



УНІВЕРСИТЕТСЬКА БІБЛІОТЕКА

Юрій Галь, Ольга Золота

ЛІНІЙНІ РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ

Навчально-методичний посібник

Дрогобич

2016

УДК 512.644 (07)

ББК 22.143р

Л 59

Рекомендовано до друку вченою радою
Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка
(протокол № 4 від 22.03.2016 р.)

Рецензенти:

Силюга Людмила Петрівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, інформатики та методики їх викладання у початковій школі Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка;

Комарницька Леся Іванівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Відповідальний за випуск: Винницький Богдан Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Юрій Галь, Ольга Золота.

Л 59 Лінійні різниці рівняння : навчально-методичний посібник [для студентів галузі знань 0402 Фізико-математичні науки спеціальності 7.04020101 Математика*] – Дрогобич : Видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка: 2016. – 84 с.

Посібник написано відповідно до програми навчальної дисципліни «Лінійні різниці рівняння» для підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня спеціаліста галузі знань 0402 Фізико-математичні науки спеціальності 7.04020101 Математика*, затверджені вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

ЗМІСТ

Передмова	4
РОЗДІЛ 1. Основні означення і поняття у теорії різницевого рівняння	
§1. Поняття про різницю функції.....	5
§2. Поняття цілої і дробової факторіальних функцій.....	10
§3. Сумування функцій.....	11
§4. Рівняння у скінченних різницях	17
РОЗДІЛ 2. Лінійні різницеві рівняння першого порядку	
§1. $\Delta f(x) = Q(x)$	22
§2. Лінійне однорідне різницеве рівняння.....	23
§3. Лінійне неоднорідне різницеве рівняння.....	24
§4. Метод варіації сталої або метод Лагранжа.....	26
РОЗДІЛ 3. Загальна теорія лінійних різницевого рівняння вищого порядку	
§1. Загальний вид лінійних рівнянь.....	31
§2. Основні теореми про розв'язки лінійних рівнянь.....	31
§3. Лінійна залежність функцій	36
§4. Допоміжні відомості з теорії визначників.....	39
§5. Властивості часткових розв'язків лінійного однорідного рівняння.....	41
§6. Лінійне неоднорідне різницеве рівняння. Метод варіації сталих....	49
§7. Загальний розв'язок різницевого рівняння	55
РОЗДІЛ 4. Лінійні рівняння із сталими коефіцієнтами	
§1. Лінійне однорідне рівняння. Характеристичне рівняння.....	61
§2. Знаходження часткового розв'язку лінійного неоднорідного рівняння методом невизначених коефіцієнтів.....	72
§3. Система лінійних різницевого рівнянь.....	76
Література.....	81
Предметний покажчик	82

ПЕРЕДМОВА

Теорія різницевих рівнянь передувала розвитку диференціального числення, яке привело до виникнення диференціальних рівнянь. Однак розв'язок диференціальних рівнянь рідко можна отримати за допомогою квадратур. Навіть у найпростіших випадках його значення у різних точках доводиться шукати наближено. Сучасні розв'язки диференціальних рівнянь уникають квадратур через широке використання комп'ютерів. До таких методів належать методи теорії різницевих рівнянь, яка останнім часом швидко розвивається.

Глибокий виклад теорії різницевих рівнянь міститься у роботах Гельфонда, Годунова та Мартинюка. Періодичні розв'язки різницевих рівнянь викладені у роботі Самарського. Цікаві приклади конкретних задач, що описуються різницевими рівняннями, можна знайти в роботах Ковача та Соколова.

Посібник розрахований на студентів старших курсів, магістрів та аспірантів.

РОЗДІЛ І. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ І ПОНЯТТЯ У ТЕОРІЇ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

§1. ПОНЯТТЯ ПРО РІЗНИЦІ ФУНКЦІЇ

Нехай маємо функцію одного аргументу $y(x) = f(x)$. Якщо дати аргументу x деякий приріст $\Delta x = h$, то відповідне значення функції буде $y(x+h) = f(x+h)$. Тоді різниця

$$y(x+h) - y(x) = \Delta y(x) = f(x+h) - f(x)$$

називається *різницею першого порядку* функції $y(x) = f(x)$.

Застосовуючи до отриманої різниці таке ж правило утворення різниці, як і до функції $y(x) = f(x)$, можна знайти різницю різниці функції $f(x)$, яка називається *різницею другого порядку* функції $y(x)$ і позначається $\Delta^2 y(x) = \Delta^2 f(x)$:

$$\begin{aligned}\Delta^2 y(x) &= \Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta\{f(x+h) - f(x)\} = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = \\ &= f(x+2h) - f(x+h) - \{f(x+h) - f(x)\} = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).\end{aligned}$$

Аналогічно, різницею функції третього порядку називається вираз

$$\begin{aligned}\Delta^3 y(x) &= \Delta^3 f(x) = \Delta\{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)\} = f(x+3h) - \\ &- 2f(x+2h) + f(x+h) - \{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)\} = \\ &= f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x).\end{aligned}$$

Далі продовжуючи цей процес, визначаємо різницю n -го порядку функції $y(x) = f(x)$:

$$\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x)) = \Delta^{n-1}(\Delta f(x)) = \Delta^{n-1}\{f(x+h) - f(x)\}.$$

Методом математичної індукції переконуємося, що для різниці функції справедлива формула

$$\Delta^n f(x) = \sum_{v=0}^n (-1)^{n-v} C_n^v f(x+vh) = f(x+nh) - nf(x+(n-1)h) + \\ + \frac{n(n-1)}{2!} f(x+(n-2)h) + \dots + (-1)^{n-1} nf(x+h) + (-1)^n f(x). \quad (1.1)$$

Наведемо доведення формули (1.1). Нехай $n=1$, тоді

$$\Delta f(x) = \sum_{v=0}^1 (-1)^{1-v} C_1^v f(x+vh) = (-1) C_1^0 f(x) + (-1)^0 C_1^1 f(x+h) = f(x+h) - f(x).$$

При $n=2, n=3$ отримаємо відповідно

$$\Delta^2 f(x) = \sum_{v=0}^2 (-1)^{2-v} C_2^v f(x+vh) = C_2^0 f(x) + (-1) C_2^1 f(x+h) + \\ + (-1)^0 C_2^2 f(x+2h) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x); \\ \Delta^3 f(x) = \sum_{v=0}^3 (-1)^{3-v} C_3^v f(x+vh) = -f(x) + 3f(x+h) - 3f(x+2h) + \\ + f(x+3h) = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x).$$

Отже, при $n=1, 2, 3$ справедливість формули (1.1) встановлена. Нехай формула (1.1) справедлива для будь-якого натурального n . Знайдемо

$$\Delta^{n+1} f(x) = \Delta(\Delta^n f(x)) = \Delta\left(\sum_{v=0}^n (-1)^{n-v} C_n^v f(x+vh)\right) = \sum_{v=0}^n (-1)^{n-v} C_n^v \{f(x+(v+1)h) - f(x+vh)\} = \\ = \sum_{v=0}^n (-1)^{n-v} C_n^v f(x+(v+1)h) - \sum_{v=0}^n (-1)^{n-v} C_n^v f(x+vh) = \\ = \sum_{v=0}^n (-1)^{n-v} C_n^v f(x+(v+1)h) + \sum_{v=0}^n (-1)^{n-v+1} C_n^v f(x+vh).$$

У першій сумі позначимо $k=v+1$. Якщо $v=0$, то $k=1$, а при $v=n$ отримаємо $k=n+1$. У другій сумі замінімо v на k :

$$\Delta^{n+1} f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n-k+1} C_n^{k-1} f(x+kh) + \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k+1} C_n^k f(x+kh).$$

Розіб'ємо написані суми на три окремі вирази, що відповідають змінам індексу k : 1) $k=0$; 2) $k=1, 2, \dots, n$; 3) $k=n+1$. Тоді отримаємо

$$\Delta^{n+1} f(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k+1} C_n^{k-1} f(x+kh) + C_n^n f(x+(n+1)h) + \\ + (-1)^{n+1} C_n^0 f(x) + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k+1} C_n^k f(x+kh) = f(x+(n+1)h) +$$

$$+ (-1)^{n+1} f(x) + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k+1} (C_n^k + C_n^{k-1}) f(x + kh).$$

Як відомо, справедливі формули

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k, \quad C_n^m = C_n^{n-m} \quad (1.2)$$

Тому

$$\begin{aligned} \Delta^{n+1} f(x) &= f(x + (n+1)h) + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k+1} C_{n+1}^k f(x + kh) + \\ &+ (-1)^{n+1} f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n-k+1} C_{n+1}^k f(x + kh), \end{aligned}$$

і справедливість формули (1.1) доведена для $n+1$.

