три точки, інцидентні парам відповідних сторін, інцидентні одній прямій

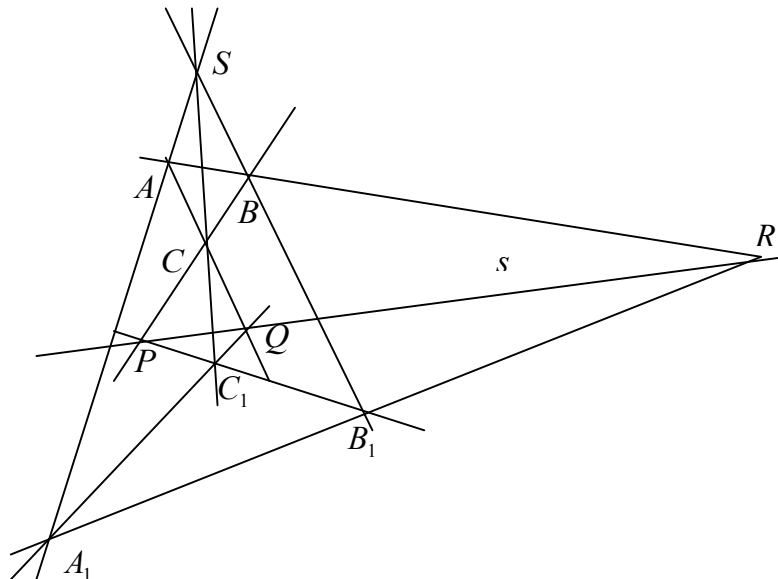


Рис. 13

Д о в е д е н н я. Вершини даних тривершинників позначимо через A, B, C і A_1, B_1, C_1 відповідно;

$$S = (AA_1) \cap (BB_1) \cap (CC_1),$$

¹ Тривершинником називається фігура, що складається з трьох неколінеарних точок – вершин, та трьох прямих – сторін, інцидентних парам цих точок.

$$P = (BC) \cap (B_1C_1), \quad Q = (AC) \cap (A_1C_1), \quad R = (AB) \cap (A_1B_1).$$

Необхідно довести колінеарність точок P, Q, R (рис. 13).

Введемо проєктивну систему координат, взявши точки A, B, C, S за фундаментальні

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Координатний стовпець точки A_1 є лінійною комбінацією стовпців A і S . Оскільки $A \neq A_1$ (у цьому випадку теорема тривіальна), то у виразі $A_1 = \alpha A + \sigma S$ можна покласти $\sigma = 1$. Тоді $A_1 = \alpha A + S$. Аналогічно поступимо з іншими вершинами тривершинника $A_1B_1C_1$. Тому

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha + 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta + 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \gamma + 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо тепер координати точки P . Оскільки $P \in (BC)$, то верхній елемент у стовпці P дорівнює 0. Але $P \in (B_1C_1)$, тому $P = \beta_1 B_1 + \gamma_1 C_1$. Тоді $\beta_1 + \gamma_1 = 0$, $\beta_1 = -\gamma_1$ і покладемо $\beta_1 = 1$, $\gamma_1 = -1$. Отримаємо $P = B_1 - C_1$ і аналогічно $Q = C_1 - A_1$, $R = A_1 - B_1$. Тому

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ -\gamma \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Залишається за допомогою умови колінеарності трьох точок переконатися, що точки P, Q, R лежать на одній прямій. Маємо

$$\begin{vmatrix} 0 & -\alpha & \alpha \\ \beta & 0 & -\beta \\ -\gamma & \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Умова колінеарності виконується.

Теорему доведено.

Тривершинники, який задовольняють теорему Дезарга, називають *дезарговими*, точку S — *дезарговою точкою*, пряму $s \ni P, Q, R$ — *дезарговою прямою*.

Фігура на рис. 13, яка складається з десяти позначених точок і десяти прямих, називається *конфігурацією Дезарга*. Взагалі *конфігурацією* називається сукупність точок і прямих, у якій кожній прямій інцидентна одна і та ж кількість точок, а кожній точці – одне і те ж число прямих.

Сформулюємо теорему, двоїсту до теореми Дезарга.

Теорема 3.1. *Нехай задано два тривершинники, причому між сторонами і вершинами встановлено взаємно-однозначну відповідність. Якщо при цьому три точки, інцидентні парам відповідних сторін, інцидентні одній прямій, то три прямі, інцидентні парам відповідних вершин, інцидентні одній точці.*

Як бачимо, ми отримали обернену теорему Дезарга. Це співпадіння двоїстої та оберненої теореми Дезарга випадкове.

Оскільки деякі елементи конфігурації Дезарга можуть бути невласними, то теорема Дезарга на площині $\bar{R}_2$ розпадається на декілька часткових випадків. Розглянемо деякі з них.

1) Точка R конфігурації – невласна.

Якщо трикутники A, B, C та A_1, B_1, C_1 такі, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 належать одному пучку, $(AB) \parallel (A_1B_1)$, то точки $P = (BC) \cap (B_1C_1)$ та $Q = (AC) \cap (A_1C_1)$ лежать на прямій, паралельній прямим AB та A_1B_1 (рис. 14).

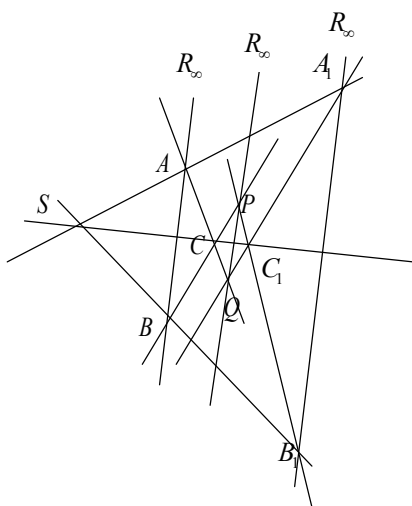


Рис. 14

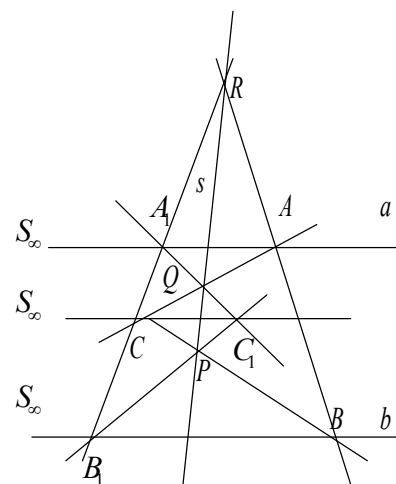


Рис. 15

2) Нехай тепер невласною буде дезаргова точка S .

Якщо два трикутники A, B, C та A_1, B_1, C_1 такі, що прямі AB і A_1B_1 , BC і B_1C_1 , AC і A_1C_1 перетинаються (причому точки перетину лежать на одній прямій) і якщо, крім того, $(AA_1) \parallel (BB_1)$, то $(CC_1) \parallel (AA_1)$, $(CC_1) \parallel (BB_1)$ (рис. 15).

Подвійне відношення чотирьох точок і прямих на площині

Означення. Нехай A, B, C, D – координатні стовпці чотирьох різних колінеарних точок проективної площини і $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ – такі числа, що

$$C = \alpha A + \beta B, \quad D = \alpha' A + \beta' B. \quad (3.1)$$

Тоді число $\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}$ називається *подвійним відношенням точок A, B, C, D* .

Теорема 3.2. Нехай $R(E_l), l = 1, 2, 3, 0$ – система проективних координат на площині і точка $M = (x_1 : x_2 : x_3)$. Позначимо через E_{k_0} і M_k проєкції точок E_0 і M з точки E_k на координатну пряму, що проходить через дві інші координатні точки E_i та E_j . Тоді

$$(E_i E_j E_{k_0} M_k) = x_i : x_j.$$

Д о в е д е н н я. Нехай $k = 3, i = 1, j = 2$ (рис. 16). Необхідно довести рівність $(E_1 E_2 E_{30} M_3) = x_1 : x_2$.

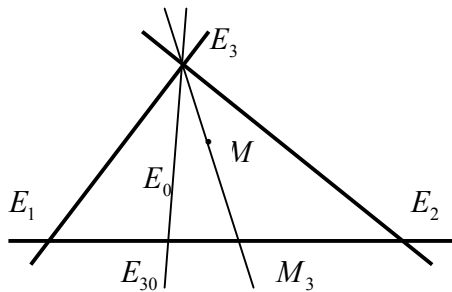


Рис. 16

Тому

$$(E_1 E_2 E_{30} M_3) = \frac{1}{1} : \frac{x_2}{x_1} = x_1 : x_2.$$

Маємо

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_{30} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що

$$E_{30} = E_1 + E_2, \quad M_3 = x_1 E_1 + x_2 E_2.$$

Теорему доведено.

Означення. Нехай a, b, c, d – координатні рядки чотирьох різних прямих проективної площини, які належать одному пучку, і $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ – такі числа, що

$$c = \alpha a + \beta b, \quad d = \alpha' a + \beta' b. \quad (3.2)$$

Тоді число $\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}$ називається *подвійним відношенням чотирьох прямих* і позначається $(abcd)$.

Теорема 3.3. Нехай чотири різні прямі l, n, t, p , які належать одному пучку, відповідно інцидентні чотирьом точкам A, B, C, D , що лежать на прямій, яка не проходить через центр пучка. Тоді

$$(ABCD) = (lmnp).$$

Д о в е д е н н я. За умовою $A \in l, B \in l, C \in n, D \in p$ (рис. 17).

Запишемо умову інцидентності

$$lA = mB = nC = pD = 0.$$

Внаслідок належності прямих одному пучку і колінеарності точок маємо

$$\begin{cases} n = \lambda l + \mu t, \\ p = \lambda' l + \mu' t, \end{cases} \quad \begin{cases} C = \alpha A + \beta B, \\ D = \alpha' A + \beta' B. \end{cases}$$

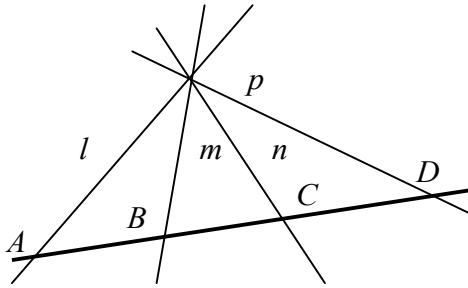


Рис. 17

Підставляючи ці вирази в умову інцидентності, ми отримуємо

$$\begin{cases} (\lambda l + \mu t)(\alpha A + \beta B) = 0, \\ (\lambda' l + \mu' t)(\alpha' A + \beta' B) = 0. \end{cases}$$

Розкриваючи дужки і приймаючи до уваги дві перші умови інцидентності, отримуємо

$$\begin{aligned} \lambda \beta(lB) &= -\mu \alpha(mA), \\ \lambda' \beta'(lB) &= -\mu' \alpha'(mA). \end{aligned}$$

Поділимо почленно ці рівності. Числа $lB \neq 0, mA \neq 0$, оскільки їхня рівність 0 означала б, що $B \in l, A \in m$, а це не відповідає умові. Тоді

$$\frac{\lambda\beta}{\lambda'\beta'} = \frac{\mu\alpha}{\mu'\alpha'}.$$

Отже,

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{\mu'}{\lambda'}.$$

Теорему доведено.

1°. Якщо чотири прямі пучка перетинаються двома прямими, то на цих прямих одержуємо четвірки точок, які мають рівні подвійні відношення (рис. 18).

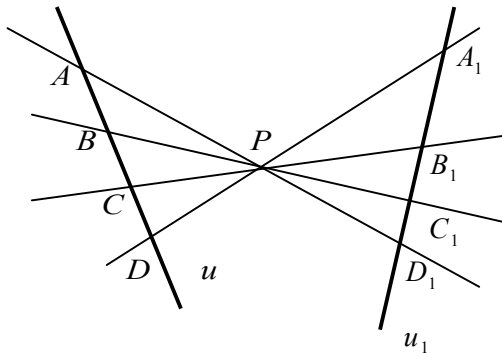


Рис. 18

2°. Якщо через чотири колінеарні точки проходять чотири прямі одного пучка і чотири прямі другого, то подвійні відношення цих четвірок рівні.

Повний чотиривершинник і повний чотиристоронник

Означення. Повним чотиривершинником називається сукупність чотирьох точок – вершин, що неколінеарні по три, і шести сторін, інцидентних парам цих точок прямих. Сторони, неінцидентні одній і тій же прямій, називаються *протилежними* (є три пари протилежних сторін). Три точки, інцидентні парам протилежних сторін, називаються *діагональними*. Три прямі, інцидентні парам діагональних точок, називаються *діагоналями*. Тривершинник, утворений діагональними точками і діагоналями, називається *діагональним*.

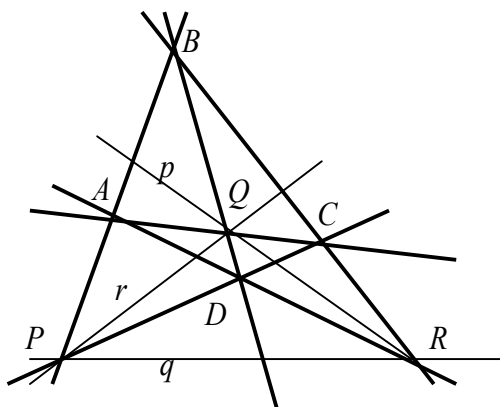


Рис. 19

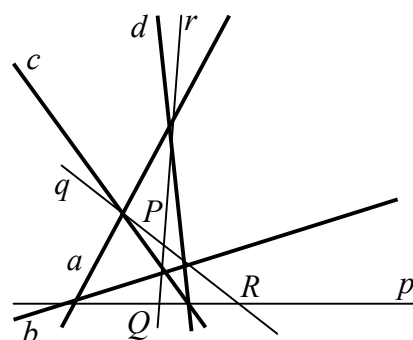


Рис. 20

На рис. 19 A, B, C, D – вершини повного чотиривершинника; $P = (AB) \cap (CD)$, $Q = (AC) \cap (BD)$, $R = (AD) \cap (BC)$ – діагональні точки; p, q, r – діагоналі; PQR – діагональний тривершинник.

Фігура, двоїста до повного чотиривершинника, називається *повним чотиристоронником*. Повний чотиристоронник має чотири сторони і шість вершин. На рис. 20 a, b, c, d – сторони чотиристоронника, $a \cap b$ і $c \cap d$, $a \cap c$ і $b \cap d$, $a \cap d$ і $b \cap c$ – пари протилежних вершин; прямі p, q, r , інцидентні протилежним вершинам, – діагоналі; точки їхнього перетину P, Q, R – діагональні точки.

Теорема 3.4. 1) На кожній стороні повного чотиривершинника є гармонійна четвірка точок: одна пара точок цієї четвірки – вершини, друга – точки перетину цієї сторони з діагональним тривершинником.

2) На кожній діагоналі повного чотиривершинника є гармонійна четвірка точок: одна пара цієї четвірки – діагональні точки, друга – точки перетину сторін, що проходять через третю діагональну точку, з даною діагоналлю.

Цю теорему можна сформулювати так: усі четвірки точок на сторонах і діагоналях повного чотиривершинника, які складаються з розділених пар, – гармонійні.

Д о в е д е н н я. Введемо додаткові позначення (до рис. 19):

$$p \cap (AB) = X, \quad q \cap (CD) = Y, \quad q \cap (AC) = Z, \quad q \cap (BD) = T, \\ r \cap (AD) = U, \quad r \cap (BC) = V.$$

Необхідно довести гармонізм наступних дев'яти четвірок точок:

$$(A, B, P, X), (D, C, P, Y), (A, C, Q, Z), (B, D, Q, T), (A, D, R, U), \\ (B, C, R, V), (Q, R, X, Y), (R, P, T, Z), (P, Q, U, V).$$

Доведемо гармонізм однієї з цих четвірок, наприклад, першої. Введемо систему проєктивних координат з фундаментальними точками $A(1:0:0)$, $B(0:1:0)$, $C(0:0:1)$, $D(1:1:1)$ та визначимо координати всіх точок четвірки (A, B, P, X) .

Оскільки $P \in (AB)$, то третій елемент стовпця P дорівнює 0, тому з того, що $P \in (CD)$ випливає, що $P = D - C$. Аналогічно отримуємо і координати інших діагональних точок: $P(1:1:0)$, $Q(1:0:1)$, $R(0:1:1)$.

Тепер знаходимо координати точки X . Оскільки $X \in (AB)$, то третій елемент стовпця X дорівнює 0. Тому з того, що $X \in (QR)$ випливає $X = Q - R$. Звідси $X(1:-1:0)$.

Тоді $P = A + B$, $X = A - B$ і за означенням подвійного відношення

$$(ABPX) = \frac{1}{1} : \frac{-1}{1} = -1.$$

Перша частина теореми доведена.

Доведемо другу частину. Розглянемо четвірку прямих пучка, центром якого є точка R . Прямі пучка перетинаються прямими AB, CD, PQ , тому на них утворюються четвірки з одним і тим же подвійним відношенням: $(ABPX) = (DCPY) = (UVPQ)$. Оскільки гармонізм першої вже доведений, то доведена і друга частина теореми.

Теорему доведено.

Гармонійні властивості деяких чотиривершинників на розширеній евклідовій площині

Певний інтерес представляє розгляд частинних випадків теореми про гармонійні властивості повного чотиривершинника на розширеній евклідовій площині, які виникають, якщо деякі елементи повного чотиривершинника є невластими.

1. Нехай невластими є дві діагональні точки P_∞ та R_∞ . У такому випадку чотиривершинник має дві пари паралельних протилежних сторін (рис. 21), а діагоналю $P_\infty R_\infty$ є невластна пряма a_∞ площини. Позначимо точку перетину прямих $(AC) \cap a_\infty = Z_\infty$. Ми отримали гармонійну четвірку (A, C, Q, Z_∞) . За теоремою 1.9 першого розділу випливає, що Q – середина відрізка AC .

Отже, теорема евклідової геометрії «*діагоналі паралелограма точкою перетину діляться пополам*» є частковим випадком теореми про гармонійні властивості повного чотиривершинника.

2. Нехай невластною є тільки одна діагональна точка R_∞ , тоді чотиривершинник $ABCD$ має одну пару паралельних протилежних сторін (рис. 22). Тепер, позначивши $AD \cap PQ = U$, отримуємо гармонійну четвірку (A, D, U, R_∞) , а з цього випливає, що U – середина відрізка AD .

Отже, теорема евклідової геометрії «*пряма, що з'єднує точку перетину діагоналей трапеції з точкою перетину бічних сторін, ділить основу трапеції пополам*» є частинним випадком теореми про гармонійні властивості повного чотиривершинника.

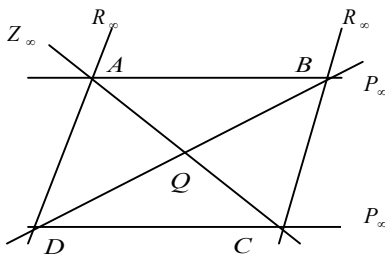


Рис. 21

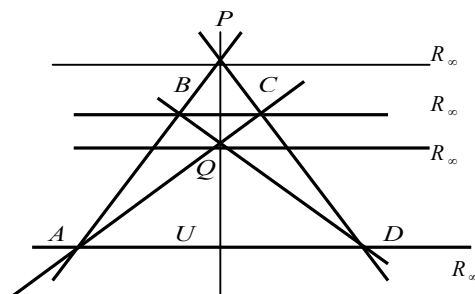


Рис. 22

Контрольні запитання

1. Сформулюйте принцип двоїстості та теорему Дезарга.
2. Як визначається подвійне відношення чотирьох точок і прямих на площині?
3. Що таке повний чотиривершинник та чотиристоронник?
4. Якими гармонійними властивостями володіє повний чотиривершинник?

