

Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка

Юрій Галь, Ольга Золота

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчально-методичний посібник

Дрогобич

2017

Рекомендовано до друку вченою радою
Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана
Франка (протокол № 16 від 27. 09. 2017 р.)

Рецензенти:

Дільний Володимир Миколайович – доктор фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка;

Дорошенко Микола Васильович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформатики та обчислювальної математики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Відповідальний за випуск: Винницький Богдан Васильович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Юрій Галь, Ольга Золота

Г 17 Інтегральні рівняння : навчально-методичний посібник /
Юрій Галь, Ольга Золота. – Дрогобич : Редакційно-
видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного
університету імені Івана Франка, 2017. – 146 с.

Посібник написано відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Інтегральні рівняння» для підготовки фахівців другого (магістерського) рівня вищої освіти галузей знань 01 «Освіта» та 11 «Математика» спеціальностей 014 «Середня освіта (Математика)» та 111 «Математика», затвердженої науково-методичною радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

ЗМІСТ

Передмова.....	5
Розділ I	
1.1. Задачі, які приводять до розв'язування до інтегральних рівнянь.....	7
1.2. Класифікація інтегральних рівнянь.....	14
1.3. Приклади.....	15
1.4. Метод ітерацій для рівняння Фредгольма другого роду з малим ядром.....	17
1.5. Ітеровані ядра. Резольвента.....	21
1.6. Рівняння Вольтерра другого роду.....	25
1.7. Інтегральні рівняння резольвенти.....	29
1.8. Приклади.....	30
Розділ II	
2.1. Деякі відомості з теорії лінійних алгебраїчних рівнянь.....	34
2.2. Наближене розв'язування інтегральних рівнянь за допомогою системи лінійних алгебраїчних рівнянь.....	38
2.3. Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з виродженим ядром	44
2.4. Приклади.....	51
2.5. Теорема Фредгольма для інтегральних рівнянь з ядрами, близькими до вироджених.....	52
2.6. Теорема Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервними ядрами.....	56
2.7. Рівняння Фредгольма і Вольтерра першого роду.....	57
2.8. Інтегральні рівняння з полярним ядром.....	59
Розділ III	
3.1. Ортогональні системи функцій, нерівність Буняковського.....	65
3.2. Збіжність у середньому, простір L_2	67
3.3. Узагальнений ряд Фур'є, нерівність Бесселя	70
3.4. Ортогоналізація системи лінійно незалежних функцій	76

3.5. Узагальнена нерівність Буняковського.....	81
3.6 Теорема Гільберта	85
3.7. Деякі властивості власних значень і власних функції дійсного симетричного ядра.....	94
3.8. Теорема Гільберта-Шмідта.....	110
3.9. Приклади	119
3.10. Теорема про розклад симетричного ядра	122
3.11. Формула Шмідта	128
3.12. Розклад у ряд ітерованих ядер і резольвенти	131
3.13. Дефінітні і квазідефінітні ядра	136
3.14. Приклади	142
Література.....	144

ПЕРЕДМОВА

Інтегральні рівняння та методи їхнього дослідження широко використовуються у різних галузях і розділах сучасної науки й техніки, наприклад, у теорії пружності, теорії пластичності, гідродинаміці, теорії керування, біомеханіці, економіці, медицині. Саме теорія інтегральних рівнянь займає важливе місце у системі підготовки фахівців із математики, прикладної математики, фізики, механіки, електроніки, матеріалознавства тощо.

Метою посібника є ознайомлення з основними поняттями, твердженнями, методами та застосуваннями сучасної теорії інтегральних рівнянь, сприяння глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу за допомогою розв'язаних прикладів і задач різного рівня складності. Посібник охоплює основні точні та наближені методи розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма та Вольтерра, інтегральні рівняння з виродженим ядром, симетричні інтегральні рівняння.

Перший розділ містить наведені основні поняття і твердження теорії інтегральних рівнянь, коротку класифікацію інтегральних рівнянь, сфери їхнього застосування.

У другому розділі вивчаються інтегральні рівняння з виродженим ядром. Наведені теореми Фредгольма, метод зведення довільних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду до рівнянь з виродженим ядром, метод наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма II роду, ітераційні методи розв'язування інтегральних рівнянь II роду. Зокрема, обґрунтовується

застосування принципу стискуючих відображень до лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма та Вольтерра II роду.

Третій розділ присвячений розгляду питань, що стосуються основних понять функціонального аналізу та їхнього застосування до розв'язування деяких інтегральних рівнянь.

Для кращого розуміння важливих понять, теорем, методів в усіх розділах наведені приклади розв'язування конкретних задач.

Розділ I

1.1. Задачі, які приводять до розв'язування інтегральних рівнянь

Задачі теоретичної фізики, коливання механічних систем, автоматичного регулювання і цілий ряд інших математичних задач часто приводять до рівнянь, які в літературі називаються *інтегральними* рівняннями. Наприклад, наведені два рівняння $\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xy\varphi(y)dy + \frac{5}{6}x$, $\varphi(x) = \int_0^x \varphi(s)ds + 1$, у яких $\varphi(x)$ – невідома функція, яка міститься під знаком інтеграла, прийнято називати *інтегральними рівняннями*.

Поширене в літературі визначення інтегрального рівняння як рівняння, в якого шукана функція міститься під знаком інтеграла, не можна вважати строгим. У такому визначенні не відображено, які дії, крім інтегрування, можна виконувати над невідомою функцією. Наприклад, якщо в рівнянні

$$P(x) \lim_{h \rightarrow 0} \int_x^{x+h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(s+h) - 2\varphi(s) + \varphi(s-h)}{h^2} ds + q(x)\varphi(x) = f(x) \quad (1.1)$$

здійснити граничний перехід, можна показати, що воно зводиться до диференціального рівняння $P(x)\varphi''(x) + q(x)\varphi(x) = f(x)$.

Отже, рівняння (1.1) буде не інтегральним, а диференціальним рівнянням другого порядку. Тому важко точно вказати дію, яку треба виконати над шуканою функцією, щоб рівняння було інтегральним. Отже, не ставлячи перед собою задачу дати загальне визначення інтегрального рівняння, обмежимося далі перерахуванням найбільш важливих типів інтегральних рівнянь.

Уперше в історії математики ми зустрічаємося з рівнянням, у якому шукана функція перебуває під знаком інтеграла, в праці французького математика Ж. Фур'є (1768 – 1830), виданій у 1811 році, не враховуючи тривіальний випадок $\int_0^x \varphi(s)ds = f(x)$, де $f(x)$ – невідома функція, $\varphi(x) = f'(x)$ очевидний розв'язок.

У формулах перетворення Фур'є

$$F(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \cos tu \, du, \quad (2.1)$$

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(t) \cos xt \, dt \quad (3.1)$$

функцію $F(t)$ можна розглядати як розв'язок інтегрального рівняння (3.1), де $F(t)$ – шукана, а $f(x)$ – задана функція.

У 1826 р. норвезький математик Абель (1802 – 1826) отримав інтегральні рівняння, розв'язуючи наступну задачу.

I. Задача Абеля. Матеріальна точка під дією сили тяжіння рухається у вертикальній площині ξ ОУ по деякій гладкій кривій $\overline{AB}$. Задача Абеля полягає у знаходженні такої кривої $\xi = f(y)$, час падіння по якій матеріальної точки з положення A на висоті $y=x$ у положення B було б наперед заданою функцією від висоти,

$$\text{тобто } t^* = \varphi(x).$$

Позначимо швидкість матеріальної точки на висоті y через $v = \sqrt{2q(x-y)}$, де q – прискорення вільного падіння. У точці A швидкість матеріальної точки дорівнює нулю. Диференціал дуги шуканої кривої визначається за формулою

$$ds = \sqrt{1 + [f'(y)]^2} \, dy.$$

$$\text{Очевидно, } \frac{ds}{dt} = v. \text{ Звідси, } dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + [f'(y)]^2}}{\sqrt{2q(x-y)}} \, dy.$$

Проінтегрувавши отримане рівняння по $0 \leq t \leq t^*$ і по $0 \leq y \leq x$, отримаємо

$$t^* = - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-y}} \cdot \frac{\sqrt{1 + [f'(y)]^2}}{\sqrt{2q}} \, dy.$$

$$\text{Позначивши } K(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x-y}}, \quad \Psi(y) = - \frac{\sqrt{1 + [f'(y)]^2}}{\sqrt{2q}}$$

і враховуючи, що $t^* = \varphi(x)$, отримаємо

$$\int_0^x K(x, y) \Psi(y) dy = \varphi(x). \quad (4.1)$$

Рівняння (4.1) називають інтегральним рівнянням італійського математика Вольтера (1860 – 1940) першого роду, у якому шукана функція $\Psi(y)$ стоїть під знаком інтеграла. Відома функція $K(x, y)$ називається ядром інтегрального рівняння. Отже, задача Абеля зводиться до відшукування розв'язку рівняння Вольтера першого роду (4.1).

2. Як другий приклад розглянемо задачу Коші для рівняння

$$y^{(n)}(x) = f(x). \quad (5.1)$$

Загальний розв'язок рівняння (5.1), як відомо, має вигляд

$$y(x) = \underbrace{\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x}_{n} f(t) \underbrace{dt dt \dots dt}_n + c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}.$$

Перетворимо n -кратний інтеграл у простий.

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(t) dt dt \dots dt = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt. \quad (6.1)$$

Отже, загальний розв'язок задачі Коші для рівняння (5.1) запишеться у вигляді

$$y(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt + c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}. \quad (7.1)$$

Розв'язок задачі Коші для рівняння (5.1) з початковими умовами $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y_{01}$; $\dots$; $y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}$, можна зобразити в наступному вигляді

$$y(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt + y_0 + y_{01}(x-x_0) + \dots + \frac{y_{0,n-1}}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1}. \quad (8.1)$$

Якщо права частина рівняння (5.1) має вигляд $\lambda f(x)y$, то розв'язок відповідної задачі Коші згідно з формулою (8.1) буде мати вигляд

$$y(x) = \lambda \int_{x_0}^x K(x, t) y(t) dt + \varphi(x), \quad (9.1)$$

де

$$K(x, t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f t ,$$

$$\varphi(x) = y_0 + y_{01}(x-x_0) + \dots + \frac{y_{0,n-1}}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1}.$$

Рівняння (9.1) називається неоднорідним інтегральним рівнянням Вольтера другого роду, у якому ядро $K(x, t)$, $\varphi(x)$ – відомі функції; λ – параметр.

3. Розглянемо диференціальне рівняння (5.1) при $n=2$ з крайовими умовами $y(0) = a$, $y(\ell)=b$. Згідно з формулою (7.1) загальний розв'язок рівняння $y''=f(x)$ задається так

$$y(x) = \int_0^x (x-t) f(t) dt + c_0 + c_1 x. \quad (10.1)$$

Поклавши в рівнянні (10.1) спочатку $x=0$, а потім $x=\ell$, і враховуючи крайові умови, отримаємо довільні сталі c_0 і c_1 :

$$c_0 = a,$$

$$c_1 = \frac{b-a}{\ell} - \frac{1}{\ell} \int_0^\ell (\ell-t) f(t) dt.$$

Тепер співвідношення (10.1) перепишеться так

$$y(x) = \varphi(x) + \int_0^x (x-t) f(t) dt - \frac{x}{\ell} \int_0^\ell (\ell-t) f(t) dt ,$$

де $\varphi(x) = a + \frac{b-a}{\ell} x$, або

$$\begin{aligned} y(x) &= \varphi(x) + \int_0^x (x-t) f(t) dt - \frac{x}{\ell} \int_0^x (\ell-t) f(t) dt - \frac{x}{\ell} \int_x^\ell (\ell-t) f(t) dt = \\ &= \varphi(x) + \int_0^x \frac{x-\ell}{\ell} t f(t) dt - \int_x^\ell \frac{\ell-t}{\ell} x f(t) dt. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Введемо функцію

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{\ell-x}{\ell} t, & t \leq x \\ \frac{\ell-t}{\ell} x, & x \leq t \end{cases} \quad (12.1)$$

Тоді рівняння (11.1) можна зобразити у вигляді

$$y(x) = \varphi(x) - \int_0^{\ell} G(x, t) f(t) dt.$$

Отриманий результат застосуємо до лінійного рівняння

$$y'' + \lambda p(x)y = \omega(x)$$

при крайових умовах: $y(0) = a$, $y(\ell) = b$. У нашому випадку $f(x) = \omega(x) - \lambda p(x)y$.

Остаточно отримаємо рівняння

$$y(x) = F(x) + \lambda \int_0^{\ell} G(x, t) p(t) y(t) dt, \quad (13.1)$$

де $F(x) = \varphi(x) - \lambda \int_0^{\ell} G(x, t) \omega(t) dt$ – відома функція. При $p(x) = 1$ будемо мати

$$y(x) = F(x) + \lambda \int_0^{\ell} G(x, t) y(t) dt. \quad (14.1)$$

Рівняння (14.1) називається неоднорідним рівнянням шведського математика Е. Фредгольма (1866 – 1927) другого роду.

Ядро $G(x, t)$ називається симетричним, якщо виконується умова: $G(x, t) = G(t, x)$. Очевидно, що ядро $G(x, t)$, визначене за формулою (12.1), симетричне. Отже, рівняння (14.1) є рівнянням Фредгольма другого роду з симетричним ядром $G(x, t)$. Легко бачити, що ядро $G(x, t)$ – неперервна функція у квадраті $\{0 \leq x \leq \ell; 0 \leq t \leq \ell\}$, а на діагоналі цього квадрата, тобто при $x=t$, перша похідна від ядра має розрив першого роду

$$\frac{\partial G(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=t+0} - \frac{\partial G(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=t-0} = -1.$$

Вищезгадане ядро, як функція від x , поза діагоналлю квадрата є розв'язком однорідного рівняння $y'' = 0$, яке задовольняє однорідні крайові умови $y(0) = y(\ell) = 0$.

Розглянемо однорідне рівняння

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (15.1)$$

при однорідних крайових умовах $y(0)=y(\ell)=0$. Ця задача, згідно з формулою (14.1), зводиться до розв'язку інтегрального рівняння

$$y(x)=\lambda \int_0^{\ell} G(x,t)y(t)dt, \quad (16.1)$$

яке називається однорідним рівнянням Фредгольма другого роду, на відміну від рівняння (14.1), що називається неоднорідним рівнянням Фредгольма другого роду.

Очевидно, розв'язком рівняння (16.1) при однорідних крайових умовах є функція $y(x)\equiv 0$, яка називається тривіальним розв'язком рівняння (16.1).

Ті значення λ , при яких рівняння (16.1) має нетривіальні розв'язки, називаються власними значеннями, а відповідні нетривіальні розв'язки – власними функціями інтегрального рівняння (16.1).

З цього визначення випливає, що $\lambda=0$ не може бути власним значенням рівняння (16.1).

Задача знаходження власних значень і власних функцій є центральною задачею теорії інтегральних рівнянь.

4. Різноманітні задачі, які описуються як звичайними диференціальними рівняннями, так і рівняннями у частинних похідних, зводяться до одного і того ж типу інтегральних рівнянь.

Розглянемо звичайне лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + p(x) \frac{du}{dx} + q(x)u = f(x) \quad (17.1)$$

з початковими умовами

$$u(0)=0 ; \quad u'(0)=0. \quad (18.1)$$

Нульові початкові умови не зменшують загальності розглянутої задачі, оскільки у випадку

$$u(0)=A; \quad u'(0)=B$$

підстановка

$$z(x)=u(x) - (Bx+A)$$

приводить до нульових початкових умов.

При нульових початкових умовах очевидною є рівність

$$u(x)=\int_0^x u'(s)ds. \quad (19.1)$$

Введемо позначення $\varphi(x)=\frac{d^2u}{dx^2}$, тоді $\frac{du}{dx}=\int_0^x \varphi(s) ds$, так як $\frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = 0$. Тепер рівність (19.1) можна переписати так

$$u(x)=\int_0^x (x-s)\varphi(s) ds.$$

Підставляючи отримані вирази для $u(x)$, $u'(x)$, $u''(x)$ у рівняння (17.1), маємо

$$\varphi(x)+p(x)\int_0^x \varphi(s)ds+q(x)\int_0^x (x-s)\varphi(s)ds=f(x)$$

або

$$\varphi(x)+\int_0^x [p(x)+q(x)(x-s)]\varphi(s)ds=f(x).$$

Позначимо

$$K(x, s)=p(x)+q(x)(x-s), \quad (20.1)$$

у результаті чого отримаємо неоднорідне рівняння Вольєрра другого роду

$$\varphi(x)=\lambda \int_a^x K(x, s)\varphi(s)ds+f(x), \quad (21.1)$$

де $\lambda=-1$, $a=0$.

Покажемо, що задача французького математика Е. Гурса (1858 –1936) для рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = \omega(x,y)+c(x,y)u(x,y) \quad (22.1)$$

також зводиться до неоднорідного рівняння Вольєрра другого роду.

Задача Гурса. В області $\bar{R}=\{x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha, \psi_0 \leq \psi \leq \psi_0 + \beta\}$ знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x, \psi)}{\partial x \partial \psi} = \omega(x, \psi) \quad (23.1)$$

з даними на характеристиках

$$u(x_0, \psi) = G_1(\psi); \quad u(x, \psi_0) = \sigma_1^*(x); \quad \sigma_1(\psi_0) = \sigma_1^*(x_0). \quad (24.1)$$

Розв'язок задачі (23.1) – (24.1), як легко перевірити простим диференціюванням, задається формулою Гурса

$$u(x, \psi) = \sigma_1^*(x) + \sigma_1(\psi) - \sigma_1(\psi_0) + \int_{x_0}^x dt \int_{\psi_0}^{\psi} \omega(t, r) dr. \quad (25.1)$$

Застосувавши формулу (25.1) до рівняння (22.1), отримаємо

$$u(x, \psi) = P(x, \psi) + \int_{x_0}^x \int_{\psi_0}^{\psi} c(t, r) u(t, r) dt dr, \quad (26.1)$$

де

$$P(x, \psi) = \sigma_1^*(x) + \sigma_1(\psi) - \sigma_1(\psi_0) + \int_{x_0}^x dt \int_{\psi_0}^{\psi} \omega(t, r) dr.$$

Рівняння (26.1) є неоднорідним рівнянням Вольтерра другого роду.

1.2. Класифікація інтегральних рівнянь

Будемо розглядати лінійні інтегральні рівняння лише для того випадку, коли шукана функція визначена на осі OX .

Рівняння виду

$$\psi(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) \psi(t) dt + f(x), \quad (27.1)$$

де $\psi(x)$ – шукана функція, а $f(x)$, $K(x, t)$ – задані функції, називаються неоднорідним інтегральним рівнянням Вольтерра другого роду.

Аналогічне рівняння зі сталими межами

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt + f(x) \quad (28.1)$$

називається неоднорідним інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду.

Якщо шукана функція входить тільки під знак інтеграла, то отримаємо рівняння виду

$$\lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt + f(x) = 0, \quad (29.1)$$

$$\lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt + f(x) = 0, \quad (30.1)$$

які називаються відповідно неоднорідними рівняннями Вольтерра і Фредгольма першого роду.

Якщо $f(x) \equiv 0$, то відповідні рівняння називаються однорідними.

1.3. Приклади

Звести до інтегральних рівнянь наступні диференціальні рівняння із вказаними умовами:

1. $y'' + xy' + y = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$

Розв'язання. Зведемо задану задачу до задачі з нульовими початковими умовами за допомогою підстановки $u(x) = y(x) - 1$. Підставляючи у вихідне рівняння, отримаємо $u'' + xu' + u = -1$ з початковими умовами $u(0) = u'(0) = 0$. Отримане рівняння є частинним випадком рівняння (17.1), в якому $p(x) = x$, $q(x) = 1$; $f(x) = -1$. За формулою (20.1) визначаємо ядро $K(x, s) = 2x - s$. Інтегральне рівняння (21.1) у нашому випадку буде мати вигляд

$$\varphi(x) = \int_0^x (s - 2x) \varphi(s) ds - 1.$$

Задача (17.1), (18.1) еквівалентна інтегральному рівнянню (21.1). Це означає, що з інтегрального рівняння можна отримати диференціальне рівняння

із початковими умовами. Якщо ми зможемо розв'язати диференціальне рівняння з даними початковими умовами, то так отримаємо розв'язок відповідного інтегрального рівняння.

Розв'яжіть наступне інтегральне рівняння:

$$1. \varphi(x) = 1 + \int_0^x (s - x) \varphi(s) ds.$$

У цьому випадку $f(x)=1$, $K(x,s)=x-s$. Отже, на основі (20.1) $p(x)\equiv 0$, $q(x)=1$. Тому рівняння (17.1) буде мати вигляд

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u = 1 \text{ при } u(0)=u'(0)=0.$$

Розв'язком цієї задачі є функція $u(x) = -\cos x + 1$. Тоді $\varphi(x) = \frac{d^2 u}{dx^2} = \cos x$ буде розв'язком шуканого інтегрального рівняння.

Іноді диференціальне рівняння з початковими умовами можна отримати іншими методами, зокрема шляхом диференціювання інтегрального рівняння. Проілюструємо цей метод на наведеній задачі. Для цього необхідна формула диференціювання інтегралу $J(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, s) ds$, згідно з якою

$$J'(x) = \beta'(x)f(x, \beta(x)) - \alpha'(x)f(x, \alpha(x)) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, s) ds.$$

Використовуючи цю формулу, двічі продиференціюємо шукане інтегральне рівняння

$$\varphi'(x) = -\int_0^x \varphi(s) ds, \quad \varphi''(x) = -\varphi(x).$$

Визначимо початкові умови, для цього покладемо $x=0$, маємо $\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=0$. Отже, прийшли до задачі

$$\varphi''(x) + \varphi(x) = 0$$

з початковими умовами $\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=0$, розв'язком якої є функція $\varphi(x) = \cos x$.

Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду можна розв'язати методом невизначених коефіцієнтів, суть якого проілюструємо на конкретному прикладі.

Розв'язати методом невизначених коефіцієнтів наступні інтегральні рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^2 x t \varphi(t) dt + \frac{5}{6} x.$$

Розв'язання: $\varphi(x) = \frac{1}{2} x \int_0^2 t \varphi(t) dt + \frac{5}{6} x$. Нехай $\int_0^2 t \varphi(t) dt = A$.

Тоді $\varphi(x) = \frac{1}{2} A x + \frac{5}{6} x = \left(\frac{A}{2} + \frac{5}{6} \right) x = Bx$, де $B = \frac{A}{2} + \frac{5}{6}$. Підставимо у вихідне рівняння $\varphi(x) = Bx$, отримаємо

$$Bx = \frac{5}{6} x + \frac{1}{2} x \int_0^2 t B t dt = \frac{5}{6} x + \frac{1}{2} B x \frac{t^3}{3} \Big|_0^2 = \left(\frac{5}{6} + \frac{4}{3} B \right) x.$$

Звідси $B = \frac{5}{6} + \frac{4}{3} B$ і $B = -\frac{5}{2}$.

Відповідь: $\varphi(x) = -\frac{5}{2} x$.

1.4. Метод ітерацій для рівняння Фредгольма другого роду з малим ядром

Нехай задано неоднорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi. \quad (31.1)$$

Будемо вважати, що в рівнянні (31.1) ядро $K(x, \xi)$ – неперервна функція по x, ξ у замкненому квадраті $\bar{R} = \{a \leq x \leq b; a \leq \xi \leq b\}$. Тоді функція $K(x, \xi)$ буде обмеженою в даній області, тобто існує таке число $M > 0$, що для всіх точок замкнутого квадрата виконується нерівність

$$|K(x, \xi)| \leq M.$$

Якщо число M таке, що задовольняється умова

$$M < \frac{1}{|\lambda|(b-a)} \quad \text{чи} \quad |\lambda| < \frac{1}{M(b-a)},$$

то таке ядро називається малим ядром. Для інтегрального рівняння (31.1) з малим неперервним ядром має місце теорема про існування і єдиний розв'язок.

Теорема. Нехай у рівнянні (31.1) $f(x)$ – неперервна на замкненому сегменті

$x \in [a, b]$ функція, $K(x, \xi)$ – неперервне мале ядро у замкненому квадраті $\bar{R}$.
Тоді існує один неперервний розв’язок неоднорідного рівняння (31.1).

Доведення. Існування розв’язку рівняння (31.1) доведемо методом ітерації, обґрунтування якого для диференціальних рівнянь належить французькому математику К. Пікару (1857 – 1941). Як нульове наближення приймемо довільну задану і неперервну на $[a, b]$ функцію $\varphi_0(x)$, зокрема $\varphi_0(x) \equiv \text{const}$. Перше наближення визначимо за формулою

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi_0(\xi) d\xi. \quad (32.1)$$

Друге наближення визначимо аналогічно за формулою

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi_1(\xi) d\xi \quad (33.1)$$

і т.д.

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi_{n-1}(\xi) d\xi. \quad (34.1)$$

Усі ці послідовні наближення неперервні на $[a, b]$, оскільки $\varphi_0(x)$ – неперервна функція згідно з вибором, $\varphi_1(x)$ – неперервна функція, бо $f(x)$, $K(x, \xi)$ – неперервні функції за умовою теореми. Тому неперервними будуть і функції $\varphi_2(x); \dots; \varphi_n(x)$.

При $x = (\xi)$ рівність (32.1) можна переписати так

$$\varphi_1(\xi) = f(\xi) + \lambda \int_a^b K(\xi, \xi_1) \varphi_0(\xi_1) d\xi_1.$$

Підставивши це значення у рівність (33.1), будемо мати

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi + \lambda^2 \int_a^b K(x, \xi) d\xi \int_a^b K(\xi, \xi_1) \varphi_0(\xi_1) d\xi_1.$$

Звідси, при $x = \xi$ отримаємо

$$\varphi_2(\xi) = f(\xi) + \lambda \int_a^b K(\xi, \xi_1) f(\xi_1) d\xi_1 + \lambda^2 \int_a^b K(\xi, \xi_1) d\xi_1 \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) \varphi_0(\xi_2) d\xi_2.$$

Підставляючи це значення у вираз $\varphi_3(x)$ і продовжуючи цей процес, методом математичної індукції легко отримати формулу

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) = & f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi + \lambda^2 \int_a^b K(x, \xi) d\xi \int_a^b K(\xi, \xi_1) f(\xi_1) d\xi_1 + \\ & + \lambda^3 \int_a^b K(x, \xi) d\xi \int_a^b K(\xi, \xi_1) d\xi_1 \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) f(\xi_2) d\xi_2 + \dots + \\ & + \lambda^{n-1} \int_a^b K(x, \xi) d\xi \int_a^b K(\xi, \xi_1) d\xi_1 \dots \int_a^b K(\xi_{n-3}, \xi_{n-2}) f(\xi_{n-2}) d\xi_{n-2} + \\ & + \lambda^n \int_a^b K(x, \xi) d\xi \int_a^b K(\xi, \xi_1) d\xi_1 \dots \int_a^b K(\xi_{n-2}, \xi_{n-1}) \varphi_0(\xi_{n-1}) d\xi_{n-1}. \quad (35.1)\end{aligned}$$

Напишемо рівність (35.1) у вигляді

$$\varphi_n(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

де $R_n(x)$ – доданок, який містить λ^n , а $S_n(x)$ – сума попередніх n доданків. Оцінимо $|R_n(x)|$. За умовою теореми $K(x, \xi)$ – неперервне мале ядро, тому $|K(x, \xi)| \leq M < \frac{1}{|\lambda|(b-a)}$, тобто $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$. Обмежимо функції $f(x)$, $\varphi_0(x)$ на $[a, b]$:

$$|f(x)| \leq P; \quad |\varphi_0(x)| \leq R,$$

де P, R – деякі додатні константи. Маємо

$$\begin{aligned}|R_n(x)| = & \left| \lambda^n \int_a^b K(x, \xi) d\xi \int_a^b K(\xi, \xi_1) d\xi_1 \dots \int_a^b K(\xi_{n-2}, \xi_{n-1}) \varphi_0(\xi_{n-1}) d\xi_{n-1} \right| \leq \\ & \leq |\lambda^n| M^n R \left| \int_a^b d\xi \int_a^b d\xi_1 \dots \int_a^b d\xi_{n-1} \right| = [|\lambda| M(b-a)]^n R.\end{aligned}$$

Очевидно, $|\lambda| M(b-a) < 1$. Звідси випливає, що $R_n(x)$ рівномірно збігається до нуля при $n \rightarrow \infty$ ($R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$), тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $N(\varepsilon) > 0$, що при $n > N(\varepsilon)$ $|R_n(x)| < \varepsilon$ для будь-якого $x \in [a, b]$. Оцінимо кожний доданок суми $S_n(x)$, після чого легко переконатись у справедливості оцінки

$$|S_n(x)| \leq P \sum_{k=1}^n [|\lambda| M(b-a)]^{k-1}. \quad (36.1)$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} [|\lambda| M(b-a)]^{k-1}$ збігається як геометрична прогресія із знаменником $q = \lambda M(b-a) < 1$. На основі ознаки німецького математика К. Веєрштраса (1815 – 1897) про рівномірну збіжність можна стверджувати, що $\varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(x)$, причому $\varphi(x)$ буде неперервною функцією на $[a, b]$.

Покажемо, що функція $\varphi(x)$ задовольняє вихідне інтегральне рівняння (31.1). Виходимо із рівняння (34.1), у якому $\varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(x)$. Покажемо, що $\int_a^b K(x, \xi) \varphi_{n-1}(\xi) d\xi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$. Із рівномірної збіжності $\varphi_n(x)$ до $\varphi(x)$ при $n \rightarrow \infty$ випливає, що для будь-якого $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$ можна знайти таке $N(\varepsilon_1)$, що для всіх $n-1 > N$ виконується нерівність $|\varphi_{n-1}(\xi) - \varphi(\xi)| < \varepsilon_1$ для всіх $\xi \in [a, b]$.

Оцінимо вираз

$$\left| \int_a^b K(x, \xi) \varphi_{n-1}(\xi) d\xi - \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi \right| = \left| \int_a^b K(x, \xi) [\varphi_{n-1}(\xi) - \varphi(\xi)] d\xi \right| \leq \int_a^b |K(x, \xi)| |\varphi_{n-1}(\xi) - \varphi(\xi)| d\xi \leq M \int_a^b |\varphi_{n-1}(\xi) - \varphi(\xi)| d\xi.$$

Якщо $n-1 > N(\varepsilon_1)$, то

$$M \int_a^b |\varphi_{n-1}(\xi) - \varphi(\xi)| d\xi \leq \varepsilon_1 M(b-a) = \varepsilon$$

для будь-якого $a \leq x \leq b$, $a \leq \xi \leq b$. Перейшовши до границі в рівнянні (34.1) при $n \rightarrow \infty$, отримаємо

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Звідси бачимо, що $\varphi(x)$ – розв’язок рівняння (31.1).

Доведемо єдиність цього розв’язку. Передусім зазначимо, що функція $\varphi(x)$ не залежить від нульового наближення $\varphi_0(x)$, оскільки $\varphi_0(x)$ входить тільки в $R_n(x)$ і $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Припустимо, що існує, крім $\varphi(x)$, ще один розв'язок $\psi(x)$ рівняння (31.1), тобто

$$\psi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \psi(\xi) d\xi. \quad (37.1)$$

За нульове наближення виберемо функцію $\varphi_0(x) \equiv \psi(x)$. Підставляючи цю функцію в перше наближення і враховуючи (37.1), отримаємо

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \psi(\xi) d\xi = \psi(x).$$

Абсолютно аналогічно можна довести, що

$$\varphi_2(x) = \psi(x); \quad \varphi_3(x) = \psi(x); \quad \dots; \quad \varphi_n(x) = \psi(x).$$

Тому $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(x) = \psi(x)$ для будь-якого $x \in [a, b]$. Отже, єдиність розв'язку неоднорідного інтегрального рівняння (31.1) доведено, а отже, доведена і теорема.

1.5. Ітеровані ядра. Резольвента

На основі рівності (35.1) маємо

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = & f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi + \\ & + \lambda^2 \int_a^b K(x, \xi) d\xi \int_a^b K(\xi, \xi_1) f(\xi_1) d\xi_1 + \\ & + \lambda^3 \int_a^b K(x, \xi) d\xi \int_a^b K(\xi, \xi_1) d\xi_1 \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) f(\xi_2) d\xi_2 + \\ & + \lambda^4 \int_a^b K(x, \xi) d\xi \int_a^b K(\xi, \xi_1) d\xi_1 \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 \int_a^b K(\xi_2, \xi_3) f(\xi_3) d\xi_3 + \dots \end{aligned} \quad (38.1)$$

Ядро $K(x, \xi)$ будемо називати першим ітерованим ядром і позначимо його $K(x, \xi) = K_1(x, \xi)$. Тоді другий доданок у формулі (38.1) можна зобразити у вигляді

$$\lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi = \lambda \int_a^b K_1(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Розглянемо третій доданок формули (38.1) і змінимо порядок інтегрування на основі неперервності підінтегральних функцій:

$$\lambda^2 \int_a^b K(x, \xi) d\xi \int_a^b K(\xi, \xi_1) f(\xi_1) d\xi_1 = \lambda^2 \int_a^b f(\xi_1) d\xi_1 \int_a^b K(x, \xi) \int_a^b K(\xi, \xi_1) d\xi = \\ \lambda^2 \int_a^b K_2(x, \xi_1) f(\xi_1) d\xi_1 ,$$

де

$$K_2(x, \xi_1) = \int_a^b K(x, \xi) K(\xi, \xi_1) d\xi . \quad (39.1)$$

$K_2(x, \xi_1)$ називається другим ітерованим ядром, яке побудовано за законом

$$K_2(x, \xi) = \int_a^b K_1(x, t) K_1(t, \xi) dt ,$$

як це видно із рівності (39.1).

