

**Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка**

Юрій Галь, Ольга Золота

**МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З
ПРОЕКТИВНОЇ ГЕОМЕТРІЇ
ТА ОСНОВ ГЕОМЕТРІЇ**

Навчально-методичний посібник
для студентів напрямів підготовки
«6. 040201 Математика. Спеціалізація: економіка»,
«6. 040201 Математика. 6. 040203 Фізика»

**Дрогобич
2012**

УДК 514 (075)
ББК 22. 151
Г 17

Рекомендовано до друку
вченою радою Дрогобицького державного
педагогічного університету імені Івана Франка як навчально-методичні вказівки з організації
самостійної роботи студентів
(протокол № 13 від 22. 12. 2011 р.)

Рецензенти:

Гуран І. Й., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії і топології
Львівського національного університету імені Івана Франка;

Яворський Ю. М., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та
методики викладання математики Дрогобицького державного педагогічного університету
імені Івана Франка.

Відповідальний за випуск: Комарницька Л. І., кандидат фізико-математичних наук,
доцент, завідувач кафедри математики та методики викладання математики Дрогобицького
державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Г 17 **Галь Юрій. Методичні матеріали до самостійної роботи студентів з проєктивної геометрії та основ геометрії :** навчально-методичний посібник [для студентів напрямів підготовки «6. 040201 Математика. Спеціалізація: економіка», «6. 040201 Математика. 6. 040203 Фізика»] / **Галь Юрій, Золота Ольга.** – Дрогобич : Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, 2012. – 28 с.

Методичні матеріали до самостійної роботи студентів написано відповідно до програми курсу «Проективна геометрія та основи геометрії» напрямів підготовки «6.040201 Математика. Спеціалізація: економіка», «6.040201 Математика. 6. 040203 Фізика» для підготовки фахівців ОКР «Бакалавр», затверджені вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (протокол № 9 від 29 вересня 2011 р.).

Вони містять перелік тем лекційних та практичних занять, типові задачі і вправи, які повинні вміти розв'язувати студенти, запитання для самоконтролю, завдання для підсумкової контрольної роботи, а також методичні поради.

УДК 514 (075)
ББК 22. 151

© Галь Ю. М., Золота О. А.
© Редакційно-видавничий відділ
Дрогобицького державного педагогічного
університету імені Івана Франка, 2012

Зміст

Вступ	4
Теми лекційних та матеріал практичних занять	5
Типові задачі та вправи.	6
Календарний план-графік самостійної роботи	9
Запитання для самоконтролю	17
Завдання для підсумкової контрольної роботи	19
Методичні поради для підготовки до практичних занять	21
Зразок оформлення підсумкової контрольної роботи	24

Вступ

Навчальна дисципліна «Проективна геометрія та основи геометрії», на нашу думку, є потрібною майбутнім вчителям математики, бо об'єднує в єдину схему геометрії Евкліда, Лобачевського та Рімана.

Цей предмет складається з шести розділів: «Проективна геометрія на прямій», «Поняття проективної площини», «Найпростіші факти геометрії проективної площини», «Проективні перетворення», «Квадрики» та «Основи геометрії».

Методичні матеріали до самостійної роботи містять перелік тем лекційних та практичних занять, типові задачі та вправи, які повинні вміти розв'язувати студенти, календарний план-графік самостійної роботи, запитання для самоконтролю, завдання для підсумкової контрольної роботи, методичні поради для підготовки до практичних занять, зразок оформлення підсумкової контрольної роботи.

Теми лекційних та практичних занять

Лекційний курс

Лекція № 1 – 2. Проективна геометрія на прямій.

Лекція № 3. Поняття проективної площини.

Лекція № 4. Найпростіші факти геометрії проективної площини.

Лекція № 5 – 6. Проективні перетворення.

Лекція № 7. Квадрики.

Лекція № 8 – 9. Основи геометрії.

Матеріал практичних занять

1. Проективна система координат на прямій.
2. Подвійне відношення чотирьох точок. Гармонізм.
3. Проективна система координат на проективній площині.
4. Рівняння прямої та пучка.
5. Конфігурації Дезарга. Подвійне відношення чотирьох точок і прямих на площині. Повний чотиривершинник.
6. Проективне відображення прямої на пряму. Проективне перетворення прямої. Інволюції.
7. Колінеації, гомології.
8. Класифікації квадрик. Взаємне розташування прямої і квадрики.
9. Поляри та полюси. Застосування теорем Паскаля та Бріаншона.

Типові задачі та вправи

Проективна геометрія на прямій

1. На проективній прямій задано дві системи координат R та R' , пов'язані такими рівняннями переходу:

$$\begin{cases} \lambda x_1 = x'_1 + x'_2, \\ \lambda x_2 = 2x'_1 - x'_2. \end{cases}$$

Знаючи координати точок у системі R' : $A(1:-1)$, $B(0:1)$, знайти їхні координати у системі R . Знаючи координати точки $D(0:1)$ у системі R , знайти її координати у системі R' .

2. На проективній прямій задано дві системи координат R і R' . Знайдіть рівняння переходу від однієї системи до другої, якщо відомо координати фундаментальних точок E'_0, E'_1, E'_2 системи R' у системі R : $E'_0(-1:3)$, $E'_1(1:2)$, $E'_2(-2:1)$.
3. На розширеній евклідовій прямій в однорідних афінних координатах задано точки $A(1:1)$, $B(2:3)$, $C(-3:5)$, $D(1:0)$, $E(0:1)$. Знайти їхні координати у відповідній неоднорідній системі.
4. На евклідовій прямій задано своїми неоднорідними координатами фундаментальні точки проективної системи координат: $E_0(0)$, $E_1(1)$, $E_2(-1)$. Знайти проективні координати точки $A(2)$.
5. Знайти подвійне відношення $(ABCD)$ четвірки точок проективної прямої: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.
6. Задано точки $A(1:2)$, $B(2:-1)$, $C(1:0)$. Знайти точку D таку, щоб була гармонійною наступна четвірка: A, B, C, D .