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Задано точки $A(1:-1:2)$, $B(-2:1:3)$, $C(1:0:-5)$, $D(-3:2:1)$.

Довести їхню колінеарність та знайти подвійне відношення $(ABCD)$.

Розв'язок. Переконавшись безпосереднім підрахунком у рівності нулю визначників

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} \text{ та } \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix},$$

встановлюємо колінеарність точок A, B, C та A, B, D , і, як наслідок, усієї четвірки.

Тепер знаходимо коефіцієнти у формулах (3.1). Маємо

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

звідки

$$\begin{cases} 1 = \alpha - 2\beta, \\ 0 = -\alpha + \beta, \\ -5 = 2\alpha + 3\beta, \end{cases} \quad \begin{cases} -3 = \alpha' - 2\beta', \\ 2 = -\alpha' + \beta', \\ 1 = 2\alpha' + 3\beta'. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці системи (вони сумісні в силу колінеарності точок), отримуємо

$$\alpha = \beta = -1, \alpha' = -1, \beta' = 1 \text{ і}$$

$$(ABCD) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{-1}{-1} : \frac{1}{-1} = -1.$$

Приклад 2. Задано прямі $a(2:1:0)$, $b(0:1:3)$, $c(2:0:-3)$. Перевірити, чи належать ці прямі одному пучку, та знайти у пучку пряму d таку, щоб $(abcd) = -\frac{1}{3}$.

Розв'язок. Належність прямих a, b, c одному пучку перевіряється з виконання умови:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

За означенням подвійного відношення маємо

$$-\frac{1}{3} = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'},$$

де $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ – коефіцієнти у формулах (3.2). За аналогією з попереднім прикладом для знаходження α і β розв'язуємо систему

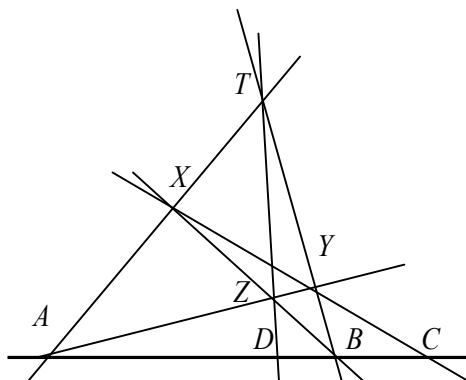
$$\begin{cases} 2 = 2\alpha, \\ 0 = \alpha + \beta, \\ -3 = 3\beta, \end{cases}$$

звідки $\alpha = 1, \beta = -1$. Тому $-\frac{1}{3} = \frac{-1}{1} : \frac{\beta'}{\alpha'}$ і $\frac{\beta'}{\alpha'} = 3$. Поклавши $\alpha' = 1, \beta' = 3$, з другого рівняння (3.2) маємо

$$d = (2, 1, 0) + 3(0, 1, 3) = (2, 4, 9).$$

Приклад 3. Для трьох даних точок A, B, C на прямій побудувати четверту гармонійну точку D .

Розв'язок. Прийемо цю пряму за сторону, точки A і B – за вершини,



точку C – за діагональну точку повного чотиривершинника (рис. 23). Через C проведемо довільну сторону, яка не співпадає з (AB) , на ній довільно виберемо дві точки X і Y , які прийемо за вершини повного

чотиривершинника

$ABXY$. Тепер будемо діагональні точки $T = (AX) \cap (BY)$, $Z = (BX) \cap (AY)$ і проводимо через них діагональ TZ . Точка перетину діагоналі з цією прямою і буде шукана точка D .

Завдання для самостійної роботи

1. Задано пряму a , неколінеарні точки A, B, C , неінцидентні a . Добудувати конфігурацію Дезарга так, щоб a була дезарговою віссю, а тривершинник ABC – дезарговим тривершинником.
2. Зробити рисунок конфігурації Дезарга у випадку, коли одна з вершин одного з дезаргових тривершинників невласна.
3. Задано точки

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Довести їхню колінеарність та знайти подвійні відношення $(ABCD), (ACBD), (ADBC), (DCBA)$.

4. Дано: $(ABCD) = 3$. Знайти $(CABD)$.
5. Яка пряма на евклідовій площині буде четвертою гармонійною до трьох прямих пучка a, b, c , якщо пряма c ділить кут, утворений прямими a і b , пополам?

Завдання для контрольної роботи

1. Задано дві прямі l і l_1 . Точки A, B, C належать прямій l , точки A_1, B_1, C_1 належать прямій l_1 . Довести колінеарність точок $Q = l \cap l_1, P = (A_1B) \cap (AB_1), R = (BC_1) \cap (B_1C)$, якщо AA_1, BB_1, CC_1 належать одному пучку.
2. Зробити рисунок конфігурації Дезарга у випадку, коли пара невідповідних вершин тривершинників – невласні точки.

3. Переконатися, що подані четвірки прямих належать одному пучку:

$a : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0;$	$a : x_2 = 0;$
а) $b : -x_2 + x_3 = 0;$	б) $b : x_1 - x_2 = 0;$
$c : x_1 - x_3 = 0;$	$c : 3x_1 - x_2 = 0;$
$d : x_1 - x_2 = 0;$	$d : 5x_1 - x_2 = 0.$

Знайти подвійні відношення: $(abcd), (adbc), (dcba)$.

4. Побудувати четверту точку D , гармонійну до A, B, C таку, щоб:

а) $(ACBD) = -1;$

б) $(ADBC) = -1.$

5. Дано: а) $(ABCD) = -2;$ б) $(ABCD) = -1.$

Знайти $(DBCA), (CADB), (CABD), (ADBC), (CBAD).$

Розділ IV. Проективні перетворення

Проективне відображення прямої на пряму

Означення. Нехай на проективній площині є дві прямі u_1 та u_2 і точка $S \notin u_1, S \notin u_2$. Відображення $\psi: u_1 \rightarrow u_2$, при якому довільна точка $A_1 \in u_1$ відображається на таку точку $A_2 \in u_2$, що точки S, A_1, A_2 колінеарні, називається *перспективним відображенням з центром S прямої u_1 на пряму u_2* . Формально можна записати так:

$$\forall A_1 \in u_1 \quad \psi(A_1) = u_2 \cap (SA_1).$$

Перспективне відображення позначається знаком $\overset{=}{\wedge}$. Будемо використовувати два записи:

$$\psi: u_1 \overset{=}{\rightarrow} u_2 \text{ і } \psi: u_1 \overset{=}{\xrightarrow{S}} u_2,$$

причому останній запис дозволяє вказати S – центр відображення.

Відмітимо такі властивості перспективних відображень.

- 1°. *Перспективне відображення бієктивне.*
- 2°. *При перспективному відображенні прямої на пряму спільна точка цих прямих відображається сама на себе.*
- 3°. *При перспективному відображенні зберігається подвійне відношення довільної четвірки точок.*

Означення. Бієктивне відображення прямої на пряму, яке зберігає подвійне відношення довільної четвірки точок, називається *проективним відображенням*.

При необхідності, щоб підкреслити проективний характер відображення, будемо використовувати знак $\overline{\wedge}$.

Очевидно, що перспективні відображення представляють собою частинний випадок проективних.

Відмітимо також, що композиція декількох проєктивних відображень теж є проєктивним відображенням.

Теорема 4.1. Нехай $A_1, B_1, C_1 \in u_1$, $A_2, B_2, C_2 \in u_2$. Тоді існує одне і тільки одне проєктивне відображення $\varphi: u_1 \rightarrow u_2$, при якому точки A_1, B_1, C_1 відображаються відповідно в A_2, B_2, C_2 .

Д о в е д е н н я. Єдиність. Нехай φ і φ' – два відображення, що задовольняють умови теореми і $M_1 \in u_1$ – довільна точка. Нехай далі $\varphi(M_1) = M_2$, $\varphi'(M_1) = M'_2$. Тоді за означенням проєктивного відображення

$$(A_2 B_2 C_2 M_2) = (A_2 B_2 C_2 M'_2) = h,$$

де $h = (A_1 B_1 C_1 M_1)$. Тоді за теоремою 5 розділу I $M_2 = M'_2$, звідси випливає, що $\varphi = \varphi'$.

Зауважимо, що єдиність відображення доведена без будь-яких обмежень щодо u_1 та u_2 , які можуть і співпадати.

Існування. Розглянемо спочатку випадок, коли $u_1 \neq u_2$. На прямій $A_1 A_2$ візьмемо довільні різні точки S_1 та S_2 , відмінні від A_1, A_2 , а потім через точки $B = (S_1 B_1) \cap (S_2 B_2)$ і $C = (S_1 C_1) \cap (S_2 C_2)$ проведемо пряму u (рис. 24).

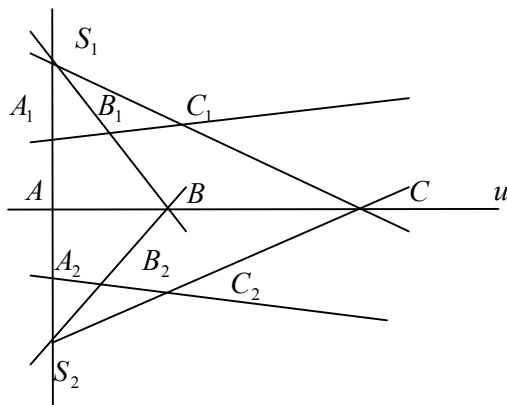


Рис. 24

Відображення $\varphi = \psi_2 \circ \psi_1$, де

$$\psi_1: u_1 \xrightarrow[S_1]{A_1} u, \quad \psi_2: u \xrightarrow[S_2]{A_2} u_2,$$

є шуканим відображенням: воно проєктивне, як композиція перспективних відображень, і

$$\varphi: A_1 \rightarrow A_2, B_1 \rightarrow B_2, C_1 \rightarrow C_2.$$

Якщо ж $u_1 = u_2$ (ці прямі

будемо позначати u), то на будь-якій іншій прямій u_0 візьмемо довільно точки A_0, B_0, C_0 . За доведеним існують проєктивні відображення

$$\varphi_1: u \rightarrow u_0, \quad \varphi_2: u_0 \rightarrow u$$

такі, що

$$\varphi_1 : A_1 \rightarrow A_0, \quad B_1 \rightarrow B_0, \quad C_1 \rightarrow C_0; \quad \varphi_2 : A_0 \rightarrow A_2, \quad B_0 \rightarrow B_2, \quad C_0 \rightarrow C_2.$$

Їхня композиція $\varphi_2 \circ \varphi_1$ і є шукане проєктивне відображення.

Теорему доведено.

Наслідок. *Проективне відображення однієї прямої на другу можна розкласти на композицію не більше двох перспективних відображень, якщо прямі різні, і не більше трьох, якщо прямі співпадають.*

Теорема 4.2. *Для того, щоб проєктивне відображення прямої на пряму було перспективним, необхідно і достатньо, щоб точка X , яка належить двом прямим, відображалася сама на себе.*

Проективне перетворення прямої. Інволюції

Нагадаємо, що перетворенням множини називається бієктивне відображення множини на себе. Проективним перетворенням проєктивної прямої P_1 ми називаємо проєктивне відображення $\varphi : P_1 \xrightarrow{\sim} P_1$. Можна це означення конкретизувати так.

Означення. *Проективним перетворенням прямої P_1 називається перетворення, при якому зберігається подвійне відношення довільних чотирьох точок.*

Теорема 4.3. *Проективні перетворення прямої P_1 утворюють групу.*

Теорема 4.4. *Нехай на проєктивній прямій задані дві упорядковані трійки точок, причому у кожній трійці усі точки різні. Тоді існує єдине проєктивне перетворення прямої, яке відображає першу трійку та другу.*

Нехай на прямій P_1 , де встановлена проєктивна система координат $R = R(E_i), i = 1, 2, 0$ діє проєктивне перетворення φ . Знайдемо його рівняння, тобто визначимо зв'язок між координатами довільної точки $X(x_1 : x_2)$ та її образу $X'(x'_1 : x'_2)$.

Введемо позначення для образів фундаментальних точок $\varphi(E_i) = E'_i, i = 1, 2, 0$ і розглянемо допоміжну систему координат $R = R(E'_i)$. За означенням проєктивного перетворення

$$(E_1 E_2 E_0 X) = (E'_1 E'_2 E'_0 X')$$

і за теоремою про зв'язок проєктивних координат з подвійним відношенням координати точки X в системі R будуть такі ж, як координати точки X' в системі R' . Таким чином, точка X' в системі R має координати $(x'_1 : x'_2)$, а в системі R' — $(x_1 : x_2)$. Координати точки у двох різних системах координат пов'язані рівняннями переходу $\lambda X' = PX$, тому:

$$\lambda X = PX', \quad (4.1)$$

де X та X' — координатні стовпці прообразу і образу, P — неособлива квадратна матриця другого порядку, λ — коефіцієнт пропорційності.

Рівняння (4.1) можна розв'язати відносно X' :

$$\mu X' = QX, \quad (4.2)$$

де $\mu = \lambda^{-1}, Q = P^{-1}$.

Рівняння (4.1) та (4.2) виражають зв'язок між координатами різних точок в одній системі координат.

Знайдемо композицію двох проєктивних перетворень φ_1 і φ_2 , заданих відповідно рівняннями $\lambda_1 X = P_1 X'$ та $\lambda_2 X = P_2 X'$.

Нехай X — довільна точка і $\varphi_1(X) = X_1, \varphi_2(X_1) = X'$. Тоді $\lambda_1 X = P_1 X_1$ та $\lambda_2 X_1 = P_2 X'$, звідки

$$(\lambda_1 \lambda_2) X = (P_1 P_2) X'.$$

Ми отримали рівняння перетворення $\varphi_2 \circ \varphi_1$. Його матриця з точністю до множника дорівнює $P_1 P_2$.

Отже, матриця композиції двох проєктивних перетворень з точністю до множника дорівнює добутку матриць перемножених перетворень, причому матриця першого перетворення буде лівим множником.

Матриця тотожного перетворення з точністю до множника дорівнює одиничній матриці E :

$$P = aE = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

така матриця називається *скалярною*. Тому *матриця оберненого перетворення з точністю до множника дорівнює оберненій матриці заданого перетворення*.

Означення та ознака інволюції. Задання

Означення. *Інволюцією називається нетотожне проєктивне перетворення прямої, яке співпадає зі своїм оберненим.*

Теорема 4.5. *Для того, щоб проєктивне перетворення φ прямої було інволюцією, необхідно і достатньо, щоб на цій прямій було дві різні точки A та A' , які б відображалися одна на одну.*

Д о в е д е н н я. Необхідність очевидна, доведемо достатність.

Нехай задано проєктивне перетворення $\varphi: A \leftrightarrow A'$. Необхідно довести, що для довільної точки X з того, що $\varphi: X \leftrightarrow X' \Rightarrow \varphi: X' \leftrightarrow X$.

Позначимо $\varphi(X') = X''$. Тоді в силу проєктивного характеру φ $(AA'XX') = (A'AX'X'')$, а $(AA'XX') = (A'AX'X)$, тому $(A'AX'X) = (A'AX'X'')$. З останньої рівності отримуємо $X = X''$.

Теорему доведено.

Теорема 4.6. *Нехай на проєктивній прямій задані дві пари точок, причому хоча б в одній з пар точки різні. Тоді існує єдина інволюція, яка переставляє точки кожної пари.*

Знайдемо рівняння інволюції, якщо відображення φ задане рівнянням $\lambda X = PX'$, тобто вивчимо, які обмеження необхідно накласти на коефіцієнти рівняння (тобто матрицю P), щоб перетворення стало інволюцією.

Умова інволюційності $\varphi^2 = e$ відповідно до правила множення проєктивних перетворень означає, що матриця P^2 – скалярна. Нехай

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

тоді в матриці

$$P^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

елементи, які стоять на головній діагоналі, рівні між собою, а решта – нулі. Це приводить до такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} b(a+d) = 0, \\ c(a+d) = 0, \\ (a-d)(a+d) = 0. \end{cases}$$

Якщо $a+d \neq 0$, то $b=c=0, a=d$. Тоді матриця P – скалярна, а φ – тотожне перетворення.

Якщо $a+d=0$, то система рівнянь, що забезпечує інволюційність, задовольняється. У такому випадку перетворення φ нетотожне.

Отже, для того, щоб перетворення прямої було інволюційним, необхідно і достатньо, щоб сума елементів на головній діагоналі матриці перетворення дорівнювала нулю.

Рівняння інволюції мають такий вигляд

$$\begin{cases} \lambda x'_1 = ax_1 + bx_2, \\ \lambda x'_2 = cx_1 - ax_2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Їх можна спростити, якщо в якості координатних точок E_1 та E_2 взяти точки, які відповідають одна одній в інволюції. У цьому випадку образ точки $E_1(1:0)$ в силу рівняння (4.3) буде мати координати $(a:c)$, а оскільки образом точки $E_1(1:0)$ буде точка $E_2(0:1)$, то $a=0$. Тоді отримуємо рівняння інволюції в такому вигляді

$$\begin{cases} \lambda x'_1 = bx_2, \\ \lambda x'_2 = cx_1, \end{cases} \quad (4.4)$$

де $b \neq 0, c \neq 0$.

Знайдемо число нерухомих точок інволюції (4.4). Координати нерухомої точки і її прообразу пропорційні, тому їх можна знайти із системи:

$$\begin{cases} \lambda x_1 = bx_2, \\ \lambda x_2 = cx_1, \end{cases}$$

звідки

$$\left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 = \frac{b}{c}.$$

Якщо $\frac{b}{c} > 0$, то маємо дві нерухомі точки. Інволюція називається *гіперболічною*.

Якщо $\frac{b}{c} < 0$, то нерухомих точок немає. Інволюція називається *еліптичною*.

Теорема 4.7. У випадку гіперболічної інволюції довільні дві пари різних відповідних точок не розділяють одна одну, а у випадку еліптичної – розділяють. Більше того, яка б не була еліптична інволюція, для довільної пари відповідних точок єдиним чином знайдеться друга пара, яка першу ділить гармонійно.

Д о в е д е н н я. Точки однієї пари візьмемо за координатні точки $E_1(1:0)$ та $E_2(0:1)$. Тоді рівняння інволюції має вигляд (4). Якщо $A(a_1:a_2)$ – одна із точок другої пари, то друга точка B відповідно до рівнянь (4) має координати $B = (ba_2:ca_1)$. Тому

$$A = a_1E_1 + a_2E_2; \quad B = ba_2E_1 + ca_1E_2$$

і

$$(E_1E_2AB) = \frac{a_2}{a_1} : \frac{ca_1}{ba_2} = \frac{b}{c} \cdot \frac{a_2^2}{a_1^2}.$$

Знак подвійного відношення дає змогу судити про роздільність чи нероздільність пар точок. А саме, якщо $\frac{b}{c} > 0$ (гіперболічна інволюція), то

$(E_1E_2AB) > 0$ і $E_1, E_2 \div A, B$; якщо $\frac{b}{c} < 0$ (еліптична інволюція), то $(E_1E_2AB) < 0$ і

$E_1, E_2 \div A, B$.

Для знаходження пари відповідних точок, які гармонійно ділять пару E_1, E_2 потрібно знайти $a_1:a_2$ з рівняння $\frac{b}{c} \cdot \frac{a_2^2}{a_1^2} = -1$. Оскільки інволюція еліптична, то рівняння має два розв'язки $a_1:a_2 = \sqrt{|b|} : \pm \sqrt{|c|}$. Неважко бачити, що дві точки відповідають одна одній в інволюції, тому існує єдина пара відповідних точок, які ділять E_1, E_2 гармонійно.

Теорему доведено.

Теорема 4.8. Нерухомі точки гіперболічної інволюції гармонійно ділять довільну пару відповідних точок.