Навпаки, для будь-якого натурального n справедлива рівність

$$f(x + nh) = \sum_{k=0}^n C_n^k \Delta^k f(x), \quad (1.3)$$

яку називають формулою Ньютона. Справедливість формули Ньютона (1.3)

доведемо наступним чином. Нехай $n=1$, тоді

$$\sum_{k=0}^1 C_1^k \Delta^k f(x) = f(x) + \Delta f(x) = f(x) + f(x+h) - f(x) = f(x+h).$$

При $n=2$ отримаємо

$$\sum_{k=0}^2 C_2^k \Delta^k f(x) = f(x) + 2\Delta f(x) + \Delta^2 f(x).$$

Підставляючи в ліву частину замість $\Delta f(x), \Delta^2 f(x)$ їх значення за формулою (1.1), маємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^2 C_2^k \Delta^k f(x) &= f(x) + 2\{f(x+h) - f(x)\} + \sum_{v=0}^2 (-1)^{2-v} C_2^v f(x+vh) = \\ &= f(x) + 2f(x+h) - 2f(x) + \{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)\} = f(x+2h). \end{aligned}$$

При $n=3$ отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^3 C_3^k \Delta^k f(x) &= f(x) + 3\Delta f(x) + 3\Delta^2 f(x) + \Delta^3 f(x) = f(x) + 3\{f(x+h) - \\ &- f(x)\} + 3\sum_{v=0}^2 (-1)^{2-v} C_2^v f(x+vh) + \sum_{v=0}^3 (-1)^{3-v} C_3^v f(x+vh) = f(x+3h). \end{aligned}$$

Отже, формула Ньютона (1.3) вірна при $n=1,2,3$. Взагалі

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n C_n^k \Delta^k f(x) &= f(x) + n\Delta f(x) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 f(x) + \dots + n\Delta^{n-1} f(x) + \\
&+ \Delta^n f(x) = f(x) + n\{f(x+h) - f(x)\} + \frac{n(n-1)}{2!} \sum_{v=0}^2 (-1)^{2-v} C_2^v f(x+vh) + \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \sum_{v=0}^3 (-1)^{3-v} C_3^v f(x+vh) + n \sum_{v=0}^{n-1} (-1)^{n-1-v} C_{n-1}^v f(x+vh) + \\
&+ \sum_{v=0}^n (-1)^{n-v} C_n^v f(x+nh) = f(x+nh) + a_{n-1} f(x+(n-1)h) + \\
&+ a_{n-2} f(x+(n-2)h) + \dots + a_0 f(x) = f(x+nh),
\end{aligned}$$

Оскільки $a_{n-1} = 0, a_{n-2} = 0, \dots, a_0 = 0$ і справедлива рівність

$$a_{n-1} f(x+(n-1)h) + a_{n-2} f(x+(n-2)h) + \dots + a_0 f(x) = 0.$$

Дійсно, використовуючи формулу $C_n^m = C_n^{n-m}$, маємо

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= (-1) C_n^{n-1} + n(-1)^0 C_{n-1}^{n-1} = -C_n^1 + n = 0, \\
a_{n-2} &= C_n^{n-2} + n(-1) C_{n-1}^{n-2} + \frac{n(n-1)}{2} C_{n-2}^{n-2} = C_n^2 - n C_{n-1}^1 + \\
&+ \frac{n(n-1)}{2} C_{n-2}^0 = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{1} + \frac{n(n-1)}{2} = 0, \\
a_{n-3} &= (-1)^3 C_n^{n-3} + n(-1)^2 C_{n-1}^{n-3} + \frac{n(n-1)}{2!} (-1) C_{n-2}^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \\
\cdot C_{n-3}^{n-3} &= -\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + n C_{n-1}^2 - \frac{n(n-1)}{2} C_{n-2}^1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2} = 0,
\end{aligned}$$

$a_{n-2} = 0, \dots, a_0 = 0$ і має місце рівність

$$a_{n-4} f(x+(n-1)h) + a_{n-2} f(x+(n-2)h) + \dots + a_0 f(x) = 0.$$

Отже, справедливість формули (1.3) доведено.

Якщо маємо функцію декількох аргументів $f(x, y, z, \dots)$, то її різниця, що відповідає скінченному приросту h одного з аргументів, наприклад, x або y , називається частинною різницею функції і позначається

$$\begin{aligned}
\Delta_x f(x, y, z, \dots) &= f(x+h, y, z, \dots) - f(x, y, z, \dots), \\
\Delta_y f(x, y, z, \dots) &= f(x, y+h, z, \dots) - f(x, y, z, \dots).
\end{aligned}$$

Використовуючи означення різниці функції, легко знайдемо різницю суми, добутку, частки функцій $u(x)$ і $v(x)$:

$$\Delta(u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v, \Delta(cu) = c\Delta u, c = \text{const},$$

$$\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v,$$

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

Наведемо різниці найпростіших функцій:

$$\Delta x^n = nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n; \quad \Delta a^x = a^x(a^h - 1),$$

$$\Delta \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}, \quad \Delta \cos x = -2 \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2},$$

$$\Delta \operatorname{tg} x = \frac{\sinh}{\cos x \cos(x+h)}, \quad \Delta \operatorname{ctg} x = \frac{-\sinh}{\sin x \sin(x+h)},$$

$$\Delta \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{h}{1 + hx + x^2}, \quad \Delta \operatorname{arcctg} x = -\operatorname{arctg} \frac{h}{1 + hx + x^2},$$

$$\Delta \ln x = \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right), \quad \Delta \frac{1}{x} = -\frac{h}{x(x+h)}.$$

Якщо похідні функції $f(x)$ неперервні в точці x , то звідси випливає, що

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} = f'(x), \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 f}{h^2} = f''(x), \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^n f}{h^n} = f^{(n)}(x).$$

Таким чином, при малому h вирази $\frac{\Delta f}{h}, \frac{\Delta^2 f}{h^2}, \dots, \frac{\Delta^n f}{h^n}$ можна прийняти за наближенні значення $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$.

Приклад 1. Визначити різницю n -го порядку ($n=1,2,3,\dots$) для функції $f(x) = x^3$;

Розв'язання.

$$\Delta x^4 = (x+h)^3 - x^3 = 3x^2h + 3xh^2 + h^3,$$

$$\Delta^2 x^3 = 3h(x+h)^2 + 3h^2(x+h) + h^3 - (3x^2h + 3xh^2 + h^3) = 6h^2(x+h),$$

$$\Delta^3 x^3 = 6h^2(x+2h) - 6h^2(x+h) = 6h^3, \quad \Delta^4 x^3 = 0.$$

Легко переконатися, що взагалі перша різниця будь-якого полінома n -го степеня є поліном $(n-1)$ -го степеня і т. д., а також, що його n -а різниця виражається за формулою

$$\Delta^n(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n) = A_0n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1h^n,$$

усі різниці вищого порядку дорівнюють нулю.

§2. ПОНЯТТЯ ЦІЛОЇ І ДРОБОВОЇ ФАКТОРІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Добуток $x(x-h)(x-2h)\dots(x-(n-1)h)$ відіграє особливу роль у теорії скінченних різниць. Цей добуток називається *цілою факторіальною функцією* або узагальненим степенем x і позначається $x^{\left(\frac{n}{h}\right)}$, так що за означенням

$$x^{\left(\frac{n}{h}\right)} = x(x-h)(x-2h)\dots(x-(n-1)h). \quad (1.4)$$

Узагальнений степінь x за своїми властивостями відіграє у теорії скінченних різниць ту ж роль, що і звичайний степінь x у диференціальному численні. Якби ми спробували обчислити скінченну різницю $\Delta^n x^n$ функції x^n , то цей вираз виявився б досить складним, а головне, не був би пов'язаним із самою функцією x^n по своїй структурі. Наприклад, уже різниця першого порядку

$$\Delta x^n = hnx^{n-1} + h^2 \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} + \dots + h^n$$

виявляється складним виразом. Взяття скінченної різниці цілої факторіальної функції (узагальненого степеня x) не руйнує її структури. Справді,

$$\begin{aligned} \Delta x^{\left(\frac{n}{h}\right)} &= \Delta \{x(x-h)(x-2h)\dots(x-(n-1)h)\} = \\ &= (x+h)x(x-h)(x-2h)\dots(x-(n-2)h) - x(x-h)(x-2h)\dots(x-(n-2)h) \cdot \\ &\cdot (x-(n-1)h) = x(x-h)(x-2h)\dots(x-(n-2)h) \{x+h - (x-(n-1)h)\} = \\ &= x(x-h)(x-2h)\dots(x-(n-2)h)nh = nhx^{\left(\frac{n-1}{h}\right)}. \end{aligned}$$

Ми отримали формулу

$$\Delta x^{\left(\frac{n}{h}\right)} = nhx^{\left(\frac{n-1}{h}\right)}, \quad (1.5)$$

яка аналогічна формулі диференціювання звичайного степеня у математичному аналізі.

Використовуючи формулу (1.5), отримуємо

$$\Delta x^{\left(\frac{n-1}{h}\right)} = (n-1)hx^{\left(\frac{n-2}{h}\right)},$$

тому $\Delta^2 x^{\left(\frac{n}{h}\right)} = nh\Delta x^{\left(\frac{n-1}{h}\right)} = n(n-1)h^2 x^{\left(\frac{n-2}{h}\right)}$ і т. д.

Функція $f(x) = \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+(n-1)h)}$ називається дробовою

факторіальною і позначається $x^{\left(-\frac{n}{h}\right)}$. Отже, за означенням

$$x^{\left(-\frac{n}{h}\right)} = \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+(n-1)h)},$$

надалі

$$\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+nh)} = x^{\left(-\frac{n+1}{h}\right)}.$$

Легко переконатися, що

$$\Delta x^{\left(-\frac{n}{h}\right)} = \Delta \left\{ \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+(n-1)h)} \right\} = \frac{-nh}{x(x+h)\dots(x+nh)} = -nhx^{\left(-\frac{n+1}{h}\right)},$$

і ми отримали формулу

$$\Delta x^{\left(-\frac{n}{h}\right)} = -nhx^{\left(-\frac{n+1}{h}\right)}. \quad (1.6)$$

§3. СУМУВАННЯ ФУНКЦІЙ

Раніше ми для заданої функції $F(x)$ шукали її різницю, яка, взагалі кажучи, є функцією від x і h . Позначимо її через $f(x)$. Обернена задача знаходження функції $F(x)$, якщо відома її різниця $f(x)$, є однією з найважливіших і найважчих задач різницевого числення і називається сумуванням функції $f(x)$, що позначається $\sum f(x)$.