Поняття проективної площини

1. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точки $M(1:0:1)$ і $N(1:1:-1)$.
2. Знайти координати точки перетину прямих $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ і $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$.
3. Знайти точку перетину прямої $u: 2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ з прямою, яка проходить через точки $M(1:1:6)$ і $N(2:-1:0)$ (використовуючи параметричне рівняння прямої).

4. Знайти рівняння прямої u , яка проходить через точку перетину прямих $l: 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$ і $m: x_1 + x_2 + x_3 = 0$ та через точку $A(2:1:-1)$ (використовуючи умову належності трьох прямих одному пучку).
5. Задано шість точок A_i :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Довести, що точки $P = (A_1A_2) \cap (A_4A_5)$, $Q = (A_2A_3) \cap (A_5A_6)$, $R = (A_3A_4) \cap (A_6A_1)$ лежать на одній прямій.

6. Задано координати фундаментальних точок $E'_1(1:1:0)$, $E'_2(1:-1:0)$, $E'_3(1:1:-2)$, $E'_4(1:-1:2)$ проективної системи координат R' відносно проективної системи R . Знайти рівняння переходу від однієї системи до другої.

Найпростіші факти геометрії проективної площини

1. Задано чотири точки A, B, C, S , з яких жодні три – неколінеарні і пряма s , неінцидентна жодній з них. Побудувати конфігурацію Дезарга з центром S , віссю s і тривершинником ABC .
2. Побудувати точку D , четверту гармонійну до точок A, B і C , щоб $(ABCD) = -1$.
3. Задано точки

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Довести їхню колінеарність та знайти подвійні відношення $(ABCD)$ і $(DBCA)$.

Проективні перетворення

1. Проективне відображення прямої на пряму задане двома трійками колінеарних точок:
 $A(1:-1:2) \rightarrow A'(2:-1:-1)$, $B(0:1:2) \rightarrow B'(0:1:0)$, $C(1:0:4) \rightarrow C'(2:1:-1)$.
 Переконатися, що точка $D(2:-1:6)$ лежить на одній прямій з точками A, B, C і знайти її образ.
2. Знайти нерухомі точки перетворення

$$\begin{cases} \lambda x'_1 = 2x_1 + x_2, \\ \lambda x'_2 = 2x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

3. Знайти рівняння колінеації k , заданої двома четвірками точок:

$$A(0:0:1) \rightarrow A'(0:0:1),$$

$$B(2:0:1) \rightarrow B'(2:0:1),$$

$$C(1:1:1) \rightarrow C'(1:1:0),$$

$$D(1:-1:1) \rightarrow C'(1:-1:0).$$

4. Задано колінеацію k :

$$\begin{cases} \mu x'_1 = x_1 + 2x_2, \\ \mu x'_2 = x_2 + 2x_3, \\ \mu x'_3 = x_3. \end{cases}$$

Знайти: а) образ A' точки $A(1:1:-2)$; б) прообраз B точки $B'(-2:-2:1)$; в) образ l' прямої $l:2x_1 + x_3 = 0$; г) прообраз m прямої $m':2x'_1 + x'_2 + x'_3 = 0$.

6. Гіперболічна гомологія задана центром P , віссю p і парою точок $A \rightarrow A'$. Побудувати образ довільної прямої.

Квадрики

1. Звести до канонічного вигляду рівняння квадрики $4x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$.

2. Знайти рівняння поляри точки $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ відносно квадрики

$x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 = 0$; знайти полюс прямої $a(0:-1:2)$ відносно квадрики $G: x_2^2 + 4x_1x_3 = 0$.

3. Задано овальну квадрику G і точку $A \notin G$. Побудувати поляру даної точки.

4. Задано овальну квадрику G і пряму a . Побудувати полюс прямої a .

Календарний план-графік самостійної роботи для вивчення предмету

<i>План</i>	<i>Тиждень семестру</i>
Криві другого порядку в однорідних афінних координатах	6
Гармонійні властивості деяких чотиривершинників на розширеній евклідовій площині	8
Квадрики на розширеній евклідовій площині	14
Вчення про площі в геометрії Лобачевського	18
Аксіоматична побудова геометрії Гільбертом	18

Короткі теоретичні відомості

Криві другого порядку в однорідних афінних координатах

Нам відомі канонічні рівняння не вироджених кривих другого порядку, які належать різним афінним класам – еліпса, гіперболи і параболи

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y^2 = 2px.$$

Ці рівняння після переходу за формулами (2.4) [1] до однорідних координат і множення на x_3^2 приймають такий вигляд:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = x_3^2, \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = x_3^2, \quad x_2^2 = 2px_1x_3.$$

Криві площини $\bar{K}_2$, що відповідають останнім рівнянням, можуть відрізнятися від еліпса, гіперболи та параболи не власними точками, проте ми збережемо для них попередні назви.

Визначимо, як розташовані ці криві відносно не власної прямої a_∞ , для чого розв'яжемо рівняння кожної кривої спільно з рівнянням $x_3 = 0$.