Д о в е д е н н я. Нехай U та V – нерухомі точки, а A і A' – пара відповідних точок. Тоді $(UVA A') = (UVA' A)$, але, крім того $(UVA A') = \frac{1}{(UVA' A)}$, тому

$$(UVA A')^2 = 1.$$

Якщо $(UVA A') = 1$, то точки A і A' співпадають. Оскільки трьох нерухомих точок нетотожне проєктивне перетворення мати не може, то цей варіант не підходить. Тому $(UVA A') = -1$.

Теорему доведено.

Наслідок 1. *Дві нерухомі точки задають гіперболічну інволюцію.*

Наслідок 2. *Якими б не були дві нерозділені пари, існує єдина третя пара, яка кожен з цих пар ділить гармонійно.*

Колінеації

За означенням проєктивна площина представляє собою множину точок і прямих, тому проєктивне перетворення P_2 може відображати точки – на точки, прямі – на прямі. Однак можливі і такі перетворення, при яких образом точки буде пряма, а образом прямої – точка. Саме такий характер мало перетворення f , яке ми розглядали при встановленні принципу двоїстості. Тому є два типи проєктивних перетворень залежно від того, чи переводять вони елементи проєктивної площини якогось виду в елементи того ж виду чи іншого виду. Перетворення першого типу, що відображають прямі в прямі, а точки – в точки, називаються *колінеаціями*, перетворення другого типу, що відображають прямі в точки, а точки в прямі, називаються *кореляціями*.

Проєктивні перетворення $\varphi : P_2 \rightarrow P_2$ визначаються вимогами, у відповідності з якими повинні зберігатися:

- 1) інцидентність точок і прямих;
- 2) подвійне відношення.

З означення проєктивного перетворення випливає, що множина всіх проєктивних перетворень утворює групу. Ця група називається *проєктивною*.

Дійсно, композиція двох колінеацій чи двох кореляцій є колінеація, а композиція колінеації та кореляції – кореляція. Множина колінеацій також є групою, яка називається *групою колінеацій* і позначається ***K***. Множина кореляцій групи не утворює.

Означення. Перетворення $\kappa : P_2 \rightarrow P_2$ називається колінеацією, якщо образом точки є точка, образом прямої – пряма і зберігається інцидентність точок і прямих, а також подвійне відношення довільної четвірки колінеарних точок.

Теорема 4.9. Нехай задано дві упорядковані четвірки точок, причому у кожній з цих четвірок жодні три точки неколінеарні. Тоді існує єдина колінеація, яка відображає першу четвірку на другу.

Д о в е д е н н я. Існування. Задані четвірки точок приймемо за фундаментальні четвірки, що визначають системи координат R та R' . Розглянемо перетворення проєктивної площини, що визначається наступними умовами: образом будь-якої точки (прямої) є така точка (пряма), яка в системі R' має такі ж координати, які вихідна точка (пряма) має в системі R .

Це перетворення є колінеацією. Справді, воно зберігає інцидентність, оскільки умова інцидентності $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ точки $X(x_1, x_2, x_3)$ і прямої $u(u_1, u_2, u_3)$, записана за допомогою координат в системі R , є в той же час умовою інцидентності їх образів, записаної в системі R' .

Крім того, наша колінеація відображає першу четвірку на другу, так як координати точок першої четвірки в системі R такі ж, як координати точок другої четвірки в системі R' . Тому побудована колінеація задовольняє умову теореми.

Єдиність. Нехай κ – колінеація і $\kappa : A \rightarrow A', B \rightarrow B', C \rightarrow C', D \rightarrow D'$.

Доведемо, що цими умовами образ X' довільної точки X визначається однозначно. Точка X не може належати одночасно всім прямим, що з'єднують попарно точки A, B, C, D . Нехай, наприклад, $X \notin CD$.

Введемо позначення $m = (DX)$, $n = (CX)$ і переконаємося, що прямі $m' = \kappa(m)$, $n' = \kappa(n)$ визначені однозначно.

За означенням колінеації

$$\kappa : a \rightarrow a', b \rightarrow b', c \rightarrow c',$$

де $a = (DA)$, $b = (DB)$, $c = (DC)$, $a' = (D'A')$, $b' = (D'B')$, $c' = (D'C')$.

Тому $(abcm) = (a'b'c'm')$. Цією рівністю пряма m' визначена однозначно.

Аналогічно показується, що пряма n' теж визначена однозначно. Тим самим однозначно визначається і точка $X' = m' \cap n'$, так, як прямі m' і n' не співпадають.

Теорему доведено.

Знайдемо рівняння колінеації.

Нехай $\kappa : P_2 \rightarrow P_2$ – колінеація і $R = R(E_i)$, $i = 1, 2, 3, 0$ – яка-небудь система проєктивних координат на площині P_2 . Необхідно, знаючи координати точки $X(x_1 : x_2 : x_3)$ в системі R , знайти координати $(x'_1 : x'_2 : x'_3)$ точки $X' = \kappa(X)$ в цій же системі. Таке питання потрібно розв'язати і для прямих.

З доведення теореми 4.9 випливає, що точка X' в системі R' , яка визначається фундаментальними точками $E'_i = \kappa(E_i)$ має такі ж координати, які має точка X в системі R , тобто

$$X'(x'_1 : x'_2 : x'_3) \text{ – в системі } R,$$

$$X'(x_1 : x_2 : x_3) \text{ – в системі } R'.$$

Отримуємо наступне рівняння колінеації

$$\lambda X = PX'.$$

Тут X – координатний стовпець прообразу, X' – образу, P – неособлива квадратна матриця, визначена з точністю до множника, λ – коефіцієнт пропорційності.

Останнє рівняння можна розв'язати відносно X'

$$\mu X' = QX,$$

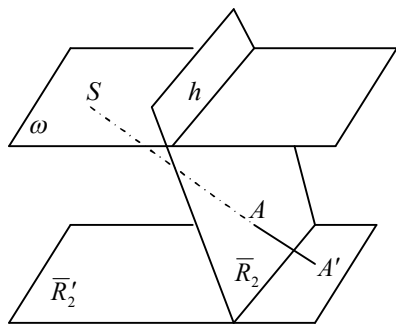
де $\mu = \lambda^{-1}$, $Q = P^{-1}$.

Виведемо рівняння перетворення прямих. Рівняння прямої у матричному вигляді $uX = 0$ представляє собою запис умови, яка пов'язує координати точок

прямої u . Координати образів цих точок пов'язані умовою $uPX' = 0$. Тому uP – рядок із координат прямої $u' = \kappa(u)$. Тому

$$\lambda u' = uP.$$

Означення. Нехай у розширеному евклідовому просторі задано дві різні розширені евклідові площини $\bar{R}_2$ та $\bar{R}_2'$ і точка S (центр перспективи), що не належить цим площинам. Тоді відображення $\psi: \bar{R}_2 \rightarrow \bar{R}_2'$, при якому образом точки $A \in \bar{R}_2$ є точка $A' = (SA) \cap \bar{R}_2'$ (рис. 25), називається *центральною проекцією* або *перспективою* і позначається: $\psi: \bar{R}_2 \xrightarrow[S]{\bar{\wedge}} \bar{R}_2'$



то воно стане некоректним. Справді, нехай ω – площина, що проходить через S , $\omega \parallel R_2'$ і $h = \omega \cap R_2$. Тоді точки прямої h не мають образів на площині R_2' . Саме у зв'язку з цим Дезаргом були введені власні елементи.

Рис. 25

1°. При перспективному відображенні пряма відображається на пряму (рис. 26).

2°. При перспективному відображенні зберігається подвійне відношення чотирьох точок.

3°. При перспективному відображенні зберігається подвійне відношення прямих пучка.

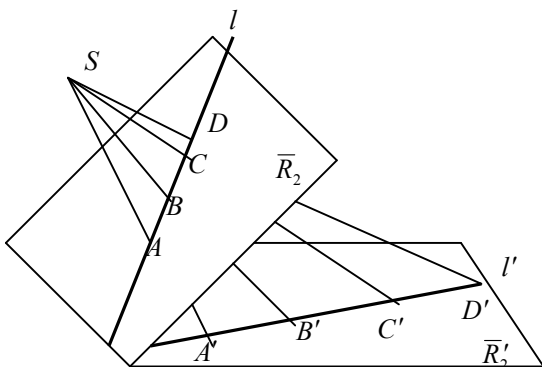


Рис. 26

На основі цих властивостей можна зробити висновок, що перспектива є проєктивним відображенням площини на площину. Більше того, композиція $\psi_2 \circ \psi_1$, де $\psi_1: \bar{R}_2 \xrightarrow[S_1]{\bar{\wedge}} \bar{R}_2'$, $\psi_2: \bar{R}_2' \xrightarrow[S_1]{\bar{\wedge}} \bar{R}_2$, є колінеацією, яка відображає площину $\bar{R}_2$ на себе.

Гомології

Означення. Гомологією називається нетотожна колінеація, для якої існує поточно нерухома пряма, яка називається віссю гомології.

Теорема 4.10. Для довільної гомології γ існує нерухома точка (центр гомології), яка володіє тією властивістю, що кожна інцидентна їй пряма нерухома. Крім центру та точок осі, гомологія нерухомих точок не має.

Д о в е д е н н я. Нехай p – вісь гомології, $A \notin p$ – довільна точка, $A' = \gamma(A)$. Нехай далі $B \notin p$ – довільна точка і $B' = \gamma(B)$. Тоді прямі AA' і BB' нерухомі і як наслідок, буде нерухомою і точка $P = (AA') \cap (BB')$. Доведемо, що P – центр гомології.

а) $P \notin p$ (гіперболічна гомологія). У цьому випадку довільна пряма $u \in P$ – нерухома, оскільки має дві нерухомі точки – точку P і точку $X = u \cap p$ (рис. 27).

б) $P \in p$ (параболічна гомологія). У цьому випадку пряма $u \in P$ – нерухома тому, що вона і її образ повинні складати одне і те ж подвійне відношення трьома прямими – p , AA' , BB' (рис. 28).

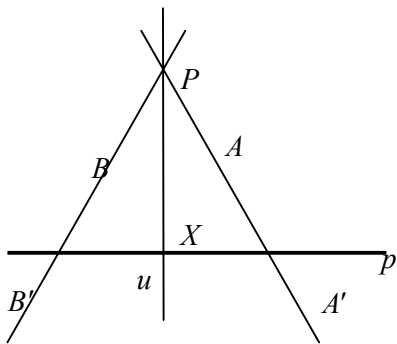


Рис. 27

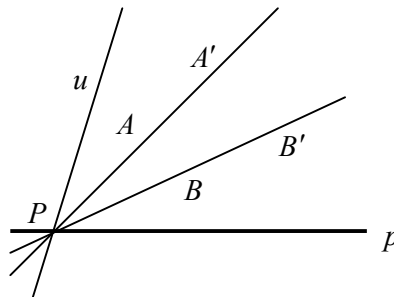


Рис. 28

Теорему доведено.

1°. Точка і її образ лежать на одній прямій з центром гомології.

2°. Пряма і її образ перетинаються на осі.

Теорема 4.11. Нехай P і p – довільні точка і пряма, A, A' – точки, які лежать на одній прямій з P і неінцидентні p . Тоді існує єдина гомологія, для якої P – центр, p – вісь, A' – образ точки A .

Позначення такої гомології: $\gamma_{P,p}^{A \rightarrow A'}$.

Д о в е д е н н я виконаємо для випадку гіперболічної гомології. З невеликими змінами його можна застосувати і до випадку параболічної гомології.

Існування. Позначимо через U і V які-небудь точки прямої p , які не лежать на прямій AA' . Розглянемо колінеацію κ , визначену умовами:

$$P \rightarrow P, U \rightarrow U, V \rightarrow V, A \rightarrow A'.$$

Ця колінеація залишає нерухомими три точки прямої p : U, V та $X = p \cap (AA')$. Отже, нерухомі всі точки прямої p , тому κ – гомологія з віссю p , центром гомології буде точка P , як нерухома точка, що не належить осі.

Єдиність. Будь-яка гомологія, що задовольняє умову теореми, володіє тими властивостями, якими задавалась колінеація при доведенні існування. За теоремою 4.9 така колінеація єдина.

Теорему доведено.

Справедлива і **двоїста теорема**: гомологію можна задати центром, віссю і парою відповідних прямих a і a' . Позначення в такому випадку аналогічне: $\gamma_{P,p}^{a \rightarrow a'}$.

Нехай, наприклад, задана гомологія $\gamma_{P,p}^{A \rightarrow A'}$. Побудуємо образ M' точки $M \notin (AA')$ у такий спосіб (рис. 29).

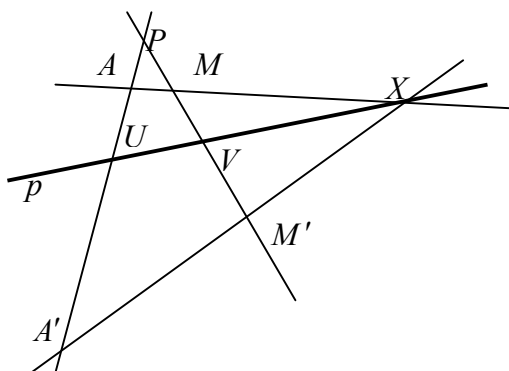


Рис. 29

Спочатку будуємо образ прямої AM . Ним буде пряма $A'X$, де $X = p \cap (AM)$. Точка M' лежить на цій прямій, крім того $M \in PM$. Отже, $M' = (PM) \cap (A'X)$.

Якщо $M \in (AA')$, то спочатку будемо образ будь-якої N' , $N' \notin (AA')$, а потім точка M' .

Гомології на розширеній евклідовій площині

Розглянемо деякі частинні випадки гомології на розширеній евклідовій площині.

1. Гомології з невластним центром P_∞ і власною віссю p . Нехай задана гомологія $\gamma_{P_\infty, p}^{A \rightarrow A'}$. Образ B' довільної точки B знаходиться на основі двох умов: $B' \in (A'X)$, де $X = (AB) \cap p$ і $BB' \parallel (AA')$ (рис. 30). Ця побудова співпадає з побудовою відповідних точок при перспективно-афінному перетворенні, яке задане віссю p і парою точок $A \rightarrow A'$. Отже, гомологія з невластним центром і власною віссю є перспективно-афінне перетворення.

2. Гомології з невластною віссю p_∞ і власним центром P . Розглянемо гомологію $\gamma_{P, p_\infty}^{A \rightarrow A'}$, де $P \in (AA')$ (рис. 31). Образ B' довільної точки B лежить на прямій $A'X_\infty$, де $X_\infty = (AB) \cap p_\infty$ і на прямій PB . Прямі $(AB) \parallel (A'B')$. У такому випадку гомологія є гомотетією з центром P і парою відповідних точок $A \rightarrow A'$.

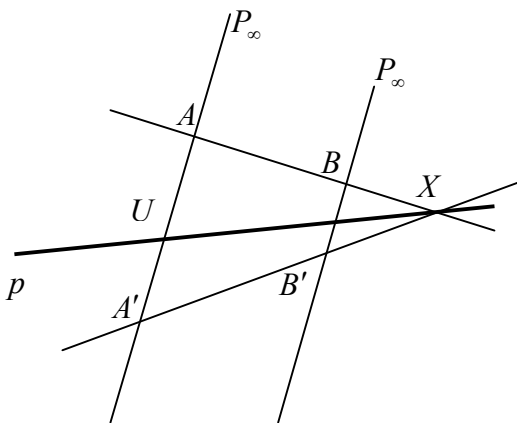


Рис. 30

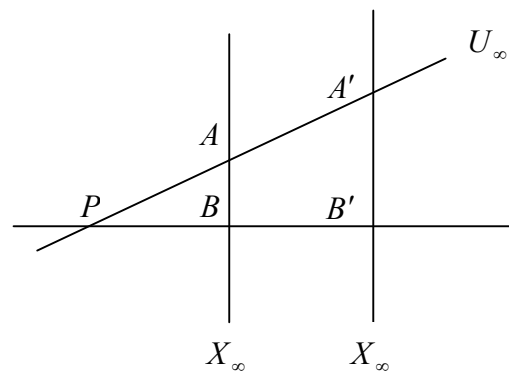


Рис. 31

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення перспективного та проєктивного відображень прямої на пряму.
2. Що називається проєктивним перетворенням прямої на пряму?
3. Що таке інволюція? Сформулюйте умову інволюційності.
4. Яке перетворення називається колінеацією?
5. Сформулюйте означення центрального проєктування.
6. Якими властивостями володіє гомологія?

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. На розширеній евклідовій площині задані прямі u_1 та u_2 і проєктивне відображення $\varphi : u_1 \rightarrow u_2$, визначене трьома парами відповідних точок: $A_1 \rightarrow A_2, B_1 \rightarrow B_2, C_1 \rightarrow C_2$. Побудувати образ D_2 невласної точки $D_{1\infty}$ прямої u_1 .

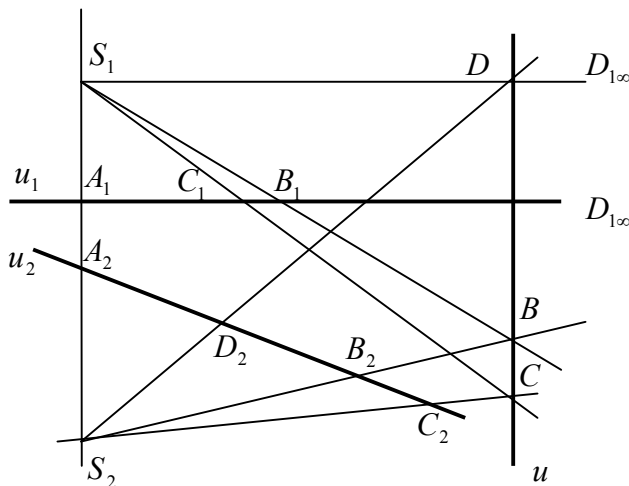


Рис. 32

Розв'язок. Відображення φ представимо у вигляді композиції двох перспективних відображень $\varphi = \psi_2 \circ \psi_1$:

$$\psi_1 : u_1 \xrightarrow[S_1]{=} u, \quad \psi_2 : u \xrightarrow[S_2]{=} u_2,$$

де S_1 та S_2 – довільні точки прямої A_1A_2 , а u – пряма, що проходить через точки $B = (S_1B_1) \cap (S_2B_2)$ і $C = (S_1C_1) \cap (S_2C_2)$ (рис. 32). Точка $D = \psi_1(D_{1\infty}) = u \cap S_1D_{1\infty}$, $S_1D_{1\infty} \parallel u$. Шукана точка $D_2 = \phi(D_{1\infty}) = \psi_2(D)$ і є точкою перетину прямих $u_2 \cap S_2D = D_2$.

Приклад 2. Проективне перетворення $\phi: P_1 \rightarrow P_1$ задане трьома парами відповідних точок

$$A \rightarrow A', \quad B \rightarrow B', \quad C \rightarrow C'.$$

Побудувати образ довільної точки M (рис. 33).

Розв’язок. Розкладемо перетворення ϕ на композицію трьох перспективних перетворень $\phi = \psi_2 \circ \psi_1 \circ \psi$. Виберемо пряму u і точку S , після чого задамо перспективне відображення $\psi: P_1 \xrightarrow[\hat{S}]{} u$. Образи точок A, B, C відносно перетворення ψ позначимо відповідно через A_1, B_1, C_1 .

Задамо перетворення

$$\psi_1: u \xrightarrow[\hat{S_1}]{} u_0, \quad \psi_2: u_0 \xrightarrow[\hat{S'}]{} P_1,$$

де S_1 і S' – довільні точки прямої AA' , u_0 – пряма, що проходить через точки $B_0 = (S_1B_1) \cap (S'B')$, $C_0 = (S_1C_1) \cap (S'C')$.