Четвертий доданок формули (38.1) після зміни порядку інтегрування напишемо так:

$$\lambda^3 \int_a^b K(x, \xi) d\xi \int_a^b K(\xi, \xi_1) d\xi_1 \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) f(\xi_2) d\xi_2 = \\ = \lambda^3 \int_a^b f(\xi_2) d\xi_2 \int_a^b K(x, \xi) d\xi \int_a^b K(\xi, \xi_1) K(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 = \\ = \lambda^3 \int_a^b f(\xi_2) d\xi_2 \int_a^b K(x, \xi) K_2(\xi, \xi_2) d\xi ,$$

де

$$K_2(\xi, \xi_2) = \int_a^b K(\xi, \xi_1) K(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 .$$

Позначимо

$$\int_a^b K(x, \xi) K_2(\xi, \xi_2) d\xi = K_3(x, \xi_2), \quad (40.1)$$

$K_3(\xi, \xi_2)$ називається третім ітерованим ядром, яке побудоване за законом

$$K_3(x, \xi) = \int_a^b K_1(x, t) K_2(t, \xi) dt,$$

як це показано в рівності (40.1). Тепер четвертий доданок формули (38.1) можна виразити так

$$\begin{aligned} \lambda^3 \int_a^b K(x, \xi) d\xi \int_a^b K(\xi, \xi_1) d\xi_1 \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) f(\xi_2) d\xi_2 = \\ = \lambda^3 \int_a^b K_3(x, \xi_2) f(\xi_2) d\xi_2. \end{aligned}$$

Аналогічно п'ятий доданок формули (38.1) напишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \lambda^4 \int_a^b K(x, \xi) d\xi \int_a^b K(\xi, \xi_1) d\xi_1 \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 \int_a^b K(\xi_2, \xi_3) f(\xi_3) d\xi_3 = \\ = \lambda^4 \int_a^b K_4(x, \xi_3) f(\xi_3) d\xi_3, \end{aligned}$$

де $K_4(x, \xi_3) = \int_a^b K(x, \xi) K_3(\xi, \xi_3) d\xi$ називається четвертим ітерованим ядром, воно побудовано за законом:

$$K_4(x, \xi) = \int_a^b K_1(x, t) K_3(t, \xi) dt.$$

Продовжуючи цей процес, дійдемо висновку, що доданок, який містить λ^{n-1} , запишеться так

$$\lambda^{n-1} \int_a^b K_{n-1}(x, \xi_{n-2}) f(\xi_{n-2}) d\xi_{n-2},$$

де

$$K_{n-1}(x, \xi_{n-2}) = \int_a^b K_1(x, \xi) K_{n-2}(\xi, \xi_{n-2}) d\xi$$

називається $n-1$ ітерованим ядром, яке побудоване за законом

$$K_{n-1}(x, \xi) = \int_a^b K_1(x, t) K_{n-2}(t, \xi) dt.$$

Використовуючи ітеровані ядра, формулу (38.1) можна переписати так

$$\begin{aligned} \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x, \xi) f(\xi) d\xi + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, \xi_1) f(\xi_1) d\xi_1 + \\ + \lambda^3 \int_a^b K_3(x, \xi_2) f(\xi_2) d\xi_2 + \lambda^4 \int_a^b K_4(x, \xi_3) f(\xi_3) d\xi_3 + \dots = \end{aligned}$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x, \xi) f(\xi) d\xi + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, \xi) f(\xi) d\xi + \\ + \lambda^3 \int_a^b K_3(x, \xi) f(\xi) d\xi + \dots = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi$$

чи

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi, \quad (41.1)$$

де

$$R(x, \xi, \lambda) = K_1(x, \xi) + \lambda K_2(x, \xi) + \lambda^2 K_3(x, \xi) + \dots \quad (42.1)$$

і називається резольвентою, а ітеровані ядра $K_n(x, \xi)$ визначаються за формулами:

$$\begin{cases} K_n(x, \xi) = \int_a^b K_1(x, t) K_{n-1}(t, \xi) dt \\ K_1(x, \xi) = K(x, \xi) \end{cases} \quad (43.1)$$

Із формули (41.1) видно, що розв'язок неоднорідного інтегрального рівняння (31.1) виражається через резольвенту, тому остання у теорії інтегральних рівнянь займає важливе місце.

Формула (35.1) з допомогою ітерованих ядер переписеться так

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b [K_1(x, \xi) + \lambda K_2(x, \xi) + \dots + \lambda^{n-2} K_{n-1}(x, \xi)] f(\xi) d\xi + \\ + \lambda^n \int_a^b K_n(x, \xi) \varphi_0(\xi) d\xi \quad (44.1)$$

Звернемо увагу на те, що однорідне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi$$

з малим неперервним ядром має тільки тривіальний розв'язок $\varphi(x) \equiv 0$. Це впливає з формули (41.1) при $f=0$.

1.6. Рівняння Вольтерра другого роду

Рівняння Вольтерра другого роду має вигляд

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + f(x), \quad (45.1)$$

його можна звести до рівняння Фредгольма другого роду. Справді, ядро $K(x, \xi)$ у (45.1) визначено в трикутнику: $\{a \leq x \leq b; a \leq \xi \leq x\}$.

Введемо нове ядро

$$K(x, \xi) = \begin{cases} K(x, \xi), & a \leq x \leq b; a \leq \xi \leq x \\ 0, & a \leq x \leq b; x < \xi \leq b \end{cases}. \quad (46.1)$$

У цьому випадку рівняння (45.1) можна переписати так

$$\varphi(x) = \int_a^b \bar{K}(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + f(x), \quad (47.1)$$

тобто рівняння (45.1) є частинним випадком рівняння Фредгольма другого роду з ядром $\bar{K}(x, \xi)$.

Якщо $|K(x, \xi)| \leq M$, то і $\bar{K}(x, \xi) \leq M$. У теоремі існування і єдиності розв'язку інтегрального рівняння (31.1) використалась тільки умова обмеженості ядра. Наступні наближення для рівняння (47.1) будуть також неперервними функціями, хоча ядро $\bar{K}(x, \xi)$ має розрив на діагоналі $\xi = x$. Це впливає з відповідної теореми математичного аналізу про регулярні функції.

Нехай функція $K(x, \xi)$ є ядром першого роду («неперервним майже скрізь»), тобто вона обмежена в області $\{a \leq x \leq b; a \leq \xi \leq b\}$ і всі її точки розриву, якщо такі існують, розташовані на скінченній кількості ліній, що перетинаються з прямими паралельними до координатних осей, лише в скінченній кількості точок («лінії розриву першого роду»). Таку функцію називають регулярною функцією.

Справедлива **теорема**: нехай $f(x, \xi)$ і $q(x, \xi)$ – регулярні функції у квадраті $\{a \leq x \leq b; a \leq \xi \leq b\}$. Тоді функція

$$W(x, \xi) = \int_a^b f(x, t) q(t, \xi) dt$$

буде неперервною в заданому квадраті.

Оскільки $\bar{K}(x, \xi)$ буде регулярною функцією і, враховуючи, що неперервна функція теж є регулярною, то на основі сформульованої теореми для рівняння Вольтерра (47.1) другого роду має місце та ж теорема існування та єдиності розв'язку, яку ми доводили для рівняння (31.1). Однак для розв'язку (45.1) має місце сильніша теорема.

Теорема. Нехай у рівнянні (45.1) $f(x)$ – неперервна функція на $[a, b]$, а ядро $K(x, \xi)$ – неперервна функція у трикутнику $\{a \leq x \leq b; a \leq \xi \leq x\}$. Тоді рівняння (45.1) при будь-якому λ має один неперервний розв'язок.

Доведення. Спочатку доведемо, що ітеровані ядра, визначені за формулою (43.1), для рівняння Вольтерра другого роду можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} K_1(x, \xi) = K(x, \xi) \\ K_n(x, \xi) = \int_{\xi}^x K_1(x, t) K_{n-1}(t, \xi) dt. \end{cases} \quad (48.1)$$

Раніше було показано, рівняння (45.1) можна замінити рівнянням (31.1) з ядром $\bar{K}(x, \xi)$.

Якщо вважати, що ядро рівняння Вольтерра визначено в квадраті $\{a \leq x \leq b; a \leq \xi \leq b\}$, то формули (43.1) перепишуться так

$$\begin{aligned} \bar{K}_1(x, \xi) &= K(x, \xi) \\ \bar{K}_n(x, \xi) &= \int_a^b \bar{K}_1(x, t) \bar{K}_{n-1}(t, \xi) dt. \end{aligned}$$

Доведемо справедливність формули (48.1) для випадку $n=2$. Для $n>2$ формула (48.1) доводиться аналогічно. Розбиваємо $[a, b]$ на частини. Тоді

$$\begin{aligned} \bar{K}_2(x, \xi) &= \int_a^b K_1(x, t) K_1(t, \xi) dt = \int_a^{\xi} \bar{K}_1(x, t) \bar{K}_1(t, \xi) dt + \\ &+ \int_{\xi}^x K_1(x, t) K_1(t, \xi) dt + \int_x^b \bar{K}_1(x, t) \bar{K}_1(t, \xi) dt = \int_{\xi}^x \bar{K}_1(x, t) \bar{K}_1(t, \xi) dt, \end{aligned}$$

оскільки перший і третій інтеграли рівні нулю. Справді, в першому інтегралі $t < \xi$, і тому $\bar{K}_1(t, \xi) = 0$. У третьому інтегралі $t > x$, і тому $\bar{K}_1(x, t) = 0$. Якщо $x > \xi$ у ядрі $\bar{K}_1(x, \xi)$, то $\bar{K}_1(x, \xi) = K(x, \xi)$, тому при $\xi < x$

$$\bar{K}_2(x, \xi) = \int_{\xi}^x \bar{K}_1(x, t) \bar{K}_1(t, \xi) dt$$

чи

$$\bar{K}_2(x, \xi) = \int_{\xi}^x K_1(x, t) K_1(t, \xi) dt,$$

і ми отримали формулу (48.1) при $n=2$.

Формули (41.1) і (44.1) для рівняння Вольтерра другого роду запишуться відповідно так:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\xi}^x R(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi, \quad (49.1)$$

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_{\xi}^x [K_1(x, \xi) + \lambda K_2(x, \xi) + \dots + \lambda^{n-2} K_{n-1}(x, \xi)] f(\xi) d\xi + \\ \lambda^n \int_{\xi}^x K_n(x, \xi) \varphi_0(\xi) d\xi = S_n(x) + R_n(x) \end{aligned} \quad (50.1)$$

Оцінимо ітеровані ядра в формулі (48.1) для інтегрального рівняння Вольтерра другого роду.

При $\xi \leq x$ і $\xi \leq t \leq x$ маємо

$$\begin{aligned} |K_1(x, \xi)| \leq M; |K_2(x, \xi)| &= \left| \int_{\xi}^x K_1(x, t) K_1(t, \xi) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{\xi}^x |K_1(x, t)| \cdot |K_1(t, \xi)| dt \leq M^2 \int_{\xi}^x dt = M^2(x - \xi), \\ |K_2(t, \xi)| \leq M^2(t - \xi); |K_3(t, \xi)| &\leq \int_{\xi}^x |K_1(x, t)| \cdot |K_2(t, \xi)| dt \leq \\ &\leq M^3 \int_{\xi}^x (t - \xi) dt = M^3 \int_{\xi}^x (t - \xi) d(t - \xi) = \frac{M^3(x - \xi)^2}{2!}. \end{aligned}$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо

$$\begin{aligned} |K_n(x, \xi)| \leq \int_{\xi}^x |K_1(x, t)| \cdot |K_{n-1}(t, \xi)| dt \leq \frac{M \cdot M^{n-1}}{(n-2)!} \int_{\xi}^x (t - \xi)^{n-2} dt = \\ = \frac{M^n (x - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

Оцінимо $|R_n(x)|$ у формулі (50.1):

$$|R_n(x)| = \left| \lambda^n \int_{\xi}^x K_n(x, \xi) \varphi_0(\xi) d\xi \right| \leq \frac{R|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} \int_{\xi}^x (x - \xi)^{n-1} d\xi.$$

Зробивши підстановку $x - \xi = z$, легко перевірити, що

$$\int_{\xi}^x (x - \xi)^{n-1} d\xi = \frac{(x - \xi)^n}{n}.$$

Тому

$$|R_n(x)| \leq \frac{R|\lambda|^n M^n (n - \xi)^n}{n!} \leq \frac{R[|\lambda|M(b-a)]^n}{n!}.$$

Якщо перейти до границі при $n \rightarrow \infty$, то легко переконатися, що

$R_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ при будь-якому λ / $n!$ швидше прямує до безмежності, як показникова функція.

Оцінимо вираз

$$\begin{aligned} \left| \lambda^{n-1} \int_{\xi}^x K_{n-1}(x, \xi) f(\xi) d\xi \right| &\leq \frac{|\lambda|^{n-1} M^{n-1} P}{(n-2)!} \int_{\xi}^x (x - \xi)^{n-2} d\xi = \\ &= \frac{P|\lambda|^{n-1} M^{n-1} (x - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{P[|\lambda|M(b-a)]^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Якщо в формулі (50.1) перейти до границі при $n \rightarrow \infty$, то отримаємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_{n-1}(x) + \dots,$$

де

$$|u_{n-1}(x)| \leq a_{n-1} = \frac{PN^{n-1}}{(n-1)!}, \quad N = |\lambda|M(b-a).$$

Числовий ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{PN^{n-1}}{(n-1)!}$ збігається, за теоремою Вейерштрасса ряд $\sum_{n=2}^{\infty} u_{n-1}(x)$ буде рівномірно збігатися до своєї суми $\varphi(x)$, яка буде неперервною функцією, оскільки функції $u_{n-1}(x)$ ($n=2,3,\dots$) неперервні.

Отже, $\varphi(x)$ існує і неперервна при будь-якому λ .

Легко перевірити, що $\varphi(x)$ задовольняє рівняння (45.1), і що цей розв'язок єдиний.

1.7. Інтегральні рівняння резольвенти

Покажемо, що формулу (43.1) можна переписати так:

$$K_n(x, \xi) = \int_a^b K_1(x, t) K_{n-1}(t, \xi) dt = \int_a^b K_{n-1}(x, t) K_1(t, \xi) dt \quad (51.1)$$

При $n=2$ розглянуті інтеграли співпадають. Нехай $n=3$, тоді

$$\begin{aligned} \int_a^b K_1(x, t) K_2(t, \xi) dt &= \int_a^b \int_a^b K_1(x, t) K_1(t, \xi_1) K_1(\xi_1, \xi) dt d\xi_1 = \\ &= \int_a^b K_1(\xi_1, \xi) d\xi_1 \int_a^b K_1(x, t) K_1(t, \xi_1) dt = \int_a^b K_1(\xi_1, \xi) K_2(x, \xi_1) d\xi_1 = \\ &= \int_a^b K_2(x, \xi_1) K_1(\xi_1, \xi) d\xi_1 = \int_a^b K_2(x, t) K_1(t, \xi) dt \end{aligned}$$

і формула (51.1) при $n=3$ доведена.

Скористаємося методом математичної індукції. Нехай формула (51.1) справедлива при $n=s$, покажемо, що вона правильна і при $n=s+1$.

$$\begin{aligned} K_{s+1}(x, \xi) &= \int_a^b K_1(x, t) K_s(t, \xi) dt = \int_a^b \int_a^b K_1(x, t) K_{s-1}(t, \xi_1) K_1(\xi_1, \xi) d\xi_1 dt = \\ &= \int_a^b K_1(\xi_1, \xi) d\xi_1 \int_a^b K_1(x, t) K_{s-1}(t, \xi_1) dt = \int_a^b K_1(\xi_1, \xi) K_s(x, \xi_1) d\xi_1 = \\ &= \int_a^b K_s(x, \xi_1) K_1(\xi_1, \xi) d\xi_1 = \int_a^b K_s(x, t) K_1(t, \xi) dt. \end{aligned}$$

Отже, доведено, що формула (51.1) справедлива для будь-якого n . При доведенні формули (51.1) змінювався порядок інтегрування і повторний інтеграл замінювався кратним. Це можна робити, оскільки підінтегральні функції неперервні.

Виведемо інтегральні рівняння резольвенти. За формулою (42.1)

$$R(x, \xi, \lambda) - K_1(x, \xi) = \lambda K_2(x, \xi) + \lambda^2 K_3(x, \xi) + \lambda^3 K_4(x, \xi) + \dots$$

Використовуючи формули (43.1) і (42.1), будемо мати

$$\begin{aligned}
R(x, \xi, \lambda) - K(x, \xi) &= \lambda \int_a^b K_1(x, t) K_1(t, \xi) dt + \lambda^2 \int_a^b K_1(x, t) K_2(t, \xi) dt + \\
&+ \lambda^3 \int_a^b K_1(x, t) K_3(t, \xi) dt + \dots = \\
&= \lambda \int_a^b K_1(x, t) [K_1(t, \xi) + \lambda K_2(t, \xi) + \lambda^2 K_3(t, \xi) + \lambda^3 K_4(t, \xi) + \dots] dt = \\
&= \lambda \int_a^b K_1(x, t) R(t, \xi, \lambda) dt.
\end{aligned}$$

Остаточню

$$R(t, \xi, \lambda) = K(x, \xi) + \lambda \int_a^b K(x, t) R(t, \xi, \lambda) dt. \quad (52.1)$$

Виведемо ще одне інтегральне рівняння резольвенти. Маємо

$$\begin{aligned}
R(t, \xi, \lambda) - K(x, \xi) &= \lambda K_2(x, \xi) + \lambda^2 K_3(x, \xi) + \lambda^3 K_4(x, \xi) + \dots = \\
&= \lambda \int_a^b K_1(x, t) K_1(t, \xi) dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, t) K_1(t, \xi) dt + \lambda^3 \int_a^b K_3(x, t) K_1(t, \xi) dt + \\
&+ \lambda^4 \int_a^b K_4(x, t) K_1(t, \xi) dt + \dots = \\
&\lambda \int_a^b K_1(t, \xi) [K_1(x, t) + \lambda K_2(x, t) + \lambda^2 K_3(x, t) + \dots] dt = \lambda \int_a^b K_1(t, \xi) R(x, t, \lambda) dt,
\end{aligned}$$

звідки

$$R(x, \xi, \lambda) = K(x, \xi) + \lambda \int_a^b K(t, \xi) R(x, t, \lambda) dt. \quad (53.1)$$

Отже, резольвента задовольняє інтегральні рівняння Фредгольма другого роду (52.1) і (53.1) з вільним членом $K(x, \xi)$.

1.8. Приклади

Взявши за нульове наближення функцію $\varphi_0(x)$, розв'язати наступне інтегральне рівняння:

$$1. \varphi(x) = x + \int_0^x (s - x) \varphi(s) ds.$$

Розв'язання. Послідовні наближення будемо шукати за формулою

$$\varphi_0(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, s) \varphi_{n-1}(s) ds,$$

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= x + \int_0^x (s-x) \varphi_0(s) ds = x; & \varphi_1(s) &= s, \\ \varphi_2(x) &= x + \int_0^x (s-x) \varphi_1(s) ds = x + \int_0^x (s-x)s ds = x - \frac{x^3}{3!}; & \varphi_2(s) &= s - \frac{s^3}{3!}; \\ \varphi_3(x) &= x + \int_0^x (s-x) \varphi_2(s) ds = x + \int_0^x (s-x) \left(s - \frac{s^3}{3!}\right) ds = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.\end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо

$$\varphi_4(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$

Очевидна закономірність побудови очевидних функцій, тому

$$\varphi_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}. \quad (54.1)$$

Методом математичної індукції легко переконатися у справедливості формули (54.1). Тоді,

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \sin x.$$

Знайти резольвенту $R(x, s, \lambda)$ для наступних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду:

$$2. \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^\pi \sin x \varphi(s) ds; \quad |\lambda| < \frac{1}{2}.$$

Розв'язання. $K(x, s) = \sin x$. Резольвенту шукаємо за формулою (42.1), в якій ітеровані ядра визначаються за формулою (43.1). Шукаємо

$$\begin{aligned}K_1(x, s) &= K(x, s) = \sin x; \\ K_2(x, s) &= \int_0^\pi K_1(x, t) K_1(t, s) dt = \int_0^\pi \sin x \sin t dt = 2 \sin x; \\ K_3(x, s) &= \int_0^\pi K_1(x, t) K_2(t, s) dt = \int_0^\pi \sin x 2 \sin t dt = 2^2 \sin x; \\ K_4(x, s) &= \int_0^\pi K_1(x, t) K_3(t, s) dt = 2^3 \sin x.\end{aligned}$$

Методом математичної індукції легко переконатися, що

$$K_n(x, s) = 2^{n-1} \sin x.$$

Тоді,

$$\begin{aligned}R(x, s, \lambda) &= K_1(x, s) + \lambda K_2(x, s) + \lambda^2 K_3(x, s) + \dots = \\ &= \sin x + 2\lambda \sin x + 2^2 \lambda^2 \sin x + 2^3 \lambda^3 \sin x + \dots = \\ &= \sin x [1 + 2\lambda + (2\lambda)^2 + 2\lambda^3 + \dots + 2\lambda^n + \dots] = \frac{\sin x}{1-2\lambda}.\end{aligned}$$

За допомогою резольвенти розв'язати наступні інтегральні рівняння, зробивши перевірку:

$$3. \varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(s) ds + x.$$

Розв'язання. $\lambda = \frac{1}{2}$, $K(x, s) = 1$;

$$K_2(x, s) = \int_0^1 K_1(x, t) K_1(t, s) dt = \int_0^1 dt = 1;$$

$$K_3(x, s) = \int_0^1 K_1(x, t) K_2(t, s) dt = \int_0^1 dt = 1;$$

.....

$$K_n(x, s) = 1.$$

$$R(x, s, \lambda) = K_1(x, s) + \lambda K_2(x, s) + \lambda^2 K_3(x, s) + \dots = 1 + \lambda + \lambda^2 + \dots \lambda^n + \dots = \frac{1}{1-\lambda} = 2$$

Розв'язок інтегрального рівняння виражається через резольвенту за допомогою формули (41.1)

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds.$$

$$f(x) = x. \quad \varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_0^1 2s ds = x + \frac{1}{2}.$$

Перевірка. Підставимо функцію $\varphi(x) = x + \frac{1}{2}$ у вихідне інтегральне рівняння:

$$x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(s + \frac{1}{2}\right) ds + x = \frac{1}{2} \left(\frac{s^2}{2} + \frac{1}{2}s\right) \Big|_0^1 + x = \frac{1}{2} + x.$$

Контрольні запитання

1. Що ми розуміємо під інтегральним рівнянням?
2. Сформулюйте означення резольвенти.
3. Який вигляд має рівняння Вольтерра другого роду?

Задачі для самостійного розв'язування

Розв'язати інтегральні рівняння:

$$1. \psi'' + \psi = 0; \quad \psi(0) = 0; \quad \psi'(0) = -1. \quad \text{Відповідь: } \varphi(x) = x - \int_0^x (x-r)\varphi(r) dr.$$

$$2. \psi'' - 5\psi' + 6\psi = 0; \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 1.$$

$$\text{Відповідь: } \varphi(x) = \int_0^x (6t - 6x + 5)\varphi(t) dt + 5 - 6x.$$

3. $y''+y=\cos x$, $y(0)=0$; $y'(0)=0$. Відповідь: $\varphi(x)=\cos x - \int_0^x (x-s)\varphi(s)ds$.

4. $\varphi(x)=1+\int_0^x \varphi(s)ds$. Відповідь: $\varphi(x)=e^x$.

5. $\varphi(x)=x+\int_0^x (t-x)\varphi(t)dt$. Відповідь: $\varphi(x)=\sin x$.

6. $\varphi(x)=4\int_0^x (s-x)\varphi(s)ds$. Відповідь: $\varphi(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$.

Розв'язати інтегральні рівняння методом невизначених коефіцієнтів:

7. $\varphi(x)=3\int_0^2 xt\varphi(t)dt+3x-2$. Відповідь: $\varphi(x)=\frac{9}{7}x-2$.

8. $\varphi(x)=x^2+2\int_0^1 (1+3xy)\varphi(y)dy$. Відповідь: $\varphi(x)=x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{5}{12}$.

9. $\varphi(x)=\frac{2}{e^2-1}\int_0^1 e^2 e^y \varphi(y)dy$. Відповідь: $\varphi(x)=ce^x$.

10. $\varphi(x)=3\int_0^1 xs\varphi(s)ds+3x-2$. Відповідь: $\varphi(x)=cx-2$.

Взявши за нульове наближення функцію $\varphi_0(x)$, розв'язати інтегральні рівняння:

11. $\varphi(x)=\frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 xs\varphi(s)ds$. Відповідь: $\varphi(x)=x$.

Вказівка: $\varphi_n(x) = \left(1 - \frac{1}{6^n}\right)x$.

12. $\varphi(x)=1+\int_0^x \varphi(s)ds$. Відповідь: $\varphi(x)=e^x$.

13. $\varphi(x)=1+\int_0^x (s-x)\varphi(s)ds$. Відповідь: $\varphi(x)=\cos x$.

Знайти резольвенту:

14. $\varphi(x)=\lambda\int_0^1 \varphi(s)ds + f(x)$; $|\lambda| < 1$. Відповідь: $R(x,s,\lambda)=\frac{1}{1-\lambda}$.

За допомогою резольвенти розв'язати інтегральне рівняння:

15. $\varphi(x)=2+\lambda\int_0^\pi \sin x \varphi(s)ds$; $|\lambda| < \frac{1}{2}$.

Розділ II

2.1. Деякі відомості з теорії лінійних алгебраїчних рівнянь

Надалі покажемо, що між теорією лінійних інтегральних рівнянь і теорією лінійних алгебраїчних рівнянь багато спільного. З цією метою викладемо деякі відомості з теорії лінійних алгебраїчних рівнянь.

Отже, розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.2)$$

Матрицю, складену із коефіцієнтів при невідомих, позначимо через

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Транспонованою до матриці A будемо називати матрицю A^* , отриману із матриці A шляхом заміни стовпців рядками з тим самим порядковим номером:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Складемо систему лінійних неоднорідних рівнянь, у якій коефіцієнтами при невідомих будуть відповідні елементи матриці A^* , тобто

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + a_{21}z_2 + \dots + a_{n1}z_n = c_1 \\ a_{12}z_1 + a_{22}z_2 + \dots + a_{n2}z_n = c_2 \\ a_{1n}z_1 + a_{2n}z_2 + \dots + a_{nn}z_n = c_n \end{cases} \quad (2.2)$$

Система (2.2) називається транспонованою системою відносно системи (1.2). Розв'язок системи (1.2) чи (2.2) знаходимо за правилом швейцарського математика Г. Крамера (1704 – 1752). Коли визначник, складений з елементів матриці A , який будемо визначати через $d(A)$, не дорівнює нулю, то і $d(A^*) \neq 0$, тоді система (1.2) при будь-яких $b_1; b_2; \dots b_n$ має один розв'язок. Якщо $d(A)=0$,

то відповідна однорідна система має принаймні один нульовий розв'язок. Це стосується і системи (2.2). Отже, має місце наступна альтернатива.

Теорема 1. *Або неоднорідна система (1.2) має один і тільки один розв'язок при будь-яких $b_1; b_2; \dots b_n$, або відповідна їй однорідна система має принаймні один нетривіальний розв'язок.*

Означення. Рангом матриці A називається найвищий порядок визначника $\neq 0$, складеного із елементів матриці A .

Нехай ми маємо m розв'язків системи (1.2):

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix}; \quad \dots \quad \begin{pmatrix} x_1^{(m)} \\ x_2^{(m)} \\ x_n^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Ці розв'язки будемо називати лінійно незалежними, якщо рівність

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_m \begin{pmatrix} x_1^{(m)} \\ x_2^{(m)} \\ x_n^{(m)} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

виконується тільки при умові $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$.

Якщо ж рівність (3.2) виконується при умові, що хоча б одне із m дійсних чисел $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m$ відмінне від нуля, то названі розв'язки називаються лінійно залежними.

Має місце **теорема**:

Якщо ранг матриці A дорівнює r (буде позначатися так: $r(A)=r$), то відповідна однорідна система має максимум $n-r$ лінійно незалежних розв'язків.

Звідси випливає **теорема 2**: якщо для неоднорідної системи (1.2) має місце перший випадок альтернативи, то він має місце і для транспонованої неоднорідної системи (2.2). У другому випадку альтернативи відповідна однорідна система і до неї транспонована однорідна система має однакову

кількість нетривіальних лінійно незалежних розв'язків, це число дорівнює $n-r$, де $r=r(A)$.

Дійсно, якщо $d(A) \neq 0$, то і $d(A^*) \neq 0$, й ми маємо перший випадок альтернативи. Якщо ж маємо другий випадок альтернативи, то $d(A)=0$ і відповідно $d(A^*)=0$. Якщо ж $r(A)=r$, то і $r(A^*)=r$ і відповідно до систем (1.2), (2.2) однорідні системи будуть мати однакову кількість нетривіальних лінійно незалежних розв'язків, а саме $n-r$ розв'язків.

Розширену матрицю системи (1.2) позначимо через

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}.$$

Теорема, яка належить німецькому математику Л. Кронекеру (1823 – 1901) та італійському математику А. Капеллі (1855 – 1910), сформулюється так:

Для того, щоб система (1.2) мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб $r(A)=r(B)$.

Цю теорему можна сформулювати ще так.

Теорема 3. У другому випадку альтернативи, щоб неоднорідна система (1.2) мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого розв'язку $x_1; x_2; \dots; x_n$ однорідної транспонованої системи (2.2) виконувалася рівність:

$$\sum_{i=1}^n b_i x_i = 0. \quad (4.2)$$

Необхідність. Нехай $x_1; x_2; \dots; x_n$ – розв'язок системи (1.2), $z_1; z_2; \dots; z_n$ – деякі розв'язки однорідної транспонованої системи. Покажемо, що виконується рівність (4.2). Перше рівняння системи (1.2) помножимо на z_1 , друге – на z_2 і так далі, n -не – на z_n :

$$\begin{cases} b_1 z_1 = a_{11} x_1 z_1 + a_{12} x_2 z_1 \dots + a_{1n} x_n z_1 \\ b_2 z_2 = a_{21} x_1 z_2 + a_{22} x_2 z_2 \dots + a_{2n} x_n z_2 \\ b_n z_n = a_{n1} x_1 z_n + a_{n2} x_2 z_n + \dots + a_{nn} x_n z_n. \end{cases}$$

Додамо дані рівняння і відповідно згрупуємо

$$b_1 z_1 + b_2 z_2 + \dots + b_n z_n = x_1 (a_{11} z_1 + a_{21} z_2 + \dots + a_{n1} z_n) + \\ + x_2 (a_{12} z_1 + a_{22} z_2 + \dots + a_{n2} z_n) + \dots + x_n (a_{1n} z_1 + a_{2n} z_2 + \dots + a_{nn} z_n) = 0,$$

оскільки $z_1; z_2; \dots; z_n$ – розв’язок однорідної транспонованої системи рівнянь.

Отже, $\sum_{i=1}^n b_i z_i = 0$.

Достатність. Нехай виконується умова (4.2). Доведемо, що існує розв’язок системи (1.2). Для цього достатньо довести, що $r(A)=r(B)$. Якщо $r(A)=n$, то і $r(B)=n$.

Розглянемо випадок, коли $r(A)=r < n$. Очевидно, $r(B) \geq r(A)$.

Покажемо, що $r(B) \leq r(A)$. Для цього достатньо довести, що всі визначники $r+1$ порядку, складені із елементів матриці B , дорівнюють нулю. Серед мінорів $r+1$ порядку матриці B слід перевіряти тільки ті, останній стовпець яких складених із чисел $b_1; b_2; \dots; b_n$. Візьмемо один з таких визначників

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1r} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2r} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} \dots & a_{r+1,r} & b_{r+1} \end{vmatrix} = b_1 A_{b_1} + b_2 A_{b_2} + \dots + b_{r+1} A_{b_{r+1}}. \quad (5.2)$$

Покажемо, що цей визначник $r+1$ порядку дорівнює нулю.

A_{b_i} – алгебраїчне доповнення елемента b_i . Нехай

$$z_1 = A_{b_1}; z_2 = A_{b_2}; \dots; z_{r+1} = A_{b_{r+1}}; z_{r+2} = 0; \dots; z_n = 0.$$

Покажемо, що так вибрані $z_i (i=1, 2, \dots, n)$ задовольняють однорідну транспоновану систему. Підставляючи значення $z_i (i=1, 2, \dots, n)$ у перше рівняння однорідної транспонованої системи, отримаємо

$$a_{11} z_1 + a_{21} z_2 + \dots + a_{r+1,1} z_n = a_{11} A_{b_1} + a_{21} A_{b_2} + \dots + a_{r+1,1} A_{b_{r+1}} = \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1r} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2r} & a_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} \dots & a_{r+1,r} & a_{r+1,1} \end{vmatrix} = 0,$$

оскільки перший та останній стовпці рівні. Аналогічно показується, що будуть задовольнятися друге, третє і т.д., r -не рівняння однорідної транспонованої системи. Підставляючи значення $z_i (i=1,2,\dots,n)$ у $r+1$ рівняння однорідної транспонованої системи, отримаємо

$$a_{1,r+1}A_{b_1} + a_{2,r+1}A_{b_2} + \dots + a_{r+1,r+1}A_{b_{r+1}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1r} & a_{1,r+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} \end{vmatrix}.$$

Цей визначник $r+1$ порядку також дорівнює нулю, оскільки $r(A)+r$, і тому всі визначники $r+1$ -го порядку дорівнюють нулю. Аналогічно легко переконатися, що вибрані значення $z_i (i=1,2,\dots,n)$ задовольняють усі інші рівняння однорідної транспонованої системи. Теорема повністю доведена.

Надалі теореми 1, 2, 3 застосуємо до інтегральних рівнянь.

2.2. Наближене розв'язування інтегральних рівнянь за допомогою системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Ядро $K^*(x, \xi)$ називається транспонованим до ядра $K(x, \xi)$, якщо $K^*(x, \xi) = K(\xi, x)$. Наприклад, транспонованим до ядра $K(x, \xi) = \xi^2 + x\xi^3$ буде ядро $K^*(x, \xi) = x^2 + \xi x^3$.

1. Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + f(x), \quad x \in [a, b] \quad (6.2)$$

і складемо рівняння

$$z(x) = \lambda \int_a^b K^*(x, \xi) z(\xi) d\xi + f^*(x) = \lambda \int_a^b K(\xi, x) z(\xi) d\xi + f^*(x), \quad (7.2)$$

де $f^*(x)$ – довільна неперервна функція, $x \in [a, b]$.