У випадку еліпса отримуємо лише нульовий розв'язок $(0: 0: 0)$. Тому *еліпс невластних точок не має*.

У випадку гіперболи отримуємо точки $K_{\infty}(a:b:0)$ та $L_{\infty}(a:-b:0)$. Перша з них лежить на асимптоті $x_2 = \frac{b}{a}x_1$, а друга – на асимптоті $x_2 = -\frac{b}{a}x_1$. Отже, *гіпербола має дві невластні точки – невластні точки її асимптот*.

У випадку параболи обидві точки перетину співпадають в одній точці $M_{\infty}(1:0:0)$, яка лежить на осі параболи $x_2 = 0$. Отже, *парабола торкається невластної прямої у невластній точці*.

Для більш детального вивчення див. літературу [1], [2], [3], наведену в кінці розділу.

Гармонійні властивості деяких чотиривершинників на розширеній евклідовій площині

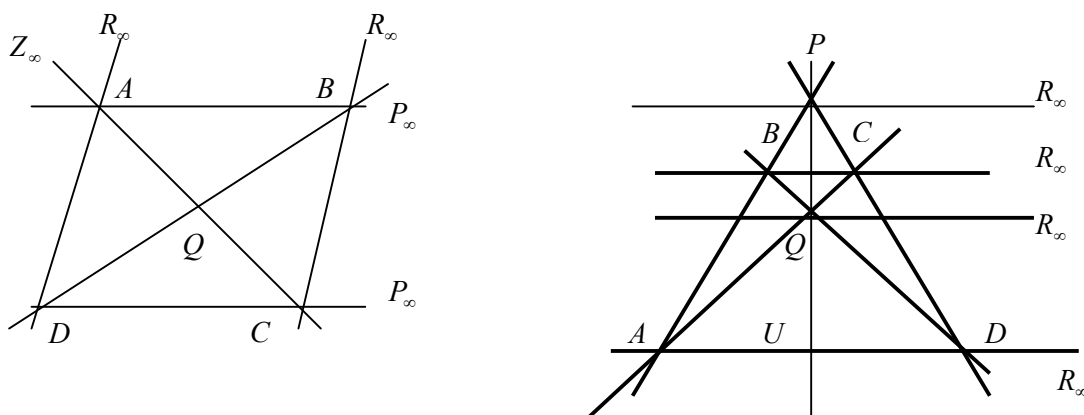
Певний інтерес представляє розгляд частинних випадків теореми про гармонійні властивості повного чотиривершинника на розширеній евклідовій площині, які виникають, якщо деякі елементи повного чотиривершинника є невластними.

1. Нехай невластними є дві діагональні точки P_{∞} та R_{∞} . У такому випадку чотиривершинник має дві пари паралельних протилежних сторін (рис. 1), а діагоналлю $P_{\infty}R_{\infty}$ є невластна пряма a_{∞} площини. Позначимо точку перетину прямих $(AC) \cap a_{\infty} = Z_{\infty}$. Ми отримали гармонійну четвірку (A, C, Q, Z_{∞}) . За відповідною теоремою випливає, що Q – середина відрізка AC .

Отже, теорема евклідової геометрії «*діагоналі паралелограма точкою перетину діляться пополам*» є частковим випадком теореми про гармонійні властивості повного чотиривершинника.

2. Нехай невластною є тільки одна діагональна точка R_{∞} , тоді чотиривершинник $ABCD$ має одну пару паралельних протилежних сторін (рис. 2). Тепер, позначивши $AD \cap PQ = U$, отримуємо гармонійну четвірку (A, D, U, R_{∞}) , а з цього випливає, що U – середина відрізка AD .

Отже, теорема евклідової геометрії «*пряма, що з'єднує точку перетину діагоналей трапеції з точкою перетину бічних сторін, ділить основу трапеції пополам*» є частинним випадком теореми про гармонійні властивості повного чотиривершинника.



Для більш детального вивчення див. [1], [2], [3].

Квадрики на розширеній евклідовій площині

Нехай задано рівняння квадрики на площині R_2 в афінних координатах

$$g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2 + 2g_{13}x + 2g_{23}y + g_{33} = 0.$$

Коефіцієнти цього рівняння можуть бути довільними числами, якщо старші коефіцієнти g_{11}, g_{12}, g_{22} не дорівнюють нулю одночасно.

У цьому рівнянні виконаємо перехід до однорідних афінних координат за формулами $x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$. У результаті отримаємо

квадрику G на площині $\bar{R}_2$. Рівняння цієї квадрики має вигляд

$$g_{11}x_1^2 + 2g_{12}x_1x_2 + g_{22}x_2^2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 + g_{33}x_3^2 = 0.$$

Квадрика G може відрізнятися від заданої лише невласними точками. Знайдемо їхню кількість. З цією метою розв'язуємо спільно рівняння квадрики G з рівнянням невласної прямої $x_3 = 0$. Отримуємо

$$g_{11}x_1^2 + 2g_{12}x_1x_2 + g_{22}x_2^2 = 0.$$

Це квадратне рівняння відносно $x_1 : x_2$ (або $x_2 : x_1$), число розв'язків якого залежить від дискримінанта $\Delta = g_{12}^2 - g_{11}g_{22}$. При $\Delta > 0$ невласних точок дві (гіпербола або пара перетинних дійсних прямих), при $\Delta = 0$ — одна (парабола або пара паралельних прямих, які можуть і співпадати), при $\Delta < 0$ квадрика не має невласних точок (еліпс або пара уявних перетинних прямих).