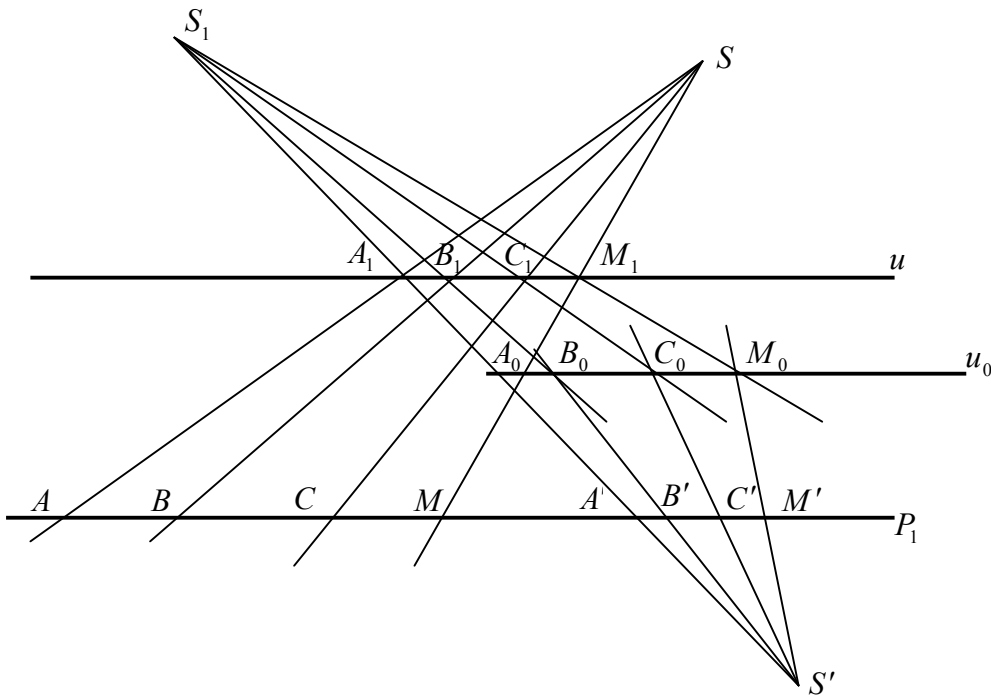


Рис. 33

Тепер легко будується образ M' точки M при відображенні φ :

$$\varphi(M) = \psi_2 \circ \psi_1 \circ \psi(M) = \psi_2 \circ \psi_1(M_1) = \psi_2(M_0) = M'.$$

Приклад 3. Знаючи координати трьох точок і їх образів: $A(0:1) \rightarrow A'(1:2)$, $B(2:-1) \rightarrow B'(1:0)$, $C(1:-2) \rightarrow C'(0:1)$, знайти рівняння проєктивного перетворення прямої.

Розв'язок. Рівняння перетворення шукаємо у такому вигляді

$$\begin{cases} \lambda x'_1 = p_{11}x_1 + p_{12}x_2, \\ \lambda x'_2 = p_{21}x_1 + p_{22}x_2. \end{cases}$$

Підставляючи в цю систему координати даних точок, отримаємо

$$\begin{cases} \lambda_1 = p_{12}, & \begin{cases} \lambda_2 = 2p_{11} - p_{12}, \\ 0 = 2p_{21} - p_{22}, \end{cases} & \begin{cases} 0 = p_{11} - 2p_{12}, \\ \lambda_3 = p_{21} - 2p_{22}. \end{cases} \end{cases}$$

У цих шести рівняннях є сім невідомих, але оскільки невідомі визначені лише з точністю до множника, то, надавши одному з нерівних нулю невідомих довільне значення, наприклад, $\lambda_1 = 1$, отримаємо $p_{12} = 1$, $p_{22} = 2$, $p_{21} = 1$, $p_{11} = 2$.

Таким чином, ми визначили усі коефіцієнти у рівняннях перетворення

$$\begin{cases} \lambda x'_1 = 2x_1 + x_2, \\ \lambda x'_2 = x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Приклад 4. Інволюція задана двома парами відповідних точок:
 $\varphi: A(1:1) \leftrightarrow A'(5:-3), B(1:0) \leftrightarrow B'(2:-1)$. Знайти рівняння інволюції.

Розв'язок. Оскільки рівняння (4.3) забезпечують інволюційність, то достатньо вимагати, щоб точки A' і B' були образами точок A і B (в один бік). Це приводить до систем

$$\begin{cases} 5\lambda' = a + b, \\ -3\lambda' = c - a, \end{cases} \quad \begin{cases} 2\lambda'' = a, \\ -\lambda'' = c. \end{cases}$$

Поклавши $c = 1$, знаходимо спочатку $\lambda'' = -1, a = -2$, а потім $\lambda' = -1, b = -3$.

Отримаємо рівняння інволюції

$$\begin{cases} \lambda x'_1 = -2x_1 - 3x_2, \\ \lambda x'_2 = x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Завдання для самостійної роботи

1. Проективне відображення φ прямої l на пряму l' задане двома трійками точок:

$$A(1:1:1) \rightarrow A'(-1:1:0), \quad B(-1:2:-1) \rightarrow B'(1:-2:2), \quad C(2:-1:2) \rightarrow C'(1:1:-4).$$

Переконалися, що точка U колінеарна точкам $A, B, C \in l$, точка V' колінеарна точкам $A', B', C' \in l'$. Знайти $\varphi(U)$ образ точки $U \in l$ і $\varphi^{-1}(V')$ прообраз точки $V' \in l'$, якщо $U(0:1:0)$, $V'(7:-11:8)$.

2. Знайти нерухомі точки перетворення

$$\text{а) } \begin{cases} \lambda x'_1 = 3x_1 + 2x_2, \\ \lambda x'_2 = 2x_1 + 3x_2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \lambda x'_1 = x_1 - x_2, \\ \lambda x'_2 = 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

3. Задана колінеація

$$k = \begin{cases} \mu x'_1 = x_1 + x_2, \\ \mu x'_2 = x_1 - x_2, \\ \mu x'_3 = 2x_2 + x_3. \end{cases}$$

Знайти: а) образ A' точки $A(2:-1:0)$; б) прообраз D точки $D'(5:-1:1)$; в) образ a' прямої $a: x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$; г) прообраз l прямої $l': x'_1 + 2x'_2 - x'_3 = 0$.

4. Перетворення

$$\varphi : \begin{cases} \mu x'_1 = x_1 - 2x_2, \\ \mu x'_2 = x_1, \\ \mu x'_3 = x_1 + 2x_3 \end{cases}$$

задане в однорідних прямокутних декартових координатах. Знайти образ кола G , яке задане рівнянням $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$.

5. Гіперболічна гомологія задана на розширеній евклідовій площині центром P , віссю p і парою точок $A \rightarrow A'$. Побудувати образ і прообраз невласної прямої.
6. Параболічна гомологія задана віссю і парою відповідних точок A і A' . Побудувати образ довільної точки.

Завдання для контрольної роботи

1. Проективне відображення φ прямої l на пряму l' задане двома трійками точок:

$$A(1:1:1) \rightarrow A'(-1:1:0), \quad B(-1:2:-1) \rightarrow B'(1:-2:2), \quad C(2:-1:2) \rightarrow C'(1:1:-4).$$

Переконалися, що точка U колінеарна точкам $A, B, C \in l$, точка V' колінеарна точкам $A', B', C' \in l'$. Знайти $\varphi(U)$ образ точки $U \in l$ і $\varphi^{-1}(V')$ прообраз точки $V' \in l'$, якщо

$$\text{а) } U(1:-5:1), \quad V'(5:-7:4); \quad \text{б) } U(1:0:1), \quad V'(-2:1:2).$$

2. Знайти нерухомі точки перетворення

$$\begin{cases} \lambda x'_1 = 2x_1 - x_2, \\ \lambda x'_2 = x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

3. Задана колінеація $k = \begin{cases} \mu x'_1 = x_1 + x_2, \\ \mu x'_2 = x_1 - x_2, \\ \mu x'_3 = 2x_2 + x_3. \end{cases}$ Знайти:

- | | |
|--|--|
| а) образ B' точки $B(1:1:-2)$; | а ₁) образ C' точки $C(0:0:1)$; |
| б) прообраз E точки $E'(0:1:-1)$; | б ₁) прообраз F точки $F'(1:-2:3)$; |
| в) образ b' прямої $b: 2x_2 + x_3 = 0$; | в ₁) образ c' прямої $c: x_1 = 0$. |

4. Проективне перетворення φ розширеної евклідової площини задане в однорідних прямокутних декартових координатах рівняннями:

$$\varphi : \begin{cases} \mu x'_1 = -x_1, \\ \mu x'_2 = x_1 + x_2, \\ \mu x'_3 = x_1 - x_2 - x_3. \end{cases}$$

Знайти образ кривої:

а) $y = x^2$; б) $x^2 - y^2 = 1$.

5. Гіперболічна гомологія задана віссю, центром і парою прямих $a \rightarrow a'$.

Побудувати:

а) образ довільної точки M , що не належить a ;

б) образ довільної прямої m , яка перетинається з прямою a на осі.

6. Параболічна гомологія задана віссю і парою відповідних точок A і A' .

Побудувати:

а) образ довільної прямої;

б) образ і прообраз невласної прямої, вважаючи, що гомологія задана на розширеній евклідовій площині.

Розділ V. Квадрики

Квадрики та їхня класифікація. Задання квадрики п'ятьма точками

Означення. Множина точок, проєктивні координати яких задовольняють рівняння

$$g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 = 0 \quad (5.1)$$

називається *лінією другого порядку* або *квадрикою*.

Бачимо, що ліва частина рівняння квадрики представляє собою однорідний многочлен другого степеня, тобто квадратичну форму відносно змінних x_1, x_2, x_3 . Завдяки однорідності рівняння (5.1) має геометричний зміст, оскільки воно одночасно задовольняється (або, навпаки, не задовольняється) всіма трійками із якогось класу пропорційних трійок.

Визначення квадрики не залежить від вибору системи координат.

Матриця

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = g_{ji},$$

називається матрицею із коефіцієнтів квадрики або просто *матрицею квадрики*.

Вона симетрична, тобто $G^T = G$, де «Т» – знак транспонування.

Якщо довільну точку квадрики і стовпець із її координат позначити через X , то рівняння квадрики (5.1) можна записати в матричному вигляді

$$X^T G X = 0. \quad (5.2)$$

У рівнянні (5.2) перейдемо до нових координат. Зробимо заміну за формулою $X = \frac{1}{\lambda} Q X'$, у результаті чого отримаємо рівняння $X'^T (Q^T G Q) X' = 0$, тобто в нових координатах матриця G' така

$$G' = Q^T G Q. \quad (5.3)$$

1°. Ранг матриці квадрики інваріантний відносно перетворення координат.

Ця властивість випливає із формули (5.3) у зв'язку з невиродженістю матриці Q . Якщо ранг матриці дорівнює трьом, то квадрика називається невиродженою, якщо менше трьох – виродженою.

2°. Перетворенням координат рівняння квадрики можна звести до вигляду

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 = 0, \quad (5.4)$$

де $\varepsilon_i = 1, -1$ або 0 .

Такий вигляд квадрики називається *канонічним*. Зведення до канонічного вигляду можна виконувати різними способами, але найбільш поширеним є *спосіб виділення повних квадратів*.

Оскільки матриця квадрики у канонічній формі має вигляд

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

то її ранг дорівнює числу ненульових коефіцієнтів у рівнянні (5.4). Якщо всі коефіцієнти відмінні від нуля, то квадрика невироджена.

З точністю до нумерації координат, квадратична форма від трьох змінних може мати (залежно від рангу матриці) такі канонічні вигляди

Ранг 3	Ранг 2	Ранг 1
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$x_1^2 + x_2^2$	x_1^2
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	$x_1^2 - x_2^2$	$-x_1^2$
$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$	$-x_1^2 - x_2^2$	
$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$		

Якщо розглядати ці канонічні вигляди як ліві частини рівнянь квадрик, то допустиме множення на « -1 ». Тоді, помноживши, наприклад, рівняння $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ на -1 , отримаємо рівняння $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, які лише нумерацією координат відрізняються від рівняння $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.

Отже, існує всього п'ять виглядів квадрик на проективній площині

Ранг	Рівняння	Назва
3	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	Нульова квадрика

	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	Овальна квадрика
2	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	Пара уявних прямих
	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	Пара прямих
1	$x_1^2 = 0$	Пара співпадаючих прямих

Рівняння нульової квадрики задовольняє лише одна дійсна трійка чисел – $(0,0,0)$. Але ця трійка не є координатою для жодної точки, тому нульова квадрика не містить точок.

Пара прямих складається з двох прямих $x_1 + x_2 = 0$ та $x_1 - x_2 = 0$. Ми не говоримо «пара перетинних прямих», оскільки та проєктивній площині всі прямі перетинаються.

Пара уявних прямих називається тому, що ліва частина рівняння розкладається на два лінійні множники з уявними коефіцієнтами: $x_1 + ix_2$ та $x_1 - ix_2$. Ця квадрика містить тільки одну точку – $(0:0:1)$.

Пара співпадаючих прямих є двічі взята координатна пряма $x_1 = 0$

Рівняння квадрики, яка розпадається на пару прямих $uX = 0$ і $vX = 0$ можна записати у вигляді $(uX)(vX) = 0$. При цьому, якщо u і v непропорційні, то прямі різні; ранг квадрики у такому випадку дорівнює 2. Якщо u і v пропорційні, то прямі співпадають, останнє рівняння набуває вигляду $(uX)^2 = 0$, у цьому випадку ранг квадрики дорівнює 1.

Теорема 5.1. *Якими б не були п'ять точок проєктивної площини, жодні чотири з яких не колінеарні, існує єдина квадрика, яка проходить через них.*

Д о в е д е н н я. Спочатку покажемо, що із заданих п'яти точок можна вибрати четвірку точок, не колінеарних по три.

Якщо серед цих точок є колінеарна трійка A, B, C , то лише одна з них (наприклад, C) може бути колінеарна двом точкам D і H , що залишилися. Четвірка A, B, D, H у будь-якому випадку не містить колінеарних точок.

Візьмемо систему проєктивних координат, у якій вибрані точки будуть фундаментальними: $E_1(1:0:0)$, $E_2(0:1:0)$, $E_3(0:0:1)$, $E_0(1:1:1)$. Координати точки $C = (c_1 : c_2 : c_3)$.

Тепер будемо шукати рівняння (тобто його коефіцієнти) вигляду (5.1), якому б задовольняли координати усіх п'яти точок. Підставляючи в (5.1) координати точок $E_1(1:0:0)$, $E_2(0:1:0)$, $E_3(0:0:1)$, отримуємо $g_{11} = 0$, $g_{22} = 0$, $g_{33} = 0$. Тому рівняння шуканої квадрики має вигляд

$$g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + g_{23}x_2x_3 = 0,$$

причому його повинні задовольняти координати точок E_0 та C . Тому коефіцієнти g_{12} , g_{13} , g_{23} повинні задовольняти систему рівнянь

$$\begin{cases} g_{12} + g_{13} + g_{23} = 0, \\ g_{12}c_1c_2 + g_{13}c_1c_3 + g_{23}c_2c_3 = 0. \end{cases}$$

Отримали лінійну однорідну систему з числом рівнянь, меншим за число невідомих. Тому вона має ненульові розв'язки, і це доводить існування квадрики.

Ранг матриці цієї системи $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_1c_2 & c_1c_3 & c_2c_3 \end{pmatrix}$ дорівнює 2, оскільки з лінійної залежності рядків випливало б, що точка C співпадає з однією із фундаментальних точок E_i , $i = 1, 2, 3, 0$. Справді, у такому випадку $c_1c_2 = c_1c_3 = c_2c_3$, а це може бути тільки тоді, коли $c_1 = c_2 = c_3$, тобто $C = E_0$, або коли два числа із трійки $(c_1; c_2; c_3)$ дорівнюють 0, тобто C співпадає з однією із координатних точок E_i , $i = 1, 2, 3$.

Система має єдиний (з точністю до множника) розв'язок:

$$g_{12} : g_{13} : g_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c_1c_3 & c_2c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c_1c_2 & c_2c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c_1c_2 & c_1c_3 \end{vmatrix},$$

що і доводить єдиність квадрики.

Теорему доведено.

У процесі доведення теореми ми знайшли рівняння квадрики, що проходить через фундаментальні точки і точку $C = (c_1 : c_2 : c_3)$

$$c_3(c_2 - c_1)x_1x_2 + c_2(c_1 - c_3)x_3x_1 + c_1(c_3 - c_2)x_2x_3 = 0.$$

Якщо серед заданих п'яти точок нема колінеарної трійки, то через них не можна провести дві прямі. Виходячи із класифікації квадрик, робимо висновок, що у цьому випадку п'ятірка точок визначає овальну квадрику.

Якщо серед цих точок є колінеарна трійка, але немає колінеарної четвірки, то квадрика розпадається на дві прямі: одна проходить через три колінеарні точки, а друга – через решту дві.

Взаємне розташування прямої і квадрики. Поляри і полюси

Розв'яжемо важливу для вивчення подальшого матеріалу задачу про знаходження точки перетину овальної квадрики G з прямою, що проходить через точки A і B .

Параметричне рівняння прямої AB має вигляд

$$X = \alpha A + \beta B.$$

Необхідно визначити α і β (вірніше, їх відношення $\alpha : \beta$) так, щоб $X \in G$. Для цього потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} X^T G X = 0, \\ X = \alpha A + \beta B. \end{cases} \quad (5.5)$$

Підставляючи стовпець X з другого рівняння в перше, отримуємо

$$(\alpha A + \beta B)^T G (\alpha A + \beta B) = 0.$$

Розкриваючи дужки і беручи до уваги рівність $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$, маємо

$$\alpha^2 (A^T G A) + \alpha \beta (A^T G B + B^T G A) + \beta^2 (B^T G B) = 0.$$

Добутки $A^T G A$, $A^T G B$ і т. д. є матрицями першого порядку, тобто числами. Справді, A^T – рядок, $A^T G$ теж рядок, а добуток $A^T G \cdot A$ є добуток рядка на стовпець, тобто число. Відмітимо, що в рамках поставленої задачі всі ці числа відомі, оскільки A, B, G задані.

Оскільки матриця першого порядку симетрична, то

$$A^T G B = (A^T G B)^T = B^T G^T A = B^T G A$$

(ми також використали симетричність матриці G). Отримане рівняння можна записати у такому вигляді

$$\alpha^2(A^TGA) + 2\alpha\beta(A^TGB) + \beta^2(B^TGB) = 0. \quad (5.6)$$

Розв'язавши цю систему відносно $\alpha:\beta$ (або $\beta:\alpha$), ми підставимо знайдене значення у друге рівняння системи (5.5) і отримаємо координатний стовпець точки перетину.

Відмітимо, що рівняння (5.6) не може перетворитися в тотожність, оскільки це б означало, що будь-яка точка прямої AB належить квадриці G , що можливе лише у випадку виродженої квадрики.

Оскільки рівняння (5.6) – квадратне відносно $\alpha:\beta$, то можливі три випадки взаємного розташування прямої і квадрики залежно від знаку дискримінанта Δ :

- 1) $\Delta > 0$ – дві точки перетину;
- 2) $\Delta < 0$ – пряма не має спільних точок з квадрикою;
- 3) $\Delta = 0$ – пряма має одну спільну точку з квадрикою і називається *дотичною*.

Умова дотичності овальної квадрики і прямої, заданих рівняннями (5.5) має вигляд

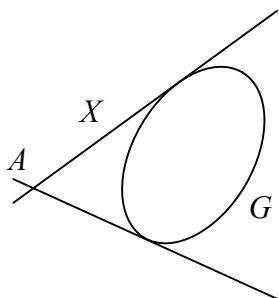
$$(A^TGB)^2 - (A^TGA)(B^TGB) = 0. \quad (5.7)$$

Ця умова дає змогу розв'язати таку важливу задачу: задано овальну квадрику G і точку A ; знайти рівняння дотичних, проведених до квадрики з точки A .