Інтегральне рівняння Фредгольма другого роду (7.2) називається транспонованим до рівняння (6.2). Наприклад, рівняння

$$z(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 - \xi) z(\xi) d\xi + 2x$$

є транспонованим до рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (\xi^2 - x) \varphi(\xi) d\xi + x^3 + 3x.$$

Тут $f(x) = x^3 + 3x$; $f^*(x) = 2x$. Ядро $K(x, \xi)$ задано у квадраті $\{a \leq x \leq b; a \leq \xi \leq b\}$. Розіб'ємо сегмент $[a, b]$ на n рівних частин, довжина сторони кожного малого квадрата дорівнює: $\frac{b-a}{n} = \Delta x = \Delta \xi = h$.

Введемо позначення

$$K(a+ph, a+qh) = K_{pq} \quad (p, q = 1, 2, \dots, n),$$

$$\begin{cases} f(a+ph) = f_p \\ \varphi(a+ph) = \varphi_p \end{cases} \quad p=1, 2, \dots, n.$$

У кожному квадраті ядро буде сталою величиною, а функцію $f(x)$ будемо вважати на кожному маленькому інтервалі сталою, тобто кусково-сталою на $[a, b]$.

Розв'язок $\varphi(x)$ будемо також шукати у вигляді кусково-сталої функції на $[a, b]$.

Тоді рівняння (6.2) можна наближено замінити системою алгебраїчних рівнянь. Дійсно, поставивши в рівняння (6.2) замість x його значення $x=a+h$, отримаємо

$$\varphi_1 = \lambda \int_a^b K(a+h, \xi) \varphi(\xi) d\xi + f_1 = f_1 + \lambda \int_a^b K_1(\xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Інтеграл наближено замінимо сумою $\sum_{q=1}^n K_{1q} \varphi_q h$, оскільки

$$\int_a^b K_1(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{q=1}^n K_{1q} \varphi_q h$$

і при $x=a+h$ будемо мати таке рівняння

$$\varphi_1 = \lambda \sum_{q=1}^n K_{1q} \varphi_q h + f_1. \quad (8.2)$$

При $x=a+2h$ аналогічно отримаємо

$$\varphi_2 = \lambda \sum_{q=1}^n K_{2q} \varphi_q h + f_2 \text{ і т.д.} \quad (9.2)$$

Нарешті, при $x=a+nh$ маємо

$$\varphi_n = \lambda \sum_{q=1}^n K_{nq} \varphi_q h + f_n \text{ і т.д.} \quad (10.2)$$

Рівняння (8.2), (9.2), (10.2) у розгорнутому вигляді можна написати так

$$\begin{cases} (1 - \lambda K_{11} h) \varphi_1 - \lambda K_{12} h \varphi_2 - \dots - \lambda K_{1n} h \varphi_n = f_1, \\ -\lambda K_{21} h \varphi_1 + (1 - \lambda K_{22} h) \varphi_2 - \dots - \lambda K_{2n} h \varphi_n = f_2, \\ -\lambda K_{n1} h \varphi_1 - \lambda K_{n2} h \varphi_2 - \dots + (1 - \lambda K_{nn} h) \varphi_n = f_n. \end{cases} \quad (11.2)$$

Замість одного інтегрального рівняння (6.2) ми отримали систему n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $\varphi_i (i = 1, 2, \dots, n)$. Якщо $n \rightarrow \infty$, то $h \rightarrow 0$ і система (11.2) переходить до інтегрального рівняння (6.2).

При розв'язуванні системи (11.2) вагому роль відіграє визначник, складений із коефіцієнтів системи (11.2):

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda K_{11}h & -\lambda K_{12}h & \dots & -\lambda K_{1n}h \\ -\lambda K_{21}h & 1 - \lambda K_{22}h & \dots & -\lambda K_{2n}h \\ -\lambda K_{n1}h & -\lambda K_{n2}h & \dots & (1 - \lambda K_{nn}h) \end{vmatrix}. \quad (12.2)$$

Якщо визначник (12.2) відмінний від нуля, то система (11.2) має єдиний розв'язок. Якщо ж він дорівнює нулю, то відповідна однорідна система має принаймні один нетривіальний розв'язок. У граничному переході при $n \rightarrow \infty$ кусково-стала на $[a, b]$ функція, яка складається із сталих φ_i , переходить у функцію $\varphi(x)$. Тому розв'язок системи (11.2) при $n \rightarrow \infty$ прямує до розв'язку рівняння (6.2). Тепер можна сформулювати теорему.

Перша теорема Фредгольма. *Або неоднорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду (6.2) має єдиний розв'язок при довільній функції $f(x)$ (із деякого достатньо широкого класу), або відповідне однорідне рівняння*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi \quad (13.2)$$

має принаймні один нетривіальний, тобто не рівний нулю, розв'язок.

Якщо зробити ті ж викладки для транспонованого інтегрального рівняння (7.2), то

$$K_{pq}^* = K^*(a + ph, a + qh) = K(a + ph, a + qh) = K_{qp},$$

і ми отримаємо систему, аналогічну системі (11.2):

$$\begin{cases} (1 - \lambda K_{11}h)z_1 - \lambda K_{21}hz_2 - \dots - \lambda K_{n1}hz_n = f_1^*, \\ -\lambda K_{12}hz_1 + (1 - \lambda K_{22}h)z_2 - \dots - \lambda K_{n2}hz_n = f_2^*, \\ -\lambda K_{1n}hz_1 - \lambda K_{2n}hz_2 - \dots + (1 - \lambda K_{nn}h)z_n = f_n^*. \end{cases} \quad (14.2)$$

Визначник, складений із коефіцієнтів системи (14.2), можна отримати із визначника (12.2), якщо в останньому замінити рядки стовпцями з тим самим порядковим номером. При такій операції визначник, як відомо, не змінить свого значення. Розв'язок системи (14.2) у граничному переході при $n \rightarrow \infty$ прямує до розв'язку транспонованого інтегрального рівняння (7.2). Тепер можна сформулювати таку теорему.

Друга теорема Фредгольма. Якщо для неоднорідного інтегрального рівняння (6.2) має місце перший випадок альтернативи, то він має місце і для транспонованого рівняння (7.2). У другому випадку альтернативи однорідного інтегрального рівняння (13.2) і транспоноване до нього

$$z(x) = \lambda \int_a^b K(\xi, x) z(\xi) d\xi \quad (15.2)$$

має одне і те скінченне число лінійно незалежних розв'язків.

Рівність (4.2) для системи (11.2) можна написати так

$$\sum_{i=1}^n f_i z_i = 0.$$

Помноживши ліву і праву частини на $h = \frac{b-a}{n} = \Delta x = \Delta \xi$ і перейшовши до границі при $n \rightarrow \infty$, отримаємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_i h z_i = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_i \Delta x z_i = \int_a^b z(x) f(x) dx = 0,$$

оскільки $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{b-a}{n} = 0$. Тепер можна сформулювати теорему.

Третя теорема Фредгольма. У другому випадку необхідною і достатньою умовою існування розв'язку інтегрального рівняння (6.2) є умова

$$\int_a^b f(x) z(x) dx = 0, \quad (16.2)$$

де $z(x)$ – будь-який розв'язок транспонованого однорідного рівняння (15.2), а $f(x)$ – вільний член неоднорідного рівняння (6.2).

Звернемо увагу на те, що в другому випадку альтернативи, якщо виконується умова (16.2), то неоднорідне рівняння (6.2) має безліч розв'язків.

Дійсно, нехай $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$ – максимальна система лінійно незалежних розв'язків однорідного інтегрального рівняння (13.2). Це рівняння лінійне, тому функція

$$\varphi(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x) + \dots + c_k(x)\varphi_k(x) \quad (17.2)$$

також задовольняє рівняння (13.2). Нехай $Y(x)$ – розв’язок неоднорідного рівняння (6.2). Безпосередня перевірка показує, що функція

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_k\varphi_k(x) + Y(x) \quad (18.2)$$

є розв’язком неоднорідного рівняння (6.2). Константи C_i можуть приймати різні числові значення, тому ми отримали безліч розв’язків неоднорідного інтегрального рівняння.

1. Інтегральне рівняння Вольтерра другого роду має вигляд

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + f(x), \quad (19.2)$$

його можна вважати окремим випадком рівняння (6.2) з ядром

$$\bar{K}(x, \xi) = \begin{cases} K(x, \xi), & a \leq x \leq b; \quad a \leq \xi \leq x; \\ 0, & x < \xi \leq b \end{cases}$$

Тоді,

$$\overline{K_{pq}} = \bar{K}(a + ph, a + qh) = \begin{cases} K_{pq}, & q \leq p \\ 0, & q > p \end{cases}$$

і система алгебраїчних рівнянь (11.2) для рівняння Вольтерра другого роду (19.2) запишеться так:

$$\begin{cases} (1 - \lambda K_{11}h)\varphi_1 = f_1, \\ -\lambda K_{21}h\varphi_1 + (1 - \lambda K_{22}h)\varphi_2 = f_2, \\ -\lambda K_{n1}h\varphi_1 - \lambda K_{n2}h\varphi_2 - \dots + (1 - \lambda K_{nn}h)\varphi_n = f_n \end{cases}. \quad (20.2)$$

Визначник цієї системи має вигляд

$$\begin{aligned} d_n &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda K_{11}h & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda K_{21}h & (1 - \lambda K_{22}h) & \dots & 0 \\ -\lambda K_{n1}h & -\lambda K_{n2}h & \dots & 1 - \lambda K_{nn}h \end{vmatrix} = \\ &= (1 - \lambda K_{11}h)(1 - \lambda K_{22}h) \dots (1 - \lambda K_{nn}h) \geq (1 - |\lambda| Mh)^n. \end{aligned}$$

Покажемо, що $d_n \neq 0$, для цього скористаємося границею

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{B}{n}\right)^n = e^B.$$

Згідно з цією формулою,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - |\lambda| M h)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{|\lambda| M (b-a)}{n} \right)^n = e^{-|\lambda| M (b-a)} \neq 0,$$

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Оскільки $d_n \neq 0$, то система (20.2) має єдиний розв'язок. Отже, для неоднорідного рівняння Вольтерра другого роду завжди має місце перший випадок альтернативи. Другий випадок альтернативи не має місця. Друга теорема Фредгольма для неоднорідного рівняння Вольтерра другого роду сформулюється так: *для неоднорідного рівняння Вольтерра другого роду (19.2) і транспонованого неоднорідного рівняння Вольтерра завжди має місце перший випадок альтернативи.*

Відносно третьої теореми Фредгольма тут можна відмітити, що умова $\int_a^x z(x) f(x) dx = 0$ завжди виконується, оскільки неоднорідне рівняння Вольтерра (19.2) завжди має розв'язок.

2. Розглянемо неоднорідне рівняння Фредгольма з малим ядром

$$|K(x, \xi)| \leq M < \frac{1}{|\lambda|(b-a)}.$$

Транспонування до малого ядра теж буде малим ядром, тому

$$|K^*(x, \xi)| = |K(x, \xi)| \leq M < \frac{1}{|\lambda|(b-a)}.$$

Для неоднорідного інтегрального рівняння (6.2) з малим ядром ми довели теорему про існування і єдиність неперервного розв'язку. Тепер три теореми Фредгольма можна сформулювати так.

Перша теорема Фредгольма. *Для неоднорідного рівняння Фредгольма другого роду з малим ядром завжди має перший випадок альтернативи.*

Друга теорема Фредгольма. *Для неоднорідного рівняння Фредгольма другого роду з малим ядром і для відповідного йому транспонованого рівняння завжди має місце перший випадок альтернативи, другий випадок альтернативи не має місця.*

Відносно *третьої теореми Фредгольма* можна стверджувати, що умова $\int_a^x z(x) f(x) dx = 0$ завжди виконується, оскільки неоднорідне рівняння Фредгольма з малим ядром згідно з доведеною теоремою про існування і єдиність неперервного розв'язку має єдиний розв'язок.

Названі умови можна перевірити і другим способом.

Для однорідного рівняння з малим ядром і для відповідного йому транспонованого рівняння другий випадок альтернати не має місця. Отже, згадане транспоноване однорідне рівняння

$$z(x) = \lambda \int_a^b K(\xi, x) z(\xi) d\xi$$

має тільки один тривіальний розв'язок $z(x) \equiv 0$, тоді умова $\int_a^x z(x) f(x) dx = 0$ завжди виконується.

2.3. Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з виродженим ядром

Раніше теореми 1, 2, 3, отримані для системи лінійних алгебраїчних рівнянь, були узагальнені на випадок інтегральних рівнянь. Водночас ми інтегральні рівняння наближено замінювали скінченною системою лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої приймався за наближення розв'язку відповідного інтегрального рівняння. Насправді, розв'язок інтегрального рівняння є розв'язком нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Тому теореми, справедливі для скінченної системи алгебраїчних рівнянь, не можна механічно перенести на нескінченну систему алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з виродженим ядром. Ядро неоднорідного інтегрального рівняння Фредгольма (6.2) називається *виродженим ядром*, якщо воно має вигляд

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^m a_i(x) b_i(\xi), \quad (21.2)$$

де $a_i(x)$, $b_i(\xi)$ – неперервні на $[a, b]$ функції. Прикладом вироджених ядер будуть: $x^2 \xi + x \xi^3$; $x \sin \xi + \cos x$; $\sin(x + \xi) = \sin x \cos \xi + \cos x \sin \xi$.

Ядро $K(x, \xi) = \sin(x\xi)$ не буде виродженим ядром, оскільки його не можна зобразити у вигляді (21.2).

Будемо вважати, що функції $a_1(x); a_2(x); \dots; a_m(x)$, а також функції $b_1(\xi); b_2(\xi); \dots; b_m(\xi)$ лінійно незалежні. В іншому випадку кількість доданків у формулі (21.2) можна було б взяти від m .

Дійсно, нехай функції $a_1(x); a_2(x); \dots; a_m(x)$ лінійно залежні, тобто існують такі компоненти $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, не всі одночасно рівні нулю, що при будь-якому x із заданої області виконується рівність

$$\beta_1 a_1(x) + \beta_2 a_2(x) + \dots + \beta_m a_m(x) = 0.$$

Нехай $\beta_m \neq 0$, тоді напишемо дану рівність так

$$a_m(x) = \alpha_1 a_1(x) + \dots + \alpha_{m-1} a_{m-1}(x),$$

де

$$\alpha_i = -\frac{\beta_i}{\beta_m} \quad (i = 1, 2, \dots, m-1).$$

Тоді формула (21.2) набуде вигляду

$$\begin{aligned} K(x, \xi) &= \sum_{i=1}^m a_i(x) b_i(\xi) = a_1(x) b_1(\xi) + a_2(x) b_2(\xi) + \dots \\ &+ a_{m-1}(x) b_{m-1}(\xi) + a_m(x) b_m(\xi) = a_1(x) b_1(\xi) + a_2(x) b_2(\xi) + \dots \\ &+ a_{m-1}(x) b_{m-1}(\xi) + (\alpha_1 a_1(x) + \alpha_2 a_2(x) + \dots + \alpha_{m-1} a_{m-1}(x)) b_m(\xi) = \\ &= a_1(x) [b_1(\xi) + \alpha_1 b_m(\xi)] + a_2(x) [b_2(\xi) + \alpha_2 b_m(\xi)] + \dots + \\ &+ a_{m-1}(x) [b_{m-1}(\xi) + \alpha_{m-1} b_m(\xi)] = \sum_{i=1}^{m-1} a_i(x) c_i(\xi), \end{aligned}$$

де $c_i(\xi) = b_i(\xi) + \alpha_i b_m(\xi)$, $i=1, 2, \dots, m-1$.

Функції $a_1(x), a_2(x), \dots, a_m(x)$ і функції $b_1(\xi), b_2(\xi), \dots, b_m(\xi)$ лінійно незалежні.

Неоднорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого ряду (6.2) з виродженим ядром можна записати так

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^m a_i(x) b_i(\xi) \varphi(\xi) d\xi + f(x) = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^m a_i(x) \int_a^b b_i(\xi) \varphi(\xi) d\xi + f(x). \end{aligned}$$

Позначимо

$$A_i = \int_a^b b_i(\xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad (22.2)$$

тоді,

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^m A_i a_i(x) + f(x). \quad (23.2)$$

Підставимо $\varphi(x) = \lambda \sum_{j=1}^m A_j a_j(x) + f(x)$ у (22.2):

$$\begin{aligned} A_i &= \int_a^b b_i(\xi) [\lambda \sum_{j=1}^m A_j a_j(\xi) + f(\xi)] d\xi = \\ &= \int_a^b b_i(\xi) \varphi(\xi) d\xi + \lambda \sum_{j=1}^m A_j \int_a^b b_i(\xi) a_j(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Введемо позначення:

$$\int_a^b b_i(\xi) a_j(\xi) d\xi = K_{ij} ; \quad \int_a^b b_i(\xi) f(\xi) d\xi = f_i, \quad (24.2)$$

K_{ij} , f_i – відомі константи,

$$A_i = \lambda \sum_{j=1}^m K_{ij} A_j + f_i, \quad i=1,2,\dots,m, \quad (25.2)$$

$$\begin{cases} (1 - \lambda K_{11})A_1 - \lambda K_{12}A_2 - \dots - \lambda K_{1m}A_m = f_1 \\ -\lambda K_{21}A_1 + (1 - \lambda K_{22})A_2 - \dots - \lambda K_{2m}A_m = f_2 \\ -\lambda K_{m1}A_1 - \lambda K_{m2}A_2 - \dots - (1 - \lambda K_{mm})A_m = f_m \end{cases}. \quad (26.2)$$

Якщо визначник відмінний від нуля, то отримаємо єдиний розв'язок $A_1, A_2, \dots, A_m$ системи (26.2). Якщо ж визначник дорівнює нулю, то відповідна однорідна система має хоча б один нетривіальний розв'язок і задається формулою

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^m A_i a_i(x). \quad (27.2)$$

Отже, перша теорема Фредгольма для інтегрального рівняння з виродженим ядром строго доведена.

Переходимо до доведення другої теореми Фредгольма. Розглянемо транспонування рівняння

$$z(x) = \lambda \int_a^b K^*(x, \xi) z(\xi) d\xi + f^*(x). \quad (7.2)$$

Як відомо,

$$K^*(x, \xi) = K(\xi, x) = \sum_{i=1}^m a_i(\xi) b_i(x). \quad (28.2)$$

Враховуючи це, формули (22.2), (23.2), (24.2), (25.2) тут відповідно запишуться так

$$A_i^* = \int_a^b a_i(\xi) z(\xi) d\xi, \quad (29.2)$$

$$z(x) = \lambda \sum_{i=1}^m A_i^* b_i(x) + f^*(x), \quad (30.2)$$

$$K_{ij}^* = \int_a^b a_i(\xi) b_j(\xi) d\xi = K_{ji}; f_i^* = a_i(\xi) f^*(\xi) d\xi, \quad (31.2)$$

$$A_i^* = \lambda \sum_{j=1}^m K_{ji} A_j^* + f_i^*, \quad (32.2)$$

а формула (27.2) заміниться формулою

$$z(x) = \lambda \sum_{i=1}^m A_i^* b_i(x). \quad (33.2)$$

Система (32.2) у розгорнутому вигляді запишеться так

$$\begin{cases} (1 - \lambda K_{11}) A_{11}^* - \lambda K_{21} A_2^* - \dots - \lambda K_{m1} A_m^* = f_1^* \\ -\lambda K_{12} A_1^* + (1 - \lambda K_{22}) A_2^* - \dots - \lambda K_{m2} A_m^* = f_2^* \\ -\lambda K_{1m} A_1^* - \lambda K_{2m} A_2^* - \dots - (1 - \lambda K_{mm}) A_m^* = f_m^* \end{cases} \quad (34.2)$$

Якщо визначник системи (26.2) не дорівнює нулю, то і визначник системи (34.2) не дорівнює нулю, оскільки визначник системи (34.2) отримується із визначника системи (26.2) шляхом заміни рядків стовпцями з тим самим порядковим номером. Водночас визначник не змінив свого значення. Тому, якщо система (26.2) має єдиний розв'язок, то і система (34.2) має єдиний розв'язок. Згідно з формулою (23.2) і (30.2) відповідні неоднорідні інтегральні рівняння (6.2) і (7.2) будуть мати єдиний розв'язок. Відповідно, якщо має місце перший випадок альтернативи для неоднорідного рівняння (6.2), то цей випадок альтернативи має місце і для неоднорідного транспонованого рівняння (7.2).

Залишається довести, що однорідне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad (35.2)$$

і транспоноване до нього однорідне рівняння

$$z(x) = \lambda \int_a^b K(\xi, x) z(\xi) d\xi \quad (35.2)$$

у другому випадку альтернативи має однакову скінченну кількість нетривіальних лінійно незалежних розв'язків.

Ранг матриці системи (11.2) такий, як і ранг матриці системи (34.2). Відповідно, кількість лінійно незалежних розв'язків однакова. Припустимо, що однорідна система, відповідна до системи (11.2), має p розв'язків.

$$A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \dots, A_m^{(1)}, \\ A_1^{(p)}, A_2^{(p)}, \dots, A_m^{(p)}.$$

За формулою (27.2) складемо для однорідного рівняння (13.2) розв'язок

$$\varphi^{(1)}(x) = \lambda \sum_{i=1}^m A_i^{(1)} a_i(x), \\ \varphi^{(p)}(x) = \lambda \sum_{i=1}^m A_i^{(p)} a_i(x).$$

Складемо вираз

$$\alpha_1 \varphi^{(1)}(x) + \alpha_2 \varphi^{(2)}(x) + \dots + \alpha_p \varphi^{(p)}(x) = \alpha_1 \lambda \sum_{i=1}^m A_i^{(1)} a_i(x) + \\ + \alpha_2 \lambda \sum_{i=1}^m A_i^{(2)} a_i(x) + \dots + \alpha_p \lambda \sum_{i=1}^m A_i^{(p)} a_i(x).$$

Після елементарних перетворень отримаємо

$$\alpha_1 \varphi^{(1)}(x) + \alpha_2 \varphi^{(2)}(x) + \dots + \alpha_p \varphi^{(p)}(x) = \\ = \lambda a_1(x) [\alpha_1 A_1^{(1)} + \alpha_2 A_1^{(2)} + \dots + \alpha_p A_1^{(p)}] + \\ + \lambda a_2(x) [\alpha_1 A_2^{(1)} + \alpha_2 A_2^{(2)} + \dots + \alpha_p A_2^{(p)}] + \\ + \dots + \\ + \lambda a_m(x) [\alpha_1 A_m^{(1)} + \alpha_2 A_m^{(2)} + \dots + \alpha_p A_m^{(p)}].$$

Нехай

$$\alpha_1 \varphi^{(1)}(x) + \alpha_2 \varphi^{(2)}(x) + \dots + \alpha_p \varphi^{(p)}(x) = 0. \quad (36.2)$$

Тоді,

$$\begin{cases} \alpha_1 A_1^{(1)} + \alpha_2 A_1^{(2)} + \dots + \alpha_p A_1^{(p)} \\ \alpha_1 A_2^{(1)} + \alpha_2 A_2^{(2)} + \dots + \alpha_p A_2^{(p)} \\ \alpha_1 A_m^{(1)} + \alpha_2 A_m^{(2)} + \dots + \alpha_p A_m^{(p)} \end{cases} \quad (37.2)$$

Рівності (36.2) і (37.2) виконуються одночасно. Якщо рівність (36.2) виконується, тоді не всі α_i дорівнюють нулю, то при тих α_i виконується рівність (37.2), і навпаки. Це означає, що якщо функції $\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \dots, \varphi^{(p)}(x)$ є лінійно незалежними, то і коефіцієнти

$$\begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ A_m^{(1)} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ A_m^{(2)} \end{pmatrix}; \dots; \quad \begin{pmatrix} A_1^{(p)} \\ A_2^{(p)} \\ A_m^{(p)} \end{pmatrix} \quad (38.2)$$

як розв'язок системи (26.2) є лінійно незалежними.

Рівність (37.2) можна символічно записати так:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ A_m^{(1)} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ A_m^{(2)} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_p \begin{pmatrix} A_1^{(p)} \\ A_2^{(p)} \\ A_m^{(p)} \end{pmatrix} = 0. \quad (39.2)$$

Відповідно, можна зробити висновок, що однорідна система (26.2) й однорідне інтегральне рівняння (13.2) мають однакову скінченну кількість лінійно-незалежних розв'язків.

Оскільки відповідні (26.2) та (34.2) однорідні системи мають однакову кількість розв'язків, то і однорідні інтегральні рівняння (13.2) і (15.2) у другому випадку альтернативи мають однакову кількість розв'язків. Отже, друга теорема Фредгольма доведена.

Коли розв'язки лінійно незалежні, то всі вони нетривіальні.

Було доведено, що однорідне інтегральне рівняння з виродженим ядром має скінченне число лінійно незалежних розв'язків, тобто скінченне число власних значень при умові, що

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda K_{11} & \lambda K_{12} & \dots - \lambda K_{1m} \\ -\lambda K_{21} & 1 - \lambda K_{22} & \dots - \lambda K_{2m} \\ -\lambda K_{m1} & -\lambda K_{m2} & \dots 1 - \lambda K_{mm} \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язуючи це алгебраїчне рівняння, можна знайти всі власні значення однорідного інтегрального рівняння з виродженим ядром.

Третя теорема Фредгольма говорить про те, що необхідною і достатньою умовою існування розв'язку неоднорідного рівняння (6.2) є умова

$$\int_a^b z(\xi) f(\xi) d\xi = 0. \quad (16.2)$$

Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку системи (26.2), є умова

$$\sum_{i=1}^m A_i^* f_i = 0, \quad (40.2)$$

де f_i – праві частини неоднорідної системи, а A_i^* – довільні розв'язки відповідної транспонованої однорідної системи.

Необхідність. Нехай неоднорідне рівняння Фредгольма другого роду має розв'язок. Тоді має розв'язок неоднорідна система (26.2), це означає, що виконується умова (40.2). Помножимо праву і ліву частини рівняння (40.2) на λ і замість f_i підставимо його значення згідно з формулою (24.2), тоді

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \sum_{i=1}^m A_i^* f_i = \lambda \sum_{i=1}^m A_i^* \int_a^b b_i(\xi) f(\xi) d\xi = \\ &= \int_a^b [\lambda \sum_{i=1}^m A_i^* b_i(\xi)] f(\xi) d\xi = \int_a^b z(\xi) f(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

оскільки $z(\xi) = \lambda \sum_{i=1}^m A_i^* b_i(\xi)$.

Достатність. Нехай виконується умова $\int_a^b z(\xi) f(\xi) d\xi = 0$. Міркуючи зворотним шляхом, отримаємо рівність (40.2), а якщо $\sum_{i=1}^m f_i A_i^* = 0$, то

неоднорідна система (26.2) має розв'язок $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$, і тоді існує розв'язок неоднорідного рівняння (6.2), яке задається за формулою

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^m A_i a_i(x) + f(x), \quad (23.2)$$

і третя теорема Фредгольма доведена.

2.4. Приклади

Використовуючи теорію інтегральних рівнянь з виродженим ядром, розв'яжіть наступне рівняння:

$$1. \quad \varphi(x) = 2 \int_0^1 (1 + 3x\xi) \varphi(\xi) d\xi + x^2$$

$$K(x, \xi) = 1 + 3x\xi; \quad \lambda = 2; \quad f(x) = x^2;$$

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^2 a_i(x) b_i(\xi); \quad a_1(x) = 1; \quad a_2(x) = 3x; \quad b_1(\xi) = 1; \quad b_2(\xi) = \xi.$$

$$\text{Коефіцієнти } K_{ij} = \int_a^b b_i(x) a_j(x) dx; \quad f_i = \int_a^b b_i(x) f(x) dx$$

$$K_{11} = \int_0^1 b_1(x) a_1(x) dx = \int_0^1 dx = 1;$$

$$K_{12} = \int_0^1 b_1(x) a_2(x) dx = \int_0^1 3x dx = \frac{3}{2};$$

$$K_{21} = \int_0^1 b_2(x) a_1(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2};$$

$$K_{22} = \int_0^1 b_2(x) a_2(x) dx = \int_0^1 x \cdot 3x dx = 1;$$

$$f_1 = \int_0^1 b_1(x) f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3};$$

$$f_2 = \int_0^1 b_2(x) f(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$

Складемо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (1 - \lambda K_{11}) A_1 - \lambda K_{12} A_2 = f_1 \\ -\lambda K_{21} A_1 + (1 - \lambda K_{22}) A_2 = f_2 \end{cases}$$

яка переписеться так

$$\begin{cases} -A_1 - 3A_2 = \frac{1}{3} \\ -A_1 - A_2 = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Отримали $A_1 = -\frac{5}{24}$, $A_2 = -\frac{1}{24}$. Обчислимо визначники

$$\begin{vmatrix} 1 - K_{11} & -\lambda K_{12} \\ -\lambda K_{21} & 1 - \lambda K_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -\frac{3}{2}\lambda \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 1 - 2\lambda + \frac{1}{4}\lambda^2.$$

Очевидно, $\lambda=2$ не буде коренем рівняння $1 - 2\lambda + \frac{1}{4}\lambda^2$. Тому неоднорідне рівняння має єдиний неперервний розв'язок

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_i A_i a_i(x) = x^2 + 2 \left(-\frac{5}{24} - \frac{1}{24} 3x \right) = x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{5}{12}.$$

2.5. Теорема Фредгольма для інтегральних рівнянь з ядрами, близькими до вироджених

Нехай ми маємо неоднорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду і транспоноване до нього рівняння

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi + f(x), \quad (41.2)$$

$$z(x) = \lambda \int_a^b K(\xi, x) z(\xi) d\xi + f^*(x). \quad (42.2)$$

Ядра $K(x, \xi)$ і $K(\xi, x)$ називаються близькими до виродження, якщо кожне з них можна зобразити сумою двох ядер – виродженого і малого ядра, тобто

$$\begin{aligned} K(x, \xi) &= \sum_{i=1}^m a_i(x) b_i(\xi) + \bar{K}(x, \xi) = A(x, \xi) + \bar{K}(x, \xi), \\ K(\xi, x) &= \sum_{i=1}^m a_i(\xi) b_i(x) + \bar{K}(\xi, x) = A(\xi, x) + \bar{K}(\xi, x), \end{aligned} \quad (43.2)$$

де $A(x, \xi) = \sum_i a_i(x) b_i(\xi)$, а $A(\xi, x) = \sum_i a_i(\xi) b_i(x)$ – вироджені ядра, $K(x, \xi)$, $K(\xi, x)$ – малі ядра.

Доведемо, що рівняння (41.2) еквівалентне рівнянню

$$\eta(x) = \lambda \int_a^b Q(x, \xi) \eta(\xi) d\xi + f(x), \quad (44.2)$$

де $Q(x, \xi)$ – еквівалентне рівнянню

$$z(x) = \lambda \int_a^b Q(\xi, x) z(\xi) d\xi + f^*(x), \quad (45.2)$$

де $Q(\xi, x)$ – вироджене ядро і транспоноване до $Q(x, \xi)$.

Введемо позначення

$$\psi(x) = \int_a^b K(x, \xi) \psi(\xi) d\xi = K\psi(x), \quad (46.2)$$

де K – оператор, який функцію $\psi(x)$ переводить у функцію $\psi(x)$.

Через K^* позначимо оператор, який визначається транспонованим ядром $K^*(x, \xi) = K(\xi, x)$:

$$K^* \psi(x) = \int_a^b K(\xi, x) \psi(\xi) d\xi. \quad (47.2)$$

Символ E – оператор, $E\psi = \psi$. Оператор

$$(K_1 \pm K_2)\psi = K_1\psi \pm K_2\psi, \quad K_1 K_2 \psi = K_1(K_2\psi).$$

Очевидними будуть такі рівняння

$$EK\psi = KE\psi = K\psi; \quad EE\psi = \psi.$$

Якщо оператори K_1 і K_2 виду (46.2) визначаються ядрами $K_1(x, \xi)$ і $K_2(x, \xi)$, то оператор $K_1 \pm K_2$ визначається ядром $K_1(x, \xi) \pm K_2(x, \xi)$, а оператор $K_1 K_2$ визначається таким ядром $\int_a^b K_1(x, t) K_2(t, \xi) dt$, яке буде позначатися так:

$$K_1 \circ K_2 = \int_a^b K_1(x, t) K_2(t, \xi) dt. \quad (48.2)$$

Очевидно, $K_1 K_2 \neq K_2 K_1$, оскільки $K_1 \circ K_2 \neq K_2 \circ K_1$.

Справді,

$$\int_a^b K_1(x, t) K_2(t, \xi) dt \neq \int_a^b K_2(x, t) K_1(t, \xi) dt.$$

Приклади

Нехай $K(x, \xi)$ – мале ядро, $R(x, \xi, \lambda)$ – резольвента цього ядра.

1. Визначити ядро $K \circ R$, а також оператор KR , який діє на функцію $\psi(x)$.
2. Використовуючи інтегральні рівняння резольвенти, вивести формули

$$(E + \lambda R)(E - \lambda K) = E, \quad (49.2)$$

$$(E - \lambda K)(E + \lambda R) = E. \quad (50.2)$$

Розв'язання.