Тепер із врахуванням проективної класифікації квадрик отримуємо більш детальну класифікацію квадрик на площині R_2 , яка називається *афінною*:

Ранг	Знак Δ	Афінний клас	Проективний клас
3	–	Уявний еліпс	Нульова квадрика
		Еліпс	Овальна квадрика
	0	Парабола	
	+	Гіпербола	
2	–	Пара уявних перетинних прямих	Пара уявних прямих
	0	Пара уявних паралельних прямих	Пара прямих
		Пара паралельних прямих	
	+	Пара перетинних прямих	
1	0	Пара прямих, які співпадають	Пара прямих, які співпадають

Центр квадрики зазвичай визначається як точка, у якій діляться пополам всі хорди, які проходять через неї. На евклідовій площині R_2 еліпс і гіпербола мають центр, а парабола – ні.

Тепер перейдемо до розширеної евклідової площини $\bar{R}_2$. Довільна точка, гармонійно спряжена з центром еліпса чи гіперболи відносно цієї квадрики – це невласна точка. Звідси за означенням полярна впливає, що *полярною центра є невласна пряма*.

Означення. Центром овальної квадрики називається полюс невласної прямої.

Центр параболи є у її невластній точці.

Діаметр квадрики на площині R_2 зазвичай визначається як множина середин паралельних хорд. Доводиться, що всі середини лежать на прямій. Зручно називати діаметром всю цю пряму (рис. 3).

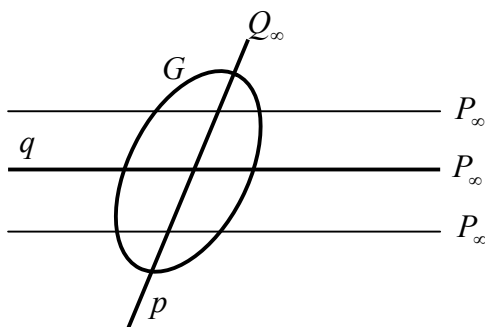


Рис. 3

На розширеній евклідовій площині $\bar{R}_2$ середини паралельних хорд гармонійно спряжені відносно квадрики з однією і тією ж невласною точкою P_∞ .

Означення. Діаметром овальної квадрики називається полярна невлавної точки.

Діаметр p ділить пополам всі паралельні хорди, які проходять через точку Q_∞ , а діаметр q – хорди, що проходять через P_∞ . Діаметри, які володіють такою властивістю, називаються спряженими.

Означення. Два діаметри називаються *спряженими*, якщо кожен з них проходить через полюс іншого.

Було встановлено, що гіпербола $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - x_3^2 = 0$ має невластні точки $K_\infty(a:b:0)$ і $L_\infty(a:-b:0)$. Знайдемо дотичні до гіперболи у цих точках. Для точки K_∞ маємо

$$(a, b, 0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

або $\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} = 0$.

Переходячи до неоднорідних координат, отримуємо рівняння асимптоти $y = \frac{b}{a}x$. Аналогічно і з дотичною до точки L_∞ .

Означення. Асимптотою квадрики називається дотична до неї у її невластній точці.

Еліпс невластних точок не має і тому не має асимптот. Асимптотою параболи на розширеній площині $\bar{R}_2$ є невластна пряма, на площині R_2 у параболи асимптот немає.

Для більш детального вивчення див. [1], [2], [3].

Вчення про площі в геометрії Лобачевського

Встановити поняття площі *простого* многокутника, зокрема трикутника, це означає – знайти спосіб поставити у відповідність кожному такому многокутнику *додатне число* так, щоб виконувалися вимоги:

- 1) конгруентним або рівним многокутникам були поставлені у відповідність рівні числа;
- 2) число, поставлене у відповідність многокутнику, який складений з двох суміжних многокутників, дорівнює сумі чисел, поставлених у відповідність кожному з цих суміжних многокутників (властивість адитивності).

Два простих багатокутники називаються *суміжними*, якщо вони мають одну або декілька спільних сторін, але не мають жодної спільної внутрішньої точки.

При виконанні вказаних вимог *числа*, поставлені у відповідність кожному простому багатокутнику, називаються *площами* відповідних багатокутників.

У геометрії Лобачевського достатньо кожному трикутнику поставити у відповідність число, пропорційне дефекту цього трикутника, щоб встановити систему вимірювання площ. Дефектом δ трикутника називається різниця між π і сумою кутів, тобто $\delta = \pi - (A + B + C)$. Площа будь-якого простого багатокутника визначається відповідно з властивістю адитивності як сума площ трикутників, на які можна розбити багатокутник, причому має місце незалежність площі від способу розбиття багатокутника на трикутники.

Теорема. Два трикутники, які мають рівні дефекти і по одній рівній стороні, рівновеликі.

Теорема. Площі двох трикутників, які мають по рівній стороні, відносяться, як їхні дефекти.

Теорема. Площі довільних трикутників відносяться, як їхні дефекти.

Наслідок. Відношення площі трикутника до його дефекту є величина стала, незалежна від трикутника.

Що менша сума кутів трикутника, то більша його площа. Навпаки, що менший трикутник за своїми розмірами, тобто, що менша його площа, то ближче до π сума його кутів.

Лобачевський детально розвиває усю теорію про площі, знаходить площу трикутника за трьома сторонами, шукає площі багатокутників, площу круга та його частин і, за допомогою інтегрального числення, може записати площу будь-якої фігури, для якої є сенс говорити про площу.

Для більш детального вивчення див. [2], [4].