Нехай точка X – довільна точка будь-якої дотичної, проведеної з A (рис. 34). Тоді для прямої AX повинна виконуватися умова дотичності (5.7), яка тепер може бути записана у вигляді

$$(A^TGX)^2 - (A^TGA)(X^TGX) = 0.$$

Це і є рівняння дотичних, оскільки його задовольняють усі їхні точки.



Означення. Точка називається *зовнішньою* відносно квадрики, якщо з неї можна провести до цієї квадрики дві дотичні, і *внутрішньою*, якщо таких дотичних немає.

Означення. Нехай G – овальна квадрика, A і B – точки, які не лежать на ній, K і L – точки перетину прямої AB з квадрикою. Якщо $(ABKL) = -1$, то кажуть, що квадрика G *гармонійно розділяє* пару точок A і B або точки A і B *гармонійно спряжені* відносно квадрики G (рис. 35).

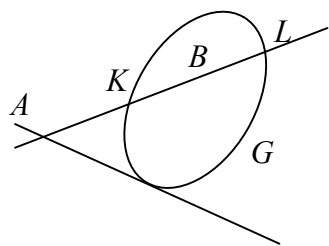


Рис. 35

Виведемо умову гармонійної спряженості точок A і B відносно квадрики G . Маємо:

$$K = \alpha'A + \beta'B, \quad L = \alpha''A + \beta''B,$$

причому $\beta' : \alpha'$ і $\beta'' : \alpha''$ – корені рівняння (5.6). За

означенням гармонійної спряженості запишемо

$$(ABKL) = \frac{\beta'}{\alpha'} : \frac{\beta''}{\alpha''} = -1,$$

звідки

$$\frac{\beta'}{\alpha'} + \frac{\beta''}{\alpha''} = 0,$$

тобто сума коренів рівняння (5.6) дорівнює нулю. Тому за теоремою Вієта умова гармонійної спряженості точок A і B відносно квадрики G має вигляд

$$A^T G B = 0. \quad (5.8)$$

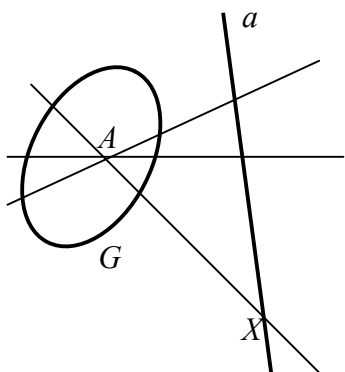


Рис. 36

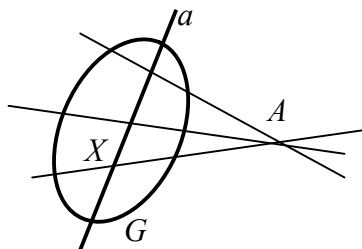


Рис. 37

Відмітимо, що всі точки X , гармонійно спряжені відносно квадрики G з фіксованою точкою $A \notin G$, розташовані на прямій (рис. 36, 37). Така пряма називається *полярною* точки A .

Означення. Полярою точки A відносно овальної квадрики G називається пряма a , яка у випадку $A \notin G$ містить всі точки, гармонійно спряжені з A відносно G , а у випадку $A \in G$ дотикається до G у точці A .

У всіх випадках рівняння

$$A^T G X = 0$$

є рівнянням поляри точки A відносно овальної квадрики G .

Рівняння поляри a можна записати у вигляді $aX = 0$, де a – координатний рядок поляри. Порівнюючи його з останнім рівнянням, маємо

$$\mu a = A^T G, \quad (5.9)$$

де μ – коефіцієнт пропорційності.

Це рівняння можна розв'язати відносно A

$$\lambda A = G^{-1} a^T,$$

тому яка б не була пряма a і овальна квадрика G , існує єдина точка A , для якої пряма a є полярою відносно G .

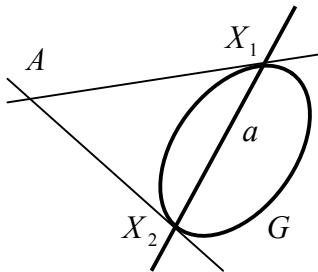


Рис. 38

дотику дотичних, проведених з A до квадрики (рис. 38).

Означення. Тривершинник називається автополярним відносно деякої овальної квадрики, якщо кожна його вершина є полюсом протилежної сторони.

Кожна квадрика має нескінченну множину автополярних тривершинників.

Теорема 5.2. Для того, щоб рівняння овальної квадрики не містило членів з добутком координат (тобто, щоб матриця квадрики була діагональною), необхідно і достатньо, щоб координатний тривершинник був автополярним відносно квадрики.

Д о в е д е н н я. Необхідність. Нехай рівняння квадрики G має вигляд

$$\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 = 0.$$

Знайдемо полярну e_1 координатної точки $E_1(1:0:0)$. За формулою (5.9) отримуємо

$$\mu e_1 = E_1^T G = (1, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = (\alpha, 0, 0).$$

Значить рівняння прямої e_1 має вигляд $\alpha x_1 = 0$. Це координатна пряма $E_2 E_3$.

Аналогічно переконуємося, що полярами інших вершин координатного тривершинника теж будуть його сторони.

Достатність. Нехай тепер координатний тривершинник $E_1 E_2 E_3$ автополярний відносно квадрики G . Тоді для його сторін e_i маємо

$$\mu e_i = E_i^T G, \quad i = 1, 2, 3.$$

Звідси при $i = 1$ отримаємо

$$\mu e_1 = (1, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = (g_{11}, g_{12}, g_{13}),$$

де $(g_{ik}) = G$. А оскільки пряма e_1 має координати $(1:0:0)$, то $g_{12} = g_{13} = 0$.

Підставляючи $i = 2$, отримаємо $g_{23} = 0$.

Теорему доведено.

Означення. Повний чотиривершинник називається *вписаним* у квадрику, якщо його вершини лежать на квадриці.

Наведена нижче теорема 5.3. використовується при виконанні різних побудов, пов'язаних з полюсами і полярами.

Теорема 5.3. *Діагональний тривершинник повного чотиривершинника, вписаного в овальну квадрику, є автополярним відносно цієї квадрики.*

Д о в е д е н н я. Нехай G – дана квадрика і $A, B, C, D \in G$ – вершини повного чотиривершинника (рис. 39). Тоді тривершинник PQR , де

$$P = (AB) \cap (CD), \quad Q = (AC) \cap (BD), \quad R = (AD) \cap (BC),$$

діагональний. Потрібно довести, що він автополярний відносно G .

Позначимо поляри вершин цього тривершинника відповідно через p, q, r . Потрібно довести, що $p = (QR)$, $q = (PR)$, $r = (PQ)$. Обмежимося доведенням однієї з цих рівностей, наприклад, другої. Решта доводяться аналогічно.

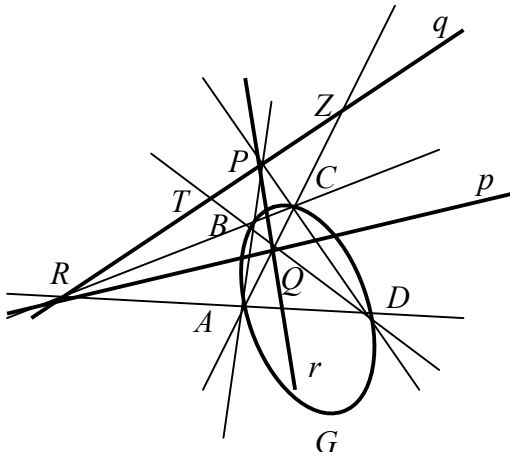


Рис. 39

було довести.

Теорему доведено.

За теоремою про гармонійні властивості повного чотиривершинника

$$(ACQZ) = (BDQT) = -1,$$

де

$$T = (PR) \cap (BD), \quad Z = (PR) \cap (AC).$$

Значить точки T і Z гармонійно спряжені з точкою Q і тому лежать на її полярі.

Тому $(TZ) = (PR) = q$, що й потрібно

Теорема Паскаля і Бріаншона

Як відомо, п'ять точок визначають квадрику. Розглянемо теорему Паскаля, яка виражає необхідну і достатню умови того, що шість точок належать квадриці. При розгляді теореми будемо вимагати, щоб у цій шестірці точок не було колінеарних по три.

Означення. Сукупність шести різних впорядкованих точок $A_i, i = 1, 2, \dots, 6$, які називаються *вершинами*, і шести різних прямих $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_6A_1$ — *сторін*, називається *шестивершинником*. Сторони A_1A_2 і A_4A_5 , A_2A_3 і A_5A_6 , A_3A_4 і A_6A_1 називається *протилежними*, так само, як і вершини A_1 і A_4 , A_2 і A_5 , A_3 і A_6 (рис. 40).

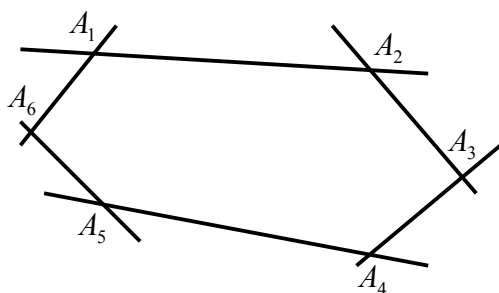


Рис. 40

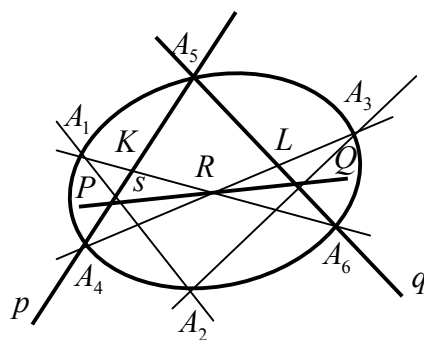


Рис. 41

Шестивершинник називається *вписаним у квадрику* або *паскалевим*, якщо всі його вершини належать квадриці.

Теорема (Паскаля) 5.4. Для того, щоб шість точок, з яких жодні три неколінеарні, належали одній квадриці, необхідно і достатньо, щоб протилежні сторони шестивершинника, вершинами якого є задані точки, перетиналися в трьох точках, які лежать на одній прямій (паскалева пряма).

Д о в е д е н н я. Задані точки позначимо через $A_i, i = 1, 2, \dots, 6$ і перші чотири з них приймемо за фундаментальні точки системи координат

$$A_1(1:0:0), A_2(0:1:0), A_3(0:0:1), A_4(1:1:1).$$

Введемо також позначення для координат решти точок

$$A_5(c_1:c_2:c_3), A_6(d_1:d_2:d_3).$$

Для того, щоб всі ці шість точок лежали на одній квадриці, необхідно і достатньо, щоб виконувалася наступна умова

$$c_3(c_2 - c_1)d_1d_2 + c_2(c_1 - c_3)d_3d_1 + c_1(c_3 - c_2)d_2d_3 = 0. \quad (5.10)$$

Тепер знайдемо умову, при якій точки

$$P = (A_1A_2) \cap (A_4A_5), \quad Q = (A_2A_3) \cap (A_5A_6), \quad R = (A_3A_4) \cap (A_6A_1)$$

перетину протилежних сторін шестивершинника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ лежать на одній прямій (рис. 41). Для цього знаходимо рівняння всіх сторін шестивершинника і розв'язуємо спільно рівняння протилежних прямих. Отримуємо

$$P(c_1 - c_3 : c_2 - c_3 : 0), \quad Q(0 : c_1d_2 - c_2d_1 : c_1d_3 - c_3d_1), \quad R(d_2 : d_2 : d_3).$$

Для колінеарності цих точок необхідно і достатньо виконання такої умови

$$\begin{vmatrix} c_1 - c_3 & c_2 - c_3 & 0 \\ 0 & c_1 d_2 - c_2 d_1 & c_1 d_3 - c_3 d_1 \\ d_2 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ця умова рівносильна (5.10).

Теорему доведено.

Розглянемо теорему, двоїсту до теореми Паскаля. Фігурою, двоїстою до шестивершинника, є шестивершинник. Тому термін «шестисторонник» ми вживати не будемо. Шестивершинник, сторони якого дотикаються до квадрики, називається описаним.

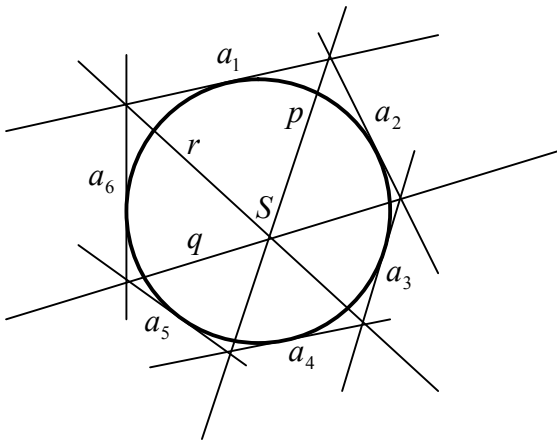


Рис. 42

(рис. 42).

Теорема Бріаншона. Для того, щоб шість прямих, серед яких немає трьох, які б належали одному пучку, дотикалися до квадрики, необхідно і достатньо, щоб три прямі, які з'єднують протилежні вершини шестивершинника, сторонами якого є дані прямі, перетиналися в одній точці

Квадрики на розширеній евклідовій площині

Ми вже вивчали, що на розширеній площині $\bar{R}_2$ еліпс не має власних точок, парабола дотикається до невласної прямої у невлаській точці своєї осі, а гіпербола перетинає невласну пряму в двох точках — невлаських точках своїх асимптот. Ці результати можуть бути використані для класифікації квадрик на нерозширеній площині R_2 .

Нехай задано рівняння квадрики на площині R_2 в афінних координатах

$$g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2 + 2g_{13}x + 2g_{23}y + g_{33} = 0.$$

Коефіцієнти цього рівняння можуть бути довільними числами, якщо старші коефіцієнти g_{11}, g_{12}, g_{22} не дорівнюють нулю одночасно.

У цьому рівнянні виконаємо перехід до однорідних афінних координат за формулами $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$. У результаті отримаємо квадрику G на площині $\bar{R}_2$.

Рівняння цієї квадрики має вигляд

$$g_{11}x_1^2 + 2g_{12}x_1x_2 + g_{22}x_2^2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 + g_{33}x_3^2 = 0.$$

Квадрика G може відрізнятися від заданої лише невласними точками. Знайдемо їхню кількість. З цією метою розв'язуємо спільно рівняння квадрики G з рівнянням невласної прямої $x_3 = 0$. Отримуємо

$$g_{11}x_1^2 + 2g_{12}x_1x_2 + g_{22}x_2^2 = 0.$$

Це квадратне рівняння відносно $x_1 : x_2$ (або $x_2 : x_1$), число розв'язків якого залежить від дискримінанта $\Delta = g_{12}^2 - g_{11}g_{22}$. При $\Delta > 0$ невласних точок дві (гіпербола або пара перетинних дійсних прямих), при $\Delta = 0$ – одна (парабола або пара паралельних прямих, які можуть і співпадати), при $\Delta < 0$ квадрика не має невласних точок (еліпс або пара уявних перетинних прямих).

Тепер із врахуванням проективної класифікації квадрик отримуємо більш детальну класифікацію квадрик на площині R_2 , яка називається *афінною*. Вона наведена у таблиці

Ранг	Знак Δ	Афінний клас	Проективний клас
3	–	Уявний еліпс	Нульова квадрика
		Еліпс	Овальна квадрика
	0	Парабола	
	+	Гіпербола	
2	–	Пара уявних перетинних прямих	Пара уявних прямих
	0	Пара уявних паралельних прямих	Пара прямих
		Пара паралельних прямих	
	+	Пара перетинних прямих	
1	0	Пара співпадаючих прямих	Пара співпадаючих прямих

Центр квадрики зазвичай визначається як точка, у якій діляться пополам всі хорди, які проходять через неї. На евклідовій площині R_2 еліпс і гіпербола мають центр, а парабола – ні.

Тепер перейдемо до розширеної евклідової площини $\bar{R}_2$. Довільна точка, гармонійно спряжена з центром еліпса чи гіперболи відносно цієї квадрики – це невласна точка. Звідси за означенням поляри випливає, що *полярою центра є невласна пряма*.

Означення. Центром овальної квадрики називається полюс невласної прямої.

Центр параболи знаходиться в її невлаській точці.

Тепер легко знаходяться координати центра C довільної овальної квадрики G в однорідній афінній системі координат

$$\lambda C = G^{-1} a_{\infty}^T,$$

де a_{∞} – координатний рядок невласної прямої $a_{\infty}(0:0:1)$.

Діаметр квадрики на площині R_2 зазвичай визначається як множина середин паралельних хорд. Доводиться, що всі середини лежать на прямій. Зручно називати діаметром всю цю пряму (рис. 43).

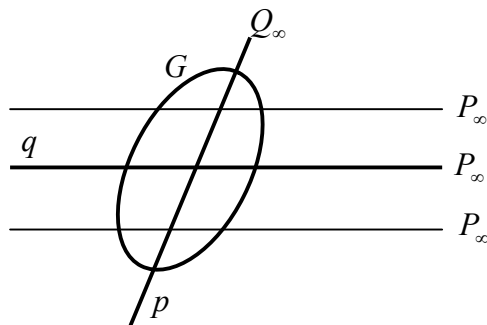


Рис. 43

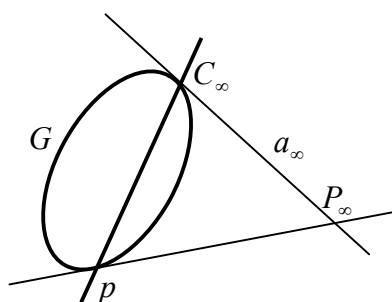
Оскільки $P_{\infty} \in a_{\infty}$, то поляра p точки P_{∞} і полюс C прямої a_{∞} будуть інцидентні. У випадку параболи, у якої центр є невластим, усі діаметри паралельні. Невласна пряма також є діаметром параболи.

Візьмемо на діаметрі p невласну точку Q_{∞} . Оскільки $Q_{\infty} \in p$, то $q \in P_{\infty}$, тобто поляра точки Q_{∞} (діаметр q) проходить через точку P_{∞} (рис. 43).

Діаметр p ділить пополам всі паралельні хорди, які проходять через точку Q_{∞} , а діаметр q – хорди, що проходять через P_{∞} . Діаметри, які володіють такою властивістю, називаються спряженими.

Означення. Два діаметри називаються *спряженими*, якщо кожен з них проходить через полюс іншого.

Легко бачити, що у випадку параболи кожний діаметр спряжений з її



невласним діаметром. Справді, кожний власний діаметр p параболи має одну невідому точку – центр параболи C_∞ . Тому він спряжений з полюсом цієї точки, а нею є невідомою пряма a_∞ (рис. 44).

Рис. 44

На нерозширеній площині R_2 для параболи не існує спряжених діаметрів.

Було встановлено, що гіпербола $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - x_3^2 = 0$ має невідомі точки $K_\infty(a:b:0)$ і $L_\infty(a:-b:0)$. Знайдемо дотичні до гіперболи в цих точках. Для точки K_∞ маємо

$$(a, b, 0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

або

$$\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} = 0.$$

Переходячи до неоднорідних координат, отримуємо рівняння асимптоти $y = \frac{b}{a}x$.

Аналогічно і з дотичною до точки L_∞ .

Означення. Асимптотою квадрики називається дотична до неї у її невідомій точці.

Еліпс невідомих точок не має і тому не має асимптот. Асимптотою параболи на розширеній площині $\bar{R}_2$ є невідомою пряма, на площині R_2 у параболи асимптот немає.