1. Згідно з формулою (48.2), отримуємо

$$K^{\circ}R = \int_a^b K(x, t) R(t, \xi, \lambda) dt.$$

Оператор KR на основі формули (46.2) визначається рівнянням

$$KR\psi = \int_a^b \left[\int_a^b K(x, t) R(t, \xi, \lambda) dt \right] \psi(\xi) d\xi = \int_a^b \int_a^b K(x, t) R(t, \xi, \lambda) \psi(\xi) dt d\xi.$$

2. Раніше для резольвенти були отримані інтегральні рівняння:

$$R(t, \xi, \lambda) = K_1(x, \xi) + \lambda \int_a^b K(x, t) R(t, \xi, \lambda) dt,$$

$$R(t, \xi, \lambda) = K_1(x, \xi) + \lambda \int_a^b R(t, \xi, \lambda) K(t, \xi) dt$$

чи $R = K + \lambda K^{\circ}R$; $R = K + \lambda R^{\circ}K$, а відповідні оператори можна подати у вигляді:

$$R = K + \lambda KR, \quad R = K + \lambda RK. \quad (51.2)$$

Зведемо рівняння (41.2) до рівняння (44.2). Очевидно, рівняння (41.2) можна написати так $(E - \lambda K)\psi = f$. Враховуючи, що $K_1(x, \xi) = A(x, \xi) + \bar{K}(x, \xi)$, тобто $K = A + \bar{K}$, можна записати так:

$$(E - \lambda A - \lambda \bar{K})\psi = f \quad \text{чи} \quad (E - \lambda \bar{K})\psi = \lambda A\psi + f. \quad (52.2)$$

Позначимо

$$(E - \lambda \bar{K})\psi = \eta, \quad (53.2)$$

тобто рівняння

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b \bar{K}(x, \xi) \psi(\xi) d\xi + \eta(x)$$

є інтегральним рівнянням з малим ядром $\bar{K}(x, \xi)$. Раніше було доведено, що розв'язок інтегрального рівняння з малим ядром виражається згідно з формулою (41.2) через резольвенту:

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b R(x, \xi, \lambda) \eta(\xi) d\xi + \eta(x) = (\lambda R + E)\eta. \quad (54.2)$$

Враховуючи рівняння (53.2), рівняння (52.2) запишемо так: $\eta = \lambda A\psi + f$ і, враховуючи рівняння (54.2), отримаємо

$$\eta = \lambda A(\lambda R + E)\eta + f,$$

чи

$$[E - \lambda A(E + \lambda R)]\eta = f. \quad (55.2)$$

Рівняння (55.2) таке ж як (44.2). Ядро $A^\circ(E+\lambda R)$ є виродженим, у розгорнутому вигляді воно запишеться так

$$\begin{aligned} A^\circ(E+\lambda R) &= A^\circ E + \lambda A^\circ R = A + \lambda A^\circ R = \\ &= A(x, \xi) + \lambda \int_a^b A(x, t) R(t, \xi, \lambda) dt = Q(x, \xi). \end{aligned}$$

Однорідному рівнянню Фредгольма другого роду

$$[E - \lambda(A + \bar{K})]y = 0 \quad (56.2)$$

відповідає однорідне рівняння, відповідне рівнянню (55.2)

$$[E - \lambda A(E + \lambda R)]\eta = 0. \quad (57.2)$$

Доведемо, що рівняння (56.2) і (57.2) еквівалентні.

Нехай η задовольняє рівняння (57.2). Подіємо на ліву і праву частину цього рівняння оператором $E - \lambda \bar{K}$:

$$\begin{aligned} (E - \lambda \bar{K}) [E - \lambda A(E + \lambda R)] \eta &= 0, \\ [E - \lambda \bar{K} - \lambda(E - \lambda \bar{K}) A(E + \lambda R)] \eta &= 0, \\ [E - \lambda \bar{K} - \lambda(E - \lambda \bar{K})(E + \lambda R) A] \eta &= 0. \end{aligned} \quad (58.2)$$

Тут використана рівність

$$A(E + \lambda R) = (E + \lambda R)A, \quad (59.2)$$

яку легко довести. Справді, із рівняння (51.2) випливає, що $KR = RK$. Очевидно, $\bar{K}R = R\bar{K}$ і, враховуючи рівність $K = A + \bar{K}$, отримаємо

$$(A + \bar{K})R = R(A + \bar{K}) \text{ чи } AR = RA. \text{ Тоді } A(E + \lambda R) = A + \lambda AR = A + \lambda RA = (E + \lambda R)A$$

і рівність (59.2) доведено.

Тоді рівність (58.2) перепишемо так:

$$(E - \lambda \bar{K} - \lambda A)\eta = 0 \text{ чи } [E - \lambda(A + \bar{K})]\eta = 0,$$

а це означає, що η є розв'язком рівняння (56.2).

Нехай y задовольняє рівняння (56.2). Подіємо на ліву і праву частину цього рівняння оператором $E + \lambda R$:

$$\begin{aligned} (E + \lambda R) [E - \lambda(A + \bar{K})] y &= 0, \\ E + \lambda R [(E - \lambda \bar{K}) - \lambda A] y &= 0, \\ [(E - \lambda R)(E - \lambda \bar{K}) - \lambda(E + \lambda R) A] y &= 0. \end{aligned} \quad (60.2)$$

На основі рівності (49.2), (59.2) отримаємо

$$[E - \lambda A(E + \lambda R)]\psi = 0,$$

а це означає, що ψ є розв'язком рівняння (57.2).

Отже, еквівалентність рівняння (56.2) і (57.2) доведена.

Напишемо відповідні формули для рівняння (42.2) і (45.2), які можна записати так

$$[E - \lambda(A^* + K^*)]z = f^*, \quad (61.2)$$

$$[E - \lambda(E + \lambda R^*)A^*]\xi = f^*. \quad (62.2)$$

Відповідні однорідні рівняння мають вигляд

$$[E - \lambda(A^* + K^*)]z = 0, \quad (63.2)$$

$$[E - \lambda(E + \lambda R^*)A^*]\xi = 0. \quad (64.2)$$

2.6. Теорема Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервними ядрами

Із курсу математичного аналізу відома теорема Вейерштрасса:

Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в квадраті $D = \{x \in [a, b], y \in [a, b]\}$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти такий алгебраїчний многочлен $p(x, y)$, що для всіх $(x, y) \in D$ виконується нерівність

$$|f(x, y) - p(x, y)| \leq \varepsilon.$$

Покажемо, що ядро $K(x, \xi)$ інтегрального рівняння (41.2) є неперервна функція у квадраті D , то його при будь-якому λ можна замінити ядром, близьким до виродженого. Оскільки всі три теореми Фредгольма мають місце для інтегральних рівнянь з ядрами, близькими до вироджених, то тоді вони будуть автоматично перенесені і на випадок інтегральних рівнянь із неперервними ядрами.

Нехай $\varepsilon = \frac{1}{2|\lambda|(b-a)}$. Згідно з теоремою Вейерштрасса для будь-якого ε , зокрема і для вибраного ε , можна знайти такий многочлен $p(x, \xi)$, що в замкнутому квадраті D виконується нерівність

$$|K(x, \xi) - p(x, \xi)| \leq \frac{1}{2|\lambda|(b-a)}.$$

Ввівши позначення $K(x, \xi) - p(x, \xi) = \bar{K}(x, \xi)$, отримаємо

$$K(x, \xi) = p(x, \xi) + \bar{K}(x, \xi).$$

Ядро $p(x, \xi) = \sum_{k,l} a_{kl} x^k \xi^l$ вироджене, це видно із вигляду записаного полінома.

$\bar{K}(x, \xi)$ є мале ядро, так як нерівність

$$|\bar{K}(x, \xi) \leq M|, \text{ де } M < \frac{1}{2|\lambda|(b-a)}$$

завжди виконується. Щоб у цьому переконатись, достатньо взяти $M=\varepsilon$, тоді

$$|\bar{K}(x, \xi) \leq \varepsilon|, \varepsilon < \frac{1}{2|\lambda|(b-a)}.$$

Такий метод доведення теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервними ядрами, який належить Е. Шмідту, значно спрощує доведення, наведені Фредгольмом у 1904 р., оскільки в ньому не використовується граничний перехід.

2.7. Рівняння Фредгольма і Вольтерра першого роду

Рівняння Фредгольма першого роду має вигляд

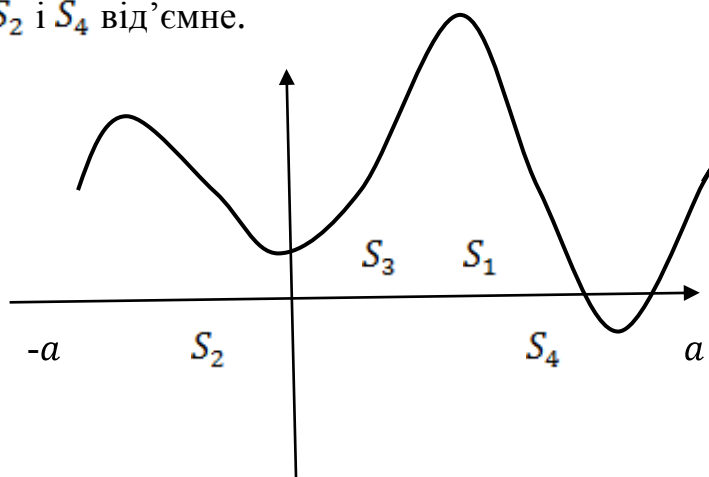
$$\lambda \int_a^b K(x, \xi) \psi(\xi) d\xi = f(x). \quad (65.2)$$

Теорія таких рівнянь ще не зовсім розроблена. Візьмемо просте рівняння

$$\int_{-a}^a \psi(\xi) d\xi = 0. \quad (66.2)$$

Тут $K(x, \xi) = 1$, $f(x) \equiv 0$. Про розв'язок рівняння (66.2) нічого не можна сказати. Справді, нехай крива така, що відповідні площі криволінійних фігур рівні: $|S_1| = |S_2| = |S_3| = |S_4|$.

Очевидно, така крива задовольняє рівняння (66.2), оскільки значення площ S_2 і S_4 від'ємне.



Інтегральне рівняння Вольтерра першого роду має вигляд

$$\int_a^x K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = f(x) \quad (67.2)$$

при деяких умовах, накладених на ядро $K(x, \xi)$ і функцію $f(x)$, воно зводиться до рівняння Вольєрра другого роду.

Справді, продиференціюємо рівняння (67.2) по x :

$$K(x, x)\varphi(x) + \int_a^x K'_x(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi = f'(x). \quad (68.2)$$

Якщо $K(x, x) \neq 0$, то можна поділити праву і ліву частини рівняння (68.2) на $K(x, x)$:

$$f(x) + \int_a^x \frac{K'_x(x, \xi)}{K(x, x)} \varphi(\xi)d\xi = \frac{f'(x)}{K(x, x)},$$

а це є рівняння Вольєрра другого роду з ядром $\frac{K'_x(x, \xi)}{K(x, x)}$ і з вільним членом $\frac{f'(x)}{K(x, x)}$, при чому, наприклад, що похідні $K'_x(x, \xi)$, $f'(x)$ існують.

Якщо $K(x, x) \equiv 0$, то із рівняння (68.2) отримаємо

$$\int_a^x K'_x(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi = f'(x), \quad (69.2)$$

а це є знову рівняння Вольєрра першого роду.

Диференціюючи його по x , отримаємо

$$K'_x(x, x)\varphi(x) + \int_a^x K''_{xx}(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi = f''(x). \quad (70.2)$$

Якщо $K'_x(x, x) \neq 0$, то розділивши дві частини на $K'_x(x, x)$, отримаємо рівняння Вольєрра другого роду

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{K''_{xx}(x, \xi)}{K'_x(x, x)} \varphi(\xi)d\xi = \frac{f''(x)}{K'_x(x, x)}.$$

Якщо ж $K'_x(x, x) \equiv 0$, то будемо мати рівняння Вольєрра першого роду, отримаємо рівняння Вольєрра другого роду при умові, що $K^{(q)}(x, x) \neq 0$ і що існують неперервні похідні

$$\frac{\partial^p K(x, \xi)}{\partial x^p} = K_{\underbrace{x \dots x}_p}^{(p)}(x, \xi); f^{(p)}(x), \quad p=1, 2, \dots, q, q+1.$$

2.8. Інтегральні рівняння з полярним ядром

Розглянемо неоднорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + f(x) \quad (71.2)$$

з повним ядром, тобто ядром вигляду

$$K(x, \xi) = \frac{H(x, \xi)}{|x - \xi|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (72.2)$$

Вважаємо, що $H(x, \xi)$ – обмежена за абсолютною величиною функція у квадраті

$$D = \{a \leq x \leq b, a \leq \xi \leq b\},$$

тобто $|H(x, \xi)| \leq M$ для будь-якого $(x, \xi) \in D$.

При $x = \xi$ ядро (72.2) перетворюється у нескінченність, така особливість називається полярною особливістю, а рівняння (71.2) називають ще інтегральним рівнянням, яке має полярну особливість.

Покажемо, що для такого рівняння мають місце всі три теореми Фредгольма.

Теорема. Нехай нам задано інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x \frac{H(x, \xi)}{|x - \xi|^\alpha} \varphi(\xi) d\xi + f(x),$$

де $f(x)$ – неперервна функція, $|H(x, \xi)| \leq M, (x, \xi) \in D, 0 < \alpha < 1$. Якщо m – перше ціле число, для якого виконується нерівність $m > \frac{\alpha}{1-\alpha}$, то m -те ітероване ядро при $x = \xi$ не може перетворитись у нескінченність.

Доведення. Розглянемо ядро

$$K_2 = \int_a^b K(x, t) K(t, \xi) dt = \int_a^b \frac{H(x, t) H(t, \xi)}{|x - t|^\alpha |t - \xi|^\alpha} dt.$$

За умовою $|H(x, \xi)| \leq M, (x, \xi) \in D$, тому справедлива оцінка

$$|K_2(x, \xi)| \leq M^2 \int_a^b \frac{dt}{|x-t|^\alpha |t-\xi|^\alpha}. \quad (73.2)$$

Підінтегральна функція у формулі (73.2) при $t=x$, $t=\xi$ перетворюється у нескінченність, водночас згідно з відомою теоремою інтеграл $\int_a^b \frac{f(x)}{(a-x)^p} dx$, де $f(x)$ – неперервна функція, при $p < 1$ збігається.

Розглянемо окремі випадки.

1. Нехай $\alpha < \frac{1}{2}$, тоді інтеграл у формулі (73.2)

$$J(x, \xi) = \int_a^b \frac{dt}{|x-t|^\alpha |t-\xi|^\alpha} \quad (74.2)$$

при $t=x$, $t=\xi$ згідно зі згаданою теоремою збігається. Якщо $x=\xi$, то інтеграл

$$J(x, \xi) = \int_a^b \frac{dt}{|x-t|^\alpha |t-\xi|^\alpha} = \int_a^b \frac{dt}{|x-t|^{2\alpha}},$$

і при $t=x$ буде збіжним інтегралом, оскільки при $\alpha < \frac{1}{2}$, $p=2\alpha < 1$. Інтеграл (74.2), який залежний від параметрів x, ξ , при $\alpha < \frac{1}{2}$ збігається при будь-яких $(x, \xi) \in D$.

Доведемо, що ядро $K_2(x, \xi)$ при $\alpha < \frac{1}{2}$ обмежене для будь-яких $(x, \xi) \in D$, у тому числі і при $x=\xi$. Для цього розіб'ємо $[a, b]$ точками $a < x < \xi < b$. Тоді маємо $\int_a^b = \int_a^x + \int_x^\xi + \int_\xi^b = J_1 + J_2 + J_3$.

$$J_1 = \int_a^x \frac{dt}{|x-t|^\alpha |t-\xi|^\alpha} = \int_a^x \frac{dt}{|x-t|^\alpha |\xi-t|^\alpha} \leq \int_a^x \frac{dt}{|x-t|^{2\alpha}} = \frac{1}{1-2\alpha} (x-a)^{1-2\alpha},$$

осіільки $|x-t| = x-t$, $|t-\xi| = \xi-t \geq x-t$,

$$J_3 = \int_\xi^b \frac{dt}{|x-t|^\alpha |t-\xi|^\alpha} = \int_\xi^b \frac{dt}{|t-x|^\alpha |t-\xi|^\alpha} \leq \int_\xi^b \frac{dt}{|t-\xi|^{2\alpha}} = \frac{(b-\xi)^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}, t-x \geq t-\xi,$$

$$J_2 = \int_x^\xi \frac{dt}{|x-t|^\alpha |t-\xi|^\alpha} = \int_x^\xi \frac{dt}{|t-x|^\alpha |\xi-t|^\alpha}.$$

Зробимо підстановку $t=x+y(\xi-x)$, де x, ξ – параметри

$$dt=(\xi-x)dy; t-x=y(\xi-x); \xi-i-\zeta-[x+y(\xi-x)]=(1-y)(\xi-x).$$

Якщо $t=x$, то $y=0$; якщо ж $t=\xi$, то $y=1$, і тому

$$J_2 = \int_0^1 \frac{(\xi-x)dy}{y^\alpha(\xi-x)^\alpha(1-y)^\alpha(\xi-x)^\alpha} = (\xi-x)^{1-2\alpha} \int_0^1 \frac{dy}{y^\alpha(1-y)^\alpha}.$$

Останній інтеграл не залежить від параметра, підінтегральна функція при $y=0$, $y=1$ перетворюється у нескінченність, водночас при $p=\alpha < \frac{1}{2}$ інтеграл збігається, оскільки $p < 1$. Відповідно, значення розглянутого інтеграла не перевищує деякого додатного числа C . Отже, при $\alpha < \frac{1}{2}$ маємо таку оцінку

$$|K_2(x, \xi)| < \frac{1}{1-2\alpha} [(x-a)^{1-2\alpha} + (b-\xi)^{1-2\alpha} + C(\xi-x)^{1-2\alpha}] < R = const$$

при будь-яких $(x, \xi) \in D$, зокрема і при $x=\xi$.

2. Нехай $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3}$. Перетворимо інтеграл у формулі (73.2) з допомогою тієї ж підстановки

$$t=x+y(\xi-x). \quad (75.2)$$

При $t=a$ $y=\frac{a-x}{\xi-x}=a_1$, а при $t=b$ $y=\frac{b-x}{\xi-x}=b_1$, тоді будемо мати

$$|K_2(x, \xi)| \leq M^2 |\xi-x|^{1-2\alpha} \int_{a_1}^{b_1} \frac{dy}{|y|^\alpha |1-y|^\alpha}.$$

Проінтегрована функція додатна, тому

$$|K_2(x, \xi)| \leq M^2 |\xi-x|^{1-2\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{|y|^\alpha |1-y|^\alpha}.$$

Останній інтеграл не залежить від параметра, застосуємо до нього одну із ознак збіжності, а саме: нехай $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^\lambda} = const \neq 0$, де $f(x)$ – підінтегральна функція

інтеграла $\int_a^\infty f(x)dx$, а λ – деяке додатне число. При $\lambda > 1$ інтеграл збіжний, а при $\lambda \leq 1$ – розбіжний. У розглянутому випадку $f(x) = \frac{1}{|y|^\alpha |1-y|^\alpha}$ і $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f(y)}{\left(\frac{1}{y}\right)^\lambda} = \text{const} \neq 0$ при $\lambda = 2\alpha$. Оскільки $\alpha > \frac{1}{2}$, $\lambda = 2\alpha > 1$, то інтеграл збігається, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{|y|^\alpha |1-y|^\alpha} < p_2 = \text{const},$$

і ми маємо таку оцінку

$$|K_2(x, \xi)| \leq M^2 p_2 |\xi - x|^{1-2\alpha} = \frac{M^2 p_2}{|\xi - x|^{2\alpha-1}}. \quad (76.2)$$

Розглянемо ядро

$$K_3(x, \xi) = \int_a^b K_2(x, t) K(t, \xi) dt.$$

На основі формул (72.2) і (76.2) отримаємо таку оцінку

$$|K_3(x, \xi)| \leq M^2 p_2 \int_a^b \frac{dt}{|t-x|^{2\alpha-1} |t-\xi|^\alpha}. \quad (77.2)$$

Далі розбиваємо $[a, b]$ точками $a < x < \xi < b$ й аналогічно переконуємося, що при $\alpha < \frac{2}{3}$ ядро $|K_3(x, \xi)|$ обмежене, а при $\alpha > \frac{2}{3}$ замість нерівності (76.2) отримаємо таку нерівність

$$|K_3(x, \xi)| \leq M^2 p_2 |\xi - x|^{2-3\alpha} = \frac{M^2 p_2 p_3}{|\xi - x|^{3\alpha-2}}, \quad (78.2)$$

де $p_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{|y|^{2\alpha-1} |1-y|^\alpha} < +\infty$ і т. д.

Якщо $\alpha < \frac{n-1}{n}$, то ядро $K_n(x, \xi) = \int_a^b K_{n-1}(x, t) K(t, \xi) dt$ обмежене по абсолютній величині, а при $\alpha > \frac{n-1}{n}$ маємо таку оцінку

$$|K_n(x, \xi)| \leq \frac{M^2 p_2 p_3 \dots p_n}{|\xi - x|^{nd-(n-1)}}, \quad (79.2)$$

де

$$p_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{|y|^{(n-1)\alpha-(n-2)} |1-y|^\alpha} < +\infty.$$

Отже, ядро $K_n(x, \xi)$ обмежене по абсолютній величині при $\alpha < \frac{n-1}{n}$. Якщо $\alpha < \frac{n-1}{n}$, то $\alpha n < n-1$, $n(\alpha-1) < -1$, $n(1-\alpha) > 1$, $n > \frac{1}{1-\alpha}$. Теорему доведено.

Зазначимо, що в формулі (73.2) ми спочатку розглядали проміжок $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, а після цього – проміжок $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3}$. Якщо $\alpha = \frac{1}{2}$, то за доведеною теоремою $n > \frac{1}{1-\alpha} = 2$ і $|K_3(x, \xi)|$ обмежене ядро.

Для ітерованих ядер справедлива і така формула

$$K_{n-p}(x, \xi) = \int_a^b K_n(x, t) K_p(t, \xi) dt. \quad (80.2)$$

Ітеровані ядра, які мають полярну особливість, можуть мати розрив на діагоналі $x = \xi$ квадрата D . Із доведеної теореми випливає, що при заданому α ітероване ядро $K_n(x, \xi)$, де $n > \frac{1}{1-\alpha}$, буде обмежене у квадраті D , тобто воно буде регулярною функцією. На основі швидше сформульованої теореми про дві регулярні функції при заданому α ітероване ядро K_{2n} буде неперервною функцією, якщо $n > \frac{1}{1-\alpha}$. Це видно з формули (80.2), оскільки при $p = n$ отримаємо

$$K_{2n} = \int_a^b K_n(x, t) K_n(t, \xi) dt, \quad (81.2)$$

і при $n > \frac{1}{1-\alpha}$ ітероване ядро $K_n(x, \xi)$ буде регулярною функцією.

Отже, якщо вихідне ядро $K(x, \xi)$ має полярну особливість, то при заданому α , починаючи з деякого номера, всі ітеровані ядра будуть неперервними функціями.

Тепер вже легко довести, що всі три теореми Фредгольма мають місце і для інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду, ядро яких має полярну особливість. Покажемо, що (71.2) з ядром (72.2) можна звести до інтегрального рівняння з неперервним ядром.

Справді, нехай ми маємо інтегральне рівняння (71.2) і нехай при заданому α перше неперервне число є $K_n(x, \xi)$, а всі попередні ітеровані ядра мають полярну особливість. Будемо розв'язувати рівняння (71.2) методом послідовних наближень

$$\varphi_n(x) = \lambda \int_a^b K_n(x, \xi) \varphi_{n-1}(\xi) d\xi + f(x), \quad n=1, 2, \dots$$

і напишемо $\varphi_n(x)$ у розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x, \xi) f(\xi) d\xi + \dots + \lambda^{n-1} \int_a^b K_{n-1}(x, \xi) f(\xi) d\xi + \\ + \lambda^n \int_a^b K_n(x, \xi) \varphi_0(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Зробимо підстановку $\varphi_0(x) = \varphi(x)$. Тоді, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \dots = \varphi_n(x) = \varphi(x)$ і наведена рівність має вигляд

$$\varphi(x) = \lambda^n \int_a^b K_n(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + f_n(x), \quad (82.2)$$

де

$$f_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x, \xi) f(\xi) d\xi + \dots + \lambda^{n-1} \int_a^b K_{n-1}(x, \xi) \varphi_0(\xi) d\xi.$$

У першій частині цієї рівності ітеровані ядра $K_1(x, \xi), \dots, K_{n-1}(x, \xi)$ на діагоналі $x=\xi$ мають розрив і перетворюються у нескінченність. Навіть у цьому випадку часто інтеграл від таких функцій існує і дає неперервну функцію. В інтегральному рівнянні (82.2) ядро $\bar{K}(x, \xi) = K_n(x, \xi)$ – неперервна функція, $\bar{\lambda} = \lambda^n$, а для інтегрального рівняння з неперервним ядром справедливі всі три теореми Фредгольма.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь із виродженим ядром.
2. Сформулюйте теореми Фредгольма з ядром, близьким до виродженого.
3. Сформулюйте теореми Фредгольма з неперервним ядром.

РОЗДІЛ III

3.1. Ортогональні системи функцій, нерівність Буняковського

Скалярним добутком двох функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$, заданих на проміжку $[a, b]$, будемо називати інтеграл

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x) \bar{\varphi}(x) dx,$$

де $\bar{\varphi}(x)$ – спряжена до функції $\varphi(x)$, тобто, якщо $\varphi(x) = u(x) + iv(x)$, то $\bar{\varphi}(x) = u(x) - iv(x)$. Якщо $\varphi(x)$ – дійсна функція, то $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x)$.

Функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ називаються ортогональними на $[a, b]$, якщо $(f, \varphi) = 0$, $x \in [a, b]$.

Норму функції $f(x)$ визначимо рівністю $\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$.

Функції $f(x), \varphi(x), \dots$ називаються нормованими на $[a, b]$, якщо на заданому сегменті $\|f\| = \|\varphi\| = \dots = 1$. Звідси випливає, що скалярний квадрат нормованих функцій дорівнює одиниці, тобто $(f, f) = (\varphi, \varphi) = \dots = 1$.

Система функцій $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$ називається ортонормованою, якщо вони попарно ортогональні і кожна функція є нормованою, тобто:

$$(f_i, f_j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \\ 0, & \text{якщо } i \neq j \end{cases}$$

Зауважимо, що функція $f(x) \equiv 0$ не нормована, оскільки

$$(f, f) \neq 1 \text{ і } \|f\| \neq 1.$$

Теорема 1. Якщо функції $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ – неперервні й ортонормовані, то вони в системі лінійно незалежні.

Доведення. Покажемо, що рівність $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$ виконується при будь-якому x тільки тоді, коли $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Припустимо, що $c_i \neq 0$. Помножимо наведену рівність на $f_i(x)$ і проінтегруємо

$$c_1 \int_a^b f_1(x)f_i(x)dx + \dots + c_i \int_a^b f_i(x)f_i(x)dx + \dots + c_n \int_a^b f_n(x)f_i(x)dx = 0.$$

Враховуючи, що ці функції ортонормовані, тобто, що

$$\int_a^b f_i(x)f_j(x)dx = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

отримаємо $c_i = 0$. Суперечність і доводить теорему.

Теорема 2. Якщо функції $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ – неперервні, попарно ортогональні і $f_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$, то вони лінійно незалежні.

Доведення аналогічне доведенню попередньої теореми. Суперечність отримуємо на основі того, що

$$\int_a^b f_i(x)f_i(x)dx \neq 0 \quad \text{і тому } c_i = 0$$

Нерівність

$$(f, \varphi)^2 \leq (f, f)(\varphi, \varphi) \quad (1.3)$$

називається нерівністю російського математика В. Буняковського (1804 – 1889) і в розгорнутому вигляді записується так:

$$\left[\int_a^b f(x)\varphi(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b \varphi^2(x)dx. \quad (2.3)$$

Справді, запишемо очевидну нерівність

$$\int_a^b [f(x) + \lambda \varphi(x)]^2 dx \geq 0, \quad b > a.$$

Тоді,

$$\lambda^2 \int_a^b \varphi^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)\varphi(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \geq 0.$$

Ми отримали нерівність виду $ax^2 + bx + c \geq 0$, де $a > 0$. Квадратний тричлен при $a > 0$ не приймає протилежного значення, якщо дискримінант $b^2 - 4ac \leq 0$. У нашому випадку

$$b^2 - 4ac = \left[2 \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \right]^2 - 4 \int_a^b \varphi^2(x)dx \cdot \int_a^b f^2(x)dx \leq 0,$$

Звідки зразу випливає нерівність (2.3).

3.2. Збіжність у середньому, простір L_2 .

Функція $f(x)$ називається *функцією з просумованим квадратом* на $[a; b]$, якщо

$$\int_a^b f^2(x)dx < +\infty.$$

Множину всіх функцій з просумованим квадратом на $[a; b]$ позначають символом $L_2[a; b]$ і називають простором L_2 .

Нехай задана послідовність функцій $\{f_i(x)\}$, $i = 1, 2, \dots$ належить простору L_2 . Будемо говорити, що ця послідовність збігається в середньому до функції $f(x) \in L_2$, якщо має місце рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0, \quad (3.3)$$

і зазначимо, що зі звичайної збіжності не завжди випливає збіжність в середньому, та навпаки.

Справді, розглянемо на $[0; 1]$ послідовність

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{якщо } 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{якщо } \frac{1}{n} < x \leq 1, x = 0 \end{cases},$$

тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad x \in [0; 1],$

тобто маємо звичайну збіжність послідовності $\{f_n(x)\}$ до функції $f(x) \equiv 0$. Чи буде послідовність $\{f_n(x)\}$ збіжна в середньому на $[0; 1]$?

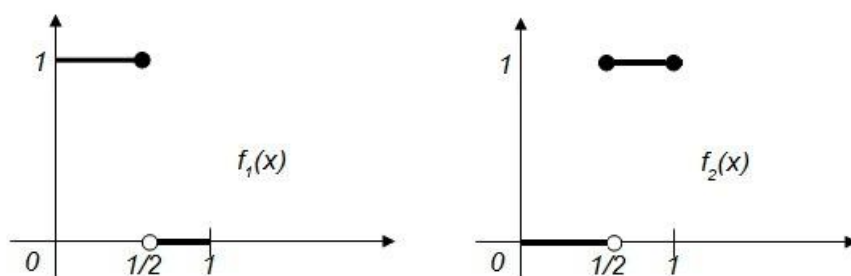
$$\int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2 dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 dx = n^2 x \Big|_0^{\frac{1}{n}} = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Відповідь негативна.

Наведемо приклад послідовності, яка буде збігатися в середньому до функції $f(x)$, незважаючи на те, що звичайної збіжності не буде.

Справді, для кожного натурального k визначимо групу функцій, яка складається з 2^k функцій, заданих на $[0; 1]$ за таким законом. При $k = 1$ маємо першу групу, яка складається з двох функцій:

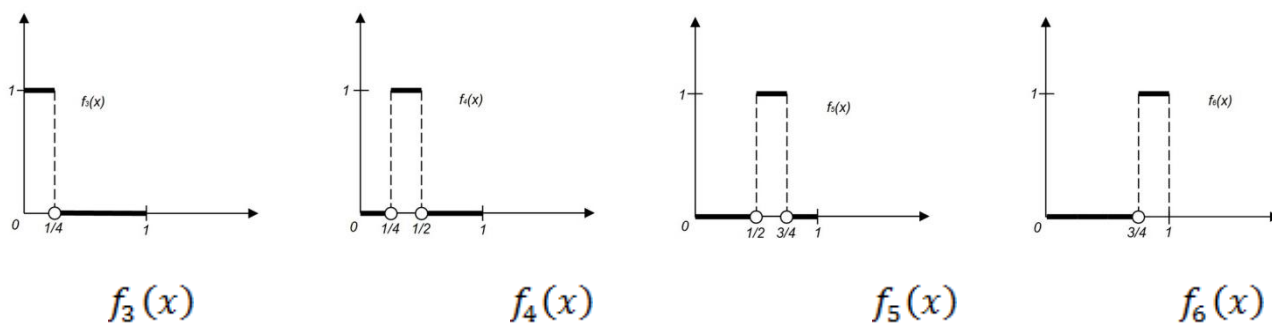
$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2], \\ 0, & x \in [1/2, 1]; \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1/2], \\ 1, & x \in [1/2, 1]; \end{cases}$$



при $k = 2$ маємо другу групу, яка складається з чотирьох функцій:

$$f_3(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/4] \\ 0, & x \in (1/4, 1] \end{cases}, \quad f_4(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1/4, 1/2] \\ 0, & x \in [0, 1/4) \cup (1/2, 1] \end{cases}$$

$$f_5(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1/2, 3/4] \\ 0, & x \in [0, 1/2) \cup (3/4, 1] \end{cases}, \quad f_6(x) = \begin{cases} 1, & x \in [3/4, 1] \\ 0, & x \in [0, 3/4) \end{cases}.$$



Далі $[0,1]$ ділимо на 8 рівних частин і будуюмо за введеним законом третю групу, яка складається із восьми функцій і т.д.

Отже, ми отримаємо послідовність

$$f_1(x); f_2(x); f_3(x); \dots; f_n(x); \dots$$

З побудови виходить, що ця послідовність розбіжна на $[0,1]$. Водночас

$$\int_0^1 (f_n - 0)^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

тобто наша послідовність збігається в середньому.

Звідси випливає, що зі збіжності в середньому, взагалі кажучи, не випливає звичайна збіжність, зокрема і рівномірна збіжність.

Покажемо, що з рівномірної збіжності завжди випливає збіжність у середньому. Рівність (3.3) означає, що для всякого як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N(\varepsilon)$, що для всіх $x \in [a, b]$ і для всіх $n > N$ виконується нерівність

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx < \varepsilon. \quad (4.3)$$

Нехай послідовність $\{f_n(x)\}, n = 1, 2, \dots$ збігається рівномірно до функції $f(x)$. Це означає, що для будь-якого $\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}$ існує такий номер N , що для всіх $x \in [a, b]$ при $n > N$ виконується нерівність

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1. \quad (5.3)$$

З нерівності (5.3) випливає нерівність (4.3). Справді, при $n > N$ для всякого $x \in [a, b]$ маємо:

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx < \int_a^b \varepsilon_1^2 dx = \varepsilon_1^2 (b - a) = \varepsilon.$$

Будемо говорити, що послідовність функцій $\{f_n(x)\}, n = 1, 2, \dots$ збігається по нормі до функції $f(x)$, якщо для будь-якого $x \in [a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx} = 0,$$

це можна переписати так

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0.$$

Звідси видно, що із збіжності в середньому випливає збіжність по нормі, і навпаки.