Аксиоматична побудова геометрії Гільбертом

Аксиоматична побудова геометрії (як і будь-якої теорії) повинна починатися з переліку, по-перше, *категорій основних об'єктів*, по-друге, *основних відношень між цими об'єктами*, по-третє, *аксіом*. У подальшому розглядувані об'єкти в геометрії і відношення між

об'єктами повинні визначатися через основні, а всі теореми повинні доводитися на основі аксіом.

Основними об'єктами, з якими має справу геометрія, є: «точки», «прямі», «площини». Ці поняття не визначаються, не пояснюються, не описуються.

Основні відношення між основними об'єктами: «належати», «між», «бути рівними». Ці основні відношення не визначаються, не пояснюються, не описуються. Геометрія і починає з *основних об'єктів та основних відношень* між ними.

У 1899 р. вийшла книга німецького математика Д. Гільберта «Основи геометрії». У цій книзі автор дає список аксіом, достатній для логічної побудови евклідової геометрії. З цієї книги, власне, починається сучасний аксіоматичний метод у математиці.

Перша група аксіом: аксіоми належності

Основне відношення – «належати».

I_1 . Для будь-яких двох точок A, B існує пряма a , яка належить кожній з цих двох точок A, B .

I_2 . Для двох точок A, B існує не більше однієї прямої, яка належить кожній з точок A, B .

I_3 . На прямій існує принаймні дві точки. Існує принаймні три точки, які не лежать на одній прямій.

I_4 . Для будь-яких трьох точок A, B, C , які не лежать на одній прямій, існує площина α , яка належить кожній з цих трьох точок A, B, C . Для будь-якої площини завжди існує належна їй точка.

I_5 . Для будь-яких трьох точок A, B, C , які не лежать на одній прямій, існує не більше однієї площини, яка належить цим точкам.

I_6 . Якщо дві точки A, B прямої a лежать в площині α , то довільна точка прямої a лежить в площині α .

I_7 . Якщо дві площини α і β мають спільну точку A , то вони мають принаймні ще одну спільну точку B .

I_8 . Існують принаймні чотири точки, які не лежать на одній площині.

Аксіоми I_{1-3} називаються *площинними аксіомами групи I*, а I_{4-8} – *просторовими аксіомами групи I*.

Друга група аксіом

Основне поняття – «між».

Π_1 . Якщо точка B лежить між точками A і C , то A, B, C є три різні точки прямої і B лежить також між C і A .

Π_2 . Для будь-яких точок A і C на прямій AC існує принаймні одна точка B така, що точка C лежить між A і B .

Π_3 . Серед будь-яких трьох точок прямої існує не більше однієї точки, яка лежить між двома іншими.

Третя група аксіом: аксіоми рівності та руху

Основне поняття – «рівний».

Π_1 . Якщо A, B є дві точки на прямій a і A' – точка на цій же прямій або на іншій прямій a' , то завжди можна знайти точку B' , яка лежить по заданий від точки A' бік прямої a' і при тому таку, що відрізок AB рівний відрізку $A'B'$.

Π_2 . Якщо відрізок $A'B'$ і відрізок $A''B''$ рівні одному і тому ж відрізку AB , то відрізок $A'B'$ рівний також і відрізку $A''B''$; іншими словами, якщо два відрізки рівні третьому, то вони рівні між собою.

Π_3 . Нехай AB і BC є два відрізки прямої a , які не мають жодної спільної точки, і нехай $A'B'$ і $B'C'$ є два відрізки тієї ж прямої або іншої прямої a' , які також не мають спільної точки; якщо при цьому $AB \equiv A'B'$ і $BC \equiv B'C'$, то і $AC \equiv A'C'$.

Π_4 . Нехай задано $\angle(h, k)$ в площині α і пряма a' в площині α' , а також визначений відносно a' бік площини α' . Нехай h' означає промінь прямої a' , який виходить з точки O' . Тоді в площині α' існує один і тільки один промінь k' такий, що кут (h, k) рівний куту (h', k') і разом з тим усі внутрішні точки кута (h', k') лежать по заданий бік від a' . Це відношення між кутами позначається так: $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$.

Π_5 . Якщо для двох трикутників ABC та $A'B'C'$ мають місце рівності $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, то має місце також і рівність $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

Четверта група аксіом: аксіома про паралельні

IV . (аксіома Евкліда). Нехай a – довільна пряма і A – точка, яка лежить зовні прямої, тоді у площині, що визначається точкою A і прямою a , існує не більше однієї прямої, яка проходить через точку A і не перетинає пряму a .

П'ята група аксіом: аксіоми неперервності

V_1 . (аксіома вимірювання або аксіома Архімеда). Нехай AB і CD – два довільних відрізки, тоді на прямій AB існує скінченне число точок $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ таких, що відрізки $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ рівні відрізку CD і точка B лежить між A і A_n .

V_2 . (аксіома лінійної повноти). Точки прямої утворюють систему, яка при збереженні лінійного порядку, першої аксіоми про рівність і аксіоми Архімеда (тобто аксіом I_{1-2}, II, III, V_1) не допускає ніякого розширення.

Аксіома Дедекінда. Якщо всі точки прямої розподілені на два класи так, що при цьому:

- 1) кожна точка належить до одного і тільки до одного класу і кожен клас містить точки;
- 2) кожна точка першого класу передуює кожній точці другого, то або в першому класі існує точка, якій передують усі решта точок першого класу, або у другому класі існує така точка, яка передуює усім решта точкам другого класу.

Для більш детального вивчення див. [2], [4].