Невласні точки K_∞ і L_∞ гіперболи інцидентні невластній прямій a_∞ , тому їх полярні k і l перетинаються в полюсі C невластної прямої, тобто асимптоти гіперболи перетинаються в її центрі (рис. 45).

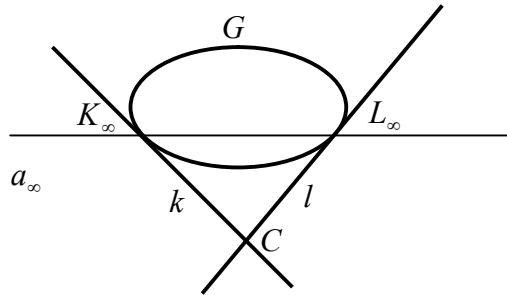


Рис. 45

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення квадрики. Запишіть її матрицю.
2. Які квадрики існують на проєктивній площині?
3. Як можна задати лінію другого порядку?
4. Запишіть рівняння дотичної до квадрики.
5. Які точки називаються гармонійно спряженими відносно лінії другого порядку?
6. Сформулюйте означення полярні та полюса.
7. Який тривершинник називається автополярним?
8. Сформулюйте теореми Паскаля та Бріаншона.
9. Що таке центр, діаметр та асимптота квадрики на розширеній евклідовій площині?

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти полярну точки $A(1:3:-1)$ відносно квадрики G , яка задана рівнянням $x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_2x_3 = 0$.

Розв’язок. Координати шуканої поляри a визначаємо за формулою (5.9)

$$\mu a = A^T G = (1, 3, -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = (1, -8, 6).$$

Рівняння шуканої прямої $a : x_1 - 8x_2 + 6x_3 = 0$.

Приклад 2. Знайти полюс прямої $a(0:-1:2)$ відносно квадрики

$$G : x_2^2 + 4x_1x_3 = 0.$$

Розв’язок. Оскільки

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$\lambda A = G^{-1} a^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $A(1:-1:0)$.

Приклад 3. Задано овальну квадрику G і точку $A \notin G$. Побудувати поляру цієї точки.

Розв’язок. Використаємо теорему про полярні властивості вписаного чотиривершинника. Через точку A довільно проводимо дві прямі, які перетинають квадрику у точках X, Y та Z, T . Діагональ чотиривершинника $XYZT$, що проходить через діагональні точки $B = (XT) \cap (YZ)$ та $C = (XZ) \cap (YT)$, є шукана поляра (рис. 46, 47).

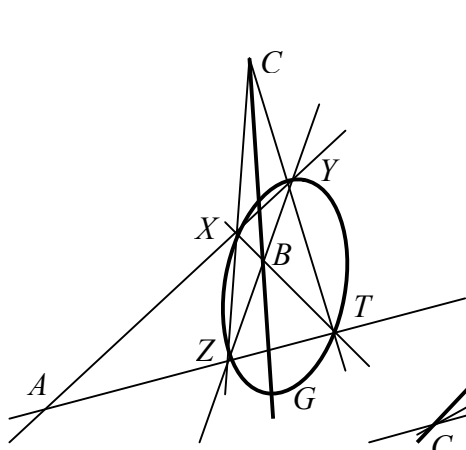


Рис. 46

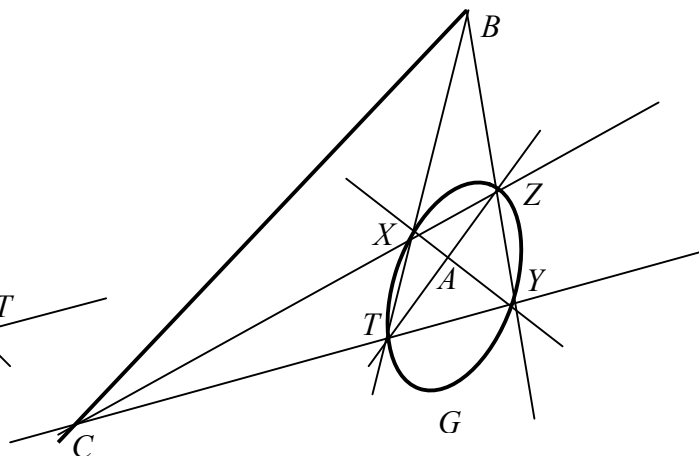


Рис. 47

Приклад 4. Задано овальну квадрику G і пряму a . Побудувати полюс прямої a .

Розв'язок. Вибираємо довільно точки $B, C \in a$ і будуємо їхні полари b і c . За властивістю 1° з того, що $B, C \in a$ випливає, що $b, c \in A$, де A – шуканий полюс (рис. 48).

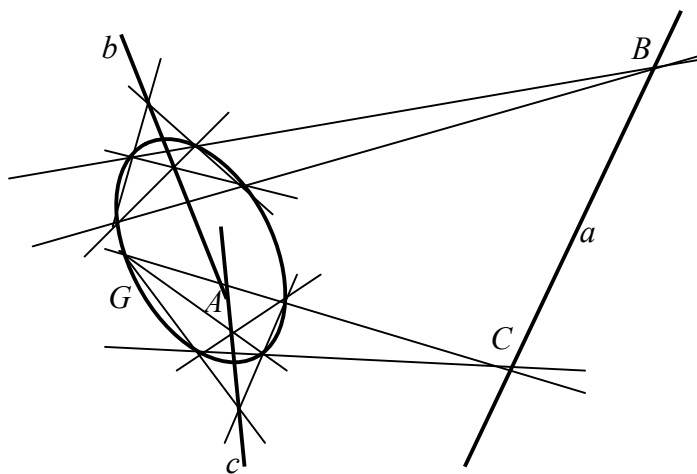


Рис. 48

Приклад 5. Задано квадрику G в афінних координатах:

$$x^2 - 6xy + 8y^2 + 2y = 0.$$

Знайти її афінний клас.

Розв'язок. Система

$$\begin{cases} x_1^2 - 6x_1x_2 + 8x_2^2 + 2x_2x_3 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

що складається з рівняння квадрики G в однорідних афінних координатах і рівняння невласної прямої, зводиться до квадратного рівняння $x_1^2 - 6x_1x_2 + 8x_2^2 = 0$, дискримінант якого більше нуля. Оскільки матриця квадрики

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

є неособливою, то квадрика G є гіперболою.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти рівняння поляри точки $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ відносно квадрики

$$x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 = 0.$$

2. Знайти полюс прямої $x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$ відносно квадрики $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 = 0$.
3. Задано квадрику G і зовнішню точку A . Побудувати дотичні до квадрики G з точки A .
4. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $(3:-1:1)$ і полюс прямої $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ відносно квадрики $2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 = 0$.
5. На овальній квадриці задано шість точок A, B, C, D, E, F . Побудуйте паскалеві прями шестивершинника $ABCDEF$.
6. Знайти афінний клас квадрики $2x^2 + 3y^2 - 2xy + 4x + 3y + 4 = 0$, яка задана на розширеній евклідовій площині в афінних координатах.

Завдання для контрольної роботи

1. Знайти рівняння поляри точки

$$\text{а) } C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } D = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{відносно квадрики } x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 = 0.$$

2. Знайти полюс прямої

а) $x_1 = 0$; б) $x_2 + 3x_3 = 0$

відносно квадрики $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 = 0$.

3. Знайти рівняння дотичних до квадрики $x_3^2 - x_1x_2 = 0$, проведених до точок, які належать квадриці або є зовнішніми:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. а) Знайти рівняння поляр a і b точок $A(2:1:0)$ та $B(-1:1:1)$ відповідно, а також поляру точки $C = a \cap b$ відносно квадрики $x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 = 0$.

б) Знайти полюси A і B прямих $a: x_1 + x_2 + x_3 = 0$ та $b: 2x_1 - x_2 = 0$ відповідно, а також полюс C прямої $c = (AB)$ відносно квадрики $x_1^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 = 0$.

5. На овальній квадриці задано шість точок A, B, C, D, E, F . Побудуйте паскалеві прямі шестивершинника

а) $DBFECA$; б) $ABFDEC$.

6. Знайти афінний клас квадрики

а) $x^2 + 3y^2 + 4xy + 2x + 2y + 3 = 0$, б) $x^2 + 2y^2 + 2xy - 1 = 0$

яка задана на розширеній евклідовій площині в афінних координатах.

Розділ VI. Основи геометрії

Основи геометрії – це наука і відповідна навчальна дисципліна, в якій розглядаються різні способи логічної побудови певної геометричної теорії (різних геометрій).

Усі математичні речення є означеннями або твердженнями. Математика вивчає математичні поняття. Поняття – це форма мислення, яка утворюється в людській свідомості як результат узагальнення суттєвих ознак об'єкта дійсності. Поняття є ідеальними утвореннями на рівні мислення. Математичні поняття можуть бути двох типів: 1) одні з них описують власне об'єкти (наприклад, точка, пряма, відрізок, трикутник, коло); 2) інші описують певні відношення, в яких ці об'єкти перебувають між собою (наприклад, точка належить або не належить прямій, пряма перетинає, не перетинає, дотикається до кола).

Майже всі поняття мають означення. *Означення* поняття – це речення, в якому розкривається зміст поняття і дається його назва (термін). Кожне означення поняття будується в такий спосіб, що включає означуваний об'єкт у більш широкий клас об'єктів – цей клас називається родовим або родом означуваного поняття. Крім того, в означенні виділяються деякі ознаки, характерні для означуваного поняття. Ці ознаки називаються видовими ознаками означуваного поняття. Крім того, є первісні (основні) поняття, які є гранично широкими. Якщо б ми захотіли дати їм означення, то зробили б помилку замкненого кола, тобто означували б їх через вже означувані поняття. Зміст первісних понять розкривається в аксіомах.

Аксіома – це твердження, яке розкриває зміст основного поняття, а її істинність підтверджується практикою.

До означень понять ставляться такі вимоги:

1) означення не лише розкриває зміст певного поняття, але й повинно бути опорою для логічного виведення всіх інших властивостей цього поняття, які не входять в його означення;

- 2) означення не повинно бути перевантажене видовими ознаками, їх повинна бути найменша кількість;
- 3) якщо одному поняттю дається два означення, то потрібно довести їхню рівносильність;
- 4) кожне означення вводить новий математичний об'єкт, отже, означення в неявному вигляді щось стверджує про існування цього об'єкту та його властивості. Щоб означення було конкретним, потрібно довести так звану теорему існування цього об'єкту. Без доведення цієї теореми означення в математиці не може існувати.

Математичні твердження – це такі речення, істинність яких або логічно обґрунтовується за допомогою правил формальної логіки або підтверджуються багатовіковою практикою людства. До математичних тверджень належать леми, теореми, наслідки і аксіоми.

Лема – це допоміжна теорема, яка потрібна для доведення основної теореми.

Теорема – це твердження, в істинності якого переконуємося за допомогою логічних міркувань. Процес логічного міркування називається доведенням.

Наслідок – це невелика теорема, яка безпосередньо випливає із доведеної теореми.

Кожна теорема складається з умови і висновку. Довести теорему – це означає: використовуючи дані умови теореми, раніше доведені теореми і правила побудови умовиводів, прийти до істинності висновку або його хибності. Умовивід – це форма мислення, яка дозволяє з кількох суджень вивести нове означення. Очевидно, що процес доведення нових теорем не є нескінченним. Урешті решт, приходимо до таких тверджень, які потрібно приймати без доведення.

Книга «Начала» Евкліда

Розквіт діяльності Евкліда відбувався в Александрії приблизно 300 р. до н. е. Евклід написав багато творів з математики та геометричної оптики. Однак від більшості його творів збереглися лише назви. До нас повністю дійшов його великий твір «Начала», де він зібрав в єдине ціле те, що було відомо грекам його часу, додав багато свого, а головне – привів все в таку систему, яка довго вважалась зразком ясності і строгості. За цією книгою вивчали геометрію Копернік, Галілей, Декарт, Паскаль, Ньютон, Ломоносов, Лейбніц, Лобачевський та ін.

«Начала» Евкліда складаються з 13 книг (розділів). Книги 7, 8, 9 присвячені арифметиці в геометричному викладі. 10-а книга містить теорію ірраціональних величин. Ці книги (7–10) мало відомі. У них Евклід ставить і розв’язує дуже тонкі питання та майстерно справляється з поставленими задачами великого теоретичного значення. Достатньо сказати, що теорія ірраціональних величин, яка виникла у XIX ст. і була сприйнята математичним світом як новина, виявилася вже розробленою у роботах Евдокса та Евкліда. Ми ж зупинимось на книгах геометричного змісту.

Книга 1 містить умови рівності трикутників, співвідношення між кутами і сторонами трикутника, теорію паралельних, властивості паралелограмів, умови рівновеликості трикутників та многокутників і закінчується задачею перетворення многокутника у рівновеликий йому трикутник.

Книга 2 доводить це ж питання до перетворення довільного многокутника у рівновеликий йому квадрат.

Книга 3 присвячена колу. Тут розглядаються основні властивості кола, відносне розташування двох кіл, кола та прямої. Співвідношення між центральними і вписаними кутами.

Книга 4 трактує вписані та описані многокутники.

Книга 5 містить теорію пропорцій.

Книга 6 містить вчення про подібність многокутників, теорію площ прямолінійних фігур. Евклід не дає «формул» для площ у нашому сенсі, а встановлює *рівновеликість одних фігур з іншими* або встановлює рівність відношень площ фігур.

11 та 12 книги містять початки стереометрії, теорію об'ємів, многогранників і основних тіл обертання. У них Евклід використовував *метод вичерпання*, який замінив йому теорію границь.

Книга 13 містить вчення про правильні многогранники.

Кожна книга «Начал» починається означенням усіх тих понять, які у ній зустрічаються. Перша книга починається з 23 означень. За ними слідує постулати та аксіоми. Далі слідує теорема. Кожна теорема формулюється, потім вказується, що дано і що необхідно довести. Далі йдуть доведення із всіма посиланнями на попередні теореми, постулати, аксіоми. Ідеал строгості, який поставив перед собою Евклід, як ми побачимо далі, ним досягнутий не був.

Основні положення «Начал»

Перші вісім означень сформульовані так:

Означення I. Точка є те, що не має частин.

Означення II. Лінія є довжина без ширини.

Означення III. Межі ліній називаються точками.

Означення IV. Прямою називається така лінія, яка однаково розташована відносно всіх своїх точок.

Означення V. Поверхня є те, що має довжину і ширину.

Означення VI. Межі поверхні є лінії.

Означення VII. Площиною називається поверхня, яка однаково розташована відносно всіх прямих, які на ній лежать.

Означення VIII. Плоским кутом називається нахил однієї до і двох іншої зустрічних ліній, розташованих на одній площині, але які не лежать на одній прямій.

Далі слідує *постулати та аксіоми*.

Постулати

I. Вимагається, щоб з кожної точки до довільної точки можна було провести пряму,

II і щоб кожну обмежену пряму можна було продовжити невизначено,

III і щоб з будь-якого центра можна було описати коло довільним радіусом,

IV і щоб усі прямі кути були рівні,

V і щоб кожного разу, коли пряма при перетині з двома іншими прямими утворює з ними внутрішні односторонні кути, сума яких менша $2d$, ці прямі перетиналися з того боку, з якого ця сума менше $2d$.

Цей останній постулат і є знаменитий *5 постулат про паралелі*. Користуючись ним, можна встановити (що і робить Евклід) існування лише однієї паралельної до будь-якої прямої, що проходить через точку, яка не лежить на останній.

Аксіоми

I. Рівні окремо третьому рівні між собою.

II. Якщо до них додати рівні, то отримаємо рівні.

III. Якщо від рівних віднімемо рівні, то отримаємо рівні.

IV. Якщо до нерівних додамо рівні, то отримаємо нерівні.

V. Якщо подвоїмо рівні, то отримаємо рівні.

VI. Половини рівних рівні між собою.

VII. Ті, що суміщаються (величини. образи) рівні.

VIII. Ціле більше частини.

IX. Дві прямі не можуть заключати простору.

Складаючи «Начала», Евклід, без сумніву, хотів здійснити ідеал строго логічної системи, у якій б все випливало з означень, постулатів та аксіом. *Кожна теорема мала бути доведена, якою б очевидно вона не видавалась. Кожен новий термін повинен бути визначений за допомогою основних означень.* Одне з головних історичних значень «Начал» полягає в тому, що вони донесли до нас цю ідею строгої логічної побудови геометрії.

У чому ж полягають основні недоліки евклідових «Начал»?

Основні *означення*, дані Евклідом, представляють собою найслабше місце книги. Деякі з них нічого не визначають і тому Евклід ніде не може їх використати. Наприклад, Евклід ніде не користується у своїх логічних виведеннях тим фактом, що «точка є те, що не має частин» або що «лінія є довжина без ширини». Визначаючи лінію як «довжину без ширини», Евклід уже припускає відомим, що таке «довжина» і «ширина».

Означення повинні володіти принаймні однією «хорошою» властивістю, тобто, щоб ними *можна було користуватися при логічних виведеннях*. Цими властивостями багато означень Евкліда не володіють. Та й не можливо все визначити, потрібно з чогось починати. Геометрія, як і будь-яка наука, повинна починатися з так званих *основних неозначуваних понять*. У іншому випадку ми будемо «визначати» до безконечності.

У своїй книзі Евклід широко користується поняттями, яких у списку означень нема. Наприклад, «точка лежить на прямій», поняття «лежить на» Евклід вважає добре відомим і ніде не визначає. Користуючись реченням «точки *A* і *B* лежать по один бік прямої», він не визначає, що означає «по один бік», вважаючи це відомим.

Евклід дає багато зайвих означень, які у нього «логічно не працюють». Надалі він користується чисто геометричними поняттями, ніде їх не визначаючи і записуючи їх в якості основних.

Також суттєвим недоліком є *відсутність аксіом неперервності*, хоча неперервність лінії Евклід всюди використовує.

У Евкліда зовсім нема аксіом, пов'язаних з такими поняттями, як «між», «по один бік», «всередині», «ззовні». Усі ці поняття відіграють велику роль при логічній побудові геометрії.

Зрозуміло, що перелічених аксіом та постулатів Евкліда недостатньо для строгого розвитку геометрії.

Розглядаючи цю критику «Начал», необхідно мати на увазі, що більшість недоліків цього твору були помічені лише у XIX ст. На початку XIX ст. навіть найбільш видатні вчені вважали «Начала» завершеними.

Однак геометрія Лобачевського змусила переглянути «ті темні поняття, з яких починаємо геометрію». Проте і Лобачевський при розвитку своєї геометрії користується інтуїцією і невизначеними постулатами, аксіомами і теоремами. Задача бездоганного формулювання аксіом, а також основних понять надзвичайно складна – завжди є ризик щось пропустити. До розв'язання цієї задачі одним із перших приступив Паш, який у своїх «Лекціях з нової геометрії» (1882) ввів так звані аксіоми розташування, що стосуються понять «між», «всередині», «зовні».

Зауважимо, що глибока різниця геометрії Евкліда та геометрії Лобачевського полягає в тому, що у них різна «теорія паралелей».

Важливо лише додати, що велике історичне значення «Начал» не вичерпується тим, як вони «передали ідеал логічної обробки геометрії», а є значно ширше. Евклідові «Начала» є основою системи світу Коперніка, механіки та електродинаміки, а разом з тим є частиною фундаменту сучасної техніки.

Еквіваленти V постулату Евкліда

Аксіома Евкліда про паралелі. *Через точку A зовні заданої прямої a в площині, яка визначається точкою A і прямою a , не можна провести двох прямих, паралельних a .*

Теорема. *Якщо сума кутів якого-небудь одного трикутника дорівнює двом прямим, то через точку A ззовні заданої прямої a не можна провести двох паралелей.*

Теорема про те, що сума кутів одного трикутника дорівнює $2d$ та аксіома паралелей – еквівалентні. Теореми, які можуть замінити аксіому про паралелі без порушень всієї сукупності фактів геометрії (викладених в Евклідових «Началах»), будемо називати *теоремами, еквівалентними постулату Евкліда*.