Означення. Сумою заданої функції $f(x)$ називається будь-яка функція $F(x)$, різниця якої дорівнює $f(x)$:

оскільки

$$\begin{aligned}\Delta F_3(x) &= F_3(x+h) - F_3(x) = \frac{(x+h)^2 x^2}{4h} - \frac{x^2(x-h)^2}{4h} = \\ &= \frac{x^2}{4h} [x^2 + 2hx + h^2 - (x^2 - 2hx + h^2)] = x^3.\end{aligned}$$

$$4) \sum \sin x = -\frac{\cos\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}} + c = F_4(x) + c, \quad (1.12)$$

оскільки

$$\Delta F_4(x) = -\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}} \Delta \cos\left(x - \frac{h}{2}\right) = -\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}} \left[\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(x - \frac{h}{2}\right) \right] = \sin x.$$

$$5) \sum \cos x = \frac{\sin\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}} + c = F_5(x) + c, \quad (1.13)$$

справді,

$$\Delta F_5(x) = \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}} \Delta \sin\left(x - \frac{h}{2}\right) = \cos x.$$

Таких формул можна було б навести дуже багато, але вже з наведених прикладів видно, що формули сумування є більш громіздкими і тому менш зручними у застосуванні, ніж формули інтегрального числення. Так, наприклад, формула сумування звичайного степеня, тобто $\sum x^n$, уже має дуже громіздкий вигляд.

Якщо функція $\varphi(x)$ є комбінацією елементарних функцій, то можна за аналогією з інтегральним численням спробувати звести задачу сумування функції $\varphi(x)$ до сумування, так би мовити, «табличних функцій», тобто до сумування функцій, суми яких нам відомі. У інтегральному численні для цього використовують табличні інтеграли.

До цього часу ми діяли за аналогією до інтегрального числення, але ця аналогія відразу припиняється, як тільки ми зустрічаємося з випадком, коли серед елементарних функцій не можна знайти таку функцію $F(x)$, щоб $\Delta F(x) = \varphi(x)$. Такі випадки зустрічаються уже для найпростіших функцій $\varphi(x)$. Наприклад, рівняння $\Delta F(x) = \frac{1}{x}$ або $\Delta F(x) = \ln(x)$ не мають розв'язків серед елементарних функцій. Специфіка задачі сумування функцій не дозволяє нам у таких випадках йти шляхом інтегрального числення.

Приклад 2. Враховуючи формулу (1.8) і те, що $\sum x = \frac{x(x-h)}{2h} + c$, знайти суму n перших членів арифметичної прогресії, яку утворюють натуральні числа

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Розв'язання. $F(x) = \frac{x(x-h)}{2h} + c$. При $h=1$ маємо $F(1) = \frac{x(x-1)}{2} + c$. Згідно з формулою (1.8) $x_0 = 1, x_0 + (n-1)h = 1 + (n-1) = n$.

$$\sum_1^n x = 1 + 2 + \dots + n = F(x_0 + nh) - F(x_0) = F(1+n) = \frac{1}{2}n(n+1),$$

оскільки $F(1) = 0$.

Приклад 3. Враховуючи формулу (1.8) і те, що $\sum x^2 = \frac{x(x-h)(2x-h)}{6h} + c$, довести рівність

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Розв'язання. Рівність $F(x) = \frac{1}{6h}x(x-h)(2x-h) + c$ при $h=1$ дає $F(x) = \frac{1}{6}(x-1)x(2x-1) + c$. Отже, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_1^n x^2 = F(1+n) - F(1)$, оскільки $F(1) = 0$ і $F(1+n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Приклад 4. Враховуючи формулу (1.8) і те, що

$$\sum x^3 = \frac{1}{4h} x^2 (x-h)^2 + c = F(x) + c, \text{ довести, що}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

Розв'язання. Оскільки при $h=1$ маємо $F(x) = \frac{1}{4} x^2 (x-1)^2 + c$ і $F(1)=0$, то

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \sum_1^n x^3 = F(1+n) = \frac{1}{4} (1+n)^2 n^2, \text{ що і потрібно було довести.}$$

Приклад 5. Використовуючи формули для $\sum \sin x$ і $\sum \cos x$, знайти таку функцію $F(x)$, для якої $\Delta F(x) = F(x+h) - F(x) = \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)$.

Розв'язання. Згідно з означенням

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = \sum \left[\sin x \cos \frac{h}{2} + \cos x \sin \frac{h}{2} \right] = \\ &= \cos \frac{h}{2} \sum \sin x + \sin \frac{h}{2} \sum \cos x = \cos \frac{h}{2} \left[-\frac{\cos\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}} \right] + \\ &+ \sin \frac{h}{2} \frac{\sin\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{h}{2}} \left[-\cos \frac{h}{2} \cos\left(x - \frac{h}{2}\right) + \sin \frac{h}{2} \sin\left(x - \frac{h}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{h}{2}} \cos \left[\frac{h}{2} + \left(x - \frac{h}{2}\right) \right] = -\frac{\cos x}{2 \sin \frac{h}{2}} + c. \end{aligned}$$

Отже,

$$\sum \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = -\frac{\cos x}{2 \sin \frac{h}{2}} + c. \quad (1.14)$$

У цьому прикладі ми використовували формули

$$\sum (u \pm v) = \sum u \pm \sum v, \quad (1.15)$$

$$\sum cu = c \sum u, \quad (1.16)$$

які показують, що правила сумування функцій аналогічні правилам інтегрування функцій.

Приклад 6. Довести справедливості формули

$$s = \sin h + \sin 2h + \dots + \sin nh = \frac{1}{\sin \frac{h}{2}} \sin nh \sin \frac{1}{2}(n+1)h.$$

Розв'язання. Використовуючи (1.12) і формулу

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \text{ отримаємо}$$

$$\begin{aligned} \sum_0^{nh} \sin x &= -\frac{\cos \left(x - \frac{h}{2} \right)}{2 \sin \frac{h}{2}} \Big|_0^{(n+1)h} = \frac{1}{2 \sin \frac{h}{2}} \left[\cos \frac{h}{2} - \cos \frac{(2n+1)h}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{h}{2}} \left[-2 \sin \frac{1}{2}(n+1)h \sin \left(-\frac{1}{2}nh \right) \right] = \frac{\sin \frac{1}{2}nh \sin \frac{1}{2}(n+1)h}{\sin \frac{1}{2}h}. \end{aligned}$$

Справедливою є формула

$$\sum u \Delta v = uv - \sum (v + \Delta v) \Delta u, \quad (1.17)$$

яку називають сумуванням частинами.

Доведення. Нехай $\sum uv = F(x)$. Згідно з означенням сумування це означає, що $\Delta F(x) = \Delta \sum uv = uv$. Враховуючи відому формулу $\Delta(uv) = v \Delta u + u \Delta v + \Delta u \Delta v$, отримуємо

$$uv = \Delta \sum uv = \sum \Delta uv = \sum (v \Delta u + u \Delta v + \Delta u \Delta v) = \sum (v + \Delta v) \Delta u + \sum u \Delta v.$$

$$\text{Отже, } \sum u \Delta v = uv - \sum (v + \Delta v) \Delta u.$$

Приклад 7. Застосовуючи формулу сумування частинами (1.17), довести, що

$$\sum x \cos x = \frac{x \sin \left(x - \frac{h}{2} \right)}{2 \sin \frac{h}{2}} + \frac{h \cos x}{4 \sin^2 \frac{h}{2}} + c.$$

Зробити перевірку цієї формули.

Розв'язання. Знайдемо $\sum x \cos x$. Використовуючи формулу (1.17), у даному випадку маємо $u = x, \Delta v = \cos x$, а звідси

$$\Delta u = \Delta x = (x+h) - x = h, v(x) = \sum \cos x = \frac{\sin\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}}.$$

$$\begin{aligned} v + \Delta v &= \frac{\sin\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}} + \cos x = \frac{1}{2 \sin \frac{h}{2}} \left[\sin\left(x - \frac{h}{2}\right) + 2 \cos x \sin \frac{h}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{h}{2}} \left(\sin x \cos \frac{h}{2} + \cos x \sin \frac{h}{2} \right) = \frac{\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}}, \end{aligned}$$

тому

$$\sum x \cos x \sum u \Delta v = \frac{x \sin\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}} - \sum \frac{h \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}}.$$

Використовуючи формулу (1.14), отримаємо

$$\sum x \cos x = \frac{x \sin\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}} + \frac{h \cos x}{4 \sin^2 \frac{h}{2}} + c = F(x) + c$$

і

$$\Delta F(x) = F(x+h) - F(x) = x \cos x.$$

§4. РІВНЯННЯ У СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЯХ

Співвідношення

$$F(x, f(x), \Delta f(x), \dots, \Delta^n f(x)) = 0, \quad (1.18)$$

де F – задана, а f – шукана функції, ми будемо називати різницеvim рівнянням з однієї невідомою функцією порядку n , якщо співвідношення (1.18) після заміни приростів їх виразами за формулою (1.1) явно містить як $f(x+nh)$, так і $f(x)$.

Якщо рівняння (1.18) після спрощень не містить $f(x+nh)$, то його природно вважати рівнянням порядку нижче n . Якщо ж воно не містить $f(x)$,

але містить, скажімо, $f(x+h)$, то заміна невідомої змінної $x+h$ на x приводить це рівняння до рівняння порядку $n-1$. Тут маємо суттєву відмінність між рівняннями в скінченних різницях і диференціальними рівняннями, де заміна незалежної змінної, як відомо, порядку не знижує. Пояснимо це на прикладі.

Розглянемо різницеве рівняння

$$2f(x) + 3\Delta f(x) + \Delta^3 f(x) = x \quad (a)$$

Підставляючи у (a) вирази

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x),$$

$$\Delta^3 f(x) = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x),$$

отримаємо $3f(x+2h) - f(x+3h) = x$. Замінивши $x+2h$ на x , маємо рівняння $3f(x) - f(x+h) = x - 2h$ першого порядку. Відповідно цьому і рівняння (a) ми будемо вважати рівнянням першого порядку.

Розв'язком 1.18) назвемо таку функцію $f(x)$, яка тотожно перетворює ліву частину в 0 (тобто для усіх значень x).