Література

1. Галь Ю., Золота О. Проективна геометрія та основи геометрії. Дрогобич: Редакційно-видавничий відділ ДДПУ ім. І. Франка, 2011. – 125 с.
2. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М. : Наука, 1971. – 576 с.
3. Певзнер С. Л. Проективная геометрия. М. : Просвещение, 1980. – 112 с.
4. Кутузов Б. В. Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрий. М. : УЧПЕДГИЗ , 1950. – 127 с.

Запитання для самоконтролю

Проективна геометрія на прямій

1. Сформулюйте аксіоми проективної геометрії.
2. Що таке розширена евклідова пряма та проективна пряма?
3. Як вводиться проективна система координат на прямій?
4. Запишіть рівняння переходу від однієї системи координат до іншої.
5. Сформулюйте означення подвійного відношення чотирьох точок.

6. Як змінюється подвійне відношення при зміні порядку точок у четвірці?
7. Яка четвірка точок називається гармонійною?

Поняття проєктивної площини

1. Сформулюйте означення розширеної евклідової площини та проєктивної площини.
2. Як вводиться проєктивна система координат на площині?
3. Запишіть рівняння прямої та пучка.
4. У чому полягає відмінність між однорідною та неоднорідною афінними системами координат?
5. Як пов'язані однорідні афінні координати власної точки з її неоднорідними координатами?

Найпростіші факти геометрії проєктивної площини

1. Сформулюйте принцип двоїстості та теорему Дезарга.
2. Як визначається подвійне відношення чотирьох точок і прямих на площині?
3. Що таке повний чотиривершинник та чотиристоронник?
4. Якими гармонійними властивостями володіє повний чотиривершинник?

Проективні перетворення

1. Сформулюйте означення перспективного та проєктивного відображень прямої на пряму.
2. Що називається проєктивним перетворенням прямої на пряму?
3. Що таке інволюція? Сформулюйте умову інволюційності.
4. Яке перетворення називається колінеацією?
5. Сформулюйте означення центрального проектування.
6. Якими властивостями володіє гомологія?

Квадрики

1. Сформулюйте означення квадрики. Запишіть її матрицю.
2. Які квадрики існують на проєктивній площині?
3. Як можна задати лінію другого порядку?

4. Запишіть рівняння дотичної до квадрики.
5. Які точки називаються гармонійно спряженими відносно лінії другого порядку?
6. Сформулюйте означення полярів та полюсів.
7. Який тривершинник називається автополярним?
8. Сформулюйте теореми Паскаля та Бріаншона.
9. Що таке центр, діаметр та асимптота квадрики на розширеній евклідовій площині?

Основи геометрії

1. Коротко охарактеризуйте Евклідові «Начала».
2. У чому полягають недоліки цієї книги?
3. Сформулюйте теореми Лежандра-Саккері про суму кутів трикутника.
4. Сформулюйте еквіваленти V постулату Евкліда.
5. Які прямі називаються паралельними у сенсі Лобачевського?
6. Якими властивостями володіють ці прямі?
7. Сформулюйте теорему про перший перпендикуляр на площині Лобачевського.
8. Що таке дефект трикутника?
9. На які групи діляться аксіоми Гільберта?

Завдання для підсумкової контрольної роботи

1. Означення розширеної евклідової прямої та проєктивної прямої.
2. Означення подвійного відношення чотирьох точок.
3. Означення проєктивної площини.
4. Означення однорідної афінної системи координат на розширеній евклідовій площині.
5. Означення двоїстих фігур. Принцип двоїстості.
6. Теорема Дезарга (з рисунком).
7. Двоїста теорема Дезарга (з рисунком).
8. Означення подвійного відношення чотирьох прямих.
9. Означення повного чотиривершинника та діагонального тривершинника.
10. Означення перспективного відображення прямої на пряму.
11. Означення проєктивного відображення прямої на пряму та інволюції.

12. Означення перспективного відображення площини у в'язку.
13. Означення колінеації та гомології.
14. Означення лінії другого порядку (квадрики) та її матриці.
15. Означення гармонійно спряжених точок відносно квадрики.
16. Означення поляри.
17. Означення полюсу.
18. Означення автополярного тривершинника.
19. Теорема Паскаля (з рисунком).
20. Теорема Бріансона (з рисунком).
21. Проективна система координат на прямій.
22. Подвійне відношення чотирьох точок на прямій. Гармонізм.
23. Проективна система координат на площині.
24. Проективне відображення прямої на пряму.
25. Задання інволюції, колінеації та гомології.
26. Квадрики та їхня класифікація.
27. Взаємне розташування прямої та квадрики.
28. Коротка характеристика книги «Начала» Евкліда. Еквіваленти V постулату Евкліда.
29. Деякі факти геометрії Лобачевського.
30. Аксиоматична побудова геометрії.

Методичні поради для підготовки до практичних занять

Практичне заняття № 1 – 2. Проективна геометрія на прямій.

План

1. Проективна пряма. Проективна система координат на прямій.
2. Подвійне відношення чотирьох точок. Гармонізм.
3. Подвійне відношення чотирьох точок на розширеній евклідовій прямій.

Необхідно знати:

- означення розширеної евклідової прямої та проективної прямої, подвійного відношення чотирьох точок та гармонійної четвірки точок;
- рівняння переходу від однієї системи координат до іншої;
- як змінюється подвійне відношення при зміні порядку точок у четвірці.

Необхідно вміти:

- знаходити координати точок у різних проективних системах координат, рівняння переходу від однієї системи до іншої, проективні (однорідні) координати точок, якщо вони задані неоднорідними координатами на евклідовій прямій;
- обчислювати подвійне відношення чотирьох точок.