3.3. Узагальнений ряд Фур'є, нерівність Бесселя

Нехай на $[a, b]$ виконується рівність

$$f(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) + \dots, \quad (6.3)$$

де c_i – деякі константи, $\varphi_i(x)$ – ортонормовані функції, $\varphi_i(x) \in L_2$. Будемо вважати, що ряд (6.3) можна почленно інтегрувати. Помноживши ліву та праву частини рівності (6.3) на $\varphi_n(x)$ і проінтегрувавши почленно, отримаємо

$$\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx = c_1 \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_n(x) dx + \dots + c_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_n(x) dx + \dots$$

Користуючись тим, що система функцій $\varphi_i(x), i = 1, 2, \dots$ ортонормована, отримаємо таку формулу для визначення коефіцієнтів ряду (6.3):

$$c_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx. \quad (7.3)$$

Коефіцієнти c_n , визначені за формулою (7.3), називаються коефіцієнтами французького математика Ж. Фур'є (1768 – 1830), а ряд (6.3) називається узагальненим рядом Фур'є на відміну від тригонометричного ряду Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad 1, 2, 3, \dots$$

Формули для визначення коефіцієнтів $a_k, b_k, k = 1, 2, 3, \dots$ нагадують формулу (7.3).

Нехай $f(x) \in L_2; g(x) \in L_2$. Квадратичним відхиленням функції $f(x)$ від функції $g(x)$ називається величина

$$\delta = \|f - g\|^2 = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx. \quad (8.3)$$

Розглянемо рівність $g_n(x) = \gamma_1 \varphi_1(x) + \gamma_2 \varphi_2(x) + \dots + \gamma_n \varphi_n(x)$, де $\varphi_i \in L_2, i=1, 2, 3, \dots, n$ $\varphi_i(x)$ – ортонормовані функції. Сталі $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ визначимо з умови мінімуму квадратичного відхилення

$$\delta = \int_a^b [f(x) - g_n(x)]^2 dx.$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \delta &= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \int_a^b f(x) g_n(x) dx + \int_a^b g_n^2(x) dx = \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n \gamma_k \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx + \sum_{l,k} \gamma_k \gamma_l \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx, \end{aligned} \quad (19.3)$$

де $\sum_{l,k}$ – подвійна сума по всіх можливих індексах k, l

Використовуючи формулу (7.3) і враховуючи, що система функцій $\varphi_i(x); i = 1, 2, \dots, n$ ортонормована, (9.3) можна переписати так:

$$\delta = \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n \gamma_k c_k + \sum_{k=1}^n \gamma_k^2 = \int_a^b f^2(x) dx + \sum_{k=1}^n (c_k - \gamma_k)^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2.$$

Звідси видно, що величина δ буде мінімальною при $\gamma_k = c_k, k = 1, 2, \dots, n$, тобто

$$\delta_{min} = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^n c_k^2 \quad (10.3)$$

З умови $y_k = c_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ випливає, що $g_n(x) = S_n(x)$, де $S_n(x)$ – n -на частинна сума ряду Фур'є. Отже, з виразу

$$\delta = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$$

слідuje

$$\delta_{min} = \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx \geq 0. \quad (11.3)$$

З рівності (10.3) і (11.3) маємо

$$\int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^n c_k^2 \geq 0 \quad \text{або} \quad \sum_{k=1}^n c_k^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \quad (12.3)$$

Нерівність (12.3) справджується при будь-якому n .

Якщо ми маємо нескінченну систему ортогональних функцій $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$, то переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$ у нерівності (12.3), отримаємо нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx, \quad (13.3)$$

яка називається нерівністю німецького астронома Ф. Бесселя (1784 – 1846).

Якщо $f(x) \in L_2$, то

$$\int_a^b f^2(x)dx < +\infty$$

і з нерівності (13.3) випливає збіжність ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty.$$

Наслідок. Для будь-якої функції $f(x) \in L_2$ коефіцієнти ряду Фур'є зі зростанням n прямують до нуля.

Справді, з математичного аналізу відомо, що у збіжному числовому ряді загальний член ряду при $n \rightarrow \infty$ наближається до нуля.

Система ортонормованих функцій $\varphi_i \in L_2$, $i = 1, 2, \dots$ називається повною системою функцій у просторі L_2 , якщо для будь-якої функції $f(x) \in L_2$ виконується рівність:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \int_a^b f^2(x) dx, \quad (14.3)$$

яка називається рівністю Парсеваля. Умова (14.3) є умовою повноти системи функцій.

Розглянемо приклад. Нехай ми маємо n -вимірний векторний простір, для якого базисом будуть одиничні вектори (орти) $\bar{e}_1; \bar{e}_2; \dots; \bar{e}_n$, де

$$(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Проекцією довільного вектора $\bar{r}$ на $\bar{e}_n$ буде число $c_n = (\bar{r}, \bar{e}_n)$, яке виконує роль коефіцієнта Фур'є. Оскільки вектори $\bar{e}_1; \bar{e}_2; \dots; \bar{e}_n$ утворюють базис, то

$$\bar{r} = c_1 \bar{e}_1 + c_2 \bar{e}_2 + \dots + c_n \bar{e}_n.$$

Звідси,

$$(\bar{r}, \bar{r}) = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2, \quad (15.3)$$

а ця рівність є аналогом формули (14.3). Якщо розкладемо вектор $\bar{r}$ по m векторам базиса, де $m < n$, то замість рівності (15.3) отримаємо $(\bar{r}, \bar{r}) \geq c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_m^2$.

У цьому випадку можна стверджувати, що базисні вектори $\bar{e}_1; \bar{e}_2; \dots; \bar{e}_m$ утворюють *неповну систему* в n -вимірному векторному просторі, на відміну від базисних векторів $\bar{e}_1; \bar{e}_2; \dots; \bar{e}_n$, які утворюють повну систему векторів.

Функції $\{\varphi_n(x)\}$ можна розглядати як базисні елементи. Умова (14.3)

означає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=1}^n c_k^2 \right] = 0,$$

або

$$\delta_{min} = \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=1}^n c_k^2,$$

останню рівність можна записати так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0 \quad (16.3)$$

Рівність (16.3) свідчить про те, що система ортонормованих функцій $\varphi_i \in L_2$, $i = 1, 2, \dots$ повна тоді і тільки тоді, коли ряд Фур'є для будь-якої функції з сумованим квадратом збігається в середньому до цієї функції.

Функції $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$, які належать деякій множині S , називаються *рівномірно обмеженими*, якщо існує така стала $K > 0$, що для всіх $x_i(t) \in S$ виконується нерівність $|x_i(t)| \leq K$.

Функції $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$, $x_i(t) \in S$ називаються *рівномірно неперервними*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, залежне тільки від ε , що для кожної пари точок t_1, t_2 з даної області S , такої, що $|t_1 - t_2| < \delta$, завжди виконується нерівність $|x_i(t_1) - x_i(t_2)| < \varepsilon$ для будь-якої функції $x_i(t) \in S$.

Множина функцій $x_n(t) = \sin nt$, $n = 1, 2, \dots$ є прикладом рівномірно обмежених функцій, оскільки для будь-якої функції з даної множини $\{\sin nt\}$ справедлива нерівність $|\sin nt| \leq 1$. Водночас функції із множини $\{\sin nt\}$ не будуть рівномірно неперервними.

Справді, для будь-якого як завгодно малого $h = \varepsilon$ можна взяти такий період $\frac{2\pi}{n}$, що при достатньо великих n і на інтервалі h $\sin nt$ приймає $+1$ і -1 .

Тому з нерівності $|t_1 - t_2| < \delta$ не випливає нерівність $|x_n(t_1) - x_n(t_2)| < \varepsilon$ для будь-якої функції з множини $\{\sin nt\}$.

Отже, множина $\{\sin nt\}$ є прикладом рівномірно обмежених, але не рівномірно неперервних функцій.

Стосовно рівномірно обмежених і рівномірно неперервних функцій має місце теорема італійського математика Ч. Арцела (1847 – 1912).

Теорема Арцела. Якщо сім'я S складається із рівномірно обмежених і рівномірно неперервних на $[a, b]$ функцій, то з цієї сім'ї можна вибрати таку послідовність функцій $\{f_k(x)\}, k = 1, 2, \dots$, яка рівномірно збігається на $[a, b]$.

Надалі ми скористаємось наслідком, який можна отримати з теореми італійського математика У. Діні (1845 – 1918).

Теорема Діні. Якщо на $[a, b]$ задана монотонно спадна або монотонно зростаюча послідовність $\{f_n(x)\}, n = 1, 2, \dots$ неперервних функцій, яка збігається на $[a, b]$ до неперервної функції $f(x)$, то ця збіжність рівномірна.

Наслідок. Нехай на $[a, b]$ маємо збіжний функціональний ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = f(x),$$

причому члени і сума ряду – неперервні функції. Якщо для всіх $i = 1, 2, \dots$, $f_i(x) \geq 0$ на $[a, b]$, то заданий ряд збігається рівномірно.

Справді, n -на частинна сума

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

неперервна функція, сума ряду за умовою – також неперервна функція. Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = f(x)$.

Послідовність $\{S_n\}, n = 1, 2, \dots$ монотонно зростаюча, оскільки $f_i(x) \geq 0$, тому,

$$S_{n+1}(x) = S_n(x) + f_{n+1}(x) \geq S_n(x).$$

За теоремою Діні послідовність $\{S_n(x)\}, n = 1, 2, \dots$ рівномірно збігається до $f(x)$.

3.4. Ортогоналізація системи лінійно незалежних функцій

Нехай задана система лінійно незалежних функцій

$$\varphi_1(x); \varphi_2(x); \dots; \varphi_n(x) \quad (17.3)$$

Завдання полягає в тому, щоб за системою (17.3) побудувати ортонормовану систему функцій

$$\psi_1(x); \psi_2(x); \dots; \psi_n(x), \quad (18.3)$$

таку, щоб функція $\psi_1(x)$ лінійно виражалась через перші k функцій системи (17.3).

Згідно з визначенням завданням, система функцій (18.3) повинна задовольняти такі дві умови:

$$1) \int_a^b \psi_i(x) \psi_j(x) dx = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j; \end{cases}$$

$$2) \psi_k(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_k \varphi_k(x).$$

Вона також буде лінійно незалежною, оскільки будь-яка ортонормована система функцій лінійно незалежна.

Нехай $\psi_1(x) = c_1 \varphi_1(x)$. Виберемо c_1 так, щоб

$$\int_a^b \psi_1(x) \psi_1(x) dx = 1 \text{ маємо } \int_a^b \psi_1(x) \psi_1(x) dx = c_1^2 \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_1(x) dx = 1,$$

звідси

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \varphi_1^2(x) dx}} = \frac{1}{\|\varphi_1\|} \quad (19.3)$$

Отже, функція $\psi_1(x)$ побудована, оскільки $\psi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\|\varphi_1\|}$ і задовільняє умови 1) і 2).

Функцію $\psi_2(x)$ будемо у вигляді

$\psi_2(x) = \bar{c}_1 \psi_1(x) + c_2 \varphi_2(x)$, де $\psi_1(x), \varphi_2(x)$ – відомі функції. Константи $\bar{c}_1$ і c_2 знаходимо з умов ортогональності функцій $\psi_1(x)$ і $\psi_2(x)$ і нормованості функцій $\psi_2(x)$:

$$\int_a^b \psi_1(x)\psi_2(x) dx = 0, \quad \int_a^b \psi_2(x)\psi_2(x)dx = 1.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi_1(x)\psi_2(x)dx &= \int_a^b \psi_1(x)[\bar{c}_1\psi_1(x) + c_2\varphi_2(x)]dx = \\ &= \bar{c}_1 \int_a^b \psi_1(x)\psi_1(x)dx + c_2 \int_a^b \psi_1(x)\varphi_2(x)dx = \bar{c}_1 + c_2(\psi_1, \varphi_2) = 0. \end{aligned}$$

Звідси, $\bar{c}_1 = -c_2(\psi_1, \varphi_2)$.

Тоді,

$$\psi_2(x) = \bar{c}_1\psi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = -c_2(\psi_1, \varphi_2)\psi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = c_2[\varphi_2(x) - (\psi_1, \varphi_2)\psi_1(x)].$$

Умова

$$\int_a^b \psi_2(x)\psi_2(x)dx = 1$$

дає можливість визначити коефіцієнт c_2 :

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b [\varphi_2(x) - (\psi_1, \varphi_2)\psi_1(x)]^2 dx}} \quad (20.3)$$

Отже, функція $\psi_2(x)$ побудована, оскільки виконуються дві умови:

$$1) \int_a^b \psi_1(x)\psi_2(x)dx = 0, \quad \int_a^b \psi_2(x)\psi_2(x)dx = 1.$$

$$\begin{aligned} 2) \psi_2(x) &= c_2[\varphi_2(x) - (\psi_1, \varphi_2)\psi_1(x)] = c_2 \left[\varphi_2(x) - (\psi_1, \varphi_2) \frac{\varphi_1(x)}{\|\varphi_1\|} \right] = \\ &= \tilde{c}_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x), \quad \text{де } \tilde{c}_1 = -\frac{c_2(\psi_1, \varphi_2)}{\|\varphi_1\|}. \end{aligned}$$

Зауваження. Формула (20.3) не має змісту, якщо

$$\int_a^b [\varphi_2(x) - (\psi_1, \varphi_2)\psi_1(x)]^2 dx = 0, \text{ тобто якщо } \varphi_2(x) - (\psi_1, \varphi_2)\psi_1(x) \equiv 0,$$

оскільки функції $\psi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ неперервні. Покажемо, що цього не може бути. Якщо припустити протилежне, то на основі рівності $\psi_1(x) = c_1\varphi_1(x)$ вище наведена тотожність запишеться так:

$$\varphi_2(x) - (\psi_1, \varphi_2)\psi_1(x) = \varphi_2(x) - (\psi_1, \varphi_2)c_1\varphi_1(x) = \tilde{c}\varphi_1(x) + \varphi_2(x) \equiv 0,$$

звідки випливає, що функції $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ лінійно залежні, а це суперечить умові. Тому знаменник у формулі (20.3) ніколи не перетвориться в нуль.

Аналогічно будуюмо функцію $\psi_3(x)$:

$$\psi_3(x) = c_3[\varphi_3(x) - (\psi_2, \varphi_3)\psi_2(x) - (\psi_1, \varphi_3)\psi_1(x)],$$

$$\text{де } c_3 = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b [\varphi_3(x) - (\psi_2, \varphi_3)\psi_2(x) - (\psi_1, \varphi_3)\psi_1(x)]^2 dx}} \quad (21.3)$$

і знаменник у цій формулі також не перетвориться у нуль, бо в протилежному випадку функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ були б лінійно залежними, а це не так.

Функція $\psi_1(x)$ виражалась лінійно через $\varphi_1(x)$, а $\psi_2(x)$ виражалась лінійно через $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$. Легко показати, що функція $\psi_3(x)$ лінійно виражається через функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ і що $\|\psi_3\| = 1$. Отже, функція $\psi_3(x)$ побудована.

Продовжуючи цей процес, аналогічно побудуємо функцію

$$\psi_n(x) = c_n[\varphi_n(x) - (\psi_{n-1}, \varphi_n)\psi_{n-1}(x) - (\psi_{n-2}, \varphi_n)\psi_{n-2}(x) - \dots - (\psi_1, \varphi_n)\psi_1(x)], \text{ де}$$

$$(\psi_j, \varphi_n) = \int_a^b \psi_j(x)\varphi_n(x)dx = \mathcal{A}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Якщо позначити вираз у квадратних дужках для функції $\psi_n(x)$ через $\omega_n(x)$, то отримаємо $\psi_n(x) = c_n\omega_n(x)$. Функція $\psi_n(x)$ буде нормованою, якщо константу c_n вибрати так:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \omega_n^2(x) dx}} = \frac{1}{\|\omega_n(x)\|} \quad (22.3)$$

причому $\|\omega_n(x)\| \neq 0$, у протилежному разі функції $\varphi_1(x); \varphi_2(x); \dots; \varphi_n(x)$ були б лінійно залежними, а це не так за умовою.

Очевидно, $\psi_n(x)$ є лінійною комбінацією функції $\varphi_1(x); \varphi_2(x); \dots; \varphi_n(x)$.

Зрозуміло, що так побудована система функцій $\psi_1(x); \psi_2(x); \dots; \psi_n(x)$ буде ортонормованою системою.

Справді, із формул для коефіцієнтів $c_1; c_2; \dots; c_n$ випливає, що система (18.3) буде нормованою. Покажемо, що вона буде ортогональною системою. Раніше було показано, що $(\psi_1, \psi_2) = 0$. Припустимо, що

$$(\psi_1, \psi_k) = (\psi_2, \psi_k) = \dots = (\psi_{k-1}, \psi_k) = 0 \quad (23.3)$$

і покажемо, що $(\psi_1, \psi_{k+1}) = (\psi_2, \psi_{k+1}) = \dots = (\psi_k, \psi_{k+1}) = 0$.

Використовуючи рівності $(\psi_1, \psi_k) = 0$, доведемо, що $(\psi_1, \psi_{k+1}) = 0$.

Маємо

$$\psi_{k+1} = c_{k+1} \left[\varphi_{k+1}(x) - \sum_{j=1}^k (\psi_j, \varphi_{k+1}) \psi_j(x) \right].$$

Домножимо обидві частини цієї рівності на $\psi_1(x)$ і проінтегруємо, тоді на основі (23.3) отримаємо:

$$\begin{aligned} (\psi_1, \psi_{k+1}) &= c_{k+1} [(\psi_1, \varphi_{k+1}) - \sum_{j=1}^k (\psi_j, \varphi_{k+1}) (\psi_1, \psi_j)] \\ &= c_{k+1} [(\psi_1, \varphi_{k+1}) - (\psi_1, \varphi_{k+1})] = 0. \end{aligned}$$

Аналогічно доводиться, що із рівності $(\psi_2, \psi_k) = 0$ випливає рівність $(\psi_2, \psi_{k+1}) = 0$ і т.д., а із рівності $(\psi_{k-1}, \psi_k) = 0$ – рівність $(\psi_{k-1}, \psi_{k+1}) = 0$.

Легко показати, що $(\psi_k, \psi_{k+1}) = 0$. На основі методу математичної індукції можна стверджувати, що побудована система функцій (18.3) ортогональна.

Перехід від системи функцій (17.3) до системи (18.3) називається процесом ортогоналізації системи (17.3), або процесом Шмідта, який можна застосовувати і до нескінченної системи лінійно незалежних функцій.

Приклади

1. Задана система лінійно незалежних функцій $\varphi_1(x) \equiv 1$; $\varphi_2(x) = x$. Методом Шмідта знайти на $[1;2]$ систему ортонормованих функцій.

Розв'язання.

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\|\varphi_1\|} = 1; \quad \varphi_2(x) = c_2[\varphi_2(x) - (\psi_1, \varphi_2)\psi_1(x)].$$

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{\int_1^2 [\varphi_2(x) - (\psi_1, \varphi_2)\psi_1(x)]^2 dx}}.$$

$$(\psi_1, \varphi_2) = \int_1^2 \psi_1(x) \varphi_2(x) dx = \int_1^2 x dx = \frac{3}{2};$$

$$\varphi_2(x) - (\psi_1, \varphi_2)\psi_1(x) = x - \frac{3}{2};$$

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{\int_1^2 (x - \frac{3}{2})^2 dx}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{12}}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}; \quad \psi_2(x) = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{3}{2}\right).$$

Отже, система функцій $\psi_1(x) \equiv 1$; $\psi_2(x) = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)$ буде шуканою ортонормованою системою.

Перевірка. Покажемо, що $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$ і що $(\psi_1; \psi_2) = 0$.

$$\text{Маємо } \|\psi_1\| = 1 \text{ і } \|\psi_2\| = \sqrt{\int_1^2 \psi_2^2(x) dx} = \sqrt{\int_1^2 12\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 dx} = 1.$$

$$(\psi_1; \psi_2) = \int_1^2 \psi_1(x) \psi_2(x) dx = \int_1^2 2\sqrt{3}\left(x - \frac{3}{2}\right) dx = 2\sqrt{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x\right)\Big|_1^2 = 0.$$

3.5. Узагальнена нерівність Буняковського

Спочатку зупинимось на деяких допоміжних твердженнях.

Лема 1. Нехай $h_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$, – деяка сім'я неперервних функцій, причому $\|h_i(x)\| = \sqrt{\int_a^b h_i^2(x) dx} \leq R = \text{const}$; $K(x, \xi)$ – неперервне ядро в квадраті $\{a \leq x \leq b; a \leq \xi \leq b\}$. Тоді сім'я функцій

$$\psi_i(x) = \int_a^b K(x, \xi) h_i(\xi) d\xi \quad (24.3)$$

буде рівномірно обмеженою та рівномірно неперервною.

Доведення. З неперервності ядра $K(x, \xi)$ випливає його обмеженість у замкнутому квадраті, тобто існує таке число $M > 0$, що в заданому квадраті

$$|K(x, \xi)| \leq M.$$

Розглянемо функцію $[\psi_i(x)]^2$ й оцінимо її за допомогою нерівності Буняковського

$$\begin{aligned} [\psi_i(x)]^2 &= \left[\int_a^b K(x, \xi) h_i(\xi) d\xi \right]^2 \leq \\ &\leq \int_a^b K^2(x, \xi) d\xi \int_a^b h_i^2(\xi) d\xi \leq M^2(b-a) \|h_i(x)\|^2 \leq \\ &\leq M^2(b-a) R^2 = \text{const}. \end{aligned}$$

Отже, рівномірна обмеженість сім'ї функцій $\{\psi_i(x)\}, i = 1, 2, \dots$ доведена.

Функція $K(x, \xi)$ – неперервна у замкнутому квадраті, згідно з теоремою німецького математика Г. Кантора (1845 – 1918), ядро $K(x, \xi)$ буде рівномірно неперервним у даному квадраті. Це означає, що для всякого як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для будь-яких двох значень $x_1, x_2 \in [a; b]$ таких, що $|x_1 - x_2| < \delta$, виконується нерівність $|K(x_1, \xi) - K(x_2, \xi)| < \varepsilon$.

Застосувавши нерівність Буняковського до різниці $|\psi_i(x_1) - \psi_i(x_2)|$, отримаємо:

$$\begin{aligned}
|\psi_i(x_1) - \psi_i(x_2)| &= \left| \int_a^b [K(x_1, \xi) - K(x_2, \xi)] h_i(\xi) d\xi \right| \leq \\
&\leq \sqrt{\int_a^b [K(x_1, \xi) - K(x_2, \xi)]^2 d\xi} \cdot \sqrt{\int_a^b h_i^2(\xi) d\xi} \leq \\
&\leq \sqrt{\varepsilon^2 (b-a)} \|h_i\| \leq \varepsilon \sqrt{b-a} R,
\end{aligned}$$

де $|x_1 - x_2| < \delta$. Якщо вибрати $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{b-a} R}$, де із нерівності $|x_1 - x_2| < \delta$ випливає нерівність $|\psi_i(x_1) - \psi_i(x_2)| < \varepsilon_1$, а це доводить, що сім'я $\{\psi_i(x)\}, i = 1, 2, \dots$ буде рівномірно неперервна.

Надалі будемо вважати, що $K(x, \xi) \neq 0$ – дійсне симетричне ядро в заданому квадраті.

Симетричним ядром називається таке ядро $K(x, \xi)$, для якого виконується рівність

$$K(x, \xi) = K(\xi, x) \quad (25.3)$$

Ядра $K(x, \xi) = x^2 + \xi^2$, $K(x, \xi) = 2x\xi + x + \xi$, $K(x, \xi) = \sin x \sin \xi$ будуть симетричними, оскільки для них виконується умова (25.3), а ядра $K(x, \xi) = x^2 + \xi^2 + x$, $K(x, \xi) = x^2 \xi$ симетричними не будуть, оскільки для них $K(x, \xi) \neq K(\xi, x)$.

Інтегральні рівняння з симетричними ядрами утворюють достатньо широкий клас рівнянь. Рівність (25.3) означає, що початкове ядро дорівнює транспонованому до нього ядру.

Нехай нам задано неперервну функцію $\varphi(x)$. Складемо допоміжну функцію

$$B\varphi(x) = \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + c\varphi(x), \quad (26.3)$$

де c – дійсне число, а $K(x, \xi)$ – дійсне симетричне ядро, B – інтегральний оператор.

Лема 2. Якщо ядро $K(x, \xi)$ таке, що для всякої неперервної функції $\varphi(x)$ скалярний добуток $(B\varphi, \varphi) \geq 0$, то для будь-якої неперервної функції $\psi(x)$ має місце узагальнена нерівність Буняковського:

$$(B\varphi, \psi)^2 \leq (B\varphi, \varphi)(B\psi, \psi) \quad (27.3)$$

Якщо в рівності (26.3) поставити $K(x, \xi) = 0, c = 1$, то

$$B\varphi(x) = \varphi(x), \quad B\psi(x) = \psi(x),$$

$$(B\varphi, \varphi) = (\varphi, \varphi) = \|\varphi\|^2 \geq 0, \quad (B\psi, \psi) = (\psi, \psi) = \|\psi\|^2 \geq 0 \text{ і нерівність (27.3)}$$

перетворюється у звичайну нерівність Буняковського.

$$(\varphi, \psi)^2 \leq (\varphi, \varphi)(\psi, \psi) \quad (28.3)$$

Доведення лема 2. Нехай ядро $K(x, \xi)$ у формулі (26.3) таке, що для будь-якої неперервної функції $\varphi(x)$ $(B\varphi, \varphi) \geq 0$. Така ж нерівність має місце і для неперервної функції $\varphi(x) + \mu\psi(x)$, де μ – будь-яке дійсне число. Маємо:

$$(B(\varphi + \mu\psi), \varphi + \mu\psi) \geq 0,$$

$$B(\varphi + \mu\psi) \equiv \int_a^b K(x, \xi) [\varphi(\xi) + \mu\psi(\xi)] d\xi + c[\varphi(x) + \mu\psi(x)],$$

тому вище наведену нерівність можна переписати так:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left\{ \int_a^b K(x, \xi) [\varphi(\xi) + \mu\psi(\xi)] d\xi + c[\varphi(x) + \mu\psi(x)] \right\} \varphi(x) + \mu\psi(x) dx = \\ &= \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) [\varphi(\xi) + \mu\psi(\xi)] [\varphi(x) + \mu\psi(x)] dx d\xi \\ & \quad + c \int_a^b [\varphi(x) + \mu\psi(x)]^2 dx \geq 0 \end{aligned}$$

Або

$$\int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) \varphi(x) dx d\xi + \mu \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi(x) \psi(\xi) dx d\xi +$$

$$\begin{aligned}
& +\mu \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) \psi(x) dx d\xi + \mu^2 \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \psi(x) \psi(\xi) dx d\xi + \\
& +c \int_a^b \varphi^2(x) dx + 2c\mu \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx + c\mu^2 \int_a^b \psi^2(x) dx \geq 0 \quad (29.3)
\end{aligned}$$

Суму першого і п'ятого доданків цієї нерівності можна подати у вигляді

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + c \varphi(x) \right] \varphi(x) dx = \int_a^b B\varphi(x) \varphi(x) dx = (B\varphi, \varphi).$$

Аналогічно четвертий та шостий доданки в сумі дадуть $\mu^2 (B\psi, \psi)$.

Другий доданок дорівнює третьому, оскільки $K(x, \xi)$ – симетричне ядро, а інтеграл не змінить своєї величини, якщо змінити змінні інтегрування x на ξ , а ξ на x . Тому другий, третій та шостий доданки в сумі можна переписати так:

$$\begin{aligned}
2\mu &= \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) \psi(x) dx d\xi + \\
&+ 2\mu c \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = 2\mu \int_a^b \left[\int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + c \varphi(x) \right] \psi(x) dx = 2\mu (B\varphi, \psi).
\end{aligned}$$

Тепер нерівність (29.3) набуде вигляду: $(B\varphi, \varphi) + 2\mu (B\varphi, \psi) + \mu^2 (B\psi, \psi) \geq 0$.

У лівій частині цієї нерівності маємо квадратний тричлен відносно μ , $(B\psi, \psi) \geq 0$, тому дискримінант повинен бути не додатнім

$$4(B\varphi, \psi)^2 - 4(B\psi, \psi)(B\varphi, \varphi) \leq 0,$$

звідки отримаємо $(B\varphi, \psi)^2 \leq (B\psi, \psi)(B\varphi, \varphi)$, що і потрібно було довести.

3.6. Теорема Гільберта

Розглянемо приклад одного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} x \cos \xi y(\xi) d\xi,$$

і знайдемо його розв'язки:

$$y(x) = \lambda x \int_{-\pi}^{\pi} \cos \xi y(\xi) d\xi = \lambda A x, \quad A = \int_{-\pi}^{\pi} \cos \xi y(\xi) d\xi.$$

Враховуючи рівність $y(\xi) = \lambda A \xi$, визначимо константу A :

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos \xi \lambda A \xi d\xi = \lambda A \int_{-\pi}^{\pi} \xi \cos \xi d\xi = \lambda A \left[\xi \sin \xi \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \sin \xi d\xi \right] \\ &= -\lambda A \int_{-\pi}^{\pi} \sin \xi d\xi = \lambda A \cos \xi \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

Тоді $y(x) \equiv 0$ при будь-якому λ . Задане однорідне рівняння не має власних значень, оскільки власні значення – це такі значення λ , при яких однорідне рівняння має нетривіальний розв'язок. У нашому рівнянні $K(x, \xi) = x \cos \xi$ – вироджене ядро, але не симетричне.

Для однорідного рівняння Фредгольма другого роду з симетричним ядром має місце важлива теорема, яка належить німецькому математику Д. Гільберту (1862 – 1943).

Теорема Гільберта. Однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з дійсним неперервним симетричним ядром $K(x, \xi) \neq 0$ має хоча б одне власне значення.

Доведення цієї теореми розіб'ємо на 4 частини.

1. Розглянемо множину S нормованих неперервних дійсних функцій, тобто якщо $\varphi(x) \in S$, то $\|\varphi\| = 1$, і також розглянемо інтеграл

$$\int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi(x) \varphi(\xi) dx d\xi = J(\varphi), \quad (30.3)$$

$J(\varphi)$ – дійсне число при конкретно заданій дійсній функції $\varphi(x)$. Оскільки множина S нескінченна, то і множина $\{J(\varphi)\}$ дійсних чисел буде нескінченною.

Покажемо, що $\{J(\varphi)\}$ – обмежена множина. Для цього використаємо нерівність Буняковського (28.3):

$$\begin{aligned} J^2(\varphi) &= \left[\int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi(x) \varphi(\xi) dx d\xi \right]^2 \\ &\leq \int_a^b \int_a^b K^2(x, \xi) dx d\xi \cdot \int_a^b \int_a^b \varphi^2(x) \varphi^2(\xi) dx d\xi \leq M^2(b-a)^2, \end{aligned}$$

так як

$$\int_a^b \int_a^b \varphi^2(x) \varphi^2(\xi) dx d\xi = \int_a^b \varphi^2(x) dx \int_a^b \varphi^2(\xi) d\xi = \|\varphi\|^2 \cdot \|\varphi\|^2 = 1.$$

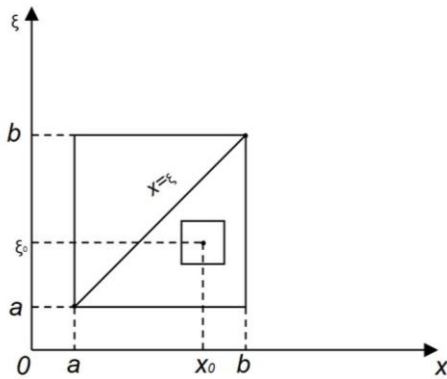
оскільки S – множина нормованих неперервних функцій. Ми отримали нерівність $J^2(\varphi) \leq M^2(b-a)^2$, а це свідчить про те, що множина $\{J(\varphi)\}$ дійсних чисел обмежена. Тоді згідно відомої теореми множина $\{J(\varphi)\}$ має точну верхню та точну нижню межу; введемо позначення:

$$\sup_{\|\varphi\|=1} \{J(\varphi)\} = \Omega, \quad \inf_{\|\varphi\|=1} \{J(\varphi)\} = \omega$$

Доведемо, що Ω і ω одночасно не перетворяться в нуль. Припустимо протилежне, тобто, що $\Omega = \omega = 0$. Це означає, що множина $\{J(\varphi)\}$ складається тільки з однієї точки $J(\varphi) \equiv 0$ для всіх нормованих функцій $\varphi(x)$.

Нехай $\|\varphi(x)\| \neq 1$, тоді функція $\frac{\varphi(x)}{\|\varphi(x)\|}$ – нормована і $J\left(\frac{\varphi(x)}{\|\varphi(x)\|}\right) = 0$ або $\frac{1}{\|\varphi\|^2} J(\varphi) = 0$, а звідси і $J(\varphi) \equiv 0$. Отже, $J(\varphi) \equiv 0$ і для всякої неперервної, але не обов'язково нормованої, функції при зробленому припущенні $\Omega = \omega = 0$.

За умовою теореми $K(x, \xi) \neq 0$ існує така точка $(x_0; \xi_0)$, у якій $K(x, \xi) \neq 0$. Можна вважати, що ця точка така, для якої $x_0 \neq \xi_0$, тобто точка $(x_0; \xi_0)$ не лежить на діагоналі квадрата $\{a \leq x \leq b, a \leq \xi \leq b\}$. Справді, якщо би при всіх точках $x \neq \xi$ $K(x, \xi) = 0$, то в результаті рівномірної неперервності ядра маємо $K(x, \xi) = 0$ і при $x = \xi$, а це суперечить умові.



Нехай існує точка $(x_0; \xi_0)$, де $x_0 \neq \xi_0$, у якій $K(x_0; \xi_0) \neq 0$. Тоді внаслідок неперервності ядра можна вибрати настільки мале δ , що в маленькому квадратику $\{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \xi_0 - \delta \leq \xi \leq \xi_0 + \delta\}$ зі стороною 2δ ядро $K(x, \xi) \neq 0$. Тоді в маленькому квадратику $K(x, \xi) > 0$, або $K(x, \xi) < 0$.