Ми бачимо, що теорема: *сума кутів трикутника дорівнює $2d$ – еквівалент постулату Евкліда*. Якщо з геометрії викинути аксіому Евкліда про паралелі, то разом з нею доведеться відкинути теорему про те, що сума кутів трикутника дорівнює $2d$.

Наведені нижче теореми Лежандра-Саккері та постулат Паша є фундаментальними у вченні про суму кутів трикутника. При їхньому доведенні не використовувалася теорія паралельних. Ці теореми широко використовувалися при доведенні еквівалентів V постулату Евкліда.

Перша теорема Лежандра-Саккері. *Сума кутів будь-якого трикутника не може бути більша $2d$.*

Друга теорема Лежандра-Саккері. *Якщо у заданому трикутнику сума кутів дорівнює $2d$, то і у довільному трикутнику сума кутів дорівнює $2d$.*

Ці теореми є фундаментальними у вченні про суму кутів трикутника. При їх доведенні не використовувалася теорія паралельних.

Третя теорема Лежандра-Саккері. *Якщо сума кутів у якому-небудь одному трикутнику менша двох прямих, то вона менша двох прямих у будь-якому трикутнику.*

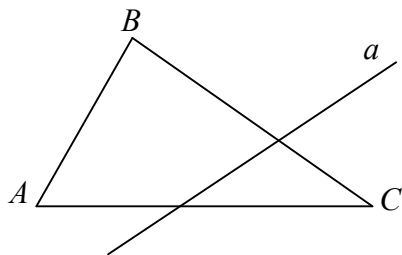


Рис. 49

Постулат Паша. *Якщо дано трикутник ABC і пряма a , що не проходить через його вершини і перетинає одну із сторін трикутника між двома вершинами, то ця пряма неодмінно перетне другу сторону трикутника також між вершинами (рис. 49).*

Теорема. *У всіх трикутниках сума кутів одна і та ж.*

Багатовікові спроби геометрів довести постулат Евкліда виявили велику кількість теорем, еквівалентних постулату Евкліда. Кожна з них може замінити аксіому про паралелі, а сама аксіома займе тоді місце теореми.

Теорема. *Якщо через будь-яку точку кута завжди можна провести січну, яка перетинає обидві сторони кута, то сума кутів трикутника не може бути менша двох прямих.*

Теорема Валліса. *Якщо існує два нерівних трикутники, які мають відповідно рівні кути, то через точку ззовні заданої прямої не можна провести двох прямих, паралельних даній.*

Теорема В. Боліаї. *Якщо через будь-які точки, які не лежать на одній прямій, можна провести коло, то звідси випливає постулат Евкліда про паралелі.*

Теорема. *Якщо при перетині двох прямих, які не мають спільної точки, будь-якою прямою внутрішні кути, що лежать навхрест, рівні, то звідси випливає постулат Евкліда. Справедлива й обернена теорема.*

Теорема. *Якщо сторона правильного вписаного в коло шестикутника дорівнює радіусу кола, то звідси випливає постулат Евкліда.*

Усі спроби довести постулат Евкліда містили замкнуте коло. Доводивши постулат, усі автори користувалися якою-небудь теоремою, еквівалентною самому постулату.

Поступово серед найбільш потужних геометрів XVIII і початку XIX століть почало складатися переконання, що постулат Евкліда взагалі довести неможливо. Найбільш революційно поступив М. І. Лобачевський. Він побудував нову геометрію, яка відкидала постулат Евкліда і замінив його іншим, прямо протилежним за змістом. Ця нова геометрія носить назву неевклідової геометрії Лобачевського. Геометрія Лобачевського отримала велике застосування як і в самій математиці, так і в суміжних дисциплінах. Наприклад, без розвитку геометричних ідей Лобачевського не могла б з'явитися теорія відносності.

Деякі факти геометрії Лобачевського

Розглянемо усі можливості, які можуть зустрітися при вивченні розміщення двох прямих на площині. При цьому будемо використовувати на весь геометричний матеріал «до теорії паралельних». Є три можливості:

1) *будь-які дві прямі перетинаються.* Ця можливість відпадає, оскільки два перпендикуляри до однієї прямої спільної точки не мають;

2) через точку A зовні заданої прямої a площини (Aa) проходить лише одна пряма, яка не має спільної точки з a . Ця можливість здійснюється, якщо тільки буде прийнято постулат Евкліда;

3) через точку A зовні заданої прямої a площини (Aa) проходить більше, ніж одна пряма, яка не має спільної точки з a . Ця можливість буде мати місце у тому випадку, якщо постулат Евкліда про паралельні не прийнято.

Домовимося площину, на якій прямі не підлягають постулату Евкліда, називати площиною Лобачевського.

Постулат Лобачевського

Через точку A ззовні прямої a в площині, яка визначається точкою A і прямою a , проходять принаймні дві прямі c і b , які не мають спільної точки з прямою a .

Звідси випливає, що через точку A проходить нескінченна множина прямих площини (Aa) , які не перетинають пряму a . Такими прямими будуть, наприклад, всі прямі пучка з центром A і які лежать у куті bAc та вертикальному до нього (рис. 50). Доведемо це.

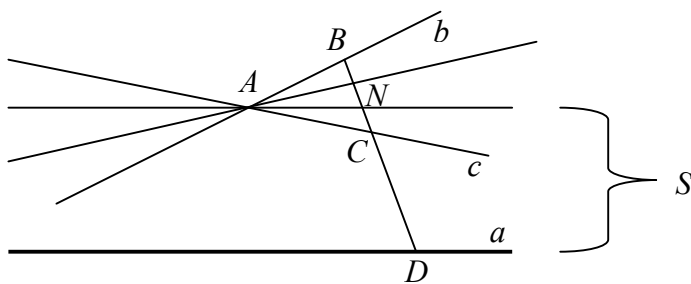


Рис. 50

Візьмемо на прямій b точку B так, щоб точка B і пряма a лежали по різні боки від прямої c . З'єднаємо B з довільною точкою D прямої a .

Відрізок BD перетне пряму c в деякій точці C . Нехай N – довільна точка відрізка BC . Пряма AN не перетинає пряму a . Справді, якщо б AN перетинала a в точці S , яка лежить в напрямку від A до N , то, застосовуючи постулат Паша до трикутника NDS і прямої c , ми б отримали, що пряма c перетинає DS між D і S , але це суперечить властивості прямої c не перетинати пряму a .

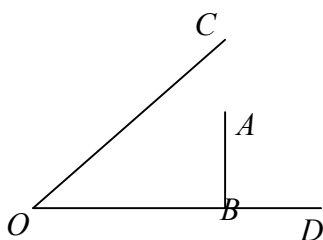
Припущення, що пряма NA перетне пряму a в точці S' , яка лежить у напрямку від N до A , теж приводить до суперечності, варто лише застосувати постулат Паша до прямої b та трикутника NDS' .

Дослідимо тепер, якою буде сума кутів трикутника, розташованого в площині Лобачевського. Легко зрозуміти, що ця сума *менша двох прямих*. Справді, якщо б ця сума дорівнювала $2d$, то звідси б впливав постулат Евкліда про паралельні, але ми маємо справу з площиною Лобачевського, і теорема, що сума кутів трикутника дорівнює $2d$ веде до суперечності. А оскільки на площині Лобачевського, так як і на площині Евкліда, сума кутів трикутника більшою за два прямих бути не може, то вона менша $2d$. *Сума кутів трикутника на площині Лобачевського у різних трикутниках, взагалі кажучи, різна*. Звідси впливає така **теорема**: *якщо три кути одного трикутника дорівнюють відповідно трьом кутам іншого, то такі трикутники рівні*.

Якщо б такі трикутники не були рівними, то вони були б подібними, але за теоремою Валліса звідси впливав би постулат Евкліда, а на площині Лобачевського постулат Евкліда несправедливий. Отримана суперечність і доводить теорему. З теореми Валліса також впливає, що *на площині Лобачевського немає подібних фігур*. Відмітимо ще одну цікаву теорему, яка стосується взаємозв'язку між відрізком і кутом.

Теорема. *Кожний відрізок в геометрії Лобачевського однозначно визначає кут.*

У цьому легко переконатися, побудувавши рівносторонній трикутник, сторони якого дорівнюють цьому відрізку, такий трикутник буде також рівнокутним. Кут такого трикутника і буде повністю визначений єдиним кутом, який визначає цей відрізок. Якщо взяти інший відрізок, не рівний першому, і так само побудувати рівносторонній трикутник, то кут цього останнього трикутника



не може дорівнювати куту першого трикутника, оскільки б це суперечило новій ознаці рівності трикутників. *Кожний рівносторонній трикутник має свою власну величину кута*. Два нерівних рівносторонніх трикутники мають нерівні

кути. У геометрії Лобачевського немає вчення про подібність, але взамін ми отримуємо цікаву залежність між відрізками і кутами. Цієї залежності геометрія Евкліда не має.

Використовуючи хибне доведення постулату Евкліда, яке належить Лежандру, отримаємо таку теорему геометрії Лобачевського: *кожен кут BOC*

Рис. 51

містить всередині такі точки A , через які не можна провести прямих, що перетинають обидві сторони OB та OC (рис. 51).

Іншими словами, якщо пряма, яка проходить через таку точку A , перетинає одну сторону кута, наприклад, OC , то ця пряма ніде не перетинає другу сторону OB кута BOC . Насправді, якщо припустити, що яка б не була точка A всередині кута BOC , завжди можна провести пряму через A , яка перетинає обидві сторони кута, то по Лежандру впливає постулат Евкліда, а на площині Лобачевського постулат Евкліда справедливим бути не може. Цю теорему можна змінити, надаючи їй більш цікаву форму. У геометрії Лобачевського існує така важлива **теорема**: *яким би не був гострий кут DOC , завжди існує такий перпендикуляр до однієї сторони цього кута, який не перетинає другу сторону*. Цей факт неважко встановити (рис. 51).

Нехай A – точка всередині гострого кута DOC така, що через неї не можна провести жодної прямої так, щоб остання перетинала обидві сторони кута. Опустивши з точки A перпендикуляр AB на сторону OD , отримаємо перпендикуляр, про який йде мова в теоремі.

Необхідно твердо пам'ятати, що якщо ми прийняли постулат Лобачевського, то повинні прийняти і всі наслідки, які з нього випливають, якими б дивними, на перший погляд, вони не видавалися.

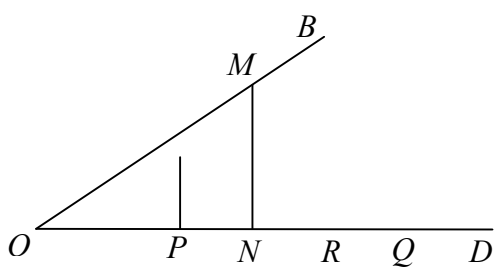
Відмітимо також, що за все своє життя Лобачевський не зустрів розуміння своїх ідей і помер, не отримавши визнання своєї системи геометрії. У ці часи навіть видатні математики цю суперечність наочному представленню вважали вирішальною для того, щоб стверджувати «безглуздість», як вони казали, геометрії Лобачевського. Праці Лобачевського так і залишилися незрозумілими майже усім математикам цього часу. Однак рисунки при вивченні геометрії

відіграють дуже умовну роль; вирішального значення при вивченні геометрії, Лобачевського чи Евкліда, рисунки не мають.

Повернемося до перпендикулярів до сторони OD кута BOD . Ми встановили, що на OD є такі точки, наприклад, A_n , перпендикуляр у яких до сторони OD не перетинає OB , і це встановлено для будь-якого гострого кута BOD (рис. 52). З іншого боку, на OD , безумовно, існують і такі точки, перпендикуляр в яких перетинає сторону OB .

Ці перпендикуляри, які перетинають OB , легко отримати так: візьмемо будь-яку точку M на прямій OB і опустимо з неї перпендикуляр на OD .

Точка N цього перпендикуляра належить до тих точок, через які проходять перпендикуляри до OD , які перетинають сторону OB . Вліво від точки N , тобто між точками O і N , усі точки належать до такого класу, перпендикуляри до OD з яких перетинають сторону OB . Справді,



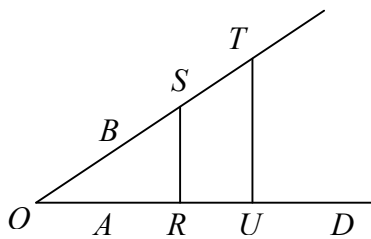
перпендикуляр в точці P до прямої OD перетинає сторону ON трикутника ONM між вершинами O і N , і, в цей же час, цей перпендикуляр не перетинає сторону NM , оскільки два перпендикуляра до однієї і тієї ж прямої не перетинаються. Тому

Рис. 52

за постулатом Паша цей перпендикуляр перетне сторону OM між вершинами O і M , що необхідно було встановити. Усі точки Q , перпендикуляр в яких до прямої OD не перетинає OB , лежать по один бік від усякої точки N , перпендикуляр з якої перетинає OB , і саме по цей бік від N , яка не містить точки O . Отже, усі точки променя OD розбиті на два класи. До першого класу віднесемо такі точки P цього променя, перпендикуляр в яких до OD перетинає сторону OB . До другого класу віднесемо такі точки Q , перпендикуляр в яких до сторони OD не перетинає сторону OB . Ми довели, що, по-перше, існують точки як першого, так і другого класу, і кожна з точок променя OD належить до одного з цих класів, і, по-друге, що кожна точка першого класу лежить по один бік від

усіх точок другого класу. Таке розбиття точок променя OD на два класи проводить єдина точка R цього променя і всі точки P 1-го класу лежать по один бік точки R (на рисунку – зліва), а всі точки Q 2-го класу – по інший бік від точки R (на рисунку – справа). Сама точка R може належати як першому, так і другому класам.

Покажемо, що точка R належить до 2-го класу, тобто, що перпендикуляр у R до OD не перетинає сторони OB . Справді, якщо б цей перпендикуляр перетинав OB у точці S , то, взявши точку T по той бік від S , де не лежить точка O , і, опустивши з точки T перпендикуляр на OD , ми б отримали таку точку U , яка б, належавши до першого класу, була би справа від точки R , але всі точки першого класу лежать зліва від точки R (рис. 53). Тому припущення,



що перпендикуляр у R перетне OB , веде до суперечності. Отже, *точка R належить другому класу*. Іншими словами, перпендикуляр у R (у точці, яка розбиває промінь на два класи) до прямої OD не перетинає сторону кута OB .

Рис. 53

Серед усіх перпендикулярів у точках першого класу немає останнього, а серед перпендикулярів другого класу є перший, який проходить через точку R .

Доведена **теорема про перший перпендикуляр** до однієї сторони будь-якого гострого кута, який не перетинає другу сторону кута, є однією з найважливіших теорем геометрії Лобачевського.

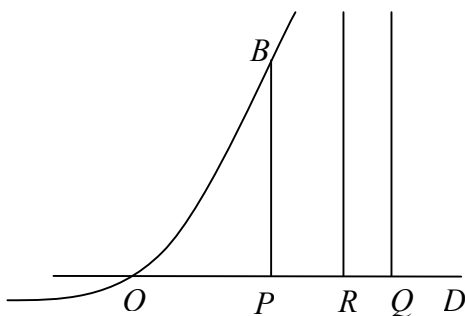


Рис. 54

Наочно уявити собі таку поведінку прямих важко. Аналогічний факт має місце в евклідовій площині, якщо розглянути гіперболу і її асимптоту (рис. 54). Якщо OB – гіпербола, OD – пряма, яка її перетинає, а перпендикуляр до OD у точці R – асимптота гіперболи, то всі

точки P зліва від R належать першому класу, а всі точки Q справа від R – до другого класу.

Справедливими також є наступні теореми.

Теорема. *Геометричне місце точок, які перебувають на заданій відстані від заданої прямої і які лежать по один бік від цієї прямої, є крива лінія, жодні три точки якої не лежать на одній прямій.*

Отримана крива названа Лобачевським еквідистантою.

Теорема. *Спільний перпендикуляр до двох прямих є найкоротша відстань між цими прямими.*

Із теореми В. Боліаї випливає, що у геометрії Лобачевського існують трикутники, навколо яких не можна описати кола, оскільки, якби навколо кожного трикутника можна було описати коло, то за теоремою В. Боліаї був би справедливим постулат Евкліда.

Теорема. *Навколо довільного трикутника, вписаного в еквідистанту, не можна описати коло.*

Теорема. *Трикутники, вписані в еквідистанти, не вичерпують усіх трикутників, навколо яких не можна описати коло.*

Теорема. *Сторона правильного вписаного в коло шестикутника більша за радіус цього кола.*

Взаємне розміщення прямих на площині Лобачевського

У геометрії Лобачевського прямі або перетинаються, або не перетинаються, але неперетинні прямі не володіють такими простими

властивостями, як в евклідовій геометрії.

Зупинимося на постулаті Лобачевського. Через точку A зовні прямої a площини (a, A) можна провести принаймні дві прямі b і c , які не перетинають прямої a , і, як наслідок, нескінченну множину таких прямих (рис.

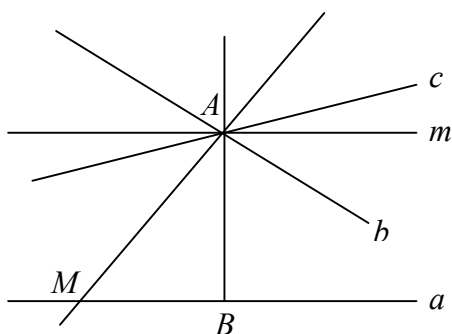


Рис. 55

55). До таких прямих, які не перетинають a , належать і всі прямі кута bAc . Тому всі прямі пучка з центром A розбиваються на два класи. До класу віднесемо усі прямі пучка, які перетинають пряму a , до другого – решта прямих пучка. Кожен з класів містить нескінченну множину прямих. Наприклад, сполучаючи точки M прямої a з точкою A , отримаємо прямі першого класу, прямі ж b і c , а також прямі кута bAc належать до 2 класу, серед яких знаходиться і пряма Am , перпендикулярна до AB , де AB перпендикулярна до a . Усі прямі прямого кута BAm розбиваються також на два класи (рис. 56). До першого класу віднесемо всі прямі, які перетинають a , а до другого класу – всі прямі, які не перетинають прямої a .

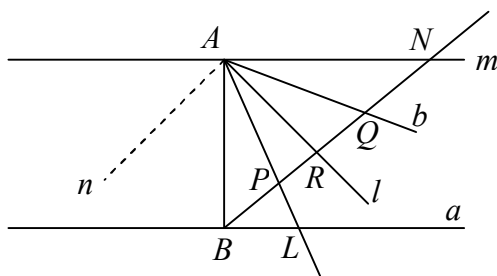


Рис. 56

Узявши точку N на промені Am і побудувавши відрізок BN , бачимо, що всі прямі кута BAm цей відрізок перетинають. Це впливає з розгляду трикутника ABN . Будемо вважати, що прямі 1 класу, наприклад, AL , перетинають BN в точках P 1 класу, а прямі 2 класу, наприклад, b ,

перетинають відрізок BN у точках Q 2 класу. Отже, усі точки відрізка BN розбиті на два класи. Кожен клас містить нескінченну множину точок і всі точки P 1 класу лежать по один бік від точки Q 2 класу. Застосовуючи аксіому Дедекінда, отримуємо, що на відрізку BN існує єдина точка R , яка розбиває цей відрізок на дві частини. Одна частина складається з точок P 1 класу, друга – з точок Q 2 класу. Перший клас останньої точки не має. Це означає, що промінь AR не перетинає пряму a . Справді, припустимо, що промінь AR перетинає пряму a у точці S (рис. 57) і візьмемо точку T на прямій a за точкою S у напрямку BS і з'єднаємо A з T . Промінь AT перетне відрізок BN у точці P_1 . Отже, точка P_1 є точкою 1 класу, але цього бути не може, оскільки усі точки відрізка RN є точками другого класу. Припущення, що промінь AR перетинає пряму a , привело нас до суперечності, тому промінь AR не перетинає прямої a .