Якщо в рівняння (1.18) підставити всі $\Delta^n f(x)$, виражені через $f(x), f(x+h), \dots, f(x+nh)$, то нова форма рівняння (1.18) виглядатиме так:

$$\phi(x, f(x), f(x+h), \dots, f(x+nh)) = 0. \quad (1.19)$$

Навпаки, за допомогою формул (1.3) ми можемо від різницевого рівняння (1.19) перейти до різницевого рівняння (1.18).

Різницеве рівняння (1.18) або (1.19) називається лінійним, якщо невідома функція $f(x)$ та всі $\Delta f(x), \dots, \Delta^n f(x)$ ($f(x)$ і всі $f(x+h), \dots, f(x+nh)$ у (1.19)) входять у це рівняння тільки в першому степені. Лінійні рівняння (1.18) або (1.19) мають вид

$$a_0(x)\Delta^n f(x) + a_1(x)\Delta^{n-1} f(x) + \dots + a_n(x)f(x) = Q(x)$$

або

$$b_0(x)f(x+nh) + b_1(x)f(x+(n-1)h) + \dots + b_n(x)f(x) = \phi(x),$$

де $a_i(x), b_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) і $Q(x), \phi(x)$ – відомі функції.

Будемо вважати, що співвідношення (б) є загальним розв'язком різницевого рівняння (1.20), якщо в результаті виключення сталих із співвідношень (в) отримуємо різницеве рівняння (1.20).

Приклад 8. Знайти відповідне різницеве рівняння, загальний розв'язок якого є функцією $y(x) = c_1 2^{x/h} + c_2 3^{x/h}$.

Розв'язання. $y(x+h) = c_1 2^{(x+h)/h} + c_2 3^{(x+h)/h} = 2c_1 2^{x/h} + 2c_2 3^{x/h}$,
 $y(x+2h) = 4c_1 2^{x/h} + 9c_2 3^{x/h}$. Визначимо $c_1 2^{x/h}, c_2 3^{x/h}$ із системи

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 2^{x/h} + c_2 3^{x/h}, \\ y(x+1) &= 2c_1 2^{x/h} + 3c_2 3^{x/h}. \end{aligned}$$

Отримаємо $c_1 2^{x/h} = 3y(x) - y(x+h)$, $c_2 3^{x/h} = y(x+h) - 2y(x)$. Підставляючи ці значення у вираз $y(x+2h)$, маємо лінійне різницеве рівняння другого порядку

$$y(x+2h) - 5y(x+h) + 6y(x) = 0.$$

Контрольні запитання

1. Знайти $\Delta(\cos x)$.
2. Сформулюйте означення лінійного різницевого рівняння.
3. Наведіть вираз n -ої різниці функції $f(x)$.
4. Що таке часткова різниця функції?
5. Сформулюйте означення суми заданої функції.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити різницю n -го порядку ($n=1,2,3,\dots$) для функції $\varphi(x) = a^x$.

Відповідь: $\Delta^n a^x = a^x (a^h - 1)^n$.

2. Знайти суму $s = 1 + \cosh + \cos 2h + \dots + \cos(n-1)h$.

Відповідь: $\frac{1}{\sin \frac{h}{2}} \sin \frac{nh}{2} \cos \left(\frac{n-1}{2} h \right)$.

3. Використовуючи формули $\sum a^x = \frac{a^x - 1}{a^h - 1} + c$ і (1.8), знайти суму

геометричної прогресії $s = a + a^2 + \dots + a^n = \sum_1^n a^x$.

Відповідь: $\frac{a(1-q^n)}{1-q}$, де $q = a$.

4. Застосовуючи формулу сумування частинами (1.17), довести, що:

$$a) \sum x a^x = \frac{a^x}{a^h - 1} \left[x - \frac{h a^h}{a^h - 1} \right] + c;$$

$$б) \sum x \sin x = \frac{h \sin x}{4 \sin^2 \frac{h}{2}} - \frac{x \cos \left(x - \frac{h}{2} \right)}{2 \sin \frac{h}{2}} + c.$$

Зробити перевірку цих формул.

5. Знайти відповідне різницеве рівняння, загальний розв'язок якого є функцією $y^2(x) + cx = 0$.

Відповідь: $(x+h)y^2(x) - xy^2(x+h) = 0$.

РОЗДІЛ 2. ЛІНІЙНІ РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо деякі типи найпростіших різницевих рівнянь, для яких легко побудувати загальний розв'язок.

$$\S 1. \Delta f(x) = Q(x)$$

Перепишемо це рівняння у вигляді $f(x+h) - f(x) = Q(x)$. Будемо надавати аргументу x значень $x = 0, h, 2h, \dots$, тому доцільно позначити $x = nh, n = 0, 1, 2, \dots$, і розглянуте рівняння запишеться так:

$$\Delta f(nh) = f(nh+h) - f(nh) = Q(nh). \quad (2.1)$$

Замінивши n значеннями $0, 1, 2, 3, \dots, n-1$, отримаємо

$$\begin{aligned} f(h) - f(0) &= Q(0), \\ f(2h) - f(h) &= Q(h), \\ f(3h) - f(2h) &= Q(2h), \end{aligned}$$

.

$$f(nh) - f((n-1)h) = Q((n-1)h),$$

звідки $f(nh) = f(0) + \sum_{v=0}^{n-1} Q(vh)$, де $f(0)$ – значення $f(nh)$ при $n=0$, яке завжди

можна прийняти за довільну сталу.

Отже, загальний розв'язок рівняння (2.1) має вигляд

$$f(nh) = c + \sum_{v=0}^{n-1} Q(vh). \quad (2.2)$$

Виключаючи сталу c з виразів $f(nh) = c + \sum_{v=0}^{n-1} Q(vh)$, $f(nh+h) = c + \sum_{v=0}^n Q(vh)$,

отримаємо

$$f(nh+h)-f(nh)=\sum_{v=0}^n Q(vh)-\sum_{v=0}^{n-1} Q(vh)=Q(nh).$$

§2. ЛІНІЙНЕ ОДНОРІДНЕ РІЗНИЦЕВЕ РІВНЯННЯ

Розглянемо лінійне різницеве рівняння першого порядку

$$\Delta f(x)+P(x)f(x)=Q(x). \quad (2.3)$$

Це рівняння будемо називати однорідним, якщо $Q(x)=0$, в іншому випадку – неоднорідним. Однорідне різницеве рівняння має вид

$$\Delta f(x)+P(x)f(x)=0 \text{ або } f(x+h)=[1-P(x)]f(x). \quad (2.4)$$

Будемо надавати аргументу x значень $x=0,h,2h,\dots$, тобто $x=nh, n=0,1,\dots$, тому різницеве рівняння (2.4) набуває виду

$$f(nh+h)=[1-P(nh)]f(nh). \quad (2.5)$$

Нехай n набуває значень $n=0,1,2,\dots$, тоді отримаємо наступні рівності

$$\begin{aligned} f(h) &= [1-P(0)]f(0), \\ f(2h) &= [1-P(h)]f(h), \\ f(3h) &= [1-P(2h)]f(2h), \end{aligned}$$

.

$$f(nh)=[1-P(n-1)h]f((n-1)h).$$

Перемножуючи почленно отримані рівності і скорочуючи на добуток

$$f(h)f(2h)\dots f((n-1)h) \neq 0, \text{ маємо шуканий розв'язок } f(nh)=f(0)\prod_{t=0}^{(n-1)h} [1-P(t)]$$

або $f(nh)=f(0)\prod_{v=0}^{n-1} [1-P(vh)]$. Величина $f(0)$ є початковим значенням функції

$f(nh)$ при $n=0$, яку завжди можна прийняти за довільну сталу. Отже, загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння має вид

$$f(nh)=c\prod_{t=0}^{n-1} [1-P(t)], \quad f(nh)=c\prod_{v=0}^{n-1} [1-P(vh)], \quad (2.6)$$

причому вважається, що $\prod_{t=0}^{-h} [1 - P(t)] = \prod_{v=0}^{-1} [1 - P(vh)] = 1, 0! = 1$.

Перевірка. Підставляючи (2.6) у (2.5), одержимо тотожність

$$c \prod_{t=0}^{nh} [1 - P(t)] = [1 - P(nh)] c \prod_{t=0}^{(n-1)h} [1 - P(t)], c \prod_{t=0}^{nh} [1 - P(t)] = c \prod_{t=0}^{nh} [1 - P(t)], (n = 0, 1, 2, \dots).$$

§3. ЛІНІЙНЕ НЕОДНОРІДНЕ РІЗНИЦЕВЕ РІВНЯННЯ

Перейдемо тепер до рівняння (2.3). У цьому випадку невідому функцію $f(x)$ зобразимо у вигляді добутку

$$f(x) = u(x)v(x), \quad (2.7)$$

де функції $u(x)$ і $v(x)$ – поки довільні. Зі співвідношення (2.7) знаходимо

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) = u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) = \\ &= u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x) = \\ &= u(x+h)[v(x+h) - v(x)] + v(x)\Delta u(x) = u(x+h)\Delta v(x) + v(x)\Delta u(x). \end{aligned}$$

Рівняння (2.3) набуває виду

$$u(x+h)\Delta v(x) + v(x)\Delta u(x) + P(x)u(x)v(x) = Q(x)$$

або (2.8)

$$u(x+h)\Delta v(x) + v(x)[\Delta u(x) + P(x)u(x)] = Q(x).$$

Виберемо $u(x)$ так, щоб $\Delta u(x) + P(x)u(x) = 0$. Для цього на основі формули (2.6)

при $f(0) = c = 1$ слід покласти $u(x) = \prod_{t=0}^{x-h} [1 - P(t)]$. Після такого вибору функції

$u(x)$ рівняння (2.8) приймає вигляд $u(x+h)\Delta v(x) = Q(x)$ або

$\Delta v(x) = Q(x) / \prod_{t=0}^x [1 - P(t)]$. Сумуючи $\Delta v(x)$ у межах від $v=0$ до $v=(n-1)h$,

одержимо

$$\sum_{v=0}^{(n-1)h} \Delta v(v) = \sum_{v=0}^{(n-1)h} \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right).$$

Маємо

$$\Delta v(0) + \Delta v(h) + \Delta v(2h) + \dots + \Delta v((n-1)h) = \sum_{v=0}^{(n-1)h} \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right)$$

або

$$\begin{aligned} & [\nu(h) - \nu(0)] + [\nu(2h) - \nu(h)] + [\nu(3h) - \nu(2h)] + \dots + [\nu(nh) - \nu((n-1)h)] = \\ & = \nu(nh) - \nu(0) = \sum_{v=0}^{(n-1)h} \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right), \end{aligned}$$

звідки

$$\nu(x) = \nu(0) + \sum_{v=0}^{x-h} \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right).$$

Згідно (2.7) при $\nu(0) = c$ отримаємо

$$f(x) = u(x)\nu(x) = \prod_{t=0}^{x-h} [1 - P(t)] \left\{ c + \sum_{v=0}^{x-h} \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right) \right\} \quad (2.9)$$

для $x = nh, n = 0, 1, 2, \dots$.