Припустимо, що $K(x, \xi) > 0$ і побудуємо неперервні функції $\varphi_{x_0}(x), \varphi_{\xi_0}(x)$. Функції $\varphi_{x_0}(x), \varphi_{\xi_0}(x)$ мають однаковий графік, тільки в одній із цих функцій графік зміщений відносно другої функції. Оскільки $x_0 \neq \xi_0$, то $\varphi_{x_0}(x) \neq \varphi_{\xi_0}(x)$. Ми довели, що при $\Omega = \omega = 0$ $\mathcal{J}(\varphi) = 0$, де $\varphi(x)$ – будь-яка неперервна функція, і тому $\mathcal{J}(\varphi_{x_0}(x) + \varphi_{\xi_0}(x)) = 0$. Маємо:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{J}(\varphi_{x_0} + \varphi_{\xi_0}) = \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) [\varphi_{x_0}(x) + \varphi_{\xi_0}(x)] [\varphi_{x_0}(\xi) + \varphi_{\xi_0}(\xi)] dx d\xi = \\ &= \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi_{x_0}(x) \varphi_{x_0}(\xi) dx d\xi + \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi_{\xi_0}(x) \varphi_{x_0}(\xi) dx d\xi + \\ &+ \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi_{x_0}(x) \varphi_{\xi_0}(\xi) dx d\xi + \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi_{\xi_0}(x) \varphi_{\xi_0}(\xi) dx d\xi. \end{aligned}$$

Перший і четвертий доданки цієї рівності дорівнюють нулю, оскільки ці доданки відповідно рівні $\mathcal{J}(\varphi_{x_0}) = \mathcal{J}(\varphi_{\xi_0}) = 0$, другий та третій доданки рівні

між собою, оскільки ядро $K(x, \xi)$ симетричне, а інтеграл не зміниться, якщо змінну інтегрування x замінити на ξ , а ξ – на x , тому:

$$\int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi_{\xi_0}(x) \varphi_{x_0}(\xi) dx d\xi = \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi_{x_0}(x) \varphi_{\xi_0}(\xi) dx d\xi.$$

Тоді будемо мати

$$\begin{aligned} 0 = J(\varphi_{x_0} + \varphi_{\xi_0}) &= 2 \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi_{\xi_0}(\xi) \varphi_{x_0}(x) dx d\xi = \\ &= 2 \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \int_{\xi_0-\delta}^{\xi_0+\delta} K(x, \xi) \varphi_{\xi_0}(\xi) \varphi_{x_0}(x) dx d\xi > 0, \end{aligned}$$

оскільки в маленькому квадратику $K(x, \xi) > 0$, $\varphi_{\xi_0}(x) \neq 0$, $\varphi_{x_0}(x) \neq 0$, отримана суперечність доводить, що Ω і ω одночасно перетворитись у нуль не можуть.

Зауваження. Якщо вважати, що в маленькому квадратику ядро $K(x, \xi) < 0$, то також аналогічно приходимо до суперечності.

2. Припустимо, що

$$\omega = \inf_{\|\varphi\|=1} \{J(\varphi)\} \neq 0$$

Звідси випливає:

$$1) J(\varphi) \geq \omega;$$

2) Існує послідовність нумерованих функцій $\{\varphi_k(x)\}$, $k = 1, 2, \dots$, така що

$$J(\varphi_k) \xrightarrow[\|\varphi\|=1]{k \rightarrow \infty} \omega.$$

Введемо оператор

$$B\varphi_k(x) = \int_a^b K(x, \xi) \varphi_k(\xi) d\xi - \omega \varphi_k(x), \quad (31.3)$$

де $\|\varphi_k\| = 1$.

Розглянемо скалярний добуток

$$\begin{aligned}(B\varphi_k, \varphi_k) &= \int_a^b \left[\int_a^b K(x, \xi) \varphi_k(\xi) d\xi - \omega \varphi_k(x) \right] \varphi_k(x) dx = \\&= \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi_k(\xi) \varphi_k(x) dx d\xi - \omega \int_a^b \varphi_k^2(x) dx = J(\varphi_k) - \omega \|\varphi_k\|^2 = \\&= J(\varphi_k) - \omega \geq 0,\end{aligned}$$

оскільки $J(\varphi_k) \geq \omega$, і тому зі збіжності $J(\varphi_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \omega$ випливає збіжність

$(B\varphi_k, \varphi_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Маємо:

$$1) (B\varphi_k, \varphi_k) \geq 0; \quad 2) (B\varphi_k, \varphi_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad (32.3)$$

Умова 1 свідчить про те, що має місце узагальнена нерівність Буняковського (27.3). Отже, для всякої неперервної функції $\psi(x)$ виконується нерівність

$$(B\varphi_k, \psi)^2 \leq (B\varphi_k, \varphi_k)(B\psi, \psi).$$

Якщо $\{\varphi(x)\}$ – множина неперервних функцій, то і $\{\varphi_k(x)\}$ буде множиною неперервних функцій, оскільки $\{\varphi_k(x)\} \subset \{\varphi(x)\}$ і тому $B\varphi_k$ – неперервна функція.

У попередній нерівності ψ – будь-яка неперервна функція; поставивши $\psi = B\varphi_k$, отримаємо:

$$(B\varphi_k, B\varphi_k) \leq (B\varphi_k, \varphi_k)(BB\varphi_k, B\varphi_k) \quad (33.3)$$

Покажемо, що ліва частина нерівності (33.3) зі зростанням k прямує до нуля. Згідно з (32.3) $(B\varphi_k, \varphi_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Залишилось довести, що другий співмножник у нерівності (33.3) є обмежена величина при $k \rightarrow \infty$. Для цього скористаємося відомою нерівністю

$$|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

З формули (31.3) отримаємо:

$$\begin{aligned}|B\varphi_k(x)| &\leq \int_a^b |K(x, \xi) \varphi_k(\xi)| d\xi + |\omega| |\varphi_k(x)| \leq \\&\leq \frac{1}{2} \int_a^b K^2(x, \xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_a^b \varphi_k^2(\xi) d\xi + |\omega| |\varphi_k(x)|,\end{aligned} \quad (34.3)$$

Звідки отримаємо

$$|B\varphi_k(x)| \leq \frac{1}{2}M^2(b-a) + \frac{1}{2}\|\varphi\|^2 + |\omega||\varphi_k(x)|.$$

Оскільки $\|\varphi_k\| = 1$, $|\omega| = \text{const}$, $\varphi_k(x)$ – неперервна функція на $[a;b]$ і тому обмежена, то $|B\varphi_k(x)| \leq c_1 = \text{const}$. Підставивши в нерівність (34.3) замість φ_k функцію $B\varphi_k$, отримаємо нерівність

$$BB\varphi_k \leq \frac{1}{2} \int_a^b K^2(x, \xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_a^b (B\varphi_k)^2 d\xi + |\omega| |B\varphi_k(x)|,$$

звідки $|B \cdot B\varphi_k| \leq c_2 = \text{const}$, бо $|B\varphi_k(x)| \leq c_1$.

Оцінимо скалярний добуток

$$\begin{aligned} |(B\varphi_k, BB\varphi_k)| &= \left| \int_a^b B\varphi_k(x) BB\varphi_k(x) dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |B\varphi_k(x)| \cdot |BB\varphi_k(x)| dx \leq c_1 c_2 (b-a) = \text{const}. \end{aligned}$$

Доведено, що другий співмножник у нерівності (33.3) – обмежена величина, тому:

$$(B\varphi_k, B\varphi_k)^2 = \|B\varphi_k\|^4 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \text{ або } \|B\varphi_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

2. Розглянемо формулу (31.3) і введемо позначення:

$$\varphi_k^*(x) = \int_a^b K(x, \xi) \varphi_k(\xi) d\xi \quad (35.3)$$

На основі леми 1 ця сім'я функцій буде рівномірно обмеженою і рівномірно неперервною. За теоремою Арцела, із сім'ї $\{\varphi_k^*(x)\}$ можна вибрати таку послідовність $\{\varphi_{k_m}^*(x)\}$, яка рівномірно збігається до деякої функції $\varphi^*(x)$ при $k_m \rightarrow \infty$. Тоді формулу (31.3) можна переписати так:

$$B\varphi_{k_m}^*(x) = \int_a^b K(x, \xi) \varphi_{k_m}^*(\xi) d\xi - \omega \varphi_{k_m}^* \quad (36.3)$$

Перейшовши до границі при $k_m \rightarrow \infty$, маємо

$$\lim_{k_m \rightarrow \infty} \omega \varphi_{k_m}^* = \omega \varphi^*(x)$$

Покажемо, що

$$\lim_{k_m \rightarrow \infty} \int_a^b K(x, \xi) \varphi_{k_m}^*(\xi) d\xi = \int_a^b K(x, \xi) \varphi^*(\xi) d\xi \quad (37.3)$$

Справді, рівномірна збіжність $\varphi_{k_m}^*(x) \xrightarrow[k_m \rightarrow \infty]{} \varphi^*(x)$ означає, що для будь-якого $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{M(b-a)} > 0$ знайдеться такий номер $N(\varepsilon)$, що при $k_m > N(\varepsilon)$ має місце нерівність $|\varphi_{k_m}^*(x) - \varphi^*(x)| < \varepsilon$ для всіх x з даного проміжку.

Оцінимо різницю

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b K(x, \xi) \varphi_{k_m}^*(\xi) d\xi - \int_a^b K(x, \xi) \varphi^*(\xi) d\xi \right| \leq \\ & \leq \int_a^b |K(x, \xi)| \cdot |\varphi_{k_m}^*(\xi) - \varphi^*(\xi)| d\xi \leq M\varepsilon(b-a) = \varepsilon_1 \end{aligned}$$

для будь-яких x, ξ при $k_m > N$. Отже, рівність (37.3) доведена.

Покажемо, що $B\varphi_{k_m}^*(x) \xrightarrow[k_m \rightarrow \infty]{} 0$. Справді, на основі формул (35.3) і (36.3) маємо:

$$\begin{aligned} B\varphi_{k_m}^*(x) &= \int_a^b K(x, \xi) \varphi_{k_m}^*(\xi) d\xi - \omega \varphi_{k_m}^*(x) = \\ &= \int_a^b K(x, \xi) d\xi \int_a^b K(x, \xi) \varphi_{k_m}(t) dt - \omega \int_a^b K(x, \xi) \varphi_{k_m}(\xi) d\xi = \\ &= \int_a^b K(x, \xi) d\xi \left[\int_a^b K(x, \xi) \varphi_{k_m}(t) dt - \omega \varphi_{k_m}(\xi) \right] = \\ &= \int_a^b K(x, \xi) B\varphi_{k_m}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Застосовуючи нерівність Буняковського, отримаємо

$$\begin{aligned} |B\varphi_{k_m}^*(x)| &= \left| \int_a^b K(x, \xi) B\varphi_{k_m}(\xi) d\xi \right| \leq \\ &\leq \sqrt{\int_a^b K^2(x, \xi) d\xi \cdot \int_a^b [B\varphi_{k_m}(\xi)]^2 d\xi} \leq \sqrt{M^2(b-a)} \|B\varphi_{k_m}\| \xrightarrow{k_m \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

оскільки раніше було показано, що $\|B\varphi_k\| \xrightarrow{k_m \rightarrow \infty} 0$.

Перейшовши в рівності (36.3) до границі при $k_m \rightarrow \infty$, отримаємо

$$0 = \int_a^b K(x, \xi) \varphi^*(\xi) - \omega \varphi^*(x),$$

звідси

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{\omega} \int_a^b K(x, \xi) \varphi^*(\xi) d\xi,$$

і ми отримали, що функція $\varphi^*(x)$ задовільняє однорідне рівняння Фредгольма другого роду з параметром $\lambda = \frac{1}{\omega} \neq 0$.

Зауваження. Зі збіжності $\|B\varphi_k\| \xrightarrow{k_m \rightarrow \infty} 0$ не можна одразу стверджувати, що $\|B\varphi_{k_m}^*\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, оскільки зі збіжності по нормі випливає збіжність у середньому, а зі збіжності в середньому, як було зазначено, не завжди випливає звичайна збіжність. Однак зі збіжності $\|B\varphi_{k_m}^*\| \xrightarrow{k_m \rightarrow \infty} 0$ випливає збіжність $B\varphi_{k_m}^* \xrightarrow{k_m \rightarrow \infty} 0$.

3. Розглянемо однорідне рівняння (38.3). Залишається довести, що $\varphi^*(x) \neq 0$. Тоді буде доведено, що існує власне число $\lambda = \frac{1}{\omega}$, якому буде відповідати власна функція $\varphi^*(x)$.

Припустимо, що $\varphi^*(x) \equiv 0$, тоді $\varphi_{k_m}^* \xrightarrow{k_m \rightarrow \infty} 0$. З цього випливає, що $\|\varphi_{k_m}^*\| \xrightarrow{k_m \rightarrow \infty} 0$, бо з рівномірної збіжності завжди випливає збіжність у середньому, а зі збіжності в середньому – збіжність по нормі. Розглянемо формулу (31.3), її можна переписати так:

$$B\varphi_{k_m}(x) = \int_a^b K(x, \xi)\varphi_{k_m}(\xi) d\xi - \omega\varphi_{k_m}(x) = \varphi_{k_m}^*(x) - \omega\varphi_{k_m}(x),$$

$$\text{де } \varphi_{k_m}^*(x) = \int_a^b K(x, \xi)\varphi_{k_m}(\xi) d\xi.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \|B\varphi_{k_m}(x)\|^2 &= \int_a^b [B\varphi_{k_m}(x)]^2 dx = \int_a^b [\varphi_{k_m}^*(x) - \omega\varphi_{k_m}(x)]^2 dx = \\ &= \int_a^b [\varphi_{k_m}^*(x)]^2 dx - 2\omega \int_a^b \varphi_{k_m}^*(x)\varphi_{k_m}(x) dx + \omega^2 \int_a^b \varphi_{k_m}^2(x) dx = \\ &= \|\varphi_{k_m}^*\|^2 - 2\omega (\varphi_{k_m}^*(x), \varphi_{k_m}(x)) + \omega^2 \|\varphi_{k_m}\|^2 = \\ &= \|\varphi_{k_m}^*\|^2 - 2\omega (\varphi_{k_m}^*(x), \varphi_{k_m}(x)) + \omega^2, \text{ так як } \|\varphi_{k_m}\| = 1. \end{aligned}$$

Маємо

$$\|B\varphi_{k_m}(x)\|^2 = \|\varphi_{k_m}^*\|^2 - 2\omega (\varphi_{k_m}^*(x), \varphi_{k_m}(x)) + \omega^2 \quad (39.3)$$

У формулі (39.3) перейдемо до границі при $k_m \rightarrow \infty$. Раніше було показано, що $B\varphi_{k_m}^* \xrightarrow{k_m \rightarrow \infty} 0$, $\|B\varphi_k\| \xrightarrow{k_m \rightarrow \infty} 0$ і тому $\|B\varphi_{k_m}\| \xrightarrow{k_m \rightarrow \infty} 0$, оскільки $\{\varphi_{k_m}(x)\} \subset \{\varphi_k(x)\}$.

Застосовуючи нерівність Буняковського до скалярного добутку, отримаємо

$$(\varphi_{k_m}^*(x), \varphi_{k_m}(x)) = \sqrt{(\varphi_{k_m}^*, \varphi_{k_m}^*)(\varphi_{k_m}, \varphi_{k_m})} = \|\varphi_{k_m}^*\| \cdot \|\varphi_{k_m}\| = \|\varphi_{k_m}^*\|,$$

оскільки $\|\varphi_{k_m}\| = 1$. Тому зі збіжності $\|\varphi_{k_m}^*\| \xrightarrow{k_m \rightarrow \infty} 0$ випливає збіжність $(\varphi_{k_m}^*, \varphi_{k_m}) \xrightarrow{k_m \rightarrow \infty} 0$.

Якщо у формулі (39.3) перейти до границі при $k_m \rightarrow \infty$, то отримаємо $\omega^2 = 0$. Отримана суперечність доводить, що $\varphi^*(x) \neq 0$. Отже, теорема Гільберта повністю доведена.

3.7. Деякі властивості власних значень і власних функцій дійсного симетричного ядра

Відомо, що дві функції $\varphi_1(x) \neq 0$ і $\varphi_2(x) \neq 0$ називаються ортогональними на $[a; b]$, якщо:

$$(\varphi_1; \varphi_2) = \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = 0.$$

Теорема 1. Власні функції $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$, які відповідають двом різним власним значенням $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ортогональні.

Доведення. Нехай λ_1, λ_2 – два різних власних значення, що відповідають власним функціям $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$, а саме:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \lambda_1 \int_a^b K(x, \xi) \varphi_1(\xi) d\xi, \\ \varphi_2(x) &= \lambda_2 \int_a^b K(x, \xi) \varphi_2(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Помноживши перше рівняння на $\lambda_2 \varphi_2(x)$, а друге – на $\lambda_1 \varphi_1(x)$ і проінтегрувавши по x на $[a; b]$, отримаємо:

$$\begin{aligned} \lambda_2 \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx &= \lambda_1 \lambda_2 \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi_1(\xi) \varphi_2(x) dx d\xi, \\ \lambda_1 \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx &= \lambda_1 \lambda_2 \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi_1(x) \varphi_2(\xi) dx d\xi. \end{aligned}$$

Праві частини отриманих рівностей рівні, тому що ядро $K(x, \xi)$ симетричне, а інтеграл не змінить своєї величини, якщо змінну інтегрування x замінити на ξ , а ξ – на x , тому

$$\begin{aligned}\lambda_2 \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx - \lambda_1 \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx &= 0, \\ (\lambda_2 - \lambda_1) \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx &= 0, \\ \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx &= 0,\end{aligned}$$

що і треба було довести.

Теорема 2. Усі власні значення симетричного дійсного ядра – дійсні числа.

Доведення. Припустимо протилежне, тобто, що $\lambda = \alpha + i\beta$, де $\beta \neq 0$, а $\varphi(x)$ – власна функція, відповідна власному значенню λ . Маємо

$$\varphi_1(x) = (\alpha + i\beta) \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Якщо дві комплексні величини рівні, то і спряжені до них також будуть рівні

$$\bar{\varphi}(x) = (\alpha - i\beta) \int_a^b K(x, \xi) \bar{\varphi}(\xi) d\xi,$$

$\bar{K}(x, \xi) = K(x, \xi)$, оскільки $K(x, \xi)$ – дійсне ядро. Остання рівність говорить про те, що $\alpha - i\beta$ буде власним значенням власної функції $\bar{\varphi}(x)$. Згідно з теоремою 1 функції $\varphi(x)$ і $\bar{\varphi}(x)$ ортогональні, оскільки $\alpha + i\beta \neq \alpha - i\beta$, тобто

$$\int_a^b \varphi(x) \bar{\varphi}(x) dx = 0,$$

або

$$\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx = 0, \quad (40.3)$$

бо $\varphi(x) \bar{\varphi}(x) = |\varphi(x)|^2$. Підінтегральна функція неперервна, причому $|\varphi(x)|^2 \geq 0$. Тоді рівність (40.3) можлива тільки при умові $|\varphi(x)|^2 \equiv 0$, тому $\varphi(x) \equiv 0$. Ми дійшли суперечності, оскільки власна функція не може дорівнювати нулю, що і доводить теорему.

Зауваження. Для однорідної інтегральної рівності

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi,$$

$\lambda = 0$ не може бути власним значенням.

Справді, якщо $\lambda = 0$, то $\varphi(x) \equiv 0$, а це неможливо, бо власна функція не може дорівнювати нулю.

Теорема 3. *Одному власному значенню відповідає тільки скінченне число лінійно незалежних власних функцій.*

Максимальне число лінійно незалежних власних функцій, відповідних одному власному значенню λ_0 , називається *рангом* власного числа λ_0 .

На основі цього означення теорему 3 можна сформулювати так: *ранг власного значення є скінченним числом.*

Доведення. Нехай $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ – лінійно незалежні власні функції ядра $K(x, \xi)$, відповідні власному значенню λ_0 . Побудуємо методом Шмідта нову ортонормовану систему власних функцій

$$\varphi_1(x); \varphi_2(x); \dots; \varphi_n(x),$$

причому

$$\varphi_k(x) = \alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) + \dots + \alpha_k u_k(x).$$

Тоді, $\varphi_1(x); \varphi_2(x); \dots; \varphi_n(x)$ також будуть власними функціями, відповідними власному значенню λ_0 , оскільки лінійна комбінація власних функцій є власною функцією. Надалі будемо вважати, що власні функції ортонормовані.

Доведемо, що число цих власних функцій, відповідних власному значенню λ_0 , скінченне. Для цього скористаємося нерівністю Бесселя. Якщо

функцію $f(x)$ розкласти в ряд Фур'є за функціями $\varphi_1(x); \varphi_2(x); \dots; \varphi_n(x); \dots$, тобто, якщо

$$f(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) + \dots,$$

то

$$c_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx$$

називаються *узагальненими коефіцієнтами Фур'є*, і згідно з нерівністю Бесселя маємо:

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx.$$

Розглянемо функцію $f(x) = K(x, \xi)$, де ξ – фіксоване число. Тоді коефіцієнти Фур'є для функції $K(x, \xi)$ запишуться так

$$c_n(\xi) = \int_a^b K(x, \xi) \varphi_n(x) dx.$$

З іншого боку,

$$\varphi_n(\xi) = \lambda_0 \int_a^b K(x, \xi) \varphi_n(x) dx,$$

звідси видно, що $c_n(\xi) = \frac{\varphi_n(\xi)}{\lambda_0}$ і нерівність Бесселя приймає вигляд

$$\sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_0^2} \leq \int_a^b K^2(x; \xi) dx.$$

Проінтегрувавши цю нерівність по ξ , отримаємо

$$\frac{1}{\lambda_0^2} \sum_{i=1}^n \int_a^b \varphi_i^2(\xi) d\xi \leq \int_a^b \int_a^b K^2(x; \xi) dx d\xi.$$

$$\int_a^b \varphi_i^2(\xi) d\xi = 1,$$

оскільки власні функції $\varphi_i(x)$ ортонормовані, тому

$$\frac{n}{\lambda_0^2} \leq \int_a^b \int_a^b K^2(x; \xi) dx d\xi.$$

або

$$n \leq \lambda_0^2 \int_a^b \int_a^b K^2(x; \xi) dx d\xi. \quad (41.3)$$

З неперервності ядра $K(x; \xi)$ у квадраті $\{a \leq x \leq b, a \leq \xi \leq b\}$ випливає його обмеженість $|K(x; \xi)| \leq M$. Тоді, $n \leq \lambda_0^2 M^2 (b-a)^2 = \text{const}$. Отже, число лінійно незалежних власних функцій, відповідних власному значенню λ_0 , є скінченним числом, що і треба було довести.

Зауваження. При доведенні теореми 3 ми не користувались симетричністю ядра, тому ця теорема має місце для будь-якого обмеженого ядра. Теорема 3 буде також справедлива для ядра, яке задовольняє нерівність

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x; \xi) dx d\xi < \infty.$$

Наслідок 1. Нехай параметр λ такий, що задовільняє нерівність

$$n \leq \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K^2(x; \xi) dx d\xi < 1.$$

Це буде тоді, коли

$$|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x; \xi) dx d\xi}} = \sigma. \quad (42.3)$$

Якщо $n < 1$, то $n = 0$. Число n означає кількість власних функцій. При $n = 0$ власних функцій не буде, тобто λ , яке задовольняє нерівність (42.3), не буде власним значенням тому, що йому не відповідає ні одна власна функція. Отже, всі власні значення ядра $K(x; \xi)$ не можуть бути меншими за число σ , вони лежать поза інтервалом $(-\sigma; \sigma)$. Звідси випливає, що $\lambda = 0$ не може бути власним значенням.

Виникає питання, як розташовані власні значення для дійсного неперервного ядра $K(x; \xi)$? Щоб на нього відповісти, розглянемо однорідне інтегральне рівняння з дійсним неперервним симетричним ядром $K(x; \xi) \not\equiv 0$. За теоремою Гільберта таке ядро має хоча б одне власне значення. Нехай це ядро має нескінченну кількість значень, виберемо з них скінченне число s власних значень:

$$\bar{\lambda}_1; \bar{\lambda}_2; \dots \bar{\lambda}_s.$$

Кожному власному значенню може відповідати тільки скінченне число власних функцій. Нехай $\bar{\lambda}_1$ має ранг k_1 , це означає, що власному значенню $\bar{\lambda}_1$ відповідає k_1 лінійно незалежних функцій $\varphi_{11}(x), \varphi_{12}(x), \dots, \varphi_{1k_1}(x)$. Нехай $\bar{\lambda}_2$ має ранг k_2 лінійно незалежних функцій $\varphi_{21}(x), \varphi_{22}(x), \dots, \varphi_{2k_2}(x)$ і т. д., нехай власному значенню $\bar{\lambda}_s$ відповідає k_s лінійно незалежних функцій $\varphi_{s1}(x), \varphi_{s2}(x), \dots, \varphi_{sk_s}(x)$, тобто ми вважаємо, що $\bar{\lambda}_s$ має ранг k_s .

Нехай всі власні функції ортонормовані, а в протилежному випадку це можна було б досягти методом Шмідта.

Кожне власне значення будемо повторювати стільки раз, який його ранг, наприклад, $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1; \lambda_2 = \bar{\lambda}_1; \dots; \lambda_{k_1} = \bar{\lambda}_1$, оскільки $\bar{\lambda}_1$ має ранг k_1 . Тоді кожному $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, k_1$, відповідає одна власна функція, що символічно зобразимо так:

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{k_1} \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1k_1} \end{array}$$

Теж саме зробимо з іншими власними значеннями і власними функціями. Згідно зі зробленим вибором маємо скінченне число власних значень. Першим власним значенням λ_1^* назовемо те значення, яке є найменшим за модулем. Через λ_2^* позначимо те власне значення, яке буде найменшим за модулем серед тих власних значень, які залишились і т. д. Усі ці власні

значення симетричного ядра – дійсні числа, тому їх можна розташувати на дійсній осі.

Отже, якщо зі всіх власних значень вибрати скінченне число, то ми можемо розмістити їх так, що:

$$1) |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \dots;$$

2) кожному власному значенню буде відповідати однозначно власна ортонормована функція $\varphi_i(x)$. Це символічно запишемо так:

$$\begin{array}{ccccccc} |\lambda_1| & \leq & |\lambda_2| & \leq & |\lambda_3| & \leq & \dots \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ \varphi_1 & & \varphi_2 & & \varphi_3 & & \end{array}$$

Таке розміщення власних значень і власних функцій будемо називати нормальним розміщенням власних значень та власних функцій.

Очевидно, $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ тільки тоді, коли ранг λ_1 більший за одиницю.

Теорема 4. Якщо власних значень дійсного неперервного симетричного ядра нескінченно багато, то $|\lambda_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

Доведення. Відомо, що якщо функцію $f(x)$ розкласти в ряд Фур'є за функціями $\varphi_1(x); \varphi_2(x); \dots$, тобто

$$f(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) + \dots,$$

де

$$c_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx - \text{коефіцієнти ряду Фур'є, то нерівність Бесселя}$$

запишеться так

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx.$$

Нехай $f(X) = K(x, \xi)$, де ξ – поки що фіксоване. Тоді коефіцієнти ряду Фур'є для функції $K(x, \xi)$ запишуться так

$$c_n(\xi) = \int_a^b K(x, \xi) \varphi_n(x) dx.$$

З іншого боку,

$$\varphi_n(\xi) = \lambda_n \int_a^b K(x, \xi) \varphi_n(x) dx$$

і тому $c_n = \frac{\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}$. На основі цієї нерівності рівняння Бесселя запишеться так

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n^2(\xi)}{\lambda_n^2} \leq \int_a^b K^2(x, \xi) dx.$$

Проінтегрувавши ліву та праву частини по ξ , отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \int_a^b \varphi_n^2(\xi) d\xi \leq \int_a^b \int_a^b K^2(x, \xi) dx d\xi.$$

Власні функції ортонормовані, тому

$$\int_a^b \varphi_n^2(\xi) d\xi = 1.$$

Отже, остання нерівність буде мати вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \leq \int_a^b \int_a^b K^2(x, \xi) dx d\xi \leq M^2(b-a)^2 = \text{const.}$$

Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$ збігається і тому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = 0$, тобто $|\lambda_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$,

що і треба було довести.

Наслідок. Для будь-якого як завгодно великого фіксованого R на сегменті $[-R, R]$ може лежати тільки скінченне число власних значень ядра $K(x, \xi)$.

Справді, припустимо протилежне, що на $[-R, R]$ лежить нескінченна множина власних значень λ , але нескінченна обмежена множина має принаймні

хоча б одну точку скупчення $\lambda_0 \in [-R, R]$. Оскільки λ_0 – гранична точка, то існує послідовність власних значень ядра $K(x, \xi)$ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, яка збігається до λ_0 . Згідно з доведеною теоремою $|\lambda_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Отримана суперечність і доводить наслідок.

Теорема 5. Усі власні значення симетричного ядра можна перенумерувати так, щоб виконувалися умови:

$$1) 0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \dots, \text{ де } |\lambda_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

2) кожному власному значенню відповідає одна власна функція, причому кожне власне значення рахується стільки раз, який його ранг. Усі власні функції в сукупності будуть ортонормованими.

Доведення. Відомо, що всі власні значення симетричного ядра – дійсні числа, тому їх можна розмістити на дійсній осі x . На сегменті $[-1, 1]$, згідно з наслідком з теореми 4, лежить скінченне число власних значень. Для скінченного числа власних значень ми уже довели, що можна так перенумерувати власні значення, а разом з ними і власні функції, що виконуються умови 1 і 2, тобто власні значення можна перенумерувати так, щоб $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_{n_1}|$. Усі власні функції лінійно незалежні, тому методом Шмідта їх можна ортонормувати. На сегменті $[-2, 2]$ також є скінченне число власних значень, відкинемо з них ті, які лежали на $[-1, 1]$. Власні значення, які залишились, можна перенумерувати в порядку зростання їхнього модуля, причому кожне власне значення рахується стільки раз, який його ранг. Маємо

$$|\lambda_{n_1+1}| \leq |\lambda_{n_1+2}| \leq \dots \leq |\lambda_{n_1+n_2}|.$$

Отже, всі власні значення, які лежать на $[-2, 2]$, нумеровані так:

$$0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \dots \leq |\lambda_{n_1}| \leq |\lambda_{n_1+1}| \leq |\lambda_{n_1+2}| \leq \dots \leq |\lambda_{n_1+n_2}|,$$

причому кожному власному значенню відповідає тільки одна власна функція, і всі власні функції ортонормовані.

Розглянемо сегмент $[-3, 3]$ і проробимо все аналогічно.

Продовжуючи цей процес, ми довели, що всі власні значення симетричного ядра $\lambda_1; \lambda_2; \dots$, а разом з ними і власні функції $\varphi_1(x); \varphi_2(x); \dots$ можуть бути записані так:

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1, & & \lambda_1, & & \lambda_1, & & \dots \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ \varphi_1(x), & \varphi_1(x), & \varphi_1(x), & \dots, \end{array} \quad (43.3)$$

причому кожне λ_i рахується стільки разів, який його ранг, і водночас виконуються умови 1 і 2.

Система власних ортонормованих функцій (43.3) називається *максимальною системою* власних функцій ядра $K(x, \xi)$, якщо кожна власна функція цього ядра лінійно виражається через власні функції (43.3).

Ядро $K^{(m)}(x, \xi) = K(x, \xi) - \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i}$ називається зрізаним ядром.

Згідно з цією формулою перше зрізане ядро запишеться так

$$K^{(1)}(x, \xi) = K(x, \xi) - \sum_{i=1}^1 \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(\xi)}{\lambda_1},$$

а друге зрізане ядро має вигляд

$$\begin{aligned} K^{(2)}(x, \xi) &= K(x, \xi) - \sum_{i=1}^2 \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i} = K(x, \xi) - \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(\xi)}{\lambda_1} - \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(\xi)}{\lambda_2} = \\ &= K^{(1)}(x, \xi) - \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(\xi)}{\lambda_2}. \end{aligned}$$

Два зрізаних ядра $K^{(m)}(x, \xi)$ і $K^{(p)}(x, \xi), m > p$ зв'язані між собою формулами:

$$K^{(m)}(x, \xi) = K^{(m-1)}(x, \xi) - \frac{\varphi_m(x)\varphi_m(\xi)}{\lambda_m} \quad (44.3)$$

$$K^{(m)}(x, \xi) = K^{(p)}(x, \xi) - \sum_{i=p+1}^m \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i} \quad (45.3)$$

Справді,

$$K^{(m)}(x, \xi) = K(x, \xi) - \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i} = [K(x, \xi) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i}] - \frac{\varphi_m(x)\varphi_m(\xi)}{\lambda_m} = K^{(m-1)}(x, \xi) - \frac{\varphi_m(x)\varphi_m(\xi)}{\lambda_m},$$

і формула (44.3) доведена. Аналогічно доводиться і формула (45.3).

Теорема 6. Нехай система власних ортонормованих функцій (43.3) є максимальною системою власних функцій ядра $K(x, \xi)$. Тоді система власних функцій

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi_2(x), & \varphi_2(x), & \varphi_2(x), & \dots & & & (46.3) \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & & & \\ \lambda_2, & \lambda_2, & \lambda_2, & \dots & & & \end{array}$$

буде максимальною системою власних функцій зрізаного ядра

$$K^{(1)}(x, \xi) = K(x, \xi) - \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(\xi)}{\lambda_1}.$$

Доведення розділимо на 2 етапи.

1. Доведемо, що система функцій (46.3) буде системою власних функцій ядра $K^{(1)}(x, \xi)$, тобто доведемо, що $\varphi_i(x), i \geq 2$ задовільняють рівняння:

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_a^b K^{(1)}(x, \xi) \varphi_i(\xi) d\xi.$$

Очевидно, $(\varphi_i, \varphi_1) = 0, i \geq 2$ оскільки всі функції $\varphi_i(x), i \geq 2$ ортогональні до функції $\varphi_1(x)$ за умовою. Функції $\varphi_i(x), i \geq 2$, є власними функціями ядра $K(x, \xi)$ за умовою і тому має місце рівність

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_a^b K(x, \xi) \varphi_i(\xi) d\xi.$$

Замість $K(x, \xi)$ підставимо його значення, виражене через перше зрізане ядро, тоді отримаємо:

$$\begin{aligned}\varphi_i(x) &= \lambda_i \int_a^b K(x, \xi) \varphi_i(\xi) d\xi = \lambda_i \int_a^b [K^{(1)}(x, \xi) + \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(\xi)}{\lambda_1}] \varphi_i(\xi) d\xi = \\ &= \lambda_i \int_a^b K^{(1)}(x, \xi) \varphi_i(\xi) d\xi + \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \varphi_1(x) \int_a^b \varphi_1(\xi) \varphi_i(\xi) d\xi = \\ &= \lambda_i \int_a^b K^{(1)}(x, \xi) \varphi_i(\xi) d\xi,\end{aligned}$$

оскільки функції $\varphi_1(\xi)$ та $\varphi_i(\xi), i \geq 2$, ортогональні і $(\varphi_1, \varphi_i) = 0$. Отже, функції $\varphi_i(x), i \geq 2$, є власними функціями першого зрізаного ядра $K^{(1)}(x, \xi)$.