Див. літературу [1], [2], [4], [5], наведену в кінці розділу.

Практичне заняття № 3 – 4. Поняття проективної площини.

План

1. Проективна система координат.
2. Однорідні афінні координати на розширеній евклідовій площині.
3. Криві другого порядку в однорідних афінних координатах.

Необхідно знати:

- означення розширеної евклідової площини та проективної площини, рівняння прямої та пучка;

– у чому полягає відмінність між однорідною та неоднорідною афінними системами координат та як пов'язані однорідні афінні координати власної точки з її неоднорідними координатами?

Необхідно вміти:

– знаходити рівняння проєктивних прямих, пучка, координати точок у різних проєктивних системах координат, рівняння переходу від однієї системи до іншої.

Див. літературу [1], [2], [4], [5].

Практичне заняття № 5. Найпростіші факти геометрії проєктивної площини.

План

1. Принцип двоїстості. Теорема Дезарга.
2. Подвійне відношення чотирьох точок і прямих на площині.
3. Повний чотиривершинник і чотиристоронник.

Необхідно знати:

– принцип двоїстості та теорему Дезарга;
– означення подвійного відношення чотирьох точок і прямих на площині, чотиривершинника та чотиристоронника;
– якими гармонійними властивостями володіє повний чотиривершинник.

Необхідно вміти:

– будувати конфігурації Дезарга;
– користуватися повним чотиривершинником для побудови гармонійних точок та інших побудов, що виконуються однією лінійкою на розширеній площині;
– застосовувати принцип двоїстості.

Див. літературу [1], [2], [3], [4].

Практичне заняття № 6 – 7. Проєктивні перетворення.

План

1. Проєктивне перетворення прямої.
2. Інволюції.
3. Колінеації.
4. Гомології.

Необхідно знати:

– означення перспективного та проєктивного відображень прямої на пряму, проєктивного перетворення прямої на пряму, інволюції, колінеації, центрального проєктування, гомології та властивості цих проєктивних перетворень.

Необхідно вміти:

– знаходити образи заданих точок при різних проєктивних перетвореннях;
– будувати образи точок при перетворенні прямої, образи точок та прямих при колінеаціях та гомологіях.

Див. літературу [1], [2], [3], [4], [5].

Практичне заняття № 8. Квадрики.

План

1. Квадрики та їхня класифікація.
2. Поляри і полюси.
3. Теореми Паскаля і Бріаншона.

Необхідно знати:

– означення квадрики (їхню класифікацію), гармонійно-спряжених точок відносно лінії другого порядку, поляри та полюса, автополярного тривершинник;
– теореми Паскаля та Бріаншона.

Необхідно вміти:

– зводити до канонічного вигляду рівняння квадрики;
– знаходити рівняння поляри точки, координати полюсу прямої;
– будувати поляри, полюси та автополярні тривершинники;
– будувати невідомі точки квадрики, використовуючи теорему Паскаля.

Див. літературу [1], [2], [4], [5].

Література

1. Атанасян Л. С. Сборник задач по геометрии. Ч. 2. М. : Просвещение, 1975. – 176 с.
2. Галь Ю., Золота О. Проективна геометрія та основи геометрії. Дрогобич: Редакційно-видавничий відділ ДДПУ ім. І. Франка, 2011. – 125 с.
3. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М. : Наука, 1971. – 576 с.
4. Певзнер С. Л. Проективная геометрия. М. : Просвещение, 1980. – 112 с.

5. Певзнер С. Л., Цаленко М. М. Задачник-практикум по проективной геометрии. М. : Просвещение, 1982. – 80 с.

Зразок оформлення підсумкової контрольної роботи

Σ 50 балів

1. Означення розширеної евклідової прямої та проективної прямої. (2 бали)
2. Означення однорідної афінної системи координат на розширеній евклідовій площині. (2 бали)
3. Означення лінії другого порядку (квадрики) та її матриці. (2 бали)
4. Означення автополярного тривершинника. (2 бали)
5. Теорема Дезарга (з рисунком). (2 бали)
6. Проективна система координат на площині. (20 балів)
7. Проективне відображення прямої на пряму. (20 балів)

Σ 15 балів

1. На проективній прямій задано дві системи координат R і R' . Знайти рівняння переходу від однієї системи до другої, якщо відомі координати фундаментальних точок E'_0, E'_1, E'_2 системи R' у системі R : $E'_0(a:b), E'_1(c:d), E'_2(m:n)$. (4 бали)

2. Задано шість точок A_i :

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} a_5 \\ b_5 \\ c_5 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} a_6 \\ b_6 \\ c_6 \end{pmatrix}.$$

Довести, що точки $P = (A_1 A_2) \cap (A_4 A_5)$, $Q = (A_2 A_3) \cap (A_5 A_6)$, $R = (A_3 A_4) \cap (A_6 A_1)$ лежать на одній прямій (з рисунком). (7 балів)

3. Побудувати точку D – четверту гармонійну до A, B, C таку, щоб $(ACBD) = -1$. (4 бали)

Нижче наведено приклади розв'язання задач з підсумкової контрольної роботи.

Приклад 1. Задано дві системи проективних координат на прямій **P1**: $R = R(E_i)$ і $R' = R(E'_i)$, причому відомі координати точок E'_i , $i = 1, 2, 0$ у системі R :

$$E'_1(0:1), \quad E'_2(1:2), \quad E_0(2:-1).$$

Знайти рівняння переходу від однієї системи до другої.

