

22.10р
Г 17



УНІВЕРСИТЕТСЬКА БІБЛІОТЕКА

Юрій Галь, Ольга Золота

ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА (ГЕОМЕТРІЯ)

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

Дрогобич
2015

Юрій Галь, Ольга Золота

ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА (ГЕОМЕТРІЯ)

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

Бібліотека ДДПУ
ім. І. Франка



b2777-002

Дрогобич
2015

Передмова

Збірник задач з елементарної математики (геометрії) укладений згідно з чинною програмою та складається з трьох розділів. У ньому підібрано задачі на обчислення, доведення, побудову, задачі на пряму й площину в просторі, задачі на многогранники, перерізи многогранників та задачі на комбінації геометричних тіл. При цьому автори враховували те, що студент вже знає шкільний курс геометрії, володіє основними теоретико-множинними поняттями, ознайомлений з методом координат і основами векторної алгебри. Крім цього, у підручнику містяться задачі підвищеної складності, розв'язання яких допоможе студентам оволодіти культурою математичних міркувань, сприятиме навчанню студента самостійно користуватися відомими йому методами.

Рекомендований студентам напряму підготовки «Математика*» педагогічних ВНЗ. Буде також корисним для учнів 11-их класів, абітурієнтів, учителів середніх шкіл із поглибленим вивченням математики, ліцеїв, гімназій.

Розділ І. Планіметрія

§ 1. Трикутники

- 1.1. У прямокутному трикутнику катети відносяться як 4:3. Знайти косинус меншого кута трикутника.
- 1.2. У прямокутному трикутнику катети відносяться як 12: 5, а довжина гіпотенузи дорівнює 26. Знайти радіус кола, вписаного у трикутник.
- 1.3. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 3 і 10. Обчислити довжину меншого катета трикутника.
- 1.4. Медіана, опущена на гіпотенузу прямокутного трикутника дорівнює 5, а один з катетів – 6. Знайти радіус вписаного кола.
- 1.5. У прямокутному трикутнику довжина гіпотенузи дорівнює 15, а катета – 6. Обчислити проекцію другого катета на гіпотенузу.
- 1.6. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 40, а катети відносяться як 1:3. Знайти висоту, опущену на гіпотенузу.
- 1.7. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10, а проекція меншого катета на гіпотенузу дорівнює 3,6. Обчислити радіус кола, вписаного у цей трикутник.
- 1.8. Катети прямокутного трикутника дорівнюють b і c . Знайти довжину бісектриси прямого кута.
- 1.9. Визначити відношення сторін прямокутного трикутника, якщо радіус описаного навколо нього кола відноситься до радіуса вписаного у нього кола як 5:2.

- 1.10. Радіус кола, описаного навколо рівностороннього трикутника дорівнює $7\sqrt{3}$. Обчислити довжину сторони трикутника.
- 1.11. Радіус кола, вписаного у рівносторонній трикутник, дорівнює $5\sqrt{3}$. Обчислити довжину сторони трикутника.
- 1.12. У правильному трикутнику ABC зі стороною a проведена середня лінія MN паралельно AC . Через точку A і середину MN проведена пряма до перетину з BC у точці D . Знайти довжину AD .
- 1.13. У правильному трикутнику ABC сторона дорівнює a . На стороні BC лежить точка D , а на стороні AB – точка E так, що $3BD=a$, $AE=DE$. Знайти довжину CE .
- 1.14. Знайти катети прямокутного трикутника, у якого гіпотенуза дорівнює a , а один із гострих кутів дорівнює 15° .
- 1.15. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки довжиною 5 і 12. Обчислити довжину більшого катета трикутника.
- 1.16. У прямокутному трикутнику довжини катетів дорівнюють 15 і 20. Обчислити радіус кола, вписаного у трикутник.
- 1.17. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 60, а висота, опущена на гіпотенузу, – 12. Знайти гіпотенузу прямокутного трикутника.
- 1.18. Сторона правильного трикутника дорівнює $4\sqrt{3}$. Обчислити суму відстаней від будь-якої точки на стороні трикутника до двох інших його сторін.
- 1.19. Сторони трикутника дорівнюють 5, 7 і 10. Обчислити периметр трикутника, вершинами якого є середини сторін даного трикутника.

- 1.20. Довжина бічної сторони рівнобедреного трикутника дорівнює 5, а основи – 6. Знайти радіус вписаного кола.
- 1.21. Знайти радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з основою a і бічною стороною b .
- 1.22. Довжини сторін трикутника дорівнюють 2, 4 і 5. Знайти косинус кута трикутника, що лежить навпроти найменшої сторони.
- 1.23. У трикутнику ABC $BC = 2\sqrt{3}$, $\angle BAC = 60^\circ$. Обчислити радіус кола, описаного навколо трикутника.
- 1.24. У трикутнику ABC $AB=5$, $BC=7$ і $AC=8$. У даний трикутник вписано коло і K – точка дотику кола і AC . Знайти CK .
- 1.25. Бісектриси кутів A і C трикутника ABC перетинаються у точці O . Знайти кут B (у градусах), якщо $\angle AOC = 130^\circ$.
- 1.26. З вершини C трикутника ABC до основи $AB=60$ проведені медіани $CM=13$ і висота $CK=12$. Знайти довжину більшої сторони.
- 1.27. Всередині правильного трикутника взято точку, яка віддалена від його сторін на 12, 17 і 10. Обчислити висоту трикутника.
- 1.28. Довести, що у рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.
- 1.29. Довести, що в прямокутному трикутнику з кутом 30° катет, протилежний цьому куту, дорівнює половині гіпотенузи.
- 1.30. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано квадрат таким чином, що дві його вершини лежать на гіпотенузі а дві інші – на катетах. Сторона квадрата дорівнює 5. Знайти гіпотенузу трикутника.
- 1.31. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 6, а висота, опущена на основу, – 4. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника.

- 1.32. Довжини сторін трикутника дорівнюють 2, 3 і 4. Знайти косинус кута трикутника, що лежить навпроти найбільшої сторони.
- 1.33. У трикутнику ABC $AC = 2\sqrt{3}$, $BC = 2\sqrt{2}$, $\angle ABC = 60^\circ$. Обчислити (у градусах) значення кута ACB .
- 1.34. У трикутнику ABC $AC = 2\sqrt{3}$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle BAC = 45^\circ$. Обчислити $\sqrt{2}BC$.
- 1.35. Коло радіуса $3\sqrt{2}$ описане навколо трикутника ABC з $\angle BAC = 45^\circ$. Обчислити довжину сторони BC .
- 1.36. У рівнобедреному трикутнику основа і бічна сторона відповідно дорівнюють 5 і 20. Знайти бісектрису кута при основі трикутника.
- 1.37. У трикутнику ABC $AB=3$, $BC=2$ і $AC=4$. Обчислити $3\sqrt{46}AO$, де O – точка перетину медіан трикутника.
- 1.38. Довжини двох сторін трикутника дорівнюють 6 і 8. Обчислити довжину третьої сторони трикутника, якщо довжина медіани, опущеної на неї, дорівнює $\sqrt{46}$.
- 1.39. З вершин B і C трикутника ABC проведені відрізки BE і CD (точки E і D лежать на сторонах AC і AB відповідно), які перетинаються у точці O . відомо, що $\angle ACD = 20^\circ$, $\angle ABE = 30^\circ$. Знайти кут A у (градусах), якщо $\angle EOD = 70^\circ$.
- 1.40. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 60, а висота, опущена на гіпотенузу, – 12. Обчислити площу прямокутного трикутника.
- 1.41. У трикутнику ABC $AC=4$, $BC=3$ і кут $ACB=90^\circ$. Знайти площу трикутника BOA , де O – точка перетину медіан трикутника ABC .
- 1.42. Знайти площу рівнобедреного трикутника, якщо висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 12, а інша висота – 9.

- 1.43. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 36, а гіпотенуза – 15. Обчислити площу прямокутного трикутника.
- 1.44. У трикутнику ABC $AB=24$, $AC=BC=13$. Знайти площу трикутника BOA , де O – точка перетину медіан трикутника ABC .
- 1.45. У трикутнику ABC $AC=6$, $BC=7$ і кут $ACB=90^\circ$. Знайти площу трикутника BOC , де O – точка перетину медіан трикутника ABC .

§ 2. Чотирикутники

- 2.1. Одна з діагоналей паралелограма, що дорівнює $3\sqrt{6}$, утворює з основою паралелограма кут 60° . Обчислити довжину другої діагоналі, якщо вона утворює з тією ж основою кут 45° .
- 2.2. У паралелограмі $ABCD$ висота BE ділить сторону AD у точці E навпіл. Обчислити AB , якщо периметр паралелограма дорівнює 7, а периметр трикутника $ABD=5$.
- 2.3. Периметр паралелограма дорівнює 30. Знайти його більшу сторону, якщо висоти паралелограма відносяться як 1:2.
- 2.4. У прямокутнику з периметром 28 точка перетину діагоналей знаходиться від меншої сторони на 3 далі, ніж від більшої сторони. Обчислити меншу сторону прямокутника.
- 2.5. Сторона ромба дорівнює 4, радіус кола, вписаного у цей ромб, дорівнює 1. Знайти величину гострого кута ромба (у градусах).
- 2.6. Дві вершини квадрата належать колу радіуса 5, а дві інші – дотичні до цього кола. Обчисліть довжину сторони квадрата.