Наочно це положення можна пояснити так: якщо промінь AL 1 класу обернути навколо точки A (на рис. 56 проти годинникової стрілки), то цей змінний промінь перетинає пряму a в точці L , яка по мірі обертання променя віддаляється від прямої a все далі і далі, і, нарешті, настає такий момент, коли промінь, що обертається, «відірветься» від прямої a . Цей момент наступить тоді, коли промінь, який обертається, займе положення AR , тобто перейде з променів 1 класу у промені 2 класу. Подальше обертання, включно до променя At , перетину з прямою a не дає. Ось цю «граничну» пряму $AR = l$ (рис. 56) Лобачевський і назвав *лінією, паралельною a для точки A за напрямком BL* .

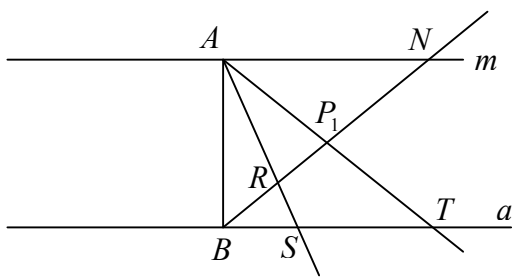


Рис. 57

Якщо взяти пряму n , симетричну l відносно осі симетрії AB , то отримаємо другу пряму, паралельну до a у сенсі Лобачевського, але в напрямку LB — протилежному до попереднього. Отже, для кожної прямої a і кожної точки A існує

дві прямі — l і n — паралельні у сенсі Лобачевського прямій a ; одна в одному напрямку, друга — в протилежному. Усі прямі p кута lAn , як ми вияснили, перетинають пряму a .

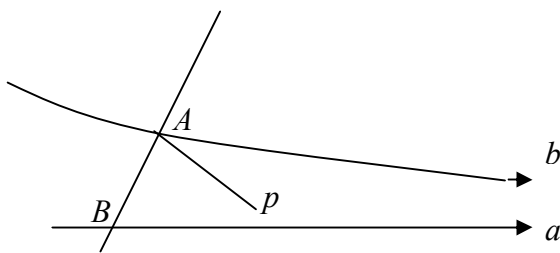


Рис. 58

Можна визначити паралельну до прямої a , яка проходить через точку A у заданому напрямку, таким чином: довільну точку B прямої a з'єднаємо з A (рис. 58). Пряма AB розбиває

площину на дві півплощини. Рухаючись у заданому на прямій a напрямку, ми переходимо з однієї півплощини на другу. Пряму b називають *паралельною до a у вказаному напрямку*, якщо вона задовольняє дві умови:

- 1) b не перетинає прямої a ;
- 2) будь-яка пряма p кута bAB перетинає пряму a .

Очевидно, що це означення еквівалентне означенню паралельних, даного Лобачевським.

В означенні паралельних прямих (у сенсі Лобачевського) особливу роль відігравала точка A . Сам паралелізм встановлювався, по-перше, у заданому напрямку, і, по-друге, для даної точки A . Виявляється, що точка A прямої b , паралельної прямій a , не відіграє виняткової ролі.

Теорема. *Якщо пряма b паралельна прямій a у заданому напрямку і для точки A , то пряма b паралельна прямій a у тому ж напрямку для будь-якої своєї точки B .*

Теорема. *Якщо пряма b паралельна прямій a у заданому напрямку, то і пряма a паралельна прямій b у тому ж напрямку.*

Теорема. *Дві прямі b і c , паралельні третій прямій a в одному і тому ж напрямку, паралельні між собою у цьому ж напрямку.*

Теорема. *Відстані від точок однієї паралельної до іншої паралельної при переміщенні точки в бік паралелізму необмежено спадають, а при переміщенні точки у протилежний бік необмежено зростають.*

Теорема. *Усі смуги між паралельними конгруентні між собою, тобто можуть бути накладені одна на одну всіма своїми точками.*

Теорема. *Яким би гострий кут не був, завжди існує перпендикуляр до однієї його сторони, паралельний до другої сторони.*

Вчення про площі в геометрії Лобачевського

Встановити поняття площі простого многокутника, зокрема трикутника, це означає – знайти спосіб поставити у відповідність кожному такому многокутнику додатне число так, щоб виконувалися вимоги:

- 1) конгруентним або рівним многокутникам були поставлені у відповідність рівні числа;

2) число, поставлене у відповідність многокутнику, який складений з двох суміжних многокутників, дорівнює сумі чисел, поставлених у відповідність кожному з цих суміжних многокутників (властивість адитивності).

Два простих многокутники називаються *суміжними*, якщо вони мають одну або декілька спільних сторін, але не мають жодної спільної внутрішньої точки.

При виконанні вказаних вимог числа, поставлені у відповідність кожному простому многокутнику, називаються *площами* відповідних многокутників.

У геометрії Лобачевського достатньо кожному трикутнику поставити у відповідність число, пропорційне дефекту цього трикутника, щоб встановити систему вимірювання площ. Дефектом δ трикутника називається різниця між π і сумою кутів, тобто $\delta = \pi - (A + B + C)$. Площа будь-якого простого многокутника визначається відповідно до властивості адитивності як сума площ трикутників, на які можна розбити многокутник, причому має місце незалежність площі від способу розбиття многокутника на трикутники.

Теорема. Два трикутники, які мають рівні дефекти і по одній рівній стороні, рівновеликі.

Теорема. Площі двох трикутників, які мають по рівній стороні, відносяться, як їх дефекти.

Теорема. Площі довільних трикутників відносяться, як їх дефекти.

Наслідок. Відношення площі трикутника до його дефекту є величина стала, не залежна від трикутника.

Чим менша сума кутів трикутника, тим більша його площа. Навпаки, чим менший трикутник за своїми розмірами, тобто, чим менша його площа, тим ближче до π сума його кутів.

Лобачевський детально розвиває усю теорію про площі, знаходить площу трикутника за трьома сторонами, шукає площі многокутників, площу круга та його частин і, за допомогою інтегрального числення, може записати площу будь-якої фігури, для якої є сенс говорити про площу.

Нарешті відмітимо, що Лобачевський з вичерпною повнотою розвинув майже всі розділи своєї неевклідової геометрії: планіметрію, стереометрію та тригонометрію. Крім цієї елементарної частини неевклідової геометрії, Лобачевський побудував неевклідову *аналітичну геометрію* на площині і в просторі та *диференціальну геометрію*. Він чітко відрізняв класи функцій неперервних та функцій диференційованих; знайшов спосіб (носить назву Лобачевського) числового знаходження коренів рівняння; користувався поняттям неперервності у точному формулюванні теорем задовго до появи аксіом Дедекінда. У зв'язку з останнім фактом необхідно відмітити, що зміст аксіом Дедекінда співпадає з використовуваним Лобачевським положенням про існування паралельної до прямої, що проходить через точку у заданому напрямку. Причому Лобачевський говорить «про розбиття променів на класи» і про існування єдиного променя, який проводить цей «переріз».

Отже, у багатьох складних та тонких питаннях математики Лобачевський випередив свій час на десятиліття, а створенням своєї геометрії затвердив за собою славу визначного геометра.

Геометрією Лобачевського відкривається нова ера не тільки в геометричній науці, але й у всій математиці. З появою неевклідової геометрії Лобачевського пов'язана глибока перебудова математики, починаючи з її основ. Виникає вчення про основи геометрії і математичних наук взагалі – *аксіоматика*. Зокрема, ставляться питання про повний список аксіом та їх несуперечність.

Показано, що формальна суперечність в геометрії Лобачевського неодмінно веде до суперечностей в геометрії Евкліда і до формальної суперечності в арифметиці.

Аксіоматична побудова геометрії Гільбертом

Аксіоматична побудова геометрії (як і будь-якої теорії) повинна починатися з переліку, по-перше, *категорій основних об'єктів*, по-друге,

основних відношень між цими об'єктами, по-третє, аксіом. У подальшому розглядувані об'єкти в геометрії і відношення між об'єктами повинні визначатися через основні, а всі теореми повинні доводитися на основі аксіом.

Основними об'єктами, з якими має справу геометрія, є: «точки», «прямі», «площини». Ці поняття не визначаються, не пояснюються, не описуються.

Основні відношення між основними об'єктами: «належати», «між», «бути рівними». Ці основні відношення не визначаються, не пояснюються, не описуються. Необхідно твердо собі уявити, що не можна усе безконечно визначати через інше. Необхідно мати початок цього ланцюга. Геометрія і починає з основних об'єктів та основних відношень між ними.

У 1899 р. вийшла книга німецького математика Д. Гільберта «Основи геометрії». У цій книзі автор дає список аксіом, достатній для логічної побудови евклідової геометрії. З цієї книги, власне, починається сучасний аксіоматичний метод у математиці.

Перша група аксіом: аксіоми належності

Основне відношення – «належати».

I_1 . Для будь-яких двох точок A, B існує пряма a , яка належить кожній з цих двох точок A, B .

I_2 . Для двох точок A, B існує не більше однієї прямої, яка належить кожній з точок A, B .

I_3 . На прямій існує принаймні дві точки. Існує принаймні три точки, які не лежать на одній прямій.

I_4 . Для будь-яких трьох точок A, B, C , які не лежать на одній прямій, існує площина α , яка належить кожній з цих трьох точок A, B, C . Для будь-якої площини завжди існує належна їй точка.

I_5 . Для будь-яких трьох точок A, B, C , які не лежать на одній прямій, існує не більше однієї площини, яка належить цим точкам.

I_6 . Якщо дві точки A, B прямої a лежать в площині α , то довільна точка прямої a лежить в площині α .

I_7 . Якщо дві площини α і β мають спільну точку A , то вони мають принаймні ще одну спільну точку B .

I_8 . Існують принаймні чотири точки, які не лежать на одній площині.

Аксіоми I_{1-3} називаються площинними аксіомами групи I , а I_{4-8} – просторовими аксіомами групи I .

Друга група аксіом

Основне поняття – «між».

II_1 . Якщо точка B лежить між точками A і C , то A, B, C є три різні точки прямої і B лежить також між C і A .

II_2 . Для будь-яких точок A і C на прямій AC існує принаймні одна точка B така, що точка C лежить між A і B .

II_3 . Серед будь-яких трьох точок прямої існує не більше однієї точки, яка лежить між двома іншими.

Третя група аксіом: аксіоми рівності та руху

Основне поняття – «рівний».

III_1 . Якщо A, B є дві точки на прямій a і A' – точка на цій же прямій або на іншій прямій a' , то завжди можна знайти точку B' , яка лежить по заданий від точки A' бік прямої a' і при тому таку, що відрізок AB рівний відрізку $A'B'$.

III_2 . Якщо відрізок $A'B'$ і відрізок $A''B''$ рівні одному і тому ж відрізку AB , то відрізок $A'B'$ рівний також і відрізку $A''B''$; іншими словами, якщо два відрізки рівні третьому, то вони рівні між собою.

III_3 . Нехай AB і BC є два відрізки прямої a , які не мають жодної спільної точки, і нехай $A'B'$ і $B'C'$ є два відрізки тієї ж прямої або іншої прямої a' , які також не мають спільної точки; якщо при цьому $AB \equiv A'B'$ і $BC \equiv B'C'$, то і $AC \equiv A'C'$.

III_4 . Нехай задано $\angle(h, k)$ в площині α і пряма a' в площині α' , а також визначений відносно a' бік площини α' . Нехай h' означає промінь прямої a' , який виходить з точки O' . Тоді в площині α' існує один і тільки один промінь k'

такий, що кут (h,k) рівний куту (h',k') і разом з тим усі внутрішні точки кута (h',k') лежать по заданий бік від a' . Це відношення між кутами позначається так: $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$.

III_5 . Якщо для двох трикутників ABC та $A'B'C'$ мають місце рівності $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, то має місце також і рівність $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

Четверта група аксіом: аксіома про паралельні

IV . (аксіома Евкліда). Нехай a – довільна пряма і A – точка, яка лежить зовні прямої, тоді у площині, що визначається точкою A і прямою a , існує не більше однієї прямої, яка проходить через точку A і не перетинає пряму a .

П'ята група аксіом: аксіоми неперервності

V_1 . (аксіома вимірювання або аксіома Архімеда). Нехай AB і CD – два довільних відрізки, тоді на прямій AB існує скінченне число точок $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ таких, що відрізки $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ рівні відрізку CD і точка B лежить між A і A_n .

V_2 . (аксіома лінійної повноти). Точки прямої утворюють систему, яка при збереженні лінійного порядку, першої аксіоми про рівність і аксіоми Архімеда (тобто аксіом I_{1-2}, II, III_1, V_1) не допускає ніякого розширення.

Аксіома Дедекінда. Якщо всі точки прямої розподілені на два класи так, що при цьому:

1) кожна точка належить до одного і тільки до одного класу і кожен клас містить точки;

2) кожна точка першого класу передує кожній точці другого, то або в першому класі існує точка, якій передують усі решта точок першого класу, або у другому класі існує така точка, яка передує усім решта точкам другого класу.

Контрольні запитання

1. Коротко охарактеризуйте Евклідові «Начала».
2. У чому полягають недоліки цієї книги?
3. Сформулюйте теореми Лежандра-Саккері про суму кутів трикутника.
4. Сформулюйте еквіваленти V-ого постулату Евкліда.
5. Які прямі називаються паралельними у сенсі Лобачевського?
6. Якими властивостями володіють ці прямі?
7. Сформулюйте теорему про перший перпендикуляр на площині Лобачевського.
8. Що таке дефект трикутника?
9. На які групи діляться аксіоми Гільберта?

Приклади розв'язування задач

Приклад. Довести, що твердження про те, що сума кутів у кожному трикутнику одна і та ж, є еквівалентним до V-ого постулату Евкліда.

Розв'язок. Позначимо суму кутів трикутника через x (рис. 59):

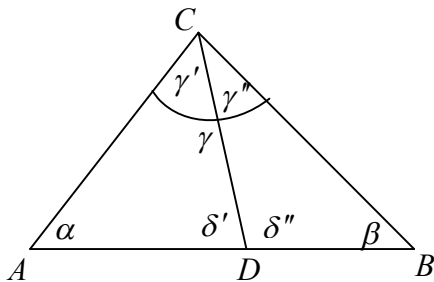


Рис. 59

1. $\alpha + \beta + \gamma = x$,
2. $\alpha + \gamma' + \delta' = x$,
3. $\beta + \gamma'' + \delta'' = x$,
4. $\delta' + \delta'' = 2d$.

Додаючи другу та третю рівності, отримаємо

$$\alpha + \gamma' + \delta' + \beta + \gamma'' + \delta'' = 2x \text{ або}$$

$$x + 2d = 2x; \quad x = 2d.$$

Отже, у трикутнику ABC сума кутів дорівнює двом прямим, а звідси впливає постулат Евкліда. А оскільки, навпаки, з постулату впливає, що сума

кутів трикутника дорівнює $2d$, то твердження про інваріантність суми кутів у всіх трикутниках еквівалентне постулату Евкліда.

Завдання для самостійної роботи

1. Довести, що в системі аксіом Гільберта твердження про те, що існує чотирикутник з чотирма прямими кутами, еквівалентне аксіомі паралельності.
2. Нехай $(AA') \parallel (BB')$ на площині Лобачевського. Довести, що існує одна і тільки одна пряма l , перпендикулярна прямій (BB') і паралельна (AA') .

Завдання для контрольної роботи

1. Довести, що в системі аксіом Гільберта твердження про те, що існує два подібних, але не рівних трикутники, еквівалентне аксіомі паралельності.
2. Нехай $(U_1V_1) \parallel (U_2V_2)$ у заданому напрямку. Довести, що якщо пряма (UV) лежить між (U_1V_1) та (U_2V_2) і не перетинає жодну з них, то вона паралельна цим прямим.

Література

1. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. Ч. 2. – М. : Просвещение, 1987. – 224 с.
2. Атанасян Л. С. Сборник задач по геометрии. Ч. 2. – М. : Просвещение, 1975. – 176 с.
3. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. – М. : Наука, 1971. – 576 с.
4. Кутузов Б. В. Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрий. – М. : УЧПЕДГИЗ , 1950. – 127 с.
5. Певзнер С. Л., Цаленко М. М. Задачник-практикум по проективной геометрии. – М. : Просвещение, 1982. – 80 с.

Предметний покажчик

Автополярий	Діагоналі повного
Тривершинник 85	Чотиривершинника 51
Аксіома Дедекінда 10, 120	— — чотиристоронника 51
Асимптоти квадрики 92	Діаметри квадрики 91
	— — спряжені 92
Відрізок 9	Дотична до квадрики 83
Вісь гомології 69	
Внутрішня (зовнішня) точка	Інволюція 62
Квадрики 83	— гіперболічна 64
	— еліптична 64
Гармонійна спряженість	Інцидентність 29
точок відносно квадрики 84	
Гармонійні четвірки 21	Квадрика 78
Геометрія Лобачевского 106	— не вироджена 79
Гомологія 69	— нульова 79
— гіперболічна 69	— овальна 80
— параболічна 69	Класифікація квадрик афінна 90
Гомотетичні системи	— — проєктивна 79, 80
Координат 11	Колінеація 65, 66
	Координати прямої 11
Еквіваленти V-ого постула- ту Евкліда 104	Кореляція 44, 65
Двоїстість (див. <i>принцип двоїстості</i>)	Матриця квадрики 78
Дезаргова конфігурація 47	Невласна пряма 30
— пряма 46	— точка 8
— точка 46	— — квадрики 91
Дефект трикутника 116	Однорідні афінні координати 3

Паралельні прямі (в сенсі Лобачевського) 114

Перетворення проєктивних координат 14, 31

Перспектива 68

Перспективне відображення площини у в'язку 29

— — площини на площину (див. *перспектива*)

— — прямої в пучок 7

— — прямої на пряму 58

Повний чотиривершинник

— чотиристоронник

Подвійне відношення чотирьох точок 51

— — — прямих 49

Полюс 85

Поляра 85

Порядок точок на прямій 9

Принцип двоїстості 45

Проективна площина 31

— пряма 9

— система координат на площині 32

— система координат на прямій 11

Проективне відображення прямої на пряму 58

Проективне перетворення площини 65

— — прямої 60

Просте відношення 21

Постулат Лобачевського 107

— Паша 105

Розділеність пар 9

Розширена евклідова

Площина 30

— — пряма 8

Теорема Бріансона 89

— Дезарга 45

— — обернена 47

— Лежандра-Саккері 105

— Паска ля 88

Тривершинник 45

Фундаментальні точки 13, 32

Центральне проектування (див. *перспектива*)

Центр гомології 69

— квадрики 91

Шестивершинник 87

Навчальне видання

Юрій Галь, Ольга Золота

**ПРОЕКТИВНА ГЕОМЕТРІЯ
ТА ОСНОВИ ГЕОМЕТРІЇ**

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

для студентів напрямку підготовки 6. 040201 «Математика»

**Редакційно-видавничий відділ
Дрогобицького державного педагогічного університету
імені Івана Франка**

Головний редактор

Ірина Невмержицька

Редактор

Леся Грабинська

Технічний редактор

Наталія Намачинська

Коректор

Світлана Бецко

Здано до набору 21.10. 2011 р. Підписано до друку 18.11.2011 р. Формат 60х90/16. Папір офсетний. Гарнітура Times. Наклад 300 прим. Ум. друк. арк. 7,8. Зам. 433.

Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 2155 від 12. 04. 2005 р.) 82100, Дрогобич, вул. І.Франка, 24, к.42, тел. 2 – 23 – 78.