

УДК 512.4

Про розщеплюваність усіх головних кручень у категорії модулів над комутативним кільцем

Матурін Ю.П.

email: yuriy_maturin@hotmail.com

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, кафедра математики

У статті дано критерій розщеплюваності усіх головних кручень у категорії модулів над комутативним кільцем. Доведено, що усі головні кручення розщеплюються в категорії модулів над комутативним кільцем тоді й тільки тоді, коли кільце є прямою сумою локальних кілець, радикали Джекобсона яких є ніль-ідеалами в цих кільцях.

Ключові слова: розщеплюваність, головне кручення, ніль-ідеал.

ВСТУП

Питання розщеплюваності предрадикалів вивчаються вже достатньо давно. Відомі для спеціалістів праці К.Р. Гудеарла, Л.А. Койфмана, О.Л. Горбачука, Ж. Віола-Пріолі, М.Я. Комарницького та ін. присвячені даній тематиці. Існує ще багато проблем, пов'язаних із розщеплюваністю, які досі не розв'язані. Дана стаття вирішує одне з питань в рамках цієї теми.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Кажуть, що предрадикал r розщеплюється в категорії модулів, якщо $r(M)$ виділяється прямим доданком у кожному модулі M .

Крученням називатимемо радикал, який є точним зліва як функтор.

Кільце називається локальним, якщо фактор-кільце цього кільця за радикалом Джекобсона є тілом.

Ніль-ідеал – це ідеал, усі елементи якого нільпотентні.

Базою радикального фільтру кільця будемо називати таку сукупність його лівих ідеалів, що для будь-якого лівого ідеалу A радикального фільтру знайдеться лівий ідеал B з цієї сукупності, який міститься в A .

Головним крученням над комутативним кільцем називається таке кручення, відповідний радикальний фільтр якого має

базу, що складається з головних ідеалів.

2. КРИТЕРІЙ РОЗЩЕПЛЮВАНOSTІ ВСІХ ГОЛОВНИХ КРУЧЕНЬ

Теорема. Нехай R – комутативне кільце. Тоді наступні умови еквівалентні:

- (A) Усі головні кручення розщеплюються.
- (B) $R = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$, де $R_1, \dots, R_n$ – нерозкладні кільця, і всі головні кручення розщеплюються у відповідних категоріях модулів над цими кільцями.
- (C) $R = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$, де $R_1, \dots, R_n$ – локальні кільця, а радикал Джекобсона $J(R_i)$ – ніль-ідеал у кільці R_i для кожного i .
- (D) $R = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$, причому всі головні кручення тривіальні в категоріях модулів над кожним R_i .

Доведення.

Будемо доводити теорему за такою схемою:

(A) $\Rightarrow$ (B) $\Rightarrow$ (C) $\Rightarrow$ (D) $\Rightarrow$ (A).

(A) $\Rightarrow$ (B).

Нехай виконується умова (A). Припустимо, що кільце R не має нерозкладного кільцевого розкладу. Тоді існує строго спадна система ідеалів $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_k \supset \dots$,

які породжені центральними ідемпотентами. Система цих іделів є базою радикального фільтру, відповідне кручення якого не розщеплюється (див. [1], с.85-86, доведення леми 3). Це кручення є головним, а всі головні кручення над цим кільцем розщеплюються. Ми отримали протиріччя. Таким чином, кільце можна представити у наступному вигляді:

$R = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$, де $R_1, \dots, R_n$ - нерозкладні кільця.

Нехай r_i - головне кручення над R_i , а E_i - відповідний для нього радикальний фільтр. Покладемо $E := \{T_1 + \dots + T_n\}$, де T_k пробігає всі ідеали R_k для кожного $k \neq i$, а T_i пробігає всі ідеали радикального фільтру E_i . Тоді E - радикальний фільтр кільця R (див. [1], с.83, доведення леми 1). Оскільки кручення r_i є головним, то таким є і кручення r , що відповідає радикальному фільтру E . Зрозуміло, що $E_i = \varphi_i(E)$, де $\varphi_i: R \rightarrow R_i$ - природне накладання кілець. Отже, r_i - і-проекція r , тобто $r_i = \varphi_i(r)$. Тоді r_i - розщеплюване кручення, оскільки воно є проекцією розщеплюваного кручення, бо r - головне кручення над R (див. [2], с. 55, наслідок 2). Отже, для всякого i всі головні кручення над R_i розщеплюються.

(B) $\Rightarrow$ (C).

Див. доведення леми 4 праці [1].

(C) $\Rightarrow$ (D).

Нехай має місце умова (C), а E - радикальний фільтр в R_i , що відповідає якомусь головному крученню над R_i . Припустимо, що $E \neq \{R_i\}$. Тоді існує такий ідеал $K \in E$, що $K \neq R_i$. У силу локальності кільця R_i матимемо, що $K \subseteq J(R_i)$. Оскільки E має базу, що складається з головних іделів кільця R_i , то для деякого $a \in R_i$ $R_i a \in E$ і $R_i a \subseteq K$. Тоді $a \in K \subseteq J(R_i)$. У силу того, що $J(R_i)$ - ніль-ідеал в R_i ,

матимемо, що $a^d = 0$ для деякого натурального числа d . Тому $(R_i a)^d = 0$. В силу мультиплікативної замкненості радикального фільтру отримаємо, що $0 \in E$ (див. [3], с. 39, лема 6.7).

(D) $\Rightarrow$ (A).

Тут використовується очевидний факт, який полягає в тому, що проекція головного скруту - це головний скрут. А потім застосовується лема 1 праці [1].

Теорему доведено.

З теореми отримуємо очевидний наслідок.

Наслідок. Над комутативною областю головних іделів усі кручення розщеплюються тоді й тільки тоді, коли воно є полем.

ВИСНОВКИ

Отже, вирішено питання про розщеплюваність усіх головних кручень в категорії модулів над комутативним кільцем, а саме: над комутативним кільцем усі головні кручення розщеплюються тоді й тільки тоді, коли воно є прямою сумою локальних кілець, радикали Джекобсона яких є ніль-ідеалами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Горбачук Е.Л. Коммутативные кольца, над которыми все кручения расщепляемы // Математические исследования. - 1972. - 7, № 2. - С. 81-90.
- [2] Горбачук Е.Л. Радикалы в модулях над разными кольцами // Математические исследования. - 1972. - 7, № 1. - С. 44-59.
- [3] Кашу А.И. Радикалы и кручения в модулях. - Кишинев. - 1983. - 156 с.