- 2.7. Висоти, проведені із вершин тупих кутів ромба при перетині діляться у відношенні 1:2. Визначити гострий кут ромба (у градусах).
- 2.8. Перпендикуляр, опущений із вершини паралелограма на його діагональ ділить цю діагональ на відрізки, що дорівнюють 6 і 15. Різниця між довжинами сторін паралелограма дорівнює 7. Знайти сторони паралелограма і його діагоналі.
- 2.9. Діагоналі паралелограма дорівнюють 17 і 19, а сторони відносяться як 2:3. Знайти сторони паралелограма.
- 2.10. Основа трикутника дорівнює 22, а бічні сторони 13 і 19. Знайти медіану, проведену до основи.
- 2.11. Перпендикуляр, проведений з вершини тупого кута ромба, ділить його сторону на відрізки, різниця між якими 11. Обчислити периметр ромба, якщо відстань від точки перетину його діагоналей до сторони дорівнює 12.
- 2.12. Одна з діагоналей паралелограма, що дорівнює $5\sqrt{6}$, утворює з основою паралелограма кут 45° . Обчислити довжину другої діагоналі, якщо вона утворює з тією ж основою кут 60° .
- 2.13. Сума суміжних сторін паралелограма дорівнює 20. Знайти меншу сторону паралелограма, якщо його висоти дорівнюють 1 і 3.
- 2.14. Задано квадрат, сторона якого дорівнює 6. Діагональ його дорівнює стороні іншого квадрата. Знайти діагональ іншого квадрата.
- 2.15. Ромб має гострий кут 45° . Радіус кола, вписаного у цей ромб, дорівнює $\sqrt{2}$. Знайти сторону ромба.

- 2.16. Дві вершини квадрата належать колу, а дві інші – дотичній до цього кола. Обчислити радіус кола, якщо довжина сторони квадрата дорівнює 8.
- 2.17. Коло радіуса R дотикається до сторін AB і AD квадрата $ABCD$, перетинає сторону BC у точці M і проходить через точку C . Знайти довжину відрізка BM .
- 2.18. Одна з діагоналей паралелограма дорівнює b , а друга утворює із суміжними сторонами паралелограма кути α і β . Знайти сторони паралелограма.
- 2.19. Довести, що середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма.
- 2.20. Довести, що сума квадратів діагоналей чотирикутника дорівнює подвоєній сумі квадратів відрізків, що сполучають середини протилежних сторін.
- 2.21. Довести, що якщо у чотирикутник вписане коло, то сума протилежних сторін рівна.
- 2.22. У паралелограмі проведені бісектриси кутів між діагоналями. Довести, що точки перетину бісектрис із сторонами паралелограма є вершинами ромба.
- 2.23. Навколо кола описана рівнобічна трапеція, довжина середньої лінії якої дорівнює 3,7. Знайти бічну сторону трапеції.
- 2.24. У рівнобічну трапецію вписане коло. Знайти висоту трапеції, якщо її основи дорівнюють 2 і 8.
- 2.25. У рівнобічній трапеції діагональ ділить її гострий кут навпіл. Обчислити середню лінію трапеції, якщо її периметр дорівнює 27, а більша основа – 9.

- 2.26. У трапеції $ABCD$ $AD=5, BC=4, AD \parallel BC$. Точка E ділить сторону AB у відношенні $AE:EB=3:1$. Через точку E паралельно до основ проведена пряма, що перетинає CD у точці F . Обчислити довжину відрізка EF .
- 2.27. Два кола з радіусами 3 і 2 дотикаються зовні. Обчислити відстань від точки дотику кіл до їх спільної дотичної.
- 2.28. Пряма, паралельна до основ трапеції, проходить через точку перетину її діагоналей. Обчислити довжину відрізка прямої між сторонами трапеції, якщо довжини основ трапеції дорівнюють 3 і 1.
- 2.29. Пряма, паралельна до основ трапеції, проходить через точку перетину її діагоналей. Обчислити довжину відрізка прямої між сторонами трапеції, якщо довжина основ трапеції дорівнює 13 і 7.
- 2.30. У рівнобічній трапеції діагональ ділить її тупий кут навпіл. Обчислити середню лінію трапеції, якщо її периметр дорівнює 54, а менша основа – 9.
- 2.31. Навколо кола з діаметром 15 описана рівнобічна трапеція, бічна сторона якої дорівнює 17. Знайти більшу основу трапеції.
- 2.32. Відстань від центра кола до хорди дорівнює $2,5\sqrt{3}$ і є у два рази меншою за радіус. Обчислити довжину хорди.
- 2.33. У трапеції $ABCD$ $AD=5, BC=1, AD \parallel BC$. Точка E ділить сторону AB у відношенні $AE:EB=1:4$. Через точку E паралельно до основ проведена пряма, що перетинає CD у точці F . Обчислити довжину відрізка EF .

- 2.34. У трапеції $ABCD$ $AD=6, AD \parallel BC$. Точка E ділить сторону AB у відношенні $AE:EB=4:1$. Через точку E паралельно до основ проведена пряма, що перетинає CD у точці F . Обчислити основу BC , якщо $EF=2,8$.
- 2.35. Два кола дотикаються зовні. Відстань від точки дотику кіл до їхньої спільної дотичної дорівнює $3,2$. Обчислити радіус більшого кола, якщо радіус меншого – 2 .
- 2.36. Основи трапеції дорівнюють 10 і 24 , а бічні сторони 15 і 13 . Знайти площу трапеції.
- 2.37. Знайти квадрат площі паралелограма, якщо його більша діагональ дорівнює $2\sqrt{7}$, а висоти дорівнюють $\sqrt{3}$ і $2\sqrt{3}$.
- 2.38. Знайти площу паралелограма з точністю до $0,01$, якщо його більша діагональ дорівнює 5 , а висоти 2 і 3 .
- 2.39. Скільки потрібно листів бляхи завширшки 3 м, щоб обгородити земельну ділянку прямокутної форми під будівництво офісного центру, площа якого дорівнює 480 м^2 , а одна зі сторін – 16 м?
- 2.40. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 36 , а гіпотенуза – 15 . Обчислити площу прямокутного трикутника.
- 2.41. У трикутнику ABC $AB=24$, $AC=BC=13$. Знайти площу трикутника BOA , де O – точка перетину медіан трикутника ABC .
- 2.42. У трикутнику ABC $AC=6$, $BC=7$ і кут $ACB=90^\circ$. Знайти площу трикутника BOC , де O – точка перетину медіан трикутника ABC .
- 2.43. Перпендикуляр, проведений з вершини прямого кута на діагональ, дорівнює 12 і поділяє діагональ на відрізки, різниця яких дорівнює 7 . Знайти площу прямокутника.

- 2.44. У рівнобічній трапеції діагональ ділить її тупий кут навпіл. Знайти площу трапеції, якщо її периметр дорівнює 42, а менша основа – 3.
- 2.45. Навколо трапеції описане коло, діаметром якого є більша основа. Обчислити площу трапеції, якщо її діагональ і висота відповідно дорівнюють 5 і 3.
- 2.46. Навколо трапеції описане коло, діаметром якого є більша основа. Обчислити довжину діагоналі трапеції, якщо її площа і висота відповідно дорівнюють 48 і 6.
- 2.47. У рівнобічну трапецію, верхня основа якої удвічі менша від її висоти, вписане коло, радіус якого дорівнює 3. Знайти площу трапеції.
- 2.48. Діагоналі трапеції дорівнюють 12 і 16, а основи – 5 і 15. Знайти площу трапеції.
- 2.49. Середня лінія трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 68. Обчислити радіус цього кола, якщо нижня основа трапеції більша за верхню на 64.
- 2.50. Площі трикутників, утворених основами трапеції та відрізками діагоналей дорівнюють S_1 і S_2 . Визначити площу трапеції й обчислити її значення, якщо $S_1 = 4, S_2 = 1$.

§ 3. Многокутники

- 3.1. Сума внутрішніх кутів многокутника удвічі більша від суми зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині.
- 3.2. Кожний із трьох внутрішніх кутів многокутника дорівнює 80° , а кожний з решти кутів – 150° . Скільки найменше сторін може мати многокутник?
- 3.3. Три кути многокутника прямі, а решта дорівнюють по 150° . Скільки найменше вершин може мати многокутник?
- 3.4. На скільки градусів збільшиться сума внутрішніх кутів многокутника, якщо число його сторін збільшити на 5?
- 3.5. Скільки сторін має опуклий многокутник, якщо сума його усіх внутрішніх кутів і усіх зовнішніх дорівнює 2520° ?
- 3.6. Скільки вершин має правильний многокутник, у якого внутрішній кут у 8 разів більший від зовнішнього?
- 3.7. Знайти радіус кола, описаного навколо правильного восьмикутника, сторона якого дорівнює a .
- 3.8. Менша діагональ правильного шестикутника дорівнює $\sqrt{3}$. Обчислити його більшу діагональ.
- 3.9. Під яким кутом (у градусах) перетинаються дві діагоналі правильного п'ятикутника, проведені з різних вершин?
- 3.10. За стороною a правильного дванадцятикутника визначити його апофему (перпендикуляр, опущений з центра до сторони), якщо $a = 2 - \sqrt{3}$.

- 3.11. В опуклий шестикутник з рівними сторонами і кутами вписано коло і точки дотику через одну послідовно сполучено відрізками. Доведіть, що утворений трикутник – рівносторонній.
- 3.12. В опуклий шестикутник, усі сторони якого дорівнюють a і кути рівні, вписано коло, а в це коло вписано квадрат. Знайти довжину сторони квадрата.

§ 4. Коло, круг та його частини

- 4.1. Точки A, B, C лежать на колі. Знайти кут ABC , якщо хорда AC дорівнює радіусу кола? (Розглянути два випадки)
- 4.2. У колі з центром O проведено хорду MK і дотичну в точці K . Знайти кут між хордою і дотичною, якщо кут MOK дорівнює 80° .
- 4.3. Хорда кола NK і KZ утворює кут 30° . Знайти хорду NZ , якщо діаметр кола дорівнює 38.
- 4.4. Площа кругового сектора дорівнює $5/9$ площі круга. Знайти площу цього сектора, якщо довжина дуги, на яку він спирається, дорівнює 20π .
- 4.5. Хорди AB і CD перетинаються у точці S . Довести, що $AS \cdot SB = CS \cdot SD$.
- 4.6. Знайти довжину кола l , вписаного в ромб, діагоналі якого дорівнюють 15 і 20.
- 4.7. У рівнобічну трапецію вписано коло. Основи трапеції дорівнюють 9 і 25, а бічна сторона – 17. Знайти довжину вписаного кола.

- 62777-002
- 4.8. Периметр правильного трикутника дорівнює 36. На стороні трикутника як на діаметрі, побудовано коло. Знайти довжину l дуги, розміщену у внутрішній області трикутника.
- 4.9. Знайти площу круга, вписаного в правильний шестикутник зі стороною 6.
- 4.10. Задано дві круга зі спільним центром. Радіус меншого круга дорівнює $\frac{1}{2}$ радіуса більшого. Знайти відношення площі утвореного кільця до площі круга більшого радіуса.
- 4.11. У прямокутну трапецію з основами 1 і 3 вписано коло. Знайти радіус вписаного кола.
- 4.12. У рівнобічну трапецію вписано коло. Середня лінія трапеції дорівнює 9, гострий кут дорівнює 30° . Знайти основи трапеції.
- 4.13. Три кола, радіуси яких дорівнюють 2, 3 і 10, попарно дотикаються ззовні. Знайти радіус кола, яке вписане в трикутник, утворений центрами цих кіл.
- 4.14. Сторона правильного трикутника дорівнює a . З його центра радіусом, утричі меншим від сторони, проведено коло. Знайти площу частини трикутника, розміщеної поза кругом.
- 4.15. Знайти кут між двома хордами, які перетинаються всередині кола, якщо точка їх перетину відділена від центра кола на $\frac{3}{5}$ його радіуса і ділить одну хорду навпіл, а другу – у відношенні 4:9.

§ 5. Задачі на побудову

- 5.1. Побудувати трикутник за заданими сторонами a, b, c .
- 5.2. Відкласти від заданої півпрямой у заданій півплощині кут, що дорівнює заданому куту.
- 5.3. Побудувати бісектрису заданого кута.
- 5.4. Задано три точки A, B, C . Побудувати точку X , яка однаково віддалена від A і B й лежить на заданій відстані від точки C .
- 5.5. Побудувати відрізок, що дорівнює $\frac{1}{5}$ заданого відрізка.
- 5.6. Побудувати трикутник ABC за двома сторонами і кутом між ними: $AB=5$ см, $AC=6$ см, кут $A=40^\circ$.
- 5.7. Побудувати рівнобедрений трикутник за бічною стороною і кутом при основі.
- 5.8. Задано чотири точки A, B, C, D . Знайти точку X , яка однаково віддалена від точок A, B і однаково віддалена від точок C і D .
- 5.9. Побудувати рівнобедрений трикутник за основою і медіаною, проведеною до бічної сторони.
- 5.10. Побудувати трикутник за двома сторонами і півсумою кутів при третій основі.
- 5.11. Побудувати чотирикутник за чотирма сторонами і кутом між двома послідовно заданими сторонами.
- 5.12. Побудувати трикутник за двома сторонами і радіусом описаного кола.
- 5.13. Побудувати коло заданого радіуса, що проходить через дві задані точки.

- 5.14. Побудувати рівносторонній трикутник ABC , якщо задано його сторону a і відомо, що дві сторони AB, AC і бісектриса AD (або їх продовження) проходять відповідно через три задані точки M, N, P , які лежать на одній прямій.
- 5.15. Побудувати трикутник ABC за стороною b , радіусом описаного кола R та медіаною m_c .

§ 6. Геометричні перетворення

- 6.1. Вершина A квадрата $ABCD$ є центром повороту проти годинникової стрілки на кут 90° . Знайти довжину відрізка CC_1 , де точка C_1 – образ точки C при заданому повороті, якщо $AB=5$.
- 6.2. Задано точку $B(0;\sqrt{2})$. Знайти координати образу точки при: а) повороті на 90° за годинниковою стрілкою; б) повороті на 90° проти годинникової стрілки; в) повороті на 45° за годинниковою стрілкою; г) повороті на 135° проти годинникової стрілки.
- 6.3. Побудувати трикутник, симетричний до трикутника AKD відносно точки N , де $A(-2;2)$, $K(3;6)$, $D(2;-3)$, $N(1;2)$.
- 6.4. У трикутнику ABC вершини мають координати $A(1;1)$, $B(6;1)$, $C(7;3)$. Побудувати фігуру, у яку перейде цей трикутник унаслідок паралельного перенесення, заданого формулами $x' = x + 4$, $y' = y - 3$.
- 6.5. Знайти геометричне місце точок, які ділять у відношенні $m:n$ усі хорди, що мають спільний кінець у заданій точці кола.

- 6.6. Задано параболу $y = x^2 - 4x + 8$. Знайти рівняння образу параболу при паралельному перенесенні на вектор $(2; -1)$.
- 6.7. Задано параболу $y = x^2 - 4x + 8$. Знайти рівняння образу параболу при паралельному перенесенні на вектор $(-4; 1)$.
- 6.8. Задано графік $y = \sqrt{x}$. Установити рівняння образів графіка при:
 а) симетрії відносно прямої $x = 4$; б) симетрії відносно прямої $y = 2$;
 в) симетрії відносно прямої $y = -1$; г) симетрії відносно прямої $x = -1$.
- 6.9. Задано коло $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 4$. Знайти рівняння образів кола при: а) симетрії відносно осі x ; б) симетрії відносно осі y ; в) симетрії відносно прямої $y = x$; г) симетрії відносно початку координат.
- 6.10. Задано точку $A(4;6)$. Знайти координати образу точки A при гомотетії з центром $O(3;3)$ і $k = 2$.
- 6.11. Точка $M(6;-3)$ – образ точки $N(2;1)$ при гомотетії з коефіцієнтом $k = -\frac{1}{3}$. Знайти координати центра гомотетії.
- 6.12. Задано коло $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 9$ і гомотетія з центром $O(0;1)$ і $k = -\frac{1}{3}$. Знайти рівняння образу кола.
- 6.13. Знайти рівняння образу кола $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ при гомотетії з центром у початку координат і $k = 3$. Знайти рівняння образу кола.

- 6.14. Задано коло $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 9$ і гомотетія з центром $O(0;-2)$ і $k = \frac{1}{3}$. Знайти рівняння образу кола.
- 6.15. З точки A , що лежить поза колом, проведено дві січні, які перетинають коло у точках B_1 і C_1 , B_2 і C_2 (B_1 лежить між A і C_1 , а B_2 – між A і C_2). 1) Довести подібність трикутників AB_1C_1 і AB_2C_2 ; 2) Довести, що $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$.
- 6.16. Сторони двох подібних правильних багатокутників відносяться як 6:5, а різниця їх площ дорівнює 77. Знайти площу меншого з цих багатокутників.
- 6.17. Пряма, паралельна до сторони AB трикутника ABC , перетинає його сторону AC у точці E , а сторону BC – у точці F . Знайти площу трикутника CEF , якщо $AE:EC=3:2$, а площа трикутника ABC дорівнює 75.
- 6.18. Середня лінія трикутника відтинає від нього трапецію, площа якої дорівнює 21. Знайти площу заданого трикутника.
- 6.19. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються у точці E . Знайти площу трапеції, якщо $BC:AD=3:5$, $S_{AED}=175$.
- 6.20. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 20 і 28, а бічна сторона – 5. Знайти площу трапеції, подібної до заданої, висота якої дорівнює 12.

§ 7. Координати

- 7.1. Знайти периметр і площу трикутника з вершинами: $A(-3;1)$, $B(1;3)$, $C(1;1)$.
- 7.2. Довести, що трикутник з вершинами $A(2;0;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;4;0)$ – прямокутний. Знайти координати центра кола, описаного навколо трикутника ABC .
- 7.3. Точки $A(3;-6;2)$ і A_1 симетричні відносно координатної площини $уОz$. Знайти відстань AA_1 .
- 7.4. Знайти довжину діагоналі BD паралелограма $ABCD$, якщо $A(1;-3;0)$, $B(-2;4;1)$, $C(-3;1;1)$.
- 7.5. На осі абсцис знайти точку A , рівновіддалену від точок $M(2;3;5)$ і $N(3;5;1)$.
- 7.6. Визначити центр і радіус кола, заданого рівнянням $x^2 - 6x + y^2 - 2y - 26 = 0$.
- 7.7. Знайти координати точок перетину двох кіл $x^2 + y^2 + 8x - 8y - 8 = 0$ і $x^2 + y^2 - 8x + 8y - 8 = 0$.
- 7.8. Скласти рівняння прямої, паралельної до прямої $5x + y - 1 = 0$, яка проходить через точку $A(1;2)$.
- 7.9. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-1;1)$ і $B(1;0)$.
- 7.10. Відстань між населеними пунктами A та B , розміщеними з одного боку від залізничної колії, становить 13 км, а від них до колії – відповідно 6 км і 11 км. Де слід побудувати залізничну

станцію, щоб вона була однаково віддалена від пунктів A і B ?
Знайти відстань від станції до пункту A .

- 7.11. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-2;5)$ й утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 45° .
- 7.12. При паралельному перенесенні точка $A(1;2;6)$ переходить у точку $A_1(6;7;0)$. Вказати координати точки, у яку при цьому переходить точка $B(7;9;1)$.
- 7.13. Знайти площу трикутника, обмеженого осями координат і прямою $4x + 3y = 24$.
- 7.14. Задано трикутник ABC з вершинами $A(2;2;-4)$, $B(2;-1;-1)$, $C(3;-1;-2)$. Знайти зовнішній кут при вершині B .
- 7.15. На осі ординат знайти ординату точки, рівновіддаленої від точки $A(4;-2)$ і початку координат.
- 7.16. Знайти квадрат довжини медіани AA_1 трикутника ABC , якщо $A(3;-2;1)$, $B(3;1;5)$ і $C(4;0;3)$.
- 7.17. Знайти радіус сфери заданої рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0$.
- 7.18. Знайти радіус кола з центром на осі ординат, яке проходить через точки $A(-3;0)$, $B(0;9)$.
- 7.19. Точка $M(2;6;3)$ – середина відрізка, кінці якого лежать на осі x і на площині yz . Знайти довжину відрізка.
- 7.20. На ділянці, яка обмежена з двох боків взаємно перпендикулярними дорогами, посадили сад. Відстань від яблуні до першої дороги становить 3 м, а до другої – 4 м. Відстань від груші до першої дороги дорівнює 6 м, а до другої – 8 м. Знайти відстань між цими деревами.

§ 8. Вектори

- 8.1. За якого значення t вектори $\vec{a}(8;t;6)$ і $\vec{d}(4;2;3)$ будуть перпендикулярними? Відповідь: $t = -25$.
- 8.2. За якого значення n вектори $\vec{a}(n+5;-8)$ і $\vec{b}(5;1-n)$ колінеарні? Відповідь: $-9; 5$.
- 8.3. Відомо, що $|\vec{x}|=11, |\vec{y}|=23$, а $|\vec{x}-\vec{y}|=30$. Знайти $|\vec{x}+\vec{y}|$. Відповідь: 20.
- 8.4. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут 120° , $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2$. Знайти $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$. Відповідь: -1.
- 8.5. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{AB}(3;0;-4)$ і $\vec{AD}(0;5;0)$. Відповідь: 25.
- 8.6. Задано вектор $\vec{a}(2;1;-3)$. Знайти квадрат довжини вектора $\vec{b}$, якщо $\vec{a}\vec{b}=7$ і вектор $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$. Відповідь: 3,5.
- 8.7. Знайти у градусах зовнішній кут при вершині A трикутника AMK , якщо $A(2;-2;-3)$, $M(4;-2;-1)$, $K(2;2;1)$. В: 120°
- 8.8. Задано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Обчислити кут між векторами $\vec{BD_1}$ і $\vec{MA_1}$, де M – середина ребра AD . Відповідь: $\arccos \frac{1}{\sqrt{15}}$.
- 8.9. Знайти косинус кута між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}(3;2)$ і $\vec{b}(3;2)$. Відповідь: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

8.10. Задано $|\vec{m}|=2, |\vec{n}|=3$, а кут між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$ 120° . Обчислити косинус кута між векторами $\vec{m}$ і $\vec{m}+\vec{n}$. Відповідь:

$$\frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

8.11. Знайти кут між стороною AC і медіаною BB_1 трикутника ABC , якщо $A(3;5;0), B(0;-6;0)$ і $C(3;1;0)$. В $\arccos \frac{3\sqrt{10}}{10}$

8.12. Задано тетраедр $ABCD, \overline{CK} = \overline{KB}, \overline{AD} = \vec{a}, \overline{AB} = \vec{b}, \overline{AC} = \vec{c}, K$ – внутрішня точка ребра CB . Виразити вектор $\overline{DK}$ через вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. В. $\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a}$

8.13. Задано паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Вказати вектор, що дорівнює сумі $\overline{BA} + \overline{AC} + \overline{A_1 D_1} + \overline{CB} + \overline{DA} + \overline{DC}$. В. $\overline{AB}$ або $\overline{DC}$.

8.14. Задано прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Довести, що $|\overline{CA} + \overline{CC_1}| = |\overline{CA} - \overline{CC_1}|$.

8.15. На озері від пристані одночасно відпливають два катери. Один з них рухається зі швидкістю 25 км/год під кутом 30° до берега, а інший – зі швидкістю 30 км/год перпендикулярно до берега. Якою буде відстань між човнами чепез 6 хв.

Розділ II. Стереометрія

§ 9. Взаємне розміщення прямих і площин у просторі

- 9.1. n точок не лежать в одній площині. Яке найбільше число цих точок може лежати на одній прямій, якщо: а) $n=6$; б) $n=8$; в) $n=12$; г) $n=20$?
- 9.2. Задано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ і точка M на ребрі BB_1 . Якій з прямих належить точка перетину прямої MC із площиною $(A_1 B_1 C_1)$?
- 9.3. Задано правильну чотирикутну піраміду $SABCD$, SO – висота піраміди, M – середина висоти, K – середина ребра SA , P – середина ребра AB . Як розміщені між собою: а) пряма MK і площина ABC ; б) прямі OP і MK ; в) пряма MP і площина SDC ; г) площини BMK і SDC ?
- 9.4. Задано похилий паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки M , N , P – середини ребер AB , BB_1 і BC відповідно. У якому взаємному розміщенні перебувають: а) прямі MN і DD_1 ; б) прямі MN і DC_1 ; в) площини MNP і AB_1C ; г) NP і CC_1 ?
- 9.5. Задано правильну чотирикутну піраміду $SABCD$, у якої SO – висота, M – середина ребра SC , діагональні перерізи – рівносторонні трикутники. Знайти відстані між: а) точкою D і SB ; б) точкою M і площиною ABC ; в) прямими AD і BC ; г) прямими DB і SC .
- 9.6. Задано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Знайти кути між: а) AB_1 і $A_1 D$; б) AD_1 і BC_1 ; в) BA_1 і AD_1 ; г) AB і AD_1 ; д) DC_1 і AB .

- 9.7. Задано рівносторонній трикутник ABC , $AB=12$, $AA_1 \perp (ABC)$, $BB_1 \perp (ABC)$ $CA_1=3, CB_1=7, A_1D=DB_1$. Знайти довжину CD .
- 9.8. Задано трикутник ABC , у якому $AB=9$, $BC=12$, $AC=15$. На стороні AB взято точку M так, що $AM:MB=2:1$. Через точку M проведено площину, яка паралельна до сторони AC і перетинає сторону BC в точці K . Знайти площу трикутника MBK .
- 9.9. Через кінець A відрізка AB проведено площину α . Через кінець B і точку C відрізка AB проведено паралельні прямі, які перетинають площину α у відповідних точках M і N . Знайти довжину відрізка CN , якщо $AC:CB=2:3$, $BM=12$.
- 9.10. З точки A до площини проведені дві похилі $AB=30$ і $AC=40$. Знайти відстань від точки A до площини, якщо проекції похилих відносяться як 9:16.
- 9.11. З точки B , яка розміщена від площини на відстані 1, проведені дві похилі, які утворюють із площиною кут 45° , а між собою – кут 60° . Знайти квадрат відстані між цими похилими.
- 9.12. Один з катетів прямокутного трикутника ABC дорівнює 6, а гострий кут, прилеглий до цього катета, дорівнює 30° . Через вершину прямого кута C проведено відрізок CD , перпендикулярний до площини цього трикутника, $CD=4$. Визначити відстань від точки D до прямої AB .
- 9.13. З точки A , що розміщена на колі, радіус якого дорівнює 2, побудований перпендикуляр AK завдовжки 1 до площини круга. З точки A проведено діаметр AB , а з точки B під кутом 45° до діаметра – хорду BC . Знайти відстань від точки K до хорди BC .

- 9.14. Основи трапеції дорівнюють 18 і 12. Через більшу основу проведено площину на відстані 5 від меншої основи. Знайти відстань від точки перетину діагоналей трапеції до цієї площини.
- 9.15. Точка M знаходиться на відстані 3 від кожної із вершин паралелограма, сторони якого відносяться як 2:1. Знайти площу цього паралелограма, якщо відстань від точки M до площини паралелограма дорівнює 2.
- 9.16. Площа рівнобедреного трикутника дорівнює 1200, а його основа – 60. Точка простору віддалена від кожної сторони трикутника на 39. Знайти відстань від цієї точки до площини трикутника.
- 9.17. Однакові рівнобедрені трикутники ABC і BCD мають спільну сторону BC , а їх площини утворюють кут 120° . Знайти бічні сторони трикутників ABC і BCD , якщо їхні основи дорівнюють 3, а відстань між точками A і D дорівнює $\sqrt{15}$.
- 9.18. У круг радіуса 8 вписано прямокутний трикутник, гострий кут якого дорівнює 30° . Із центра круга O проведено перпендикуляр OK довжиною 3 до площини круга. Знайти відстань від точки K до катетів трикутника.
- 9.19. У трикутнику ABC $AB=25$, $AC=17$, $BC=26$. До площини трикутника через вершину A проведено похилу, що утворює зі сторонами AB і AC однакові кути. Проекція цієї похилої перетинає BC у точці E . Знайти довжину AE .
- 9.20. Довести, що якщо точка рівновіддалена від двох сторін трикутника і перпендикуляр, проведений через цю точку до площини трикутника, перетинає третю сторону, то основа цього

перпендикуляра належить бісектрисі кута, протилежної третій стороні.

§ 10. Побудова перерізів многогранників

- 10.1. Побудувати точку перетину заданої прямої a і заданої площини α .
- 10.2. Побудувати пряму перетину заданої площини α з площиною, яка проходить через три точки A, B, C , які не лежать на одній прямій.
- 10.3. Побудувати переріз куба площиною, що проходить через середини ребер AB, BC, DD_1 .
- 10.4. Побудувати і визначити вид перерізу прямої чотирикутної призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, що проходить через точки B_1, C і A_1 , якщо AD і BC не паралельні.
- 10.5. Побудувати переріз чотирикутної призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, що проходить через точки M, N, P , які належать ребрам BB_1, CC_1 і AD , причому $BM:CN=1:3$
- 10.6. Побудувати переріз чотирикутної призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площиною, що проходить через ребро $B_1 C_1$ і вершину A .
- 10.7. Побудувати переріз прямої п'ятикутної призми площиною, якщо задано слід у площині нижньої основи і точку в бічній грані.
- 10.8. Побудувати переріз прямої п'ятикутної призми площиною, що проходить через три точки, що лежать на трьох послідовних бічних ребрах.

- 10.9. Побудувати переріз куба площиною, заданою прямою a і точкою M , яка належить одному з бічних ребер, при умові, що пряма a лежить у площині нижньої основи, але її не перетинає. Крім цього, ця пряма не паралельна жодному з ребер основи. Точка M ділить ребро у відношенні 1:3, починаючи від основи.
- 10.10. Побудувати переріз правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ площиною, що проходить через середини M і N ребер AB і BC основи $ABCD$ і середину P ребра SD .

§ 11. Призма, циліндр та їхні комбінації

- 11.1. Площина, що проходить через сторону основи правильної трикутної призми і середину протилежного ребра, утворює з основою кут 45° . Сторона основи дорівнює a . Обчислити площу бічної поверхні призми.
- 11.2. Основою прямої призми є ромб з тупим кутом 150° . Площа бічної поверхні призми дорівнює 96, а площа її повної поверхні дорівнює 132. Знайти висоту призми.
- 11.3. У правильній трикутній призмі діагональ бічної грані нахилена до площини основи під кутом α . Обчислити площу повної поверхні, якщо площа основи дорівнює S .
- 11.4. Основа похилого паралелепіпеда – квадрат зі стороною a , одна з вершин другої основи проєкується у центр цього квадрата. Висота паралелепіпеда дорівнює H . Знайти площу бічної поверхні паралелепіпеда.
- 11.5. В основі прямої призми лежить ромб з більшою діагоналлю l . Через цю діагональ і вершину верхньої основи призми

проведено площину, яка перетинає дві суміжні бічні грані призми по прямих, що утворюють між собою кут α , а з площиною основи кут β . Знайти площу бічної поверхні.

- 11.6. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм, сторони якого дорівнюють 3 і 4. Одна з діагоналей цього паралелепіпеда дорівнює 5, а інша 7. Знайти об'єм паралелепіпеда.
- 11.7. У верхній основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Через цю вершину і основу трикутника, що є нижньою основою призми, проведено площину, яка утворює з нею кут φ . Знайти об'єм призми, якщо діагональ бічної грані, що містить основу рівнобедреного трикутника, дорівнює d .
- 11.8. У прямій трикутній призмі сторони дорівнюють 10, 17 і 21. Площа перерізу, проведеного через бічне ребро і меншу висоту основи, – 72. Знайти бічну поверхню призми.
- 11.9. Довжина діагоналі прямокутного паралелепіпеда – 57, його розміри відносяться як 6:10:15. Визначити площу повної поверхні паралелепіпеда.
- 11.10. У прямокутному паралелепіпеді діагональ d утворює з площиною основи кут α , а з площиною бічної грані кут β . Знайти об'єм паралелепіпеда.
- 11.11. В основі прямої призми – ромб з меншою діагоналлю d і гострим кутом α . Через більшу діагональ нижньої основи і вершину тупого кута верхньої основи проведено переріз, який утворює з площиною основи кут φ . Знайти об'єм призми.

- 11.12. Висота прямої призми, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при вершині, дорівнює H . Площина перерізу, що проходить через бічну сторону нижньої основи і протилежну вершину верхньої основи, утворює з площиною основи кут φ . Знайти об'єм призми.
- 11.13. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною d і тупим кутом β , причому діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні. Діагональ призми нахилена до площини основи під кутом φ . Знайти об'єм призми.
- 11.14. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при вершині. Діагоналі двох бічних граней, що містять сторони цього кута, нахилені до площини основи під кутом φ . Діагональ третьої бічної грані дорівнює l . Визначити об'єм призми.
- 11.15. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Діагональ бічної грані, що містить основу цього трикутника, нахилена до його площини під кутом φ . Діагональ двох інших бічних граней дорівнюють d . Визначити об'єм призми.
- 11.16. В основі циліндра проведено хорду, що стояє дугу α . Відрізок, який сполучає центр іншої основи із серединою цієї хорди, дорівнює l й утворює з площиною основи кут β . Визначити об'єм циліндра.
- 11.17. Хорда основи циліндра дорівнює a і стягує дугу кола основи величиною α . Площа перерізу, проведеного через цю хорду

перпендикулярно до площини основи, дорівнює S . Знайти площу повної поверхні циліндра.

- 11.18. У рівносторонньому циліндрі, радіус основи якого дорівнює R , через точку кола верхньої основи і точку кола нижньої основи проведено пряму, яка нахилена до площини основи під кутом α . Знайти відстань від цієї прямої до осі циліндра.
- 11.19. У циліндрі, паралельно його осі і на відстані d від неї, проведено площину, що перетинає його нижню основу по хорді, яку видно із центра верхньої основи під кутом φ . Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут α . Знайти площу перерізу.
- 11.20. У циліндрі, паралельно його осі, проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді b , яку видно з центра верхньої основи під кутом φ . Діагоналі перерізу утворюють між собою кут α . Знайти об'єм циліндра.
- 11.21. У правильній трикутній призмі через діагоналі, що належать бічним граням і перетинаються у площині верхньої основи, проведено переріз. З вершини, яка не належить перерізу, проведено перпендикуляр довжиною b до площини цього перерізу. Він утворює з бічним ребром, що проходить через цю вершину, кут α . Знайти бічну поверхню циліндра, описаного навколо даної призми.
- 11.22. Основою прямої призми є ромб з гострим кутом α . Діагональ бічної грані дорівнює l і утворює з площиною основи кут β . Знайти бічну поверхню циліндра, вписаного в задану призму.

- 11.23. У циліндрі, паралельно його осі, проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом 2α . Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом β . Визначте об'єм циліндра, якщо площа перерізу дорівнює Q .
- 11.24. У циліндрі, паралельно його осі, проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді a . Діагональ перерізу нахилена до площини основи під кутом β . Відрізок, який сполучає центр верхньої основи з серединою хорди нижньої основи, утворює з площиною нижньої основи кут φ . Знайти об'єм циліндра.
- 11.25. У циліндрі, паралельно його осі, проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді, яка стягує дугу α . Цю хорду видно із центра верхньої основи під кутом φ . Знайти площу перерізу, якщо радіус циліндра дорівнює R .
- 11.26. Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник, одна із сторін якого вдвічі більша від другої. Бічна поверхня циліндра дорівнює 20. Визначте його повну поверхню, якщо твірна циліндра – менша сторона його розгортки.
- 11.27. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Діагональ грані, що містить сторону основи цього трикутника, нахилена до площини основи під кутом φ . Знайти бічну поверхню призми, якщо радіус циліндра, описаного навколо заданої призми, дорівнює R .
- 11.28. В основі прямої призми лежить трикутник зі стороною c і прилеглими кутами β і α . Діагональ грані, що містить дану

сторону, нахилена до площини основи під кутом φ . Знайти об'єм циліндра, вписаного в дану призму.

11.29. В основі прямої призми лежить трикутник з кутами α і β .

Діагоналі грані, що містить сторону, прилеглу до даних кутів, утворює з площиною основи кут φ . Знайти об'єм циліндра, описаного навколо даної призми. Висота призми дорівнює H .

11.30. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з

кутом β . Через протилежний до кута β катет нижньої основи і вершину кута β верхньої основи проведено переріз.

Перпендикуляр, опущений з вершини кута β нижньої основи до цього перерізу, дорівнює b і утворює з площиною основи кут φ .

Знайти бічну поверхню цилінра, описаного навколо призми.

§12. Піраміда, конус та їхні комбінації

12.1. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює α . Визначити повну поверхню піраміди, якщо відстань від основи її висоти до бічної грані дорівнює d .

12.2. Знайти об'єм правильної трикутної піраміди, якщо площина, що проходить через основу a і середину її висоти нахилена до основи під кутом φ .

12.3. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при вершині. Радіус описаного навколо нього кола дорівнює R . Дві рівні бічні грані перпендикулярні до основи, а третя грань

нахилена до неї під кутом α . Знайти площу бічної поверхні піраміди.

12.4. Площі основ і діагонального перерізу правильної чотирикутної зрізаної піраміди відповідно дорівнюють 16, 324 і 88. Знайти площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

12.5. В основі піраміди лежить прямокутна трапеція з більшою бічною стороною d і гострим кутом β . Бічна грань піраміди, що містить більшу основу трапеції, перпендикулярна до основи, а три інші нахилені до неї під кутом α . Знайти об'єм піраміди.

12.6. Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 4 і 2, а гострий кут бічної грані дорівнює 60° . Знайти висоту зрізаної піраміди.

12.7. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з кутом α . Дві бічні грані, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до основи, а третя нахилена до неї під кутом β . Знайти об'єм піраміди, якщо більше бічне ребро дорівнює l .

12.8. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α . Визначити площу бічної поверхні піраміди, якщо радіус кола, описаного навколо бічної грані, дорівнює R .

12.9. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом b і прилеглим до нього гострим кутом β . Дві бічні грані, що містять катети цього трикутника, перпендикулярні до основи, а третя – нахилена до неї під кутом α . Визначити бічну поверхню піраміди.

12.10. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при вершині. Бічна грань, що містить основу цього

трикутника, перпендикулярна до основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом β . Визначити бічну поверхню піраміди.

- 12.11. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Дві рівні бічні грані перпендикулярні до площини основи, а третя нахилена до неї під кутом β . Визначити площу повної поверхні піраміди, якщо менше бічне ребро дорівнює d .
- 12.12. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при основі. Дві рівні бічні грані, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до площини основи, а третя нахилена до неї під кутом α . Визначити площу повної поверхні піраміди, якщо менше бічне ребро дорівнює l .
- 12.13. Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 4 і 3, а двогранний кут при ребрі більшої основи — 45° . Знайти площу бічної поверхні зрізаної піраміди.
- 12.14. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює b , а бічна грань нахилена до площини основи під кутом α . Визначити об'єм піраміди.
- 12.15. Визначити об'єм правильної трикутної зрізаної піраміди, в якій сторони 30 і 20, а площа бічної поверхні рівновелика сумі площ основ.
- 12.16. Твірна конуса дорівнює $\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\pi}}$. Знайти площу повної поверхні конуса, якщо кут при вершині осцевого перерізу конуса прямий.
- 12.17. Твірна зрізаного конуса дорівнює 8 і нахилена до площини основи під кутом 60° . Діагональ осцевого перерізу ділить цей кут навпіл. Знайти площу повної поверхні зрізаного конуса.

- 12.18. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює β , проведено переріз, який перетинає основу по хорді довжиною a . Знайти об'єм конуса, якщо твірна нахилена до площини його основи під кутом α .
- 12.19. Відрізок, який сполучає центр основи конуса з серединою твірної, нахилений до площини основи під кутом α . Довжина цього відрізка дорівнює m . Знайти повну поверхню конуса.
- 12.20. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює 2β . Периметр осьового перерізу – $2p$. Знайти висоту конуса.
- 12.21. Радіуси основ зрізаного конуса – 4 і 7, твірна – 5. Знайти площу осьового перерізу.
- 12.22. Площу основ зрізаного конуса – 4 і 16. Через середину висоти проведено площину паралельно основі. Знайти площу перерізу.
- 12.23. Кут між твірною і основою конуса дорівнює α , хорду основи видно із його вершини під кутом β . Знайти об'єм конуса, якщо довжина хорди дорівнює m .
- 12.24. Площа основи конуса дорівнює Q , кут нахилу твірної до площини основи – φ . Знайти площу перерізу, проведеного через дві твірні, кут між якими дорівнює β .
- 12.25. У зрізаному конусі визначити площу осьового перерізу, якщо площі основ дорівнюють Q і q , а площа бічної поверхні – S .
- 12.26. Через вершину конуса проведено площину, яка перетинає його основу радіуса R по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом α , а з вершини – під кутом β . Визначити площу перерізу.

- 12.27. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює a , а плоский кут при вершині – β . Визначте площу бічної поверхні конуса, вписаного в піраміду.
- 12.28. У правильній трикутній піраміді апофема дорівнює m , а плоский кут при вершині – β . Визначити об'єм конуса, вписаного в піраміду.
- 12.29. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α . Знайти повну поверхню вписаного конуса, якщо площа основи піраміди – S .
- 12.30. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α . Визначити площу бічної поверхні конуса, описаного навколо піраміди, якщо її висота дорівнює H .

§ 13. Тіла обертання

- 13.1. Ромб з діагоналями $\sqrt{15}$ і $\frac{60}{\pi}$ обертається навколо більшої діагоналі. Знайти об'єм тіла обертання.
- 13.2. Рівнобедрений трикутник, основа якого a і гострий кут при вершині α , обертається навколо осі, що лежить у площині трикутника, проходить через його вершину перпендикулярно до бічної сторони. Знайти площу поверхні тіла обертання.
- 13.3. Прямокутний трикутник з катетом a і прилеглим до нього кутом 30° обертається навколо осі, що проходить через вершину даного кута перпендикулярно до гіпотенузи. Знайти площу поверхні тіла обертання.

- 13.4. Паралелограм, сторони якого 17 і 28, а сума діагоналей – 64, обертається навколо більшої сторони. Знайти площу поверхні тіла обертання.
- 13.5. Прямокутний трикутник з гострим кутом α і протилежним катетом a обертається навколо прямої, що лежить у площині трикутника і проходить через вершину даного кута перпендикулярно до гіпотенузи. Знайти об'єм тіла обертання.
- 13.6. Рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює a і кут при вершині дорівнює β , обертається навколо прямої, що лежить у площині трикутника і проходить через вершину кута β перпендикулярно до його бічної сторони. Знайти об'єм тіла обертання.
- 13.7. Прямокутний трикутник з гострим кутом β і гіпотенузою c обертається навколо прямої, що лежить у площині трикутника і проходить через вершину прямого кута перпендикулярно до його бісектриси. Обчислити об'єм тіла обертання.
- 13.8. Трикутник зі сторонами 20, 37 і 51 обертається навколо більшої сторони. Знайти площу поверхні тіла обертання.
- 13.9. Паралелограм, у якого сторони – 21 і 89, а діагоналі відносяться як 41:50, обертається навколо меншої сторони. Визначити об'єм тіла обертання.
- 13.10. Ромб зі стороною a і гострим кутом α обертається навколо осі, що проходить через вершину гострого кута перпендикулярно до його сторони. Знайти площу поверхні тіла обертання.

§ 14. Комбінації тіл: куля і многогранники, куля і тіла обертання

- 14.1. Навколо правильної чотирикутної призми описано сферу. Радіус сфери, проведений до вершини призми, утворює з бічним ребром кут γ . Визначити площу поверхні сфери, якщо бічне ребро призми дорівнює a .
- 14.2. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a . Бічне ребро нахилене до основи під кутом α . Знайти об'єм вписаної кулі.
- 14.3. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро нахилене до основи під кутом α . Обчислити об'єм піраміди, якщо радіус кулі, описаної навколо неї, дорівнює R .
- 14.4. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α . Знайти поверхню піраміди, якщо радіус кулі, вписаної в неї, дорівнює r .
- 14.5. Конус вписано в кулю, радіус якої дорівнює R . Знайти площу бічної поверхні конуса, якщо кут при вершині його осевого перерізу дорівнює α .
- 14.6. У кулю, площа поверхні якої S , вписано конус. Кут між твірною конуса і площиною основи дорівнює α . Визначити площу повної поверхні конуса.
- 14.7. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом φ . Відстань від вершини конуса до центра вписаної в нього кулі дорівнює d . Обчислити поверхню конуса.

- 14.8. В основі конуса проведено хорду довжиною b , яку видно з вершини під кутом β . Кут при вершині осевого перерізу дорівнює φ . Знайти площу поверхні сфери, вписаної в конус.
- 14.9. У зрізаний конус вписано кулю радіуса r . Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом α . Знайти об'єм зрізаного конуса.
- У циліндр, що вписаний в кулю, вписано кулю. Знайти відношення площ поверхонь і об'ємів цих куль.

Розділ III.

§ 15. Задачі підвищеної складності

- 15.1. Навколо правильного трикутника ABC описано коло O радіуса R . Коло O_1 дотикається до двох сторін AB і BC трикутника і кола O . Знайти відстань від центру кола O_1 до вершини A .
- 15.2. Вершини правильного трикутника розташовані на трьох паралельних прямих. Відстань від середньої прямої до двох крайніх дорівнюють a і b . Знайти сторону трикутника.
- 15.3. Висота рівнобедреного трикутника з кутом α при основі більша радіуса вписаного у нього круга на m . Визначити основу трикутника і радіус описаного кола.
- 15.4. Навколо трикутника ABC , у якому $a=2, b=3$ і кут $C=60^\circ$, описано коло. Знайти радіуси кіл, що проходять через дві вершини трикутника і центр описаного кола.

- 15.5. Точка D розміщується на стороні BC трикутника ABC .
Довести, що $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD$ (теорема Стюарта).
- 15.6. Квадрат і правильний трикутник, які мають спільну вершину, вписані в коло одиничного радіуса. Знайти площу, покриту і квадратом, і трикутником.
- 15.7. У коло вписані рівнобедрений гострокутний трикутник площі S і трапеція так, що її більша основа співпадає з діаметром кола, а бічні сторони паралельні бічним сторонам трикутника. Середня лінія трапеції дорівнює l . Знайти висоту трапеції.
- 15.8. Довести, що добуток діагоналей вписаного чотирикутника дорівнює сумі добутків протилежних сторін (теорема Птолемея).
- 15.9. Відрізок, що сполучає середини основ трапеції, дорівнює, дорівнює їх піврізниці. Знайти суму кутів при більшій основі.
- 15.10. У сегмент, дуга якого містить 120° , вписаний квадрат. Обчислити сторону квадрата, якщо радіус круга дорівнює $2 + \sqrt{19}$.
- 15.11. Через точку P , яка лежить зовні кола з центром O і радіусом R , проходять дві взаємноперпендикулярні січні. Перша січна перетинає коло у точках A і C (точка C лежить між P і A), а друга січна – у точках B і D (D лежить між P і B). Нехай P_1 – проекція P на AB , а M – одна з точок перетину AB з колом, центр якого P_1 , а радіус P_1O . Знайти довжину MP .

- 15.12. Гіпотенуза прямокутного трикутника лежить у деякій площині P , а катети утворюють з цією площиною кути α і β . Визначити кут між площиною P і площиною трикутника.
- 15.13. Рівносторонній трикутник ABC зі стороною a , лежить на площині P . На перпендикулярі, проведеному з точки A до площини P , відкладено відрізок $AS = a$. Знайти тангенс гострого кута між прямими AB і SC .
- 15.14. Основою піраміди $DABC$ є рівнобедрений трикутник ABC з площею S і основою $AB = a$. Дві бічні грані піраміди, що спираються на рівні сторони, мають при вершині піраміди прямі кути. Знайти кут, утворений третьою бічною гранню піраміди і площиною основи, якщо об'єм піраміди дорівнює V .
- 15.15. У тетраедр вписано інший тетраедр так, що його вершини лежать у точках перетину медіан граней першого тетраедра. Знайти відношення об'ємів тетраедрів.
- 15.16. У прямокутний паралелепіпед з ребрами a , b , і c поміщено куб так, що вершина O куба співпадає з вершиною паралелепіпеда. Знайти кут між діагоналями куба і паралелепіпеда, проведеними через вершину O .
- 15.17. Сторона трикутника дорівнює a . Різниця прилеглих до неї кутів дорівнює φ . На трикутнику, як на основі, побудована призма. Через ребро призми, протилежне стороні a , проведено переріз площею S , який ділить двогранний кут навпіл. Знайти об'єм призми.
- 15.18. Знайти відстань між двома неперетинними діагоналями суміжних граней куба, ребро якого дорівнює a .

- 15.19. Навколо правильного тетраедра описано циліндр так, що два протилежних ребра тетраедра є діаметрами основ циліндра. Знайти відношення об'єму тетраедра до об'єму циліндра.
- 15.20. Дві кулі, відношення радіусів яких дорівнює p , мають зовнішній дотик. Вони розміщені всередині конуса так, що їхні центри знаходяться на осі конуса, при цьому перша куля дотикається до бічної поверхні конуса, а друга – бічної поверхні та основи конуса. Знайти відношення суми площ поверхонь цих куль до площі повної поверхні конуса.

Відповіді

Розділ I

§ 1. Трикутник

1.1. $\frac{a\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; 1.2. 4; 1.3. 5; 1.4. 2; 1.5. 12,6; 1.6. 12; 1.7. 2; 1.8. $\frac{\sqrt{2}bc}{b+c}$;

1.9. 3:4:5; 1.10. 21; 1.11. 30; 1.12. $\frac{a\sqrt{7}}{3}$; 1.13. $\frac{13}{15}a$; 1.14. $\frac{a(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}$;

$\frac{a(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$; 1.15. 7,5; 1.16. 4; 1.17. 25; 1.18. 6; 1.19. 11; 1.20. 1,5;

1.21. $\frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}$; 1.22. 0,925; 1.23. 2; 1.24. 5; 1.25. 80°; 1.26. 37; 1.27.

39; 1.30. 5; 1.31. 3,125; 1.32. - 0,25; 1.33. 75; 1.34. 4; 1.35. 6; 1.36. 6;
1.37. 46; 1.38. 4; 1.39. 20; 1.40. 300; 1.41. 2; 1.42. $32,4\sqrt{5}$; 1.43. 12; 1.44.
20; 1.45. 7.

§2. Чотирикутники

2.1. 9; 2. 2. 1,5; 2.3. 10; 2.4. 4; 2.5. 30°; 2.6. 8; 2.7. 60°; 2.8.
10,17,21, $\sqrt{337}$; 2.9. 10, 15; 2.10. 12; 2.11. 100; 2.12. 10; 2.13. 5; 2.14. 12;

2.15. 4; 2.16. 5; 2.17. $R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 2.18. $\frac{b \sin \beta}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}}$;

$$\frac{b \sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}}; \quad 2.23. \ 3,7; \ 2.24. \ 4; \ 2.25. \ 7,5; \ 2.26. \ 4,25;$$

2.27. 2,4; 2.28. 1,5; 2.29. 9,1; 2.30. 12; 2.31. 25; 2.32. 15; 2.33. 4,2; 2.34. 2; 2.35. 8; 2.36. 24; 2.37. 48; 2.38. 6,89; 2.39. 31; 2.40. 12; 2.41. 20; 2.42. 7; 2.43. 300; 2.44. 96; 2.45. 12; 2.46. 5; 2.47. 45; 2.48. 96; 2.49. 30; 2.50. 9.

§ 3. Многокутники

3.1. 6; 3.2. 5; 3.3. 6; 3.4. 900; 3.5. 12; 3.6. 18; 3.7. $a\sqrt{1+\sqrt{2}}$; 3.8. 2; 3.9. 72° ; 3.10. 0,5. 3.12. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

§ 4. Коло

4.1. $30^\circ, 150^\circ$; 4.2. 40° ; 4.3. 19; 4.4. 180π ; 4.6. 12π ; 4.7. 15π ; 4.8. 2π ; 4.9. 27π ; 4.10. 0,75; 4.11. 0, 75; 4.12. 12, 6; 4.13. 2; 4.14. $\frac{a^2(3\sqrt{3}-\pi)}{18}$; 4.15. $\arcsin \frac{5}{9}$.

§ 5. Задачі на побудову

5.9. *Вказівка.* Проведіть серединний перпендикуляр основі трикутника і побудуйте відрізок, що дорівнює $\frac{2}{3}$ заданої медіани.

5.10. Вказівка. Визначте міру кута між заданими сторонами. **5.11. Вказівка.** Задача може мати два розвязки або не мати жодного.

§6. Геометричні перетворення

- 6.1.** 10; **6.2.** $B_1(\sqrt{2}; 0), B_2(-\sqrt{2}; 0), B_3(1; 1), B_4(-1; 1)$; **6.3.** Координати симетричного трикутника $A'(4; 2), K'(-1; -2), D'(0; 7)$; **6.4.** Координати утвореного трикутника $A'(5; -2), B'(10; -2), C'(11; 0)$; **6.5. Вказівка.** Скористатися гомотетією відносно спільного кінця хорд; **6.** $y = x^2 - 8x + 19$; **6.7.** $y = x^2 + 4x + 9$; **6.8.** а) $y = \sqrt{-x + 8}$; б) $y = -\sqrt{x} + 4$; в) $y = -\sqrt{x} - 2$; г) $y = \sqrt{-x - 2}$; **6.9.** а) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$; б) $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 4$; в) $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 4$; г) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$; **6.10.** $A'(5; 9)$; **6.11.** $O(5; -2)$; **6.12.** $(x - 1)^2 + y^2 = 1$; **6.13.** $(x - 3)^2 + (y + 6)^2 = 36$; **6.14.** $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$; **6.16.** 175; **6.17.** 12; **6.18.** 28; **6.19.** 112; **6.20.** 1152.

§ 7. Координати

- 7.1.** $4\sqrt{2} + 4; 4$; **7.2.** $\left(\frac{5}{2}; 2; \frac{5}{2}\right)$; **7.3.** 6; **7.4.** $\sqrt{105}$; **7.5.** $\left(0; 0; \frac{3}{8}\right)$; **7.6.** $(3; 1), 6$; **7.7.** $(2; 2), (-2; -2)$; **7.8.** $y = -5x + 7$; **7.9.** $-x - 2y + 1 = 0$; **7.10.** $\sqrt{127}$; **7.11.** $y = x + 7, M(-7; 0)$; **7.12.** $(12; 14; -5)$; **7.13.** 24; **7.14.** 120° ; **7.15.** 5; **7.16.** 15,5; **7.17.** 2; **7.18.** 5; **7.19.** 14; **7.20.** 5.

§ 8. Вектори

- 8.1. -25 ; 8.2. $-9; 5$; 8.3. 20 ; 8.4. -1 ; 8.5. 25 ; 8.6. $3,5$; 8.7. 120° ;
8.8. $\arccos \frac{1}{\sqrt{15}}$; 8.9. $\frac{\sqrt{5}}{5}$; 8.10. $\frac{1}{2\sqrt{7}}$; 8.11. $\arccos \frac{3\sqrt{10}}{10}$; 8.12.
 $\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a}$; 8.13. $\overline{AB}$ або $\overline{DC}$; 8.15. $\sqrt{7,75}$.

Розділ II

§ 9. Взаємне розміщення прямих і площин у просторі

- 9.1. а) 4; б) 6; в) 10; г) 18; 9.2. B_1C_1 ; 9.3. а) пряма паралельна площині;
б) прямі мимобіжні; в) пряма і площина перетинаються; г) площини
перетинаються; 9.4. а) прямі мимобіжні; б) прямі паралельні; в)
площини паралельні; г) прямі перетинаються; 9.5. а) AM ; б) $\frac{SO}{2}$; в)
 AB ; г) $\frac{AM}{2}$; 9.6. а) 60° ; б) 0° ; в) 60° ; г) 90° ; д) 45° ; 9.7. $\sqrt{23}$; 9.8. 6; 9.9.
4,8; 9.10. 24; 9.11. 2; 9.12. 5; 9.13. 3; 9.14. 3; 9.15. 8; 9.16. 36;
9.17. $\frac{\sqrt{29}}{2}$; 9.18. 5; 9.19. $16\frac{4}{21}$.

§ 10. Побудова перерізів многогранників

- 10.4. *Вказівка.* Використайте те, що дві паралельні площини
перетинаються третьою площиною по паралельних прямих. Трапеція.

§ 11. Призма, циліндр та їхні комбінації

$$11.1. 3a^2\sqrt{3}; \quad 11.2. 4; \quad 11.3. 2S(2\sqrt{3}\lg\alpha + 1); \quad 11.4. 2a\sqrt{4H^2 + a^2};$$

$$11.5. l^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \sin \beta \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \beta}; \quad 11.6. 36; \quad 11.7. \frac{d^3 \operatorname{ctg}^2 \varphi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\left(1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right)^{3/2}};$$

$$11.8. 432; \quad 11.9. 5400; \quad 11.10. d^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta};$$

$$11.11. \frac{1}{4} d^3 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi; \quad 11.12. \frac{H^3 \operatorname{ctg}^2 \varphi}{2 \sin \beta}; \quad 11.13. \sqrt{2} d^3 \sin^3 \beta \operatorname{tg} \varphi;$$

$$11.14. \frac{l^3 \operatorname{tg} \varphi \sin \beta}{2 \left(\operatorname{tg}^2 \varphi + 4 \sin^2 \frac{\beta}{2} \right)^{3/2}}; \quad 11.15. \frac{2d^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \varphi}{\sqrt{(4 \cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \varphi)^3}};$$

$$11.16. \frac{\pi l^3 \cos^2 \beta \sin \beta}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad 11.17. \frac{\pi S}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{\pi a^2}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad 11.18. R \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}; \quad 11.19.$$

$$\frac{2d^2 \sin \frac{\varphi}{2} \sin \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}; \quad 11.20. \frac{\pi b^3 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \right); \quad 11.21. \frac{8\pi b^2}{3 \sin 2\alpha}; \quad 11.22.$$

$$\frac{1}{2} \pi l^2 \sin 2\beta \sin \alpha; \quad 11.23. \frac{\pi Q}{4 \sin^2 \alpha} \sqrt{\frac{Q}{\operatorname{tg} \beta}}; \quad 11.24. \frac{\pi a^3 \operatorname{tg} \beta (4 \operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{ctg}^2 \varphi + 1)}{4};$$

$$11.25. \frac{2k^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{\sin \frac{\varphi}{2}}; \quad 11.26. \frac{20(1 + \pi)}{\pi};$$

$$11.27. 16R^2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \lg \varphi \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} \right); \quad 11.28. \frac{\pi c^3 \lg \varphi}{\left(\lg \frac{\alpha}{2} + \lg \frac{\beta}{2} \right)^2} \quad \text{або}$$

$$\frac{\pi c^3 \lg \varphi \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}; \quad 11.29. \frac{\pi H^3 \lg^3 \varphi}{4 \sin^2 (\alpha + \beta)}; \quad 11.30. \frac{2\pi b^2}{\sin 2\varphi \cos \beta}.$$

§ 12. Піраміда, конус та їхні комбінації

$$12.1. \frac{8d^2 \lg \frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}; \quad 12.2. \frac{a^3}{12} \lg \varphi; \quad 12.3. \frac{2R^2 \cos^2 \frac{\beta}{2} \left(\sin \beta + 2 \cos \frac{\beta}{2} \sin \alpha \right)}{\cos \alpha}; \quad 12.4.$$

$$396; \quad 12.5. \frac{d^3}{6} \sin^2 \lg \alpha (2 + 2 \sin \beta - \cos \beta); \quad 12.6. \sqrt{2}; \quad 12.7. \frac{l^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha \lg^2 \beta}{6(\cos^2 \alpha + \lg^2 \beta)^{3/2}};$$

$$12.8. 3R^2 \sin^2 \alpha \lg \frac{\alpha}{2}; \quad 12.9. \frac{1}{2} b^2 \left(\sin \beta \lg \alpha + \sin \beta \lg \alpha \lg \beta + \frac{\lg \beta}{\cos \alpha} \right);$$

$$12.10. \frac{a^2 \lg \frac{\alpha}{2}}{4 \cos \beta} \left(\sin \beta \sin \frac{\alpha}{2} + 1 \right); \quad 12.11. \frac{d^2 \lg \beta}{\cos \frac{\alpha}{2}} \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2} \lg \frac{\beta}{2} \right);$$

$$12.12. \frac{l^2 \lg \alpha}{2 \sin 2\beta} \left(\lg \frac{\alpha}{2} + 2 \cos \beta + 1 \right); \quad 12.13. \frac{21}{2\sqrt{6}}; \quad 12.14. \frac{4b^3 \lg^2 \alpha}{3\sqrt{(1 + 2 \lg^2 \alpha)^3}};$$

$$12.15. 1900; \quad 12.16. \frac{1}{2}; \quad 12.17. 176\pi; \quad 12.18. \frac{\pi a^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{24 \sin^3 \frac{\beta}{2}};$$

$$12.19. 8\pi m^2 \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2}; \quad 12.20. \frac{p \cos \beta}{1 + \sin \beta}; \quad 12.21. 44; \quad 12.22. 9;$$

$$12.23. \frac{\pi m^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{24 \sin^3 \frac{\beta}{2}}; \quad 12.24. \frac{Q \sin \beta}{2\pi \cos^2 \varphi}; \quad 12.25. \frac{\sqrt{S^2 - (Q - q)^2}}{\pi};$$

$$12.26. R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}; \quad 12.27. \frac{\pi a^2 \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{12}; \quad 12.28. \frac{\pi m^3 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \sqrt{9 - 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}}{27};$$

$$12.29. \frac{\pi S}{9} \left(3 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \sqrt{3} \right); \quad 12.30. \frac{\pi H^2 \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

§ 13. Тіла обертання

$$13.1. 75; \quad 13.2. \frac{\pi a^2}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} + 1 \right); \quad 13.3. \frac{\pi a^2 (5 + \sqrt{3})}{2}; \quad 13.4. 1350\pi;$$

$$13.5. \frac{\pi a^3 \cos \alpha (1 + \cos^2 \alpha)}{3 \sin^2 \alpha}; \quad 13.6. \frac{\pi a^3 \cos^3 \frac{\beta}{2}}{6 \sin^2 \frac{\beta}{2}}; \quad 13.7.$$

$$\frac{\pi \sqrt{2} c^3 \sin 2\beta (\sin \beta + \cos \beta)}{12} \quad \text{або} \quad \frac{\pi c^3 \sin 2\beta (\sin 45^\circ + \beta)}{6}; \quad 13.8. 684\pi; \quad 13.9.$$

$$134400\pi; \quad 13.10. 8\pi a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

§ 14. Комбінації тіл: куля і многогранники, куля і тіла обертання

$$14.1. \frac{\pi b^3}{6 \cos^3 \gamma}; \quad 14.2. \frac{\sqrt{3} \pi a^3 (\sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \alpha + 1} - 1)^3}{432 \operatorname{tg}^3 \alpha}; \quad 14.3. \frac{4}{3} R^3 \sin^2 2\alpha \sin^2 \alpha; \quad 14.4.$$

$$\frac{4r^2 \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2}{\left(1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}; \quad 14.5. 2\pi R^2 \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2}; \quad 14.6. S \sin 2\alpha \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad 14.7.$$

$$4\pi d^2 \cos^4 \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \varphi;$$

$$14.8. \frac{\pi b^2 \sin^2 \varphi}{4 \sin^2 \frac{\beta}{2} \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2};$$

14.9.

$$\frac{2}{3} \pi r^3 \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1 \right); 14.10. 2; 2\sqrt{2}.$$

§ 15. Задачі підвищеної складності

$$15.1. \frac{R\sqrt{7}}{3}; 15.2. \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{a^2 + ab + b^2}; 15.3. 2m \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cos \alpha, R = \frac{m}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$15.4. \sqrt{\frac{7}{3}}; \frac{7}{\sqrt{3}}; \frac{7}{4\sqrt{3}}; 15.6. 2\sqrt{3} - \frac{9}{4}; 15.7. \frac{S}{l}; 15.9. 90^\circ; 15.10. 3; 15.11. R;$$

$$15.12. \arcsin \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}; 15.13. \sqrt{7}; 15.14. \frac{1}{2} \arcsin \frac{3aV}{S^2}; 15.15. \frac{1}{27};$$

$$15.16. \arccos \frac{a+b+c}{\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; 15.17. \frac{1}{2} aS \cos \frac{\varphi}{2}; 15.18. \frac{a\sqrt{3}}{3}; 15.19. \frac{2}{3\pi};$$

$$15.20. 2p(1-p)(1+p^2).$$

Література

1. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Геометрія, 8 клас. – К. : «Вежа», 2008. – 256 с.
2. Ваховський Е. Б., Рывкин А. А. Задачи по элементарной математике повышенной трудности. – М. : «Наука», 1969. – 494 с.
3. Капіносов А. та ін. Математика: Комплексна підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання. – Тернопіль : «Підручники і посібники». – 2014. – 527 с.
4. Литвиненко Г. М., Федченко Л. Я., Швець В. О. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. Частина 2. Геометрія. – Львів : «ВНТЛ», 1997. – 79 с.
5. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія, 7 клас. – Х. : «Гімназія», 2008. – 214 с.
6. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія, 9 клас. – Х. : «Гімназія», 2009. – 279 с.
7. *За ред.* Михайловського В. І. Практикум з розв'язування задач з математики. – К. : «Вища школа», 1978. – 480 с.
8. Погорслов О. В. Геометрія 6 – 10. – К. : «Радянська школа», 1989. – 287 с.
9. *Под редакцией* Скаванн М. И. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во вузы. 3 изд. – М. : «Высшая школа», 1978. – 520 с.
10. Цегелик Г. Г., Гуран І. Й., Дудзяний І. М., Бартіш М. Я. Збірник типових конкурсних тестових завдань з математики. – 13-те вид. – Львів : «Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка», 2007. – 137 с.

Навчальне видання

Ю. М. Галь, О. А. Золота

ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА (ГЕОМЕТРІЯ)

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

для студентів III-го курсу першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань 0402 «Фізико-математичні науки»
напряму підготовки 6.040201 «Математика*»

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

Видавничий відділ
Дрогобицького державного педагогічного університету
імені Івана Франка

Головний редактор

Ірина Невмержицька

Технічний редактор

Світлана Бецко

Здано до набору 25.06.2015 р. Підписано до друку 10.07.2015 р.
Формат 60х84/16. Папір офсетний. Гарнітура. Times. Наклад 300
прим. Ум. друк. арк. 3,5. Зам. 189.

Видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. (Свідectво про внесення суб'єкта видавничої діяльності до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 2155 від 12.04.2005 р.).
82100, Дрогобич, вул. І.Франка, 24, к. 42, тел. 2 – 23 – 78.