2. Доведемо, що система власних функцій (46.3) буде максимальною системою зрізаного ядра $K^{(1)}(x, \xi)$.

Припустимо, що це не так. Тоді має існувати така власна функція $\varphi(x), \|\varphi(x)\| = 1$, яка задовольняє дві умови:

- 1) $\varphi(x)$ повинна бути ортогональною до кожної функції системи (46.3);
- 2) $\varphi(x)$ не повинна лінійно виражатись через власні функції системи (46.3).

Покажемо, що уже перша умова зумовлює суперечність. Якщо припустити, що $\varphi(x)$ ортогональна кожній функції системи (46.3), то можна довести, що $\varphi(x)$ буде ортогональною і до функції $\varphi_1(x)$ системи (43.3). Справді, $\varphi(x)$ – власна функція ядра $K^{(1)}(x, \xi)$, тому

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K^{(1)}(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Помноживши цю рівність на $\varphi_1(x)$ і проінтегрувавши, отримаємо

$$(\varphi(x), \varphi_1(x)) = \int_a^b \varphi(x) \varphi_1(x) dx = \lambda \int_a^b \int_a^b K^{(1)}(x, \xi) \varphi(\xi) \varphi_1(x) d\xi dx.$$

Підставивши замість $K^{(1)}(x, \xi)$ його значення, отримаємо

$$\begin{aligned}
 (\varphi_1, \varphi) &= \lambda \int_a^b \int_a^b \left[K(x, \xi) - \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(\xi)}{\lambda_1} \right] \varphi(\xi)\varphi_1(x) d\xi dx = \\
 &= \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi)\varphi_1(x) d\xi dx - \frac{\lambda}{\lambda_1} \int_a^b \varphi(\xi) \varphi_1(\xi) d\xi \int_a^b \varphi_1^2(x) dx = \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda_1} \int_a^b \varphi(\xi) d\xi \lambda_1 \int_a^b K(x, \xi) \varphi_1(x) dx - \frac{\lambda}{\lambda_1} \int_a^b \varphi(\xi) \varphi_1(\xi) d\xi = \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda_1} \int_a^b \varphi(\xi) \varphi_1(\xi) d\xi - \frac{\lambda}{\lambda_1} \int_a^b \varphi(\xi) \varphi_1(\xi) d\xi = 0,
 \end{aligned}$$

оскільки $\|\varphi_1\| = 1$ і тому

$$\int_a^b \varphi_1^2(x) dx = \|\varphi_1\|^2 = 1, \quad \lambda_1 \int_a^b K(x, \xi) \varphi_1(x) dx = \varphi_1(\xi).$$

Ми показали, що $(\varphi_1, \varphi) = 0$, тобто, що функції $\varphi_1(x)$ і $\varphi(x)$ ортогональні.

Покажемо, що $\varphi(x)$ – власна функція ядра $K(x, \xi)$. Раніше було припущено, що $\varphi(x)$ – власна функція ядра $K^{(1)}(x, \xi)$, і тому

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K^{(1)}(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Підставивши замість $K^{(1)}(x, \xi)$ його значення, маємо

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \lambda \int_a^b \left[K(x, \xi) - \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(\xi)}{\lambda_1} \right] \varphi(\xi) d\xi = \\
 &= \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi - \frac{\lambda}{\lambda_1} \varphi_1(x) \int_a^b \varphi_1(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi,
 \end{aligned}$$

оскільки $(\varphi_1, \varphi) = 0$. Ми показали, що $\varphi(x), \|\varphi\| = 1$ є власною функцією ядра $K(x, \xi)$. Система (43.3) власних функцій є максимальною системою, тому всяка

власна функція $\varphi(x)$ ядра $K(x, \xi)$ є лінійною комбінацією власних функцій системи (43.3), тобто

$$\varphi(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + c_3 \varphi_3(x) + \dots$$

Помноживши цю рівність на $\varphi(x)$ і проінтегрувавши, отримаємо

$$\int_a^b \varphi^2(x) dx = c_1 \int_a^b \varphi_1(x) \varphi(x) dx + c_2 \int_a^b \varphi_2(x) \varphi(x) dx + \dots$$

Отримано суперечність, бо

$$\int_a^b \varphi^2(x) dx = 1, \int_a^b \varphi_i(x) \varphi(x) dx = 0, i = 1, 2, \dots$$

тим самим теорема повністю доведена.

Наслідок. Для ядра

$$K^{(2)}(x, \xi) = K^{(1)}(x, \xi) - \frac{\varphi_2(x) \varphi_2(\xi)}{\lambda_2}$$

максимальною системою власних функцій буде система

$$\begin{array}{cccc} \varphi_3(x), & \varphi_4(x), & \varphi_5(x), & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \lambda_3, & \lambda_4, & \lambda_5, & \dots \end{array}$$

і т. д., а для ядра $K^{(m)}(x, \xi)$ максимальною системою власних функцій буде система

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{m+1}(x), & \varphi_{m+2}(x), & \varphi_{m+3}(x), & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \lambda_{m+1}, & \lambda_{m+2}, & \lambda_{m+3}, & \dots \end{array}$$

Раніше було показано, що вироджене ядро має скінченне число власних значень і відповідно скінченне число власних функцій. Покажемо, що якщо ядро симетричне, то має місце і зворотне твердження.

Теорема 7. Якщо неперервне симетричне ядро має скінченне число власних значень, то воно буде виродженим.

Доведення. Припустимо, що симетричне ядро $K(x, \xi)$ має скінченне число власних значень і власних функцій. Тоді для цього ядра максимальна система

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi_1(x), & \varphi_2(x), & \dots, & \varphi_k(x) \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ \lambda_1, & \lambda_2, & \dots, & \lambda_k \end{array}$$

має скінченне число k власних функцій і стільки ж власних значень. Розглянемо k – те зрізане ядро

$$K^{(k)}(x, \xi) = K(x, \xi) - \sum_{i=1}^k \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i},$$

яке також буде симетричним, оскільки $K(x, \xi)$ – симетричне ядро,

$\sum_{i=1}^k \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i}$ – симетрична функція.

Для зрізаного ядра $K^{(k)}(x, \xi)$ максимальна система власних функцій не містить власних функцій та власних значень, так остання власна функція в максимальній системі функцій для ядра $K(x, \xi)$ є $\varphi_k(x)$, а перша функція в максимальній системі функцій для ядра $K^{(k)}(x, \xi)$ буде $\varphi_{k+1}(x)$, якої фактично немає.

За теоремою Гільберта, симетричне ядро, яке не тотожно дорівнює нулю, має хоча б одне власне значення. Оскільки $K^{(k)}(x, \xi)$ не має власних значень, то $K^{(k)}(x, \xi) \equiv 0$. Якщо

$$K^{(k)}(x, \xi) = K(x, \xi) - \sum_{i=1}^k \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i} \equiv 0, \text{ то}$$

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^k \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i}, \text{ тобто}$$

$K(x, \xi)$ – вироджене ядро, що і вимагалось довести.

Теорема 8. Власна функція, яка не є лінійною комбінацією інших власних функцій дійсного симетричного ядра, є дійсною функцією.

Доведення. Відомо, що власні значення дійсного симетричного ядра є дійсними числами. Припустимо, що власному значенню λ_0 відповідає комплексна функція $\varphi_0(x) = f(x) + ig(x)$. Тоді отримаємо рівність

$$\varphi_0(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x, \xi) \varphi_0(\xi) d\xi.$$

Покажемо, що функції $f(x)$ і $g(x)$ будуть власними функціями, які відповідатимуть власному значенню λ_0 . Підставляючи $\varphi_0(x) = f(x) + ig(x)$ в інтегральне рівняння, отримаємо

$$f(x) + ig(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, \xi) [f(\xi) + ig(\xi)] d\xi = 0, \text{ або}$$

$$f(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi + i \left[g(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, \xi) g(\xi) d\xi \right] = 0.$$

Звідси маємо

$$f(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi = 0,$$

$$g(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, \xi) g(\xi) d\xi = 0.$$

тобто $f(x)$ і $g(x)$ – власні функції, відповідні власному значенню λ_0 . Це і доводить теорему.

3.8. Теорема Гільберта-Шмідта

Спочатку доведемо лему.

Лема. Нехай $K(x, \xi)$ – симетричне ядро, а λ_1 – його власне значення, найменше за модулем. Тоді для будь-якої неперервної функції $\psi(x)$ виконується:

$$\left| \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \psi(x) \psi(\xi) dx d\xi \right| \leq \frac{\left\| \frac{\psi(x)}{\|\psi\|} \right\|^2}{|\lambda_1|}. \quad (47.3)$$

Достатньо довести, що ця нерівність виконується для неперервної функції $\psi(x)$ з нормою $\|\psi\| = 1$. Справді, нехай $\psi(x)$ – така функція, що $\|\psi\| \neq 1$, тоді $\frac{\psi(x)}{\|\psi\|}$ – функція, норма якої дорівнює одиниці. Якщо нерівність (47.3) виконується для функції з нормою, що дорівнює одиниці, тоді

$$\left| \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \frac{\psi(x)}{\|\psi\|} \frac{\psi(\xi)}{\|\psi\|} dx d\xi \right| \leq \frac{\left\| \frac{\psi(x)}{\|\psi\|} \right\|^2}{|\lambda_1|},$$

або

$$\frac{1}{\|\psi\|^2} \left| \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \psi(x) \psi(\xi) dx d\xi \right| \leq \frac{\|\psi(x)\|^2}{\|\psi\|^2 |\lambda_1|},$$

тобто нерівність (47.3) виконується для функції $\psi(x)$, $\|\psi\| \neq 1$.

Отже, залишається довести, що виконується нерівність:

$$\left| \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \psi(x) \psi(\xi) dx d\xi \right| \leq \frac{1}{|\lambda_1|}, \quad (48.3)$$

де $\|\psi\| = 1$.

Розглянемо вираз

$$I(\psi) = \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \psi(x) \psi(\xi) dx d\xi,$$

з яким ми зустрічались у теоремі Гільберта. Раніше було доведено, що якщо $\omega = \int_{\|\psi\|=1} I(\psi) \neq 0$, тоді $\frac{1}{\omega}$ буде власним значенням ядра $K(x, \xi)$. Аналогічно можна довести, що якщо $\Omega = \int_{\|\psi\|=1} I(\psi) \neq 0$, тоді $\frac{1}{\Omega}$ буде власним значенням ядра $K(x, \xi)$.

Нехай $\bar{\lambda}$ – найменше власне значення серед додатних власних значень, а $\bar{\bar{\lambda}}$ – найменше по модулю серед від’ємних власних значень. Доведемо, що в цьому випадку виконується нерівність

$$\frac{1}{\bar{\bar{\lambda}}} \leq I(\psi) \leq \frac{1}{\bar{\lambda}}, \quad (49.3)$$

тобто $I(\psi) \in \left[\frac{1}{\bar{\lambda}}, \frac{1}{\bar{\bar{\lambda}}}\right]$. Із нерівності (49.3) одразу випливає доведення леми.

Справді, із (49.3) випливає

$$|I(\psi)| \leq \max\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}, \frac{1}{\bar{\bar{\lambda}}}\right) = \frac{1}{|\lambda_1|},$$

й отримуємо нерівність (48.3). Як мінімум одне із чисел $\bar{\lambda}$ або $\bar{\bar{\lambda}}$ завжди існує, оскільки симетричне ядро, за теоремою Гільберта, завжди має власне значення – або додатне, або від’ємне. Нуль не може бути власним значенням, як було доведено раніше. Якщо одне із чисел $\bar{\lambda}$ або $\bar{\bar{\lambda}}$ не існує, наприклад: $\bar{\bar{\lambda}}$ не існує, тоді нерівність (49.3) матиме вигляд

$$0 \leq I(\psi) \leq \frac{1}{\bar{\lambda}}, \quad (50.3)$$

а якщо $\bar{\lambda}$ не існує, тоді отримуємо:

$$\frac{1}{\bar{\bar{\lambda}}} \leq I(\psi) \leq 0. \quad (51.3)$$

Доведемо праві частини цих нерівностей, ліві частини доводяться аналогічно.

$$\sup_{\|\psi\|=1} I(\psi) = \Omega, \text{ тому } I(\psi) \leq \Omega.$$

1) Нехай $\Omega > 0$, тоді $\frac{1}{\Omega} = \lambda_{i_0} > 0$ буде власним значенням. Тоді буде виконуватись нерівність (50.3). Справді, оскільки $\bar{\lambda}$ – найменше серед додатних власних значень, тоді $0 < \bar{\lambda} \leq \lambda_{i_0}$.

Якщо $\bar{\lambda} = \lambda_{i_0}$, тоді $\Omega = \frac{1}{\lambda_{i_0}} = \frac{1}{\bar{\lambda}}$, і тоді нерівність $I(\psi) \leq \Omega = \frac{1}{\bar{\lambda}}$ виконується.

Отже, і права частина нерівності (50.3) виконується.

Покажемо, що випадок $\bar{\lambda} < \lambda_{i_0}$ неможливий. Дійсно, нехай $\varphi(x)$ – власна функція, відповідна власному значенню $\bar{\lambda}$. Тоді виконується рівність

$$\varphi(x) = \bar{\lambda} \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Помножимо це рівняння на $\frac{\varphi(x)}{\bar{\lambda}}$ і проінтегруємо по x . Враховуючи, що

$$\int_a^b \varphi^2(x) dx = \|\varphi\|^2 = 1,$$

отримуємо

$$\frac{1}{\bar{\lambda}} \int_a^b \varphi^2(x) dx = \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) \varphi(x) d\xi dx = I(\psi).$$

Маємо

$$I(\psi) = \frac{1}{\bar{\lambda}} > \frac{1}{\lambda_{i_0}} = \Omega,$$

оскільки $\bar{\lambda} < \lambda_{i_0}$. Ми отримуємо, що $I(\psi) > \Omega$, а це неможливо, оскільки Ω – точна верхня межа $I(\psi)$. Отже, при $\Omega > 0$ права частина нерівності (50.3) доведена.

2) Нехай $\Omega \leq 0$, тоді $I(\psi) \leq 0$, і ми отримали праву частину нерівності (51.3). Якщо $I(\psi) \leq 0$, тоді і $I(\psi) \leq \frac{1}{\bar{\lambda}}$, оскільки $\frac{1}{\bar{\lambda}} > 0$. Ми довели праву частину нерівності (49.3). Ліва частина цієї нерівності доводиться аналогічно, тільки замість Ω потрібно взяти ω . Отже, нерівність (49.3) доведено, а отже, доведено лему.

Перейдемо до доведення основної теореми для інтегральних рівнянь із симетричним ядром.

Нехай множина функцій $\{h(x)\} \in L_2$, тобто

$$\int_a^b h^2(x) dx < \infty,$$

$K(x, \xi)$ – задання симетричного ядра.

Функція

$$f(x) = \int_a^b K(x, \xi) h(\xi) d\xi \quad (52.3)$$

називається джерелоутворювальною.

Теорема Гільберта-Шмідта. Будь-яка функція $f(x)$, яка джерелоутворено представлена за допомогою функції $h(x)$, інтегрованою з квадратом, тобто функція вигляду (52.3) розкладається в ряд Фур'є за власним функціям симетричного ряду, який збігається абсолютно і рівномірно.

Доведення. Нехай

$$\begin{array}{cccc} \varphi_1(x), & \varphi_2(x), & \varphi_3(x), & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \lambda_1 & , & \lambda_2 & , & \lambda_3 & , \dots \end{array}$$

найбільша система власних функцій симетричного ядра $K(x, \xi)$, $f(x)$ – джерелоутворювальна функція, яка виражається через ядро $K(x, \xi)$ і через функцію $h(x) \in L_2$ за допомогою формули (52.3).

Потрібно довести, що ряд

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x) \quad (53.3)$$

збігається абсолютно і рівномірно, де c_i – коефіцієнт ряду Фур'є для функції $f(x)$, тобто

$$c_i = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx.$$

Підставимо замість $f(x)$ її значення з формули (52.3) й отримуємо

$$c_i = \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) h(\xi) \varphi_i(x) dx d\xi = \int_a^b \varphi_i(x) dx \int_a^b K(x, \xi) h(\xi) d\xi = \frac{1}{\lambda_i} \int_a^b K(x, \xi) h(\xi) d\xi,$$

оскільки

$$h(x) = \lambda_i \int_a^b K(x, \xi) h(\xi) d\xi,$$

і тому

$$\int_a^b K(x, \xi) h(\xi) d\xi = \frac{h(x)}{\lambda_i}.$$

Позначимо

$$\int_a^b h(x) \varphi_i(x) dx = h_i, \quad (54.3)$$

де h_i – коефіцієнт Фур'є для функції $h(x)$ по функціям $\varphi_i(x)$. Отже,

$$c_i = \frac{1}{\lambda_i} \int_a^b h(x) \varphi_i(x) dx = \frac{h_i}{\lambda_i}.$$

Доведемо, що ряд (53.3)

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(x)$$

збігається абсолютно і рівномірно. Розглянемо відрізок цього ядра

$$S_{m,p}(x) = \sum_{i=m}^{m+p} \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(x). \quad (55.3)$$

Якщо доведемо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N(\varepsilon)$, що при $m > N(\varepsilon)$ для будь-якого $p > 0$ і для будь-якого x виконується нерівність

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(x) \right| < \varepsilon, \quad (56.3)$$

тоді буде доведено, що ряд (53.3) збігається абсолютно і рівномірно.

Розглянемо ядро $K(x, \xi)$ як функцію від ξ , а значення x вважаємо фіксованим. Тоді для c_i – коефіцієнта Фур'є для функції $K(x, \xi)$ – отримаємо формулу

$$c_i = \int_a^b K(x, \xi) \varphi_i(\xi) d\xi = \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}.$$

Згідно з нерівністю Бесселя будемо мати

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2} \leq \int_a^b K^2(x, \xi) d\xi (b-a),$$

оскільки $K(x, \xi)$ – неперервна функція у квадраті $\{a \leq x \leq b; a \leq \xi \leq b\}$, тобто $|K(x, \xi)| \leq M$.

Це свідчить про те, що ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2}$$

збігається при будь-якому x . За критерієм Коші можна стверджувати, що для будь-якого x існує таке число $N(\varepsilon)$, що при $m > N$ і $p = 1, 2, \dots$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2} < K.$$

Із нерівності Бесселя

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2 \leq \int_a^b h^2(x) dx < \infty$$

впливає, що ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2$$

збігається. За критерієм Коші можна стверджувати, що для будь-якого $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon^2}{K}$ існує таке число N_1 , що при $m > N_1$ для $p = 1, 2, \dots$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{m+p} h_i^2 < \frac{\varepsilon^2}{K}.$$

До лівої частини (56.3) застосовуємо нерівність Коші

$$\left[\sum_{i=m}^{m+p} \left| h_i \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i} \right| \right]^2 \leq \sum_{i=m}^{m+p} h_i^2 \sum_{i=m}^{m+n} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2}.$$

Звідси при $m > \max(N, N_1)$ маємо

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left| h_i \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i} \right| \leq \sqrt{\sum_{i=m}^{m+p} h_i^2 \sum_{i=m}^{m+n} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2}} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{K} K} = \varepsilon.$$

Для будь-якого x , а це доводить, що ряд (53.3) збігається абсолютно і рівномірно. Члени ряду (53.3) – неперервні функції, та цей ряд рівномірно збігається, тому сума ряду є неперервною функцією, позначимо її через $f^*(x)$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) = f^*(x).$$

Залишилось довести, що $f^*(x) = f(x)$. Ми вже знаємо, що ряд (53.3) збігається до функції $f^*(x)$ рівномірно, тому він збігається у середньому і за нормою

$$\left\| \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(x) - f^*(x) \right\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \quad (57.3)$$

Доведемо, що

$$\left\| f(x) - \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(x) \right\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

і покажемо, що тоді теорема Гільберта-Шмідта буде доведена.

Справді, перейдемо до границі при $m \rightarrow \infty$, отримуємо

$$\|f(x) - f^*(x)\| = 0, \int_a^b [f(x) - f^*(x)]^2 dx = 0,$$

а це можливо тільки тоді, коли $f(x) = f^*(x)$.

Отже, нам потрібно довести, що $\|f(x) - f^*(x)\| = 0$, де $f(x)$ – функція, яка виражається формулою (52.3). Маємо

$$\begin{aligned} \|f(x) - f^*(x)\| &= \left\| f(x) - \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(x) - f^*(x) \right\| \leq \\ &\leq \left\| f(x) - \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(x) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(x) - f^*(x) \right\|. \end{aligned}$$

Якщо доведемо, що

$$\left\| f(x) - \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(x) \right\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

тоді на основі (57.3), переходячи до границі при $m \rightarrow \infty$, отримаємо

$$\|f(x) - f^*(x)\| = 0,$$

і теорема Гільберта-Шмідта буде доведена.

Зробимо позначення

$$\begin{aligned} g_m(x) &= f(x) - \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(x) = f(x) - \sum_{i=1}^m \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(x) = \\ &= \int_a^b K(x, \xi) h(\xi) d\xi - \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i} \int_a^b h(\xi) \varphi_i(\xi) d\xi = \\ &= \int_a^b \left[K(x, \xi) - \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i} \right] h(\xi) d\xi = \int_a^b K^m(x, \xi) h(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

оскільки

$$h_i = \int_a^b h(\xi) \varphi_i(\xi) d\xi, \quad K^m(x, \xi) = K(x, \xi) - \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i}.$$

Звернемо увагу на те, що власними значеннями для ядра $K^m(x, \xi)$ будуть

$$\begin{array}{ccc} \lambda_{m+1} & , & \lambda_{m+2} & , \dots \\ \updownarrow & & \updownarrow & \\ \varphi_{m+1}(x) & , & \varphi_{m+2}(x) & , \dots \end{array},$$

тому, що ця система за теоремою 6 буде максимальною системою ядра $K^m(x, \xi)$. Маємо

$$\int_a^b g^2_m(x) dx = \left\| f(x) - \sum_{i=1}^m c_i \varphi_i(x) \right\|^2$$

і якщо доведемо, що

$$\int_a^b g_m^2(x) dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

тоді теорема Гільберта-Шмідта буде доведена.

Раніше було показано, що

$$g_m(x) = \int_a^b K^m(x, \xi) h(\xi) d\xi.$$

Помножимо обидві частини на $g_m(x)$ і проінтегруємо по x , отримаємо

$$\begin{aligned} \int_a^b g_m^2(x) dx &= \int_a^b \int_a^b K^m(x, \xi) h(\xi) g_m(x) d\xi dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b K^m(x, \xi) [h(x) + g_m(x)][h(\xi) + g_m(\xi)] d\xi dx - \\ &- \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b K^m(x, \xi) h(x) h(\xi) dx d\xi - \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b K^m(x, \xi) g_m(x) g_m(\xi) dx d\xi. \end{aligned}$$

Тут застосована симетричність ядра $K^m(x, \xi) = K^m(\xi, x)$ і те, що інтеграл не зміниться, якщо змінну інтегрування x замінимо на ξ , а ξ – на x . Отже,

$$\int_a^b g_m^2(x) dx \leq \frac{1}{2} |I(h + g_m)| + \frac{1}{2} |I(h)| + \frac{1}{2} |I(g_m)|.$$

Застосовуючи лему, отримаємо

$$\int_a^b g_m^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \frac{\|h + g_m\|^2}{|\lambda_{m+1}|} + \frac{1}{2} \frac{\|\lambda_{m+1}\|^2}{\lambda_{m+1}} + \frac{1}{2} \frac{\|g_m\|^2}{\lambda_{m+1}}. \quad (58.3)$$

Оцінимо вираз

$$\begin{aligned} \|g_m\|^2 &= \int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=1}^m \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(x) \right]^2 dx = \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{i=1}^m \frac{h_i}{\lambda_i} \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx + \sum_{i=1}^m \frac{h_i^2}{\lambda_i^2} \int_a^b \varphi_i^2(x) dx, \end{aligned}$$

оскільки

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Маємо

$$\int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx = c_i = \frac{h_i}{\lambda_i}$$

І тому маємо таку оцінку

$$\|g_m\|^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{i=1}^m \frac{h_i^2}{\lambda_i^2} + \sum_{i=1}^m \frac{h_i^2}{\lambda_i^2} = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^m \frac{h_i^2}{\lambda_i^2} \leq \|f\|^2.$$

Відомо, що $\|h + g_m\| \leq \|h\| + \|g_m\|$ і тому $\|h + g_m\| \leq \|h\| + \|f\|$, оскільки $\|g_m\| \leq \|f\|$.

Нерівність (58.3) тепер можна записати так:

$$\int_a^b g_m^2(x) dx \leq \frac{1}{2|\lambda_{m+1}|} \{[\|h\| + \|f\|]^2 + \|h\|^2 + \|f\|^2\} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

оскільки $\|h\| = \text{const}$, $\|f\| = \text{const}$, як відомо, $\left| \frac{1}{\lambda_{m+1}} \right| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Теорема

Гільберта-Шмідта повністю доведена.

3.9. Приклади

Знайти власні значення і власні функції для інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x + \xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Розв'язання. Ядро $K(x, \xi) = x + \xi$ симетричне і вироджене, тому власним значенням будуть корені рівняння

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda K_{11} & -\lambda K_{12} \\ -\lambda K_{21} & 1 - \lambda K_{22} \end{vmatrix} = 0; \quad K(x, \xi) = \sum_{i=1}^2 a_i(x) b_i(\xi),$$

$$a_1(x) = x; \quad a_2(x) = 1; \quad b_1(\xi) = \xi,$$

$$K_{11} = \int_0^1 b_1(x) a_1(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$K_{12} = \int_0^1 b_1(x)a_2(x)dx = \int_0^1 dx = 1,$$

$$K_{21} = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$K_{22} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{2} & -\lambda \\ -\frac{\lambda}{3} & 1 - \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12} = 12, \quad \lambda^2 + 12\lambda - 12 = 0.$$

Корені цього рівняння $\lambda_1 = -6 + 4\sqrt{3}, \lambda_2 = -6 - 4\sqrt{3}$ будуть власними значеннями. Знайдем власні функції, які відповідають цим власним значенням.

$$1) \quad \lambda_1 = -6 + 4\sqrt{3}.$$

$$\varphi_1(x) = (-6 + 4\sqrt{3}) \int_0^1 (x + \xi) \varphi_1(\xi) d\xi = (-6 + 4\sqrt{3})x \int_0^1 \varphi_1(\xi) d\xi +$$

$$+ (-6 + 4\sqrt{3}) \int_0^1 \xi \varphi_1(\xi) d\xi = (-6 + 4\sqrt{3})Ax + (-6 + 4\sqrt{3})B,$$

$$A = \int_0^1 \varphi_1(\xi) d\xi = \int_0^1 [(-6 + 4\sqrt{3})A\xi + (-6 + 4\sqrt{3})B] d\xi =$$

$$= \frac{-6 + 4\sqrt{3}}{2} A + (-6 + 4\sqrt{3})B,$$

$$B = \int_0^1 \xi \varphi_1(\xi) d\xi = \int_0^1 \xi [(-6 + 4\sqrt{3})A\xi + (-6 + 4\sqrt{3})B] d\xi =$$

$$= \frac{-6 + 4\sqrt{3}}{3} A + \frac{(-6 + 4\sqrt{3})}{2} B,$$

або

$$\begin{cases} (-4 + 2\sqrt{3})A + (-6 + 4\sqrt{3})B = 0, \\ -\frac{6 + 4\sqrt{3}}{3}A + (-4 + 2\sqrt{3})B = 0, \\ \begin{vmatrix} -4 + 2\sqrt{3} & -6 + 4\sqrt{3} \\ -\frac{6 + 4\sqrt{3}}{3} & -4 + 2\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Візьмемо перше рівняння і в ньому підставимо $B = \frac{1}{-6+4\sqrt{3}}$, тоді $A = \frac{1}{4-2\sqrt{3}}$,

$$\varphi_1(x) = \frac{-6 + 4\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}}x + 1 = \sqrt{3}x + 1 = \sqrt{3}\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Якщо власна функція не нормована, то відповідь отримуємо з точністю до сталого множника. Відкидаючи множник $\sqrt{3}$, отримуємо, що власному значенню $\lambda_1 = -6 + 4\sqrt{3}$ відповідає власна функція $\varphi_1(x) = x + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$2) \quad \lambda_2 = -6 - 4\sqrt{3}.$$

$$\varphi_2(x) = (-6 - 4\sqrt{3}) \int_0^1 (x + \xi) \varphi_2(\xi) d\xi = (-6 - 4\sqrt{3})x \int_0^1 \varphi_2(\xi) d\xi +$$

$$(-6 - 4\sqrt{3}) \int_0^1 \xi \varphi_2(\xi) d\xi = (-6 - 4\sqrt{3})Ax + (-6 - 4\sqrt{3})B,$$

$$A = \int_0^1 \varphi_2(\xi) d\xi = \int_0^1 [(-6 - 4\sqrt{3})A\xi + (-6 - 4\sqrt{3})B] d\xi$$

$$= (-3 - 2\sqrt{3})A + (-6 - 4\sqrt{3})B, (-4 - 2\sqrt{3})A + (-6 - 4\sqrt{3})B = 0.$$

Нехай $B = \frac{1}{-6-4\sqrt{3}}$, тоді $A = \frac{1}{4+2\sqrt{3}}$;

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \frac{-6 - 4\sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}}x + 1 = -\frac{(6 + 4\sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})}{4}x + 1 = -\sqrt{3}x + 1 = \\ &= -\sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right). \end{aligned}$$

Отже, власне значення $\lambda_2 = -6 - 4\sqrt{3}$ відповідає власній функції $\varphi_2(x) = x - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Якщо $\varphi(x)$ – власна функція, то $c\varphi(x)$ – також буде власною функцією. Щоб власні функції визначилися однозначно, потрібно звести їх методом Шміда до ортонормованої системи. Маємо

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\|\varphi_1\|} = \frac{x - \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\int_0^1 \left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 dx}} = \frac{\sqrt{3}x + 1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}},$$

$$\psi_2(x) = \frac{\varphi_2(x) - (\varphi_2, \psi_1)\psi_1}{\sqrt{\int_0^1 [\varphi_2(x) - (\varphi_2, \psi_1)\psi_1]^2 dx}},$$

$$(\varphi_2, \psi_1) = \int_0^1 \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \frac{\sqrt{3}x + 1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} dx = 0,$$

$$\psi_2(x) = \frac{\varphi_2(x)}{\sqrt{\int_0^1 \varphi_2^2(x) dx}} = \frac{x - \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\int_0^1 \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 dx}} = \frac{\sqrt{3}x - 1}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}.$$

Отже, власному значенню $\lambda_1 = -6 + 4\sqrt{3}$ відповідає власна функція $\psi_1(x) = \frac{\sqrt{3}x+1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, а власному значенню $\lambda_2 = -6 - 4\sqrt{3}$ – відповідає власна функція $\psi_2(x) = \frac{\sqrt{3}x-1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$. Ці власні функції будуть уже ортонормовані, тому вони визначаються однозначно.

3.10. Теорема про розклад симетричного ядра

Доведемо наступну теорему.

Теорема 1. Нехай $K(x, \xi)$ – симетричне ядро, а

$$\begin{array}{cccc} \varphi_1(x), & \varphi_2(x), & \varphi_3(x), & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \lambda_1 & , & \lambda_2 & , \lambda_3 , \dots \end{array}$$

максимальна система власних функцій і власних значень ядра $K(x, \xi)$. Тоді ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i}$$

при фіксованому ξ збігається в середньому до $K(x, \xi)$, тобто

$$\int_a^b \left[K(x, \xi) - \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i} \right]^2 dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

Доведення. Розглянемо ітероване ядро

$$K_2(x, \xi) = \int_a^b K(x, t) K(t, \xi) dt,$$

де ξ – константа. Якщо ξ – фіксоване, то $K(t, \xi) = h(t)$ і за **теоремою Гільберта-Шмідта** маємо

$$f(x) = K_2(x, \xi) = \int_a^b K(x, t) K(t, \xi) dt = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x),$$

де

$$\begin{aligned} c_i &= \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx = \int_a^b K_2(x, \xi) \varphi_i(x) dx = \int_a^b \int_a^b K(x, t) K(t, \xi) \varphi_i(x) dt dx = \\ &= \int_a^b K(t, \xi) dt \int_a^b K(x, t) \varphi_i(x) dx = \int_a^b K(t, \xi) \frac{\varphi_i(t)}{\lambda_i} dt = \frac{1}{\lambda_i} \int_a^b K(t, \xi) \varphi_i(x) dt = \\ &= \frac{1}{\lambda_i} \frac{\varphi_i(\xi)}{\lambda_i} = \frac{\varphi_i(\xi)}{\lambda_i^2}. \end{aligned}$$

Ми отримали

$$K_2(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i^2}.$$

Отже, ряд

$$K_2(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(\xi) \varphi_i(x)}{\lambda_i^2} \quad (59.3)$$

за **теоремою Гільберта-Шмідта**, абсолютно і рівномірно збігається по x при будь-якому фіксованому ξ . Аналогічно для ітерованого ядра $K_m(x, \xi)$ виводиться формула

$$K_m(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(\xi)\varphi_i(x)}{\lambda_i^m}. \quad (60.3)$$

Внаслідок симетричності ядра (59.3) із теореми Гільберта-Шмідта випливає, що ряд (59.3) абсолютно і рівномірно збігається також й по ξ , якщо x – фіксоване. Проте ще не можна стверджувати, що ряд (59.3) збігається абсолютно і рівномірно за двома змінними x і ξ одночасно. Із формули (59.3) маємо

$$K_2(\xi, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i^2}. \quad (61.3)$$

При $\xi = \text{const}$ цей ряд збігається, але, взагалі кажучи, не рівномірно, оскільки, якщо в ряді (59.3) поставити $x = \text{const}$, а ξ – будь-яка змінна, тоді ряд (59.3), за **теоремою Гільберта-Шмідта**, збігається рівномірно по ξ . Отже, ряд (59.3) збігається рівномірно по ξ тільки тоді, коли x – не будь-яке, а фіксоване. Якщо ξ – будь-яке і ми вставимо $\xi = x$, тоді звідси випливає, що і x – будь-яке, тобто $x \neq \text{const}$ і тому не можна стверджувати, що ряд (61.3) збігається рівномірно.

Розглянемо вираз

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[K(x, \xi) - \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i} \right]^2 dx = \\ &= \int_a^b K(x, \xi)K(x, \xi) dx - 2 \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i(\xi)}{\lambda_i} \int_a^b K(x, \xi)\varphi_i(x) dx + \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i^2} \int_a^b \varphi_i^2(x) dx = \\ &= \int_a^b K(\xi, x)K(x, \xi) d\xi - 2 \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i(\xi)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i^2} = K_2(\xi, \xi) - \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i^2}, \end{aligned}$$

оскільки $K(x, \xi) = K(\xi, x)$, $(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$

Згідно з формулою (61.3)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i^2} = K_2(\xi, \xi),$$

тому

$$\int_a^b \left[K(x, \xi) - \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i} \right]^2 dx = K_2(\xi, \xi) - \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i^2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

і теорема доведена.

Нехай

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi_1(x), & \varphi_2(x), & \varphi_3(x), & \dots & & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\ \lambda_1 & , & \lambda_2 & , & \lambda_3 & , & \dots \end{array}$$

максимальна система власних функцій і власних значень симетричного ядра $K(x, \xi)$. Розкладемо ядро $K(x, \xi)$ при $\xi = \text{const}$ у ряд Фур'є

$$f(x) = K(x, \xi) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots,$$

де

$$c_1 = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx = \int_a^b K(x, \xi) \varphi_i(x) dx = \frac{\varphi_i(\xi)}{\lambda_i}.$$

Отже,

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(\xi) \varphi_i(x)}{\lambda_i}. \quad (62.3)$$

У попередній теоремі було доведено, що ряд (62.3) при фіксованому одному із аргументів x або ξ збігається в середньому до функції $K(x, \xi)$.

Теорема 2. Якщо ряд (62.3) збігається рівномірно по двох змінних x і ξ , то сума цього ряду є неперервною функцією, що дорівнює $K(x, \xi)$.

Доведення. Члени функціонального ряду (62.3) – неперервна функція, ряд (62.3) збігається рівномірно за сукупністю аргументів x, ξ . Згідно з попередньою теоремою сума цього ряду є неперервною функцією, яку позначимо через $\Phi(x, \xi)$:

$$\Phi(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i}.$$

Розглянемо різницю

$$K(x, \xi) - \Phi(x, \xi) = \omega(x, \xi),$$

$$\omega(x, \xi) = K(x, \xi) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i} \quad (63.3)$$

Доведемо, що якщо ряд (63.3) збігається рівномірно як по x , так і по ξ , тоді $\omega(x, \xi) = 0$. Припустимо, що $\omega(x, \xi) \neq 0$. Функція $\omega(x, \xi)$ – симетрична, оскільки $K(x, \xi)$ – симетричне ядро, а $\Phi(x, \xi)$ – симетрична функція.

Нехай $\omega(x, \xi)$ – ядро інтегрального рівняння

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b \omega(x, \xi) \psi(\xi) d\xi.$$

Симетричне ядро $\omega(x, \xi) \not\equiv 0$, за **теоремою Гільберта**, має крайні межі одного власного значення, яке позначимо через λ_0 , а відповідну власну функцію – через $\psi_0(x)$,

$$\psi_0(x) = \lambda_0 \int_a^b \omega(x, \xi) \psi_0(\xi) d\xi \quad (64.3)$$

Покажемо, що функція $\psi_0(x)$ буде ортогональною до всіх власних функцій $\varphi_i(x)$ ядра $K(x, \xi)$, де $\varphi_i(x)$ – найбільша система власних функцій. Помножимо рівність (63.3) на $\varphi_i(\xi)$ і проінтегруємо по ξ , отримаємо

$$\int_a^b \omega(x, \xi) \varphi_i(\xi) d\xi = \int_a^b K(x, \xi) \varphi_i(\xi) d\xi - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b \varphi_k(\xi) \varphi_i(\xi) d\xi,$$

оскільки $\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} = c_k$. За умовою наш ряд збігається рівномірно і тому його можна інтегрувати по частинах.

Оскільки $(\varphi_k, \varphi_i) = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i \end{cases}$, то ми отримаємо

$$\int_a^b \omega(x, \xi) \varphi_i(\xi) d\xi = c_i - c_i = 0.$$

Помножимо обидві частини цієї нерівності на $\lambda_0 \psi_0(x)$ і проінтегруємо по x , отримаємо

$$\int_a^b \varphi_i(\xi) d\xi \lambda_0 \int_a^b \omega(x, \xi) \psi_0(x) dx = 0,$$

або

$$\int_a^b \varphi_i(\xi) \psi_0(\xi) d\xi = 0,$$

що і потрібно було довести.

Покажемо, що $\psi_0(x)$ – власна функція ядра $K(x, \xi)$. Із нерівності (64.3) маємо

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \lambda_0 \int_a^b \left[K(x, \xi) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i} \right] \psi_0(\xi) d\xi = \\ &= \lambda_0 \int_a^b K(x, \xi) \psi_0(\xi) d\xi - \lambda_0 \int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i} \int_a^b \varphi_i(\xi) \psi_0(\xi) d\xi = \lambda_0 \int_a^b K(x, \xi) \psi_0(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

оскільки за умовою ряд збігається по x і по ξ , і ми довели, що

$$\int_a^b \varphi_i(\xi) \psi_0(\xi) d\xi = 0$$

рівність

$$\psi_0(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x, \xi) \psi_0(\xi) d\xi$$

свідчить про те, що $\psi_0(x)$ буде власною функцією і для ядра $K(x, \xi)$. Оскільки $\{\varphi_i(x)\}$ – найбільша система власних функцій, тоді функція $\psi_0(x)$ має бути лінійною комбінацією власних функцій, які відповідають власному значенню λ_0 , а це неможливо при $\psi_0(x) \neq 0$, тому що ми довели, що $(\varphi_0, \varphi_i) = 0$, а ортогональна функція лінійно незалежна. Отже, $\psi_0(x) = 0$, а це суперечить тому, що $\psi_0(x)$ – власна функція.

Ця суперечність і доводить, що $\omega(x, \xi) = 0$. Із нерівності (63.3) при $\omega(x, \xi) = 0$ отримаємо

$$K(x, \xi) = \Phi(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i},$$

і теорема повністю доведена.

3.11. Формула Шмідта

Формула, яку ми маємо вивести, дає можливість за допомогою власних функцій і власних значень знайти розв'язок неоднорідного інтегрованого рівняння другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi + f(x), \quad (65.3)$$

причому λ не дорівнює жодному власному значенню λ_i ядра $K(x, \xi)$. Згідно теоремою Гільберта-Шмідта будь-яку джерелоутвальну функцію

$$\int_a^b K(x, \xi) h(\xi) d\xi$$

можна розкласти в абсолютно і рівномірно збіжний ряд

$$\sum_i \tilde{c}_i \varphi_i(x).$$

Підставимо замість $h(\xi)$ функцію $y(\xi)$, отримаємо інший абсолютно і рівномірно збіжний ряд, який буде відрізнятись від попереднього коефіцієнтами Фур'є. Маємо

$$\int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x),$$

де $y(\xi)$ – неперервна функція і тому інтегрована з квадратом. Рівняння (65.3) можна записати так

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi + f(x) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x) + f(x). \quad (66.3)$$

Визначивши коефіцієнти c_i , ми одразу отримуємо розв'язок рівняння (65.3). Із (66.3) маємо

$$y(\xi) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(\xi) + f(\xi).$$

Підставимо це значення для $y(\xi)$ у праву частину рівняння (65.3), отримуємо

$$y(x) = \lambda^2 \int_a^b K(x, \xi) \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(\xi) d\xi + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi + f(x).$$

Ряд

$$\sum_i c_i \varphi_i(x)$$

збігається рівномірно, тому його можна інтегрувати по частинах:

$$y(x) = \lambda^2 \sum_{i=1}^{\infty} c_i \int_a^b K(x, \xi) \varphi_i(\xi) d\xi + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi + f(x).$$

Відомо, що

$$\int_a^b K(x, \xi) \varphi_i(\xi) d\xi = \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i},$$

а функція

$$\int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

Джерелоутворювальною і її можна розкласти в абсолютно та рівномірно збіжний ряд Фур'є за функціями $\varphi_i(x)$, причому коефіцієнти цього ряду, як було показано в **теоремі Гільберта-Шмідта**, можна записати у вигляді $\frac{f_i}{\lambda_i}$, де

$$f_i = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx, \text{ тобто } \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i} \varphi_i(x).$$

Враховуючи це, наведене рівняння виглядатиме так

$$y(x) = \lambda^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{\lambda_i} \varphi_i(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i} \varphi_i(x) + f(x). \quad (67.3)$$

Тепер для $y(x)$ маємо два розклади (66.3) і (67.3). Прирівняємо їх та отримаємо

$$\lambda \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x) + f(x) = \lambda^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{\lambda_i} \varphi_i(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i} \varphi_i(x) + f(x),$$

або

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{\lambda_i} \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i} \varphi_i(x).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових функціях $\varphi_i(x)$ у правій і в лівій частинах останньої нерівності, отримуємо $c_i = \frac{\lambda}{\lambda_i} c_i + \frac{f_i}{\lambda_i}$, або $c_i = \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda}$. Тоді формулу (66.3) можна записати у вигляді

$$y(x) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(x) + f(x), \quad (68.3)$$

де

$$f_i = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx.$$

Формула (68.3) називається **формулою Шмідта**. Проаналізуємо її. Якщо λ не дорівнює жодному власному значенню λ_i ядра $K(x, \xi)$, тоді за формулою (68.3) можна знайти розв'язок неоднорідного рівняння (65.3), якщо відомі всі власні значення λ_i і всі власні функції $\varphi_i(x)$ ядра $K(x, \xi)$.

Якщо λ не є власним значенням, тоді рівняння (65.3) має єдиний розв'язок, який задається формулою (68.3).

При $f(x) \equiv 0$ маємо власне однорідне рівняння, для якого $y(x) \equiv 0$, якщо λ не дорівнює жодному власному значенню λ_i , оскільки

$$f_i = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx = 0.$$

У цьому випадку при $\lambda \neq \lambda_i$ однорідне інтегральне рівняння Фредгольма має лише тривіальний розв'язок.

Звернемо увагу на те, що в другому випадку альтернативи для симетричного ядра $K(x, \xi) = K(\xi, x)$ однорідного інтегрального рівняння і

транспоноване до нього однорідне рівняння збігаються, тоді власна функція $\varphi_i(x)$ є розв'язком і транспонованого однорідного рівняння.

3.12. Розклад у ряд ітерованих ядер і резольвенти

Розглянемо формулу

$$K_m(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i^m}. \quad (60.3)$$

Раніше було доведено, що при $m \geq 2$ цей ряд збігається рівномірно й абсолютно, якщо одне із значень x або ξ буде фіксованим числом, але звідси не випливає, що цей ряд збігається абсолютно і рівномірно за сукупністю аргументів x і ξ .

Якщо $m = 2$, тоді при $x = \xi$ із формули (60.3) отримаємо ряд

$$K_2(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i^2}. \quad (61.3)$$

Відомо, що ряд (61.3) при $\xi = \text{const}$ буде збіжним числовим рядом, але не можна стверджувати, що цей ряд рівномірно збігається по ξ . Покажемо, що ряд (61.3) збігається по ξ рівномірно, для цього скористаємось наслідком із теореми Діні.

Усі члени ряду (61.3) невід'ємні, оскільки $\frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i^2} \geq 0$ і вони є неперервні функції, тому що $\varphi_i(\xi)$ – неперервна функція, $K(x, \xi)$ – неперервна функція. Тому на основі наслідку із теореми Діні ряд (61.3) збігається до $K_2(\xi, \xi)$ рівномірно. Це також можна сказати про ряд

$$K_2(x, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2}.$$

Звідси отримуємо важливу властивість для функції

$$K_2(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i^2} \quad (59.3)$$

Покажемо, що цей ряд збігається рівномірно по x і по ξ . Скористаємось нерівністю

$$|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2), \quad (69.3)$$

тоді залишок ряду (59.3) за модулем можна оцінити так

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i^2} \leq \sum_{i=m}^{\infty} \left| \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i} \cdot \frac{\varphi_i(\xi)}{\lambda_i} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=m}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=m}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i^2}.$$

Обидва ряди в правій частині збігаються рівномірно, тому для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $N(\varepsilon)$, що при $m > N$ і при всіх x виконується нерівність

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2} < \varepsilon,$$

а також при всіх ξ – така нерівність

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i^2} < \varepsilon.$$

Звідси випливає, що при $m > N$

$$\sum_{i=m}^{\infty} \left| \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всіх x і ξ , тобто ряд (59.3) збігається рівномірно по x і по ξ . Тоді за **теоремою 2** сума цього ряду $K_2(x, \xi)$ буде неперервною функцією.

Покажемо, що ряд (60.3) і при $m \geq 3$ завжди рівномірно збігається по x і по ξ . Тоді за основі теореми 2 сума цього ряду буде неперервною функцією $K_m(x, \xi)$.

Відомо, що всі власні значення можна записати так

$$0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$$

і $|\lambda_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Тому можна знайти таке число $N > 0$, що при $n > N$ власне значення $|\lambda_n| > 1$. При $n > N$ залишок ряду оцінити так

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^{\infty} \left| \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i^m} \right| &= \sum_{i=n}^{\infty} \left| \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i^{\frac{m}{2}}} \cdot \frac{\varphi_i(\xi)}{\lambda_i^{\frac{m}{2}}} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)\varphi_i^2(\xi)}{|\lambda_i|^{2m}} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)\varphi_i^2(\xi)}{|\lambda_i|^3} \leq \frac{1}{2|\lambda_n|} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i^2}. \end{aligned}$$

Тут ми застосовували нерівність (69.3) і те, що послідовність $\{|\lambda_n|\}$ неспадна.

Відзначимо, що $\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i} = \int_a^b K(x, \xi) \varphi_i(\xi) d\xi$ – коефіцієнт ряду Фур'є для

функції $K(x, \xi)$ і за нерівністю Бесселя

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2} \leq \int_a^b K^2(x, \xi) d\xi \leq M^2(b-a) < R,$$

де $R = \text{const}$ – додатне число. Аналогічно

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i^2} < R.$$

Маємо

$$\sum_{i=n}^{\infty} \left| \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i^m} \right| \leq \frac{R}{|\lambda_n|}$$

при $m \geq 3$ і $n > N$. Раніше було зазначено, що $|\lambda_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, тому $\frac{1}{|\lambda_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

При достатньо великому n залишок ряду буде меншим від будь-якого нескінченно малого ε для будь-яких x і ξ , а це доводить рівномірну збіжність ряду (60.3) при $m \geq 3$. Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

Теорема 3. Ряди

$$K_m(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(\xi)}{\lambda_k^m}$$

при $m \geq 2$ завжди збігається рівномірно по x і по ξ , причому сума цих рядів є неперервною функцією $K_m(x, \xi)$.

Записана формула дає можливість розкласти всі ітеровані ядра $K_m(x, \xi)$, $m \geq 2$, через власну функцію і власне значення вихідного ядра $K(x, \xi)$.

Розкладемо тепер резольвенту в ряд за функціями і власними значеннями ядра $K(x, \xi)$. Раніше було показано, що резольвента задається формулою

$$R(x, \xi, \lambda) = K(x, \xi) + \lambda K_2(x, \xi) + \lambda^2 K_3(x, \xi) + \dots \quad (70.3)$$

і що цей ряд абсолютно і рівномірно збігається, якщо $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, де

$|K(x, \xi)| \leq M$. Замінімо в (70.3) ітероване ядро за формулою

$$K_m(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i^m}, \quad m \geq 2,$$

отримаємо

$$R(x, \xi, \lambda) = K(x, \xi) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i^2} + \lambda^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i^3} + \dots$$

Ряди збігаються абсолютно, тому можемо переставити члени таких рядів.

Після перестановки отримуємо

$$R(x, \xi, \lambda) = K(x, \xi) + \varphi_1(x)\varphi_1(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\lambda_1^{k+1}} + \varphi_2(x)\varphi_2(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\lambda_2^{k+1}} + \dots,$$

де кожна сума є геометричною прогресією. Перший член геометричної прогресії

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\lambda_n^{k+1}}$$

дорівнює $a_1 = \frac{\lambda}{\lambda_n^2}$, а знаменник прогресії $q = \frac{\lambda}{\lambda_n}$. Якщо $|q| < 1$, тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\lambda_n^{k+1}} = \frac{a_1}{q-1} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda_n^2}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}} = \frac{\lambda}{\lambda_n^2 - \lambda\lambda_n} = \frac{\lambda}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)}$$

Тепер вираз для резольвенти прийме вигляд

$$R(x, \xi, \lambda) = K(x, \xi) + \varphi_1(x)\varphi_1(\xi) \frac{\lambda}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda)} + \varphi_2(x)\varphi_2(\xi) \frac{\lambda}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda)} + \varphi_3(x)\varphi_3(\xi) \frac{\lambda}{\lambda_3(\lambda_3 - \lambda)} + \dots,$$

й отримаємо формулу

$$R(x, \xi, \lambda) = K(x, \xi) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)}, \quad (71.3)$$

яка показує, що резольвенту можна розкласти в ряд за власними функціями і власними значеннями ряду $K(x, \xi)$. Звернемо увагу на те, що ряд (71.3) збігається абсолютно і рівномірно по x і по ξ при будь-якому параметрі $\lambda \neq \lambda_i$. Дійсно, прирівняємо ряд (71.3) з рядом

$$K_2(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i^2},$$

який абсолютно і рівномірно збігається. Відношення загальних членів цих рядів

$$\frac{\lambda_i^2}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}}$$

не залежить від x і ξ і $|\lambda_i| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$, тому $\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 1$. Отже, розглянуті ряди

збігаються з однаковою швидкістю.

Раніше було доведено, що розв'язок неоднорідного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду за допомогою резольвенти задається формулою

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi.$$

Підставимо замість резольвенти її значення із формули (71.3) і враховуючи, що ряд (71.3) збігається рівномірно, отримаємо

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b \left[K(x, \xi) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)} \right] f(\xi) d\xi = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi + \lambda^2 \int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)} f(\xi) d\xi = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi + \lambda^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)} \int_a^b \varphi_i(\xi) f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\int_a^b \varphi_i(\xi) f(\xi) d\xi = f_i,$$

а за теоремою Гільберта-Шмідта

$$\int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i} \varphi_i(x),$$

маємо

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i} \varphi_i(x) + \lambda^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)} \varphi_i(x) = \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \left[\frac{\lambda f_i}{\lambda_i} + \frac{\lambda^2 f_i}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)} \right] = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{(\lambda_i - \lambda)} \varphi_i(x), \end{aligned}$$

оскільки

$$\frac{\lambda f_i}{\lambda_i} + \frac{\lambda^2 f_i}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)} = \frac{\lambda \lambda_i f_i - \lambda^2 f_i + \lambda^2 f_i}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)} = \frac{\lambda f_i}{(\lambda_i - \lambda)},$$

і ми отримали формулу Шмідта (68.3).

3.13. Дефінітні і квазідефінітні ядра

Ядро $K(x, \xi)$, усі власні значення якого $\lambda_i > 0$ або $\lambda_i < 0$, називається *дефінітним ядром*. Якщо всі $\lambda_i > 0$, тоді ядро $K(x, \xi)$ називається *додатно дефінітним*, якщо всі $\lambda_i < 0$, тоді $K(x, \xi)$ називається *від'ємно дефінітним*.

Якщо для ядра $K(x, \xi)$ усі власні значення λ_i додатні, за винятком скінченного числа від'ємних власних значень, тоді ядро $K(x, \xi)$ називається *квазі-додатно-дефінітним*. Ядро, всі власні значення якого від'ємні, за винятком скінченного числа додатних власних значень, називається *квазі-від'ємно-дефінітним*.

Квазідефінітні ядра належать ядрам, що мають нескінчене число власних значень. Термін «квазі» в перекладі з італійського означає «майже». Доведемо лему.

Лема. Якщо ядро $K(x, \xi)$ є додатно дефінітним, тоді $K(x, x) \geq 0$.

Лема свідчить про те, що додатне дефінітне ядро $K(x, \xi)$ на діагоналі $x = \xi$ не може приймати від'ємних значень.

Доведення. Розглянемо всі неперервні функції $\psi(x)$ на $[a, b]$, норма яких $\|\psi(x)\| = 1$, і доведемо, що

$$I(\psi) = \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \psi(x) \psi(\xi) dx d\xi \geq 0, \quad (72.3)$$

якщо $K(x, x)$ – додатне дефінітне ядро.

Позначимо

$$\inf_{\|\psi\|=1} \{I(\psi)\} = \omega.$$

Раніше було доведено, що $\frac{1}{\lambda} = \omega$ буде власним значенням ядра $K(x, \xi)$, якщо $\omega \neq 0$. Можуть бути два випадки:

- 1) $\omega < 0$;
- 2) $\omega \geq 0$;

Покажемо, що перший випадок неможливий. Справді, якщо $\omega < 0$, тоді $\frac{1}{\omega} = \lambda < 0$ буде від'ємним власним значенням ядра $K(x, \xi)$, а це неможливо, оскільки ядро додатне дефінітне і тому всі власні значення додатні.

Якщо $\omega \geq 0$, тоді $\inf_{\|\psi\|=1} \{I(\psi)\} = \omega \geq 0$, і $I(\psi) \geq 0$, що і потрібно було довести.

Тепер вже легко довести лему. Припустимо протилежне, що в деякій точці (x_0, x_0) діагоналі квадрата $K(x_0, x_0) < 0$. Тоді в силу неперервності ядро буде від'ємним і в деякому малому околі

$$D_\varepsilon: \{x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon, x_0 - \varepsilon \leq \xi \leq x_0 + \varepsilon\}$$

точки (x_0, x_0) .

Визначимо неперервність функції $\psi(x)$ так: $\psi(x) > 0$ при $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$ і $\psi(x) = 0$ при інших значеннях x .

Тоді,

$$I(\psi) = \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \psi(x) \psi(\xi) dx d\xi = \iint_{D_\varepsilon} K(x, \xi) \psi(x) \psi(\xi) dx d\xi < 0,$$

отримано суперечність, оскільки раніше було доведено, що $I(\psi) \geq 0$. Це і доводить лему.

Раніше для інтегральних ядер $K_m(x, \xi)$, $m \geq 2$ була формула

$$K_m(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i^m}.$$

За теоремою 3 відомо, що цей ряд збігається абсолютно і рівномірно по x і по ξ до неперервної функції $K_m(x, \xi)$. У випадку $m = 1$ ряд при фіксованому ξ збігається в середньому до функції $K(x, \xi)$, згідно з **теоремою 1**. Звісно, збіжності в цьому випадку може і не бути. Проте існує достатньо широкі класи ядер $K(x, \xi)$, для яких виконується теорема 3 і при $m = 1$. Це дефінітні, або квазідефінітні ядра.

Теорема Мерсера. Якщо ядро $K(x, \xi)$ дефінітне, або квазідефінітне, тоді

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i},$$

причому цей ряд збігається до неперервних функцій $K(x, \xi)$ рівномірно по x і по ξ .

Спочатку доведемо теорему Мерсера для додатного дефінітного ядра, тобто всі власні значення $\lambda_i > 0$. Розглянемо зрізане ядро

$$K^{(m)}(x, \xi) = K(x, \xi) - \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i},$$

усі власні значення якого $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \dots$ додатні. Зрізане ядро – симетрична функція, оскільки $K(x, \xi) = K(\xi, x)$ – додатне дефінітне ядро. Тому за лемою при m $K^{(m)}(x, x) \geq 0$, тобто при будь-яких m і x

$$K(x, x) - \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i} \geq 0. \quad (73.3)$$

При $m = x$ аналогічно отримаємо

$$K(\xi, \xi) - \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i} \geq 0. \quad (74.3)$$

Оскільки нерівності (73.3), (74.3) мають місце при будь-якому m , а $K(x, \xi)$ – неперервна, і тому обмежена в квадраті функція, тому з цих нерівностей отримаємо, що ряди

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i} \leq K(x, x), \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i} \leq K(\xi, \xi), \lambda_i > 0$$

абсолютно збігаються при будь-яких x і ξ . Отже, існує таке число $M_0 > 0$, що для будь-якого x

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i} \leq M_0,$$

і для будь-якого ξ

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i} \leq M_0,$$

оскільки $K(x, x) \leq M_0$. Зафіксуємо в ряді

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i} \quad \xi = \text{const},$$

тоді отримаємо збіжний числовий ряд. За основою ознаки Коші можна стверджувати, що для будь-якого $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon^2}{2M_0}$ існує таке значення $N = N(\varepsilon_1, \xi)$, що при $n > N$

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i} < \varepsilon_1.$$

Ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i}$$

збігається при довільному x , тому при будь-якому x :

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i} < M_0.$$

Застосовуючи нерівність Коші-Буняковського, отримаємо

$$\left[\sum_{i=n}^{\infty} \left| \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i} \right| \right]^2 = \left[\sum_{i=n}^{\infty} \left| \frac{\varphi_i(x)}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot \frac{\varphi_i(\xi)}{\sqrt{\lambda_i}} \right| \right]^2 \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i}.$$

Звідси при $n > N(\varepsilon_1, \xi)$ маємо

$$\left[\sum_{i=n}^{\infty} \left| \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i} \right| \right]^2 < \varepsilon_1 M_0 = \frac{\varepsilon^2}{2M_0} M_0 = \frac{\varepsilon^2}{2} < \varepsilon^2,$$

тобто

$$\sum_{i=n}^{\infty} \left| \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i} \right| < \varepsilon$$

при $n > N(\varepsilon_1, \xi)$ і при будь-якому x .

Доведено, що ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i} \quad (75.3)$$

при будь-якому $\xi = \text{const}$ збігається абсолютно і рівномірно відносно x . Аналогічно в силу симетрії можна стверджувати, що ряд (75.3) при будь-якому $x = \text{const}$ збігається абсолютно і рівномірно відносно ξ .

Нехай в ряді (75.3) $\xi = \text{const}$. Тоді цей ряд збігається рівномірно по x . Членами ряду (75.3) є неперервні функції, тоді і сума цього ряду при $\xi = \text{const}$ є неперервною функцією відносно x , яку позначимо через $K^*(x, \xi)$, тобто

$$K^*(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i}.$$

Покажемо, що $K^*(x, \xi) \equiv K(x, \xi)$. Згідно з **теоремою 1** ряд (75.3) збігається в середньому до функції $K(x, \xi)$, тобто

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \left[K(x, \xi) - \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i} \right]^2 dx = 0.$$

Перейдемо до границі під знаком інтеграла, це можливо, оскільки при $\xi = \text{const}$ ряд збігається рівномірно по x , і тому

$$\int_a^b [K(x, \xi) - K^*(x, \xi)]^2 dx = 0.$$

Внаслідок неперервності підінтегральної функції

$$K^*(x, \xi) \equiv K(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i}. \quad (76.3)$$

Залишається довести, що ряд (76.3) збігається абсолютно і рівномірно за двома змінними x і ξ до $K(x, \xi)$.

Із формули (76.3) при $x = \xi$ отримуємо

$$K(\xi, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i}.$$

Члени цього ряду додатні, оскільки всі $\lambda_i > 0$, і неперервні функції $K(\xi, \xi)$. На основі наслідків із теореми Діні зазначений ряд збігається рівномірно по ξ до функції $K(\xi, \xi)$. Це ж можна сказати про ряд

$$K(x, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i},$$

який рівномірно збігається по x до неперервної функції $K(x, x)$.

Застосуємо нерівність (69.3) до залишку виду

$$\sum_{i=n}^{\infty} \left| \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i} \right| = \sum_{i=n}^{\infty} \left| \frac{\varphi_i(x)}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot \frac{\varphi_i(\xi)}{\sqrt{\lambda_i}} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i}.$$

У правій частині ряди збігаються рівномірно, перший – по x , а другий – по ξ , тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке значення $N = N(\varepsilon)$, що при $n > N$

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i} < \varepsilon$$

для будь-якого x , а

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(\xi)}{\lambda_i} < \varepsilon$$

для будь-якого ξ . Отже, при $n > N(\varepsilon)$

$$\sum_{i=n}^{\infty} \left| \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i} \right| < \varepsilon$$

для будь-яких x і ξ , а це означає абсолютну та рівномірну збіжність за сукупності аргументів x і ξ . Сума ряду (76.3) буде неперервною функцією $K(x, \xi)$. Отже, **теорема Мерсера** для додатно-дефінітних ядер повністю доведена.

Якщо ядро квазі-додатно-дефінітне, тоді присутність скінченного числа від'ємних власних значень не вплине на збіжність ряду (76.3). Це доводить **теорему Мерсера** і для квазі-додатно-дефінітних ядер.

Для квазі-від'ємно-дефінітних ядер теорема Мерсера доводиться аналогічно. Доведену лему у випадку від'ємних дефінітних ядер слід замінити лемою: якщо $K(x, \xi)$ – від'ємно дефінітне ядро, тоді $K(x, x) \leq 0$.

3.14. Приклади

Користуючись теоремою Шмідта, розв'яжемо наступні інтегральні рівняння:

$$1. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 \varphi(\xi) d\xi + x. \text{ Відповідь } \varphi(x) = \frac{2(1-\lambda)x + \lambda}{2(1-\lambda)}; \lambda \neq 1.$$

$$2. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 x\xi\varphi(\xi) d\xi + x. \text{ Відповідь } \varphi(x) = \frac{3x}{3-\lambda}; \lambda \neq 3.$$

$$3. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x + \xi)\varphi(\xi) d\xi + x.$$

Розв'язання. Потрібно знайти всі власні значення і власні функції ядра $K(x, \xi) = x + \xi$, а після цього власні функції ортонормувати. Раніше це вже було зроблено:

$$\lambda_1 = -6 + 4\sqrt{3}; \lambda_2 = -6 - 4\sqrt{3}; \varphi_1(x) = \frac{\sqrt{3}x + 1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}; \varphi_2(x) = \frac{\sqrt{3}x - 1}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}.$$

За формулою Шмідта маємо

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^2 \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(x),$$

де $f_i = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx$. Звідси

$$f_1 = \int_0^1 x \varphi_1(x) dx = \int_0^1 x \frac{\sqrt{3}x + 1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} dx = \frac{2\sqrt{3} + 3}{6\sqrt{2 + \sqrt{3}}},$$

$$f_2 = \int_0^1 x \varphi_2(x) dx = \int_0^1 x \frac{\sqrt{3}x - 1}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} dx = \frac{2\sqrt{3} - 3}{6\sqrt{2 - \sqrt{3}}}.$$

$$\text{Тоді } \varphi(x) = x + \lambda \left[\frac{\frac{2\sqrt{3}+3}{6\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{3}x+1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{-6+4\sqrt{3}-\lambda} + \frac{\frac{2\sqrt{3}-3}{6\sqrt{2-\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{3}x+1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{-6-4\sqrt{3}-\lambda} \right];$$

після неважких перетворень отримуємо

$$\varphi(x) = x - \lambda \frac{36x + 6\lambda x + 24}{6(\lambda^2 + 12\lambda - 12)} = \frac{(6\lambda - 12)x - 4\lambda}{\lambda^2 + 12\lambda - 12}; \lambda \neq -6 \pm 4\sqrt{3}.$$

4. По системі лінійно незалежних функцій $\varphi_1(x) = x + \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\varphi_2(x) = x - \frac{\sqrt{3}}{3}$ побудувати методом Шмідта на $[0,1]$ систему ортонормованих функцій.

$$\text{Відповідь: } \varphi_1(x) = \frac{\sqrt{3}x+1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}; \quad \varphi_2(x) = \frac{\sqrt{3}x-1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

Контрольні запитання

1. Сформулюйте властивості власних значень та власних функцій.
2. Сформулюйте теорему Гільберта-Шмідта.
3. Які ядра називаються дефінітними та квазідефінітними?

Завдання для самостійної роботи

Знайти усі власні значення і власні функції для наступних інтегральних рівнянь:

$$1. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 \varphi(\xi) d\xi. \quad \text{Відповідь: } \lambda = 1, \varphi(x) = 1.$$

$$2. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 x\xi\varphi(\xi) d\xi. \quad \text{Відповідь: } \lambda = 3, \varphi(x) = x.$$

$$3. \varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 + \xi^2)\varphi(\xi) d\xi. \quad \text{Відповідь: власним значенням є}$$

$$\text{корені рівняння } 4\lambda^2 + 30\lambda - 45 = 0; \quad \varphi_1(x) = x + \frac{\sqrt{5}}{5}, \varphi_2(x) = x - \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Література

1. Ловитт У. Линейные интегральные уравнения. – М. : Гостехиздат, 1957. – 269 с.
2. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – М. : Физматгиз, 1959. – 234 с.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. – М. : Наука, 1965. – 136 с.
4. Ковач Ю. І., Галь М. М. Інтегральні рівняння. – К. : Укрндінті, 1983. – 166 с.
5. Краснов Л. М. Інтегральні рівняння: Введення в теорію. – М. : Наука, 1975. – 250 с.
6. Владимиров В. С., Жарінов В. В. Рівняння математичної фізики. – М. : Фізматліт, 2004. – 375 с.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. – М. : Физматгиз, 1958. – 336 с.
8. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. – М. : ИЛ, 1960. – 300 с.

Навчальне видання

Юрій Галь, Ольга Золота

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчально-методичний посібник

**Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного
педагогічного університету імені Івана Франка**

Головний редактор

Ірина Невмержицька

Редактор

Марія Усик

Технічний редактор

Світлана Бецко

Здано до набору 09.10.2017 р. Підписано до друку 16.10.2017 р. Формат 60х84/16. Папір офсетний. Гарнітура. Times. Наклад 300 прим. Ум. друк. арк. 9,12. Зам. 239.

Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5140 від 01. 07. 2016 р.) 82100 Дрогобич, вул. І. Франка, 24. к. 42 тел. 2 – 23 – 78.