Розв'язок. Рівняння переходу будемо шукати у вигляді (1.3):

$$\begin{cases} \mu x_1 = q_{11}x'_1 + q_{12}x'_2, \\ \mu x_2 = q_{21}x'_1 + q_{22}x'_2. \end{cases}$$

Нам відомі координати фундаментальних точок E'_i у двох координатних системах:

Точки	E'_1	E'_2	E_0
У системі R	0 : 1	1 : 2	2 : -1
У системі R'	1 : 0	0 : 1	1 : 1

Підставляючи ці координати у рівняння переходу, отримуємо шість рівнянь. При цьому слід пам'ятати, що коефіцієнт пропорційності μ для кожної з трьох точок має своє значення. Тоді отримуємо:

$$\begin{cases} 0 = q_{11}, & \begin{cases} \mu_2 = q_{12}, \\ 2\mu_2 = q_{22}; \end{cases} & \begin{cases} 2\mu_0 = q_{11} + q_{12}, \\ -\mu_0 = q_{21} + q_{22}. \end{cases} \end{cases}$$

Значення q_{ij} із перших чотирьох рівнянь підставляємо у два останні:

$$\begin{cases} 2\mu_0 = \mu_2, \\ -\mu_0 = \mu_1 + 2\mu_2. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо $\mu_1 = -5\mu_0$, $\mu_2 = 2\mu_0$, тому

$$q_{11} = 0, \quad q_{12} = 2\mu_0, \quad q_{21} = -5\mu_0, \quad q_{22} = 4\mu_0.$$

Оскільки матриця Q визначена з точністю до множника, то, поклавши $\mu_0 = 1$, отримуємо $q_{11} = 0$, $q_{12} = 2$, $q_{21} = -5$, $q_{22} = 4$. Тоді рівняння переходу мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \mu x_1 = 2x'_2, \\ \mu x_2 = -5x'_1 + 4x'_2. \end{cases}$$

Приклад 2. Нехай A, B, C, D — чотири довільні точки, з яких жодні три неколінеарні і

$$A_1 = (AD) \cap (BC), B_1 = (BD) \cap (AC), C_1 = (CD) \cap (AB),$$

$$P = (BC) \cap (B_1C_1), Q = (AC) \cap (A_1C_1), R = (AB) \cap (A_1B_1).$$

Довести, що точки P, Q, R колінеарні.

Розв'язок. Введемо систему проєктивних координат, позначивши через A, B, C, D фундаментальні точки, тобто

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо координат точок A_1, B_1, C_1 . Маємо

$$A_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси $\alpha + \beta = 0$, і, поклавши $\beta = 1$, отримаємо $\alpha = -1$. Отже, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Аналогічно,

$$B_1 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

звідки $\alpha + \beta = 0$, $\beta = 1$, $\alpha = -1$. Отже, $B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Маємо

$$C_1 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки отримаємо, що $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Тепер знайдемо координати точок P, Q, R :

$$P = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ звідки } \gamma + \delta = 0, \delta = 1, \gamma = -1 \text{ і } P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$Q = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ звідки } \gamma + \delta = 0, \delta = 1, \gamma = -1 \text{ і } Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$R = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ звідки } \gamma + \delta = 0, \delta = 1, \gamma = -1 \text{ і } R = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Знаючи координати точок P, Q, R , обчислимо $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Отже, точки P, Q, R — колінеарні.

Приклад 3. Для трьох даних точок A, B, C на прямій побудувати четверту гармонійну точку D .

Розв'язок. Прийемо цю пряму за сторону, точки A і B – за вершини, точку C – за діагональну точку повного чотиривершинника (рис. 4). Через C проведемо довільну сторону, яка не співпадає з (AB) , на ній довільно виберемо дві точки X і Y , які прийемо за вершини повного

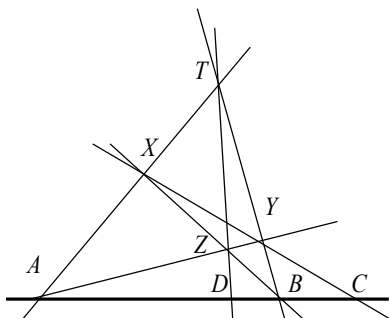


Рис. 4

чотиривершинника $ABXY$. Тепер будуємо діагональні точки $T = (AX) \cap (BY)$, $Z = (BX) \cap (AY)$ і проводимо через них діагональ TZ . Точка перетину діагоналі з цією прямою і буде шукана точка D .

Навчальне видання

Юрій Галь, Ольга Золота

**МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З
ПРОЕКТИВНОЇ ГЕОМЕТРІЇ
ТА ОСНОВ ГЕОМЕТРІЇ**

Навчально-методичний посібник

для студентів напрямів підготовки
«6. 040201 Математика. Спеціалізація: економіка»,
«6. 040201 Математика. 6. 040203 Фізика»

**Редакційно-видавничий відділ
Дрогобицького державного педагогічного університету
імені Івана Франка**

Головний редактор
Ірина Невмержицька

Редактор

Леся Грабинська

Технічний редактор
Наталія Намачинська

Коректор

Наталія Ільницька

Здано до набору 26.12. 2011 р. Підписано до друку 11. 01.2012 р. Формат 60х90/16. Папір офсетний. Гарнітура Times. Наклад 300 прим. Ум. друк. арк. 1,75. Зам. 27 .

Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 2155 від 12. 04. 2005 р.) 82100, Дрогобич, вул. І.Франка, 24, к.42, тел. 2 – 23 – 78.