Формула (2.9) зображає загальний розв'язок неоднорідного лінійного різницевого рівняння (2.3):

$$\Delta f(x) + P(x)f(x) = Q(x), \quad f(x+h) + (P(x)-1)f(x) = Q(x)$$

або

(2.3)

$$f(x+h) = [1 - P(x)]f(x) + Q(x).$$

Якщо $h=1$, тоді $x=n$ і формула (2.9) запишеться так:

$$f(n) = \prod_{t=0}^{n-1} [1 - P(t)] \left\{ c + \sum_{v=0}^{n-1} \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right) \right\}. \quad (2.10)$$

Перевірка. Із (2.9) отримаємо

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \prod_{t=0}^x [1 - P(t)] \left\{ c + \sum_{v=0}^x \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right) \right\} = [1 - P(x)] \cdot \\ & \cdot \prod_{t=0}^{x-h} [1 - P(t)] \left\{ c + \sum_{v=0}^{x-h} \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right) + Q(x) / \prod_{t=0}^x [1 - P(t)] \right\} = \\ & = [1 - P(x)] \prod_{t=0}^{x-h} [1 - P(t)] \left\{ c + \sum_{v=0}^{x-h} \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right) \right\} + [1 - P(x)] \cdot \\ & \cdot \prod_{t=0}^{x-h} [1 - P(t)] \left(Q(x) / \prod_{t=0}^x [1 - P(t)] \right) = [1 - P(x)] \prod_{t=0}^{x-h} [1 - P(t)] \left\{ c + \right. \\ & \left. + \sum_{v=0}^{x-h} \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right) \right\} + \prod_{t=0}^x [1 - P(t)] \left(Q(x) / \prod_{t=0}^x [1 - P(t)] \right). \end{aligned}$$

Ми отримали рівняння $f(x+h) = [1 - P(x)]f(x) + Q(x)$.

Запишемо формулу (2.9), яка виражає загальний розв'язок рівняння (2.3) у виді

$$f(x) = c \prod_{t=0}^{x-h} [1 - P(t)] + \prod_{t=0}^{x-h} [1 - P(t)] \sum_{v=0}^{x-h} \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right) = y(x) + Y(x).$$

Перший доданок $y(x) = c \prod_{t=0}^{x-h} [1 - P(t)]$ згідно з формулою (2.6) є загальним розв'язком рішенням відповідного однорідного різницевого рівняння $\Delta y(x) + P(x)y = 0$. Покажемо, що функція

$$Y(x) = \prod_{t=0}^{x-h} [1 - P(t)] \sum_{v=0}^{x-h} \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right) \quad (2.11)$$

задовольняє неоднорідне лінійне різницеве рівняння. Дійсно, з (2.11) випливає, що

$$Y(x+h) = \prod_{t=0}^x [1 - P(t)] \sum_{v=0}^x \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right).$$

Знайдемо вираз

$$\begin{aligned} [1 - P(x)]Y(x) + Q(x) &= [1 - P(x)] \prod_{t=0}^{x-h} [1 - P(t)] \sum_{v=0}^{x-h} \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right) + \\ &+ Q(x) = \prod_{t=0}^x [1 - P(t)] \sum_{v=0}^{x-h} \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right) + \prod_{t=0}^x [1 - P(t)] (Q(x) / \\ &/ \prod_{t=0}^x [1 - P(t)]) = \prod_{t=0}^x [1 - P(t)] \left\{ \sum_{v=0}^{x-h} \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right) + Q(x) / \right. \\ &\left. / \prod_{t=0}^x [1 - P(t)] \right\} = \prod_{t=0}^x [1 - P(t)] \sum_{v=0}^x \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right) = Y(x+h). \end{aligned}$$

Отже, $Y(x)$ задовольняє рівняння

$$Y(x+h) = [1 - P(x)]Y(x) + Q(x).$$

Отже, нами доведена наступна теорема.

Теорема. Загальний розв'язок неоднорідного лінійного різницевого рівняння є сумою загального розв'язку відповідного однорідного лінійного різницевого рівняння і часткового розв'язку неоднорідного лінійного різницевого рівняння.

§4. МЕТОД ВАРІАЦІЇ СТАЛОЇ АБО МЕТОД ЛАГРАНЖА

Розглянемо неоднорідне різницеве лінійне рівняння (2.3)

$$\Delta f(x) + P(x)f(x) = Q(x) \text{ або } f(x+h) = [1 - P(x)]f(x) + Q(x).$$

Відповідне однорідне лінійне різницеве рівняння має вигляд (2.4). Загальний розв'язок однорідного різничевого рівняння (2.4) запишеться так: $f(x) = cf_1(x)$, де $f_1(x)$ – частковий розв'язок рівняння (2.4), яке згідно (2.6) виражається

формулою $f_1(x) = \prod_{t=0}^{x-h} [1 - P(t)]$. Вважаємо, що у виразі $f(x) = cf_1(x)$ величина c – змінна, тобто $c = c(x)$, і вимагаємо, щоб

$$f(x) = c(x)f_1(x) \quad (2.12)$$

задовольняло неоднорідне різницеве рівняння (2.3).

Підставляючи (2.12) у рівняння (2.3), отримаємо

$$c(x+h)f_1(x+h) = [1 - P(x)]c(x)f_1(x) + Q(x).$$

Оскільки $f_1(x)$ є розв'язком однорідного рівняння, то $f_1(x+h) = [1 - P(x)]f_1(x)$.

Тому попередній вираз запишеться $c(x+h)f_1(x+h) = c(x)f_1(x+h) + Q(x)$ або $[c(x+h) - c(x)]f_1(x+h) = Q(x)$, тобто маємо

$$\Delta c(x)f_1(x+h) = Q(x). \quad (2.13)$$

Умова (2.13) називається умовою Лагранжа. З (2.13) отримаємо

$$\Delta c(x) = Q(x) / f_1(x+h) = Q(x) / \prod_{t=0}^x [1 - P(t)]$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вид

$$c(x) = \sum_{v=0}^{x-h} \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right) + c.$$

Тому згідно (2.12)

$$f(x) = c(x)f_1(x) = \left\{ c + \sum_{v=0}^{x-h} \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right) \right\} \prod_{t=0}^{x-h} [1 - P(t)]$$

і ми отримали формулу (2.9).

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок $f(n+1) - 2f(n) = n+1, (h=1)$.

Розв'язання. Згідно з формулою (2.10)

$$f(n) = \prod_{t=0}^{n-1} [1 - P(t)] \left\{ c + \sum_{v=0}^{n-1} \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right) \right\}.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вид

$$f(n) = c \prod_{t=0}^{n-1} [1 - P(t)] = cf_1(n),$$

а частковий розв'язок неоднорідного рівняння –

$$Y(n) = \prod_{t=0}^{n-1} [1 - P(t)] \sum_{v=0}^{n-1} \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right).$$

Для однорідного рівняння $f(n+1) - 2f(n) = 0$ знайдемо $P(x)$. З (2.4) при $h=1$ однорідне рівняння переписеться так: $f(n+1) = [1 - P(n)]f(n)$. Маємо $1 - P(n) = 2$,

звідси $P(n) = -1$, $f_1(n) = \prod_{t=0}^{n-1} [1 - P(t)] = 2^n$, $Y(n) = 2^n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v+1}{2^{v+1}}$, отже, загальним

розв'язком рівняння $f(n+1) - 2f(n) = n+1$ є вираз

$$f(n) = c_1 f_1(n) + Y(n) = c2^n + 2^n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v+1}{2^{v+1}}.$$

Перевірка. Підставляючи $f(n) = 2^n \left(c + \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v+1}{2^{v+1}} \right)$ у рівняння

$f(n+1) - 2f(n) = n+1$, отримаємо

$$\begin{aligned} c2^{n+1} + 2^{n+1} \sum_{v=0}^n \frac{v+1}{2^{v+1}} - c2^{n+1} - 2^{n+1} \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v+1}{2^{v+1}} &= 2^{n+1} \left[\sum_{v=0}^n \frac{v+1}{2^{v+1}} - \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v+1}{2^{v+1}} \right] = \\ &= 2^{n+1} \left[\frac{n+1}{2^{n+1}} + \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v+1}{2^{v+1}} - \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v+1}{2^{v+1}} \right] = n+1. \end{aligned}$$

Справедлива наступна формула

$$2^n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v+1}{2^{v+1}} = 2^{n+1} - n - 2. \quad (2.14)$$

Дійсно,

$$\varphi(n) = \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v+1}{2^{v+1}} = \frac{1}{2} \sum_{v=0}^{n-1} (1+v) \left(\frac{1}{2} \right)^v.$$

Введемо позначення $1+v=x$. При $v=0$ маємо $x=1$, а при $v=n-1$ отримаємо $x=n$. Отже,

$$\varphi(n) = \frac{1}{2} \sum_{x=1}^n x \left(\frac{1}{2} \right)^{x-1} = \frac{1}{2} \left(\sum_{x=1}^n z^x \right)'_{z=\frac{1}{2}}.$$

Сума геометричної прогресії визначається формулою

$$\sum_{x=1}^n z^x = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{z(1-z^n)}{1-z}.$$

Тому

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{x=1}^n z^x \right)'_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\frac{z(1-z^n)}{1-z} \right]'_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{z-z^{n+1}}{1-z} \right)'_{z=\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1-z)(1-(n+1)z^n) + z - z^{n+1}}{(1-z)^2} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = 2 \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - (n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] + \frac{1}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right\} = 2 \left[\frac{1}{2} - (n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] = 2 - (n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(\frac{1}{2} \right)^n = 2 - (n+2) \left(\frac{1}{2} \right)^n.\end{aligned}$$

Отже, $2^n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v+1}{2^{v+1}} = 2^n \varphi(n) = 2^{n+1} - n - 2$, що і потрібно було довести.

Використовуючи формулу (2.14), загальний розв'язок рівняння $f(n+1) - 2f(n) = n+1$ можна записати у виді

$$f(n) = c2^n + 2^n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v+1}{2^{v+1}} = c2^n + 2^{n+1} - n - 2 = c_1 2^n - n - 2.$$

Перевірка. $f(n+1) - 2f(n) = c_1 2^{n+1} - n - 3 - 2(c_1 2^n - n - 2) = -n - 3 + 2n + 4 = n + 1$. Як буде показано нижче, доведення справедливості формули (2.14) можна спростити, застосовуючи інші міркування.

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок $3y(n+1) - 2y(n) = 3$.

Розв'язання. Маємо $y(n+1) - \frac{2}{3}y(n) = 1$. Із формули $y(n+1) = [1 - P(n)]y(n)$ однорідного рівняння, у даному випадку $y(n+1) = \frac{2}{3}y(n)$, знайдемо $P(n)$.

Очевидно, що $1 - P(n) = \frac{2}{3}$ і $P(n) = \frac{1}{3}$. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вид

$$y(n) = c \prod_{t=0}^{n-1} [1 - P(t)] = c \left(\frac{2}{3} \right)^n.$$

Частковий розв'язок неоднорідного рівняння запишеться так

$$\begin{aligned}
Y(n) &= \prod_{t=0}^{n-1} [1 - P(t)] \sum_{v=0}^{n-1} \left(Q(v) / \prod_{t=0}^v [1 - P(t)] \right) = \left(\frac{2}{3} \right)^n \sum_{v=0}^{n-1} 1 / \left(\frac{2}{3} \right)^{v+1} = \\
&= \left(\frac{2}{3} \right)^n \sum_{v=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2} \right)^{v+1} = \left(\frac{2}{3} \right)^n \left[\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{2} \right)^n \right] = \left(\frac{2}{3} \right)^n \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \\
&= \left(\frac{2}{3} \right)^n \frac{\frac{3}{2} \left[\left(\frac{3}{2} \right)^n - 1 \right]}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3} \right)^n 3 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^n - 1 \right] = 3 - \frac{2^n}{3^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Отже, загальний розв'язок нашого рівняння

$$y(n) = c \left(\frac{2}{3} \right)^n + 3 - \frac{2^n}{3^{n+1}} = c \left(\frac{2}{3} \right)^n + 3 - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n = (c - 3) \left(\frac{2}{3} \right)^n + 3 = c_1 \left(\frac{2}{3} \right)^n + 3.$$

Перевірка. $3y(n+1) - 2y(n) = 3c_1 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} + 9 - 2c_1 \left(\frac{2}{3} \right)^n - 6 = 2c_1 \left(\frac{2}{3} \right)^n + 3 - 2c_1 \left(\frac{2}{3} \right)^n = 3.$

Зауваження. Для однорідного лінійного рівняння (2.4) розв'язок шукається $f(x) \neq 0, x = 0, h, 2h, \dots, (n-1)h$ за формулою (2.6). Отже, $[1 - P(0)][1 - P(h)] \dots [1 - P((n-1)h)] \neq 0$. Якщо, наприклад, $[1 - P(0)] = 0$, а $[1 - P(h)][1 - P(2h)] \dots [1 - P((n-1)h)] \neq 0$, то формулу (2.4) потрібно просумувати при $x = h, 2h, \dots, (n-1)h$. Тоді загальний нетривіальний розв'язок виду (2.6) визначається формулою

$$f(nh) = f(h) \prod_{t=h}^{(n-1)h} [1 - P(t)] = c \prod_{t=h}^{(n-1)h} [1 - P(t)] \quad (2.15)$$

Контрольні запитання

1. Як зображається загальний розв'язок однорідного лінійного різницевого рівняння?
2. Наведіть вигляд загального розв'язку неоднорідного лінійного різницевого рівняння.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y(n+1) - ny(n) = n!n^3$.

Відповідь: $y(n) = c(n-1)! + \frac{1}{4}n!(n-1)^2n, \quad n \geq 1.$

РОЗДІЛ 3. ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ВИЩОГО ПОРЯДКУ

§1. ЗАГАЛЬНИЙ ВИД ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Різницеве рівняння

$$\Delta^n f(x) + a_1(x)\Delta^{n-1}f(x) + \dots + a_n(x)f(x) = \tilde{Q}(x) \quad (3.1)$$

де $\tilde{Q}(x), a_i(x)$ – задані функції від x , а $f(x)$ – шукана функція, називається лінійним однорідним рівнянням, якщо $\tilde{Q}(x) \equiv 0$, і неоднорідним, якщо $\tilde{Q}(x) \neq 0$. Використавши формулу (1.1), ми зможемо рівняння (3.1) перетворити до наступного виду

$$f(x+nh) + p_1(x)f(x+(n-1)h) + \dots + p_{n-1}(x)f(x+h) + p_n(x)f(x) = Q(x). \quad (3.2)$$

Якщо $p_n(x) \neq 0$, то рівняння (3.2) будемо називати *лінійним різницеvim рівнянням n -го порядку*. Зауваживши, що при цілому n справедлива формула

$$f(x+nh) = \sum_{k=0}^n C_n^k \Delta^k f(x), \quad (1.3)$$

ми будь-яке рівняння виду (3.2) зможемо звести до виду (3.1). Отже, замість рівняння (3.1) ми можемо розглядати розв'язок рівняння (3.2). Вид рівняння (3.2) кращий для досліджень, тому ми і будемо ним користуватися. Зручність рівняння (3.2) помітна відразу. Наприклад, рівняння виду (3.1) не завжди n -го порядку, оскільки після перетворення рівняння (3.1) у рівняння виду (3.2) може виявитися, що $p_n(x) = 0$, а в цьому випадку, як зазначено раніше, заміною незалежного аргументу отримуємо рівняння порядку $r < n$.

§2. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ПРО РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Спочатку дослідимо однорідне рівняння

$$f(x+nh) + p_1(x)f(x+(n-1)h) + \dots + p_n(x)f(x) = 0, \quad (3.3)$$

де $p_i(x)$ – задані функції від x . Будемо вважати, що x приймає значення $0, h, 2h, 3h, \dots$, а функції $p_1(x), \dots, p_n(x)$ на множині точок $0, h, 2h, 3h, \dots$ мають скінченні і визначені значення і $p_n(x) \neq 0$ на множині точок $0, h, 2h, 3h, \dots$. Кожен розв’язок рівняння (3.3) визначається заданням початкових значень, які позначимо

$$f(0) = f_0, f(h) = f_1, \dots, f((n-1)h) = f_{n-1}.$$

Покладемо $p_0(x) = 1$, тоді рівняння (3.3) запишеться так:

$$Lf(x) = \sum_{s=0}^n p_s(x) f(x + (n-s)h) = 0, \quad (3.3)$$

де L – оператор, який над функцією $f(x)$ здійснює усі дії, визначені у лівій частині рівняння (3.3).

Деякий оператор A , що задовольняє двом таким умовам:

$$A[f(x) \pm \varphi(x)] = Af(x) \pm A\varphi(x), A(c\varphi(x)) = cA\varphi(x), c = \text{Const},$$

називається *лінійним оператором*. Легко довести, що оператор L відповідає умовам

$$L[f(x) \pm \varphi(x)] = Lf(x) \pm L\varphi(x), L(cf(x)) = cLf(x), c = \text{const},$$

отже, наш оператор L – лінійний.

Теорема 1. Якщо $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ – розв’язки рівняння (3.3), то і функція

$$\varphi(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_m f_m(x) = \sum_{i=1}^m c_i f_i(x), \quad (3.4)$$

де $c_1, c_2, \dots, c_m$ – сталі, буде також розв’язком цього рівняння (3.3).

Доведення. Нам відомо, що $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ – розв’язки рівняння (3.3), тому

$$\sum_{s=0}^n p_s(x) f_i(x + (n-s)h) = 0, i = 1, 2, \dots, m.$$

Потрібно довести, що $\sum_{s=0}^n p_s(x) \varphi(x + (n-s)h) = 0$, де $\varphi(x)$ задається формулою

(3.4). Маємо

$$\sum_{s=0}^n p_s(x) \varphi(x + (n-s)h) = \sum_{s=0}^n p_s(x) \sum_{i=1}^m c_i f_i(x + (n-s)h).$$

Змінюючи в правій частині порядок сумування, отримаємо

$$\sum_{s=0}^n p_s(x) \varphi(x + (n-s)h) = \sum_{i=1}^m c_i \sum_{s=0}^n p_s(x) f_i(x + (n-s)h) = 0,$$

оскільки всі $f_i(x)$ – часткові розв’язки, і теорема 1 доведена.

За допомогою оператора L доведення вищенаведеної теореми значно спрощується. Справді, оскільки $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ – розв’язки рівняння (3.3), то $Lf_1(x) = 0, \dots, Lf_m(x) = 0$. Потрібно довести, що $L\varphi(x) = 0$, де $\varphi(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_m f_m(x)$. Оскільки L – лінійний оператор, то

$$\begin{aligned} L\varphi(x) &= L[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_m f_m(x)] = L[c_1 f_1(x)] + L[c_2 f_2(x)] + \dots + L[c_m f_m(x)] = \\ &= c_1 Lf_1(x) + c_2 Lf_2(x) + \dots + c_m Lf_m(x) = 0. \end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{array}{l} f_1(0) = f_{11}, f_1(h) = f_{12}, f_1(2h) = f_{13}, \dots, f_1((n-1)h) = f_{1n}, \\ f_2(0) = f_{21}, f_2(h) = f_{22}, f_2(2h) = f_{23}, \dots, f_2((n-1)h) = f_{2n}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ f_n(0) = f_{n1}, f_n(h) = f_{n2}, f_n(2h) = f_{n3}, \dots, f_n((n-1)h) = f_{nn}. \end{array}$$

Нехай

$$D[f_1(0), f_2(0), \dots, f_n(0)] = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

Тепер можемо довести теорему про

загальний розв'язок однорідного різницевого лінійного рівняння.

Теорема 2. Якщо $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ – розв’язки однорідного рівняння (3.3) такі, що визначник $D[f_1(0), f_2(0), \dots, f_n(0)] \neq 0$, то загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння n -го порядку має вид

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x), \quad (3.6)$$

де $c_1, c_2, \dots, c_n$ – довільні сталі.

Доведення. Відзначимо, що кількість часткових розв'язків $f_i(x), i=1,2,\dots,n$ дорівнює порядку однорідного рівняння (3.3), тобто дорівнює n , бо $p_n(x) \neq 0$.

§3. ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ФУНКЦІЙ

У теорії диференціальних рівнянь теореми 2, 3 доводяться для будь-якої системи лінійно незалежних функцій. У теорії лінійних різницевих рівнянь повної аналогії з цим встановити не можна, але в деяких припущеннях щодо поведінки коефіцієнтів лінійного рівняння і функцій $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ аналогія встановлюється.

Означення. Функції $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ називаються *лінійно залежними*, якщо для $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$ має місце співвідношення

$$c_1 f_1(kh) + c_2 f_2(kh) + \dots + c_n f_n(kh) = 0, \quad (3.10)$$

де $c_1, c_2, \dots, c_n$ – сталі, що не дорівнюють нулю одночасно.

З означення випливає, що функції $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ лінійно залежні, якщо справедливі рівності

$$\begin{aligned} c_1 f_1(0) + c_2 f_2(0) + \dots + c_n f_n(0) &= 0, \\ c_1 f_1(h) + c_2 f_2(h) + \dots + c_n f_n(h) &= 0, \\ c_1 f_1(2h) + c_2 f_2(2h) + \dots + c_n f_n(2h) &= 0, \\ &\vdots \\ c_1 f_1(kh) + c_2 f_2(kh) + \dots + c_n f_n(kh) &= 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

для усіх $k = 0, 1, 2, \dots$, де $c_1, c_2, \dots, c_n$ – постійні і, принаймні, одне з c_i не дорівнює нулю.

Теорема 4. Якщо функції $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ лінійно залежні, то визначник

$$D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1(x+h) & f_2(x+h) & \cdots & f_n(x+h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(x+(n-1)h) & f_2(x+(n-1)h) & \cdots & f_n(x+(n-1)h) \end{vmatrix}$$

дорівнює нулю при всіх значеннях $x = 0, h, 2h, \dots$. Навпаки, якщо $D[f_1, \dots, f_n] = 0$ при всіх значеннях $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$, а при $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$, $D[f_2(x), \dots, f_n(x)] \neq 0$ для всіх $k = 0, 1, 2, \dots$, то наші функції лінійно залежні і $f_1(x)$ дійсно входить у співвідношення

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0, \quad (a)$$

Доведення. Нехай $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ – лінійно залежні і припустимо, що $c_1 \neq 0$, тобто $f_1(x)$ дійсно входить у співвідношення (а). Потрібно довести, що $D[f_1(x), \dots, f_n(x)] = 0$ при всіх $x = 0, h, 2h, \dots$. Розглянемо цей визначник; помноживши його на $c_1 \neq 0$. Отримаємо

$$c_1 D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] = \begin{vmatrix} c_1 f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ c_1 f_1(x+h) & f_2(x+h) & \dots & f_n(x+h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 f_1(x+(n-1)h) & f_2(x+(n-1)h) & \dots & f_n(x+(n-1)h) \end{vmatrix}.$$

Помноживши другий стовпець цього визначника на c_2 і так далі, n -й стовпець – на c_n і додавши їх до першого стовпця, отримаємо

$$c_1 D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] = \begin{vmatrix} \sum_{s=1}^n c_s f_s(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ \sum_{s=1}^n c_s f_s(x+h) & f_2(x+h) & \dots & f_n(x+h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{s=1}^n c_s f_s(x+(n-1)h) & f_2(x+(n-1)h) & \dots & f_n(x+(n-1)h) \end{vmatrix}.$$

Враховуючи (3.11), усі елементи першого стовпчика отриманого визначника дорівнюють нулю. Тому при $x = 0, h, 2h, \dots$, $c_1 D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] \equiv 0$. Оскільки $c_1 \neq 0$, то $D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] = 0$ для $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$.

Доведемо тепер другу частину нашої теореми. Нехай $D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] = 0$ при всіх $x = kh$, а також $D[f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x)] \neq 0$ при всіх $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$. Потрібно довести, що $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ – лінійно залежні.

За умовою

$$D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1(x+h) & f_2(x+h) & \dots & f_n(x+h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x+(n-1)h) & f_2(x+(n-1)h) & \dots & f_n(x+(n-1)h) \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладемо цей визначник за елементами першого рядка. Ми отримаємо тотожність

$$f_1(x)A_1(x) + f_2(x)A_2(x) + \dots + f_n(x)A_n(x) = 0,$$

де $A_1(x), \dots, A_n(x)$ – алгебраїчні доповнення елементів першого рядка. Замінімо

перший рядок другим, третім і, нарешті n -м рядком. Ми отримаємо $n-1$ визначників, тотожно рівних нулю. Наприклад, два перші такі визначники будуть мати наступний вид:

$$\begin{vmatrix} f_1(x+h) & f_2(x+h) & \cdots & f_n(x+h) \\ f_1(x+h) & f_2(x+h) & \cdots & f_n(x+h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(x+(n-1)h) & f_2(x+(n-1)h) & \cdots & f_n(x+(n-1)h) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_1(x+2h) & f_2(x+2h) & \cdots & f_n(x+2h) \\ f_1(x+h) & f_2(x+h) & \cdots & f_n(x+h) \\ f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(x+(n-1)h) & f_2(x+(n-1)h) & \cdots & f_n(x+(n-1)h) \end{vmatrix} = 0,$$

а $n-1$ -й визначник запишеться так:

$$\begin{vmatrix} f_1(x+(n-1)h) & f_2(x+(n-1)h) & \cdots & f_n(x+(n-1)h) \\ f_1(x+h) & f_2(x+h) & \cdots & f_n(x+h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(x+(n-1)h) & f_2(x+(n-1)h) & \cdots & f_n(x+(n-1)h) \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладемо ці $n-1$ визначників за елементами першого рядка, отримаємо $n-1$ рівностей, а разом з першим уже написаним n рівностей:

$$\begin{cases} f_1(x)A_1(x)+f_2(x)A_2(x)+...+f_n(x)A_n(x)=0, \\ f_1(x+h)A_1(x)+f_2(x+h)A_2(x)+....+f_n(x+h)A_n(x)=0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ f_1(x+(n-1)h)A_1(x)+f_2(x+(n-1)h)A_2(x)+...+f_n(x+(n-1)h)A_n(x)=0. \end{cases}$$

Але $A_1(x) = D[f_2(x), \dots, f_n(x)] \neq 0$ при жодному $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$, за умовою другої частини теореми. Тому, розділивши всі наші рівності на $A_1(x)$ і поклавши

$$-\frac{A_s(x)}{A_1(x)}=v_{s-1}(x), s=2,3,\dots,n,$$

ми отримаємо систему тотожностей

[illegible]

У першій тотожності x замінимо значеннями $x+h$ і віднімемо від неї другу тотожність, у другій тотожності замінимо x на $x+h$ і віднімемо від неї третю і т.д., поки не отримаємо систему тотожностей

$$\begin{cases} \Delta v_1(x)f_2(x+h)+\Delta v_2(x)f_3(x+h)+\dots+\Delta v_{n-1}(x)f_n(x+h)=0, \\ \Delta v_1(x)f_2(x+2h)+\Delta v_2(x)f_3(x+2h)+\dots+\Delta v_{n-1}(x)f_n(x+2h)=0, \\ \dots \\ \Delta v_1(x)f_2(x+(n-1)h)+\Delta v_2(x)f_3(x+(n-1)h)+\dots+\Delta v_{n-1}(x)f_n(x+(n-1)h)=0. \end{cases}$$

Цю систему можна розглядати як систему лінійних рівнянь відносно $\Delta v_1(x), \Delta v_2(x), \dots, \Delta v_{n-1}(x)$. Визначник цієї системи $D[f_2(x+h), \dots, f_n(x+h)] \neq 0$ при $x=kh, k=0,1,2,\dots$, за умовою теореми. Отже, наша система не має відмінних від нуля розв'язків, тобто

$$\Delta v_1(x)=0, \Delta v_2(x)=0, \dots, \Delta v_{n-1}(x)=0.$$

Тому $v_1(x), v_2(x), \dots, v_{n-1}(x)$ будуть сталими і тотожність

$$f_1(x)=v_1(x)f_2(x)+v_2(x)f_3(x)+\dots+v_{n-1}(x)f_n(x)=c_2f_2(x)+\dots+c_nf_n(x)$$

буде шуканою лінійною залежністю між функціями $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, бо коефіцієнт при $f_1(x)$ не дорівнює нулю і $f_1(x)$ дійсно входить у співвідношення (а).

Відзначимо, що лінійна залежність між функціями $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ вимагає додаткової умови, а саме, $D[f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x)] \neq 0$ при $x=kh, k=0,1,2,\dots$.

§4. ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ВИЗНАЧНИКІВ

Як відомо, добуток визначників однакових порядків здійснюється за законом

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1d_1+a_2m_1+a_3k_1 & a_1d_2+a_2m_2+a_3k_2 & a_1d_3+a_2m_3+a_3k_3 \\ b_1d_1+b_2m_1+b_3k_1 & b_1d_2+b_2m_2+b_3k_2 & b_1d_3+b_2m_3+b_3k_3 \\ c_1d_1+c_2m_1+c_3k_1 & c_1d_2+c_2m_2+c_3k_2 & c_1d_3+c_2m_3+c_3k_3 \end{vmatrix}$$

Визначник будь-якого порядку завжди можна замінити визначником вищого порядку, використовуючи формулу

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

і т. д.

З теорії визначників відома така формула:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} f(x) & f(x+h) & \cdots & f(x+kh) \\ f(x+h) & f(x+2h) & \cdots & f(x+(k+1)h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x+kh) & f(x+(k+1)h) & \cdots & f(x+2kh) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f(x+2h) & f(x+3h) & \cdots & f(x+kh) \\ f(x+3h) & f(x+4h) & \cdots & f(x+(k+1)h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x+kh) & f(x+(k+1)h) & \cdots & f(x+(2k-2)h) \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} f(x) & f(x+h) & \cdots & f(x+(k-1)h) \\ f(x+h) & f(x+2h) & \cdots & f(x+kh) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x+(k-1)h) & f(x+kh) & \cdots & f(x+(2k-2)h) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f(x+2h) & f(x+3h) & \cdots & f(x+(k+1)h) \\ f(x+3h) & f(x+4h) & \cdots & f(x+(k+2)h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x+(k+1)h) & f(x+(k+2)h) & \cdots & f(x+2kh) \end{vmatrix} - \\ & - \begin{vmatrix} f(x+h) & f(x+2h) & \cdots & f(x+kh) \\ f(x+2h) & f(x+3h) & \cdots & f(x+(k+1)h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x+kh) & f(x+(2k+1)h) & \cdots & f(x+(2k-1)h) \end{vmatrix}^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Запам'ятати формулу (3.12) важко, тому ми запишемо її у скороченому вигляді. Позначимо

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(x+h) & \cdots & f(x+kh) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x+kh) & f(x+(k+1)h) & \cdots & f(x+2kh) \end{vmatrix} = D_k(x). \quad (3.13)$$

Тоді

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} f(x+2h) & \cdots & f(x+kh) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x+kh) & \cdots & f(x+(2k-2)h) \end{vmatrix} = D_{k-2}(x+2h), \quad \begin{vmatrix} f(x) & \cdots & f(x+(k-1)h) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x+(k-1)h) & \cdots & f(x+(2k-2)h) \end{vmatrix} = D_{k-1}(x), \\ & \begin{vmatrix} f(x+2h) & \cdots & f(x+(k+1)h) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x+(k+1)h) & \cdots & f(x+2kh) \end{vmatrix} = D_{k-1}(x+2h), \quad \begin{vmatrix} f(x+h) & \cdots & f(x+kh) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x+kh) & \cdots & f(x+(2k-1)h) \end{vmatrix} = D_{k-1}(x+h) \end{aligned}$$

і формула (3.12) запишеться так

$$D_k(x)D_{k-2}(x+2h) = D_{k-1}(x)D_{k-1}(x+2h) - D_{k-1}^2(x+h). \quad (3.12)$$

$D_k(x)$ є визначником $k+1$ -го порядку, $D_{k-1}(x+h)$ – визначником $k-1$ -го порядку, а $D_{k-1}(x), D_{k-1}(x+2h), D_{k-1}(x+h)$ – визначниками k -го порядку.

Приклад. Перевірити формулу (3.12) для функції $f(x)=x$ у точках $x=0,1,2,3$.

Розв’язання. Відповідно до формули (3.12) має

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(x+1) & f(x+2) & f(x+3) \\ f(x+1) & f(x+2) & f(x+3) & f(x+4) \\ f(x+2) & f(x+3) & f(x+4) & f(x+5) \\ f(x+3) & f(x+4) & f(x+5) & f(x+6) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f(x+2) & f(x+3) \\ f(x+3) & f(x+4) \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} f(x) & f(x+1) & f(x+2) \\ f(x+1) & f(x+2) & f(x+3) \\ f(x+2) & f(x+3) & f(x+4) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f(x+2) & f(x+3) & f(x+4) \\ f(x+3) & f(x+4) & f(x+5) \\ f(x+4) & f(x+5) & f(x+6) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f(x+1) & f(x+2) & f(x+3) \\ f(x+2) & f(x+3) & f(x+4) \\ f(x+3) & f(x+4) & f(x+5) \end{vmatrix}^2$$

Для функції $f(x)=x$ у точках $x=0,1,2,3$ ця формула переписеться так:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}^2$$

Легко перевірити, що ліва частина тотожно дорівнює правій частині і дорівнює нулю.

§5. ВЛАСТИВОСТІ ЧАСТКОВИХ РОЗВ’ЯЗКІВ ЛІНІЙНОГО ОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ

Розглянемо деякі властивості часткових розв’язків однорідного рівняння. Користуючись теоремою 4, можна довести інше цікаве твердження.

Теорема 5. Для того, щоб функція $f(x)$, що має скінченне і певне значення при $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$, задовольняла різницеве рівняння зі сатлими коефіцієнтами n -го порядку, необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(x+h) & \dots & f(x+nh) \\ f(x+h) & f(x+2h) & \dots & f(x+(n+1)h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x+nh) & f(x+(n+1)h) & \dots & f(x+2nh) \end{vmatrix} = D[f(x), f(x+h), \dots, f(x+nh)] = 0 \quad (3.14)$$

при $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$, і крім цього, $D[f(x), f(x+h), \dots, f(x+(n-1)h)] \neq 0$ хоча б для одного значення $x \geq h$.

Достатність. Для скорочення запису покладемо

$$D[f(x), f(x+h), \dots, f(x+nh)] = D_n(x).$$

За умовою теореми $D_n(x) = 0$ при $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$, і, крім цього, $D_{n-1}(x) \neq 0$ хоча б для одного значення $x \geq h$. Потрібно довести, що $f(x)$ задовольняє різницеве рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$b_0 f(x+nh) + b_1 f(x+(n-1)h) + \dots + b_n f(x) = 0, \quad (3.15)$$

де $b_0 = \text{const} \neq 0, b_n = \text{const} \neq 0$, у випадку $b_n = 0$ рівняння (3.15) можна замінити рівнянням порядку $k < n$ і, якщо рівняння (3.15) є рівнянням n -го порядку, то воно повинно містити $f(x+nh)$ і $f(x)$. Використовуючи формулу (3.12), маємо при $D_n(x) = 0$

$$D_{n-1}(x+h) = D_{n-1}(x)D_{n-1}(x+2h). \quad (3.16)$$

За умовою теореми визначник n -го порядку $D_{n-1}(x) \neq 0$ хоча б для одного значення $x \geq h$. Доведемо, що якщо для деякого $x = ph \geq h$ визначник $D_{n-1}(x) = 0$, то цей визначник n -го порядку $D_{n-1}(x) = 0$ для усіх $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$. Дійсно, нехай $D_{n-1}(h) = 0$. Тоді з формули (3.16) при $x = h$ випливає, що $D_{n-1}^2(2h) = 0$; тому $D_{n-1}(2h) = 0$. Якщо $D_{n-1}(2h) = 0$, то з формули (3.16) при $x = 2h$ випливає, що $D_{n-1}^2(3h) = 0$; тому $D_{n-1}(3h) = 0$. Продовжуючи цей процес далі, одержимо $D_{n-1}(4h) = 0, D_{n-1}(5h) = 0$ і т. д., тобто $D_{n-1}(x) = 0$ для усіх $x = kh, k = 1, 2, 3, \dots$, що суперечить умові теореми. Отже, якщо визначник n -го порядку $D_{n-1}(x) \neq 0$ хоча б для одного значення $x = ph \neq h$, то цей визначник $D_{n-1}(x) \neq 0$ для будь-якого $x = kh, k = 1, 2, 3, \dots$. З формули (3.16) при $x = 0$ випливає, що якщо $D_{n-1}(h) \neq 0$, то і $D_{n-1}(2h) \neq 0, D_{n-1}(0) = 0$. Отже, визначник $n+1$ -го порядку $D_n(x) = 0$ для будь-якого $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$, а визначник n -го порядку $D_{n-1}(x) \neq 0$ для будь-якого $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$, і виконуються умови теореми.

Отже, за теоремою 4 між функціями $f(x), f(x+h), \dots, f(x+nh)$ існує лінійна залежність

$$c_0 f(x+nh) + c_1 f(x+(n-1)h) + \dots + c_n f(x) = 0, \quad (3.17)$$

де хоча б одне $c_i \neq 0$. Залишилося довести, що $c_0 \neq 0$, $c_n \neq 0$ і тоді співвідношення (3.17) є однорідним різницеvim рівнянням n -го порядку, в яке дійсно входить як $f(x)$, так і $f(x + nh)$.

Розкладемо $D_n(x) = D[f(x), f(x+h), \dots, f(x+nh)]$ по елементах першого стовпчика, тоді з (3.14) отримаємо

$$f(x) \begin{vmatrix} f(x+2h) & \cdots & f(x+(n+1)h) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x+(n+1)h) & \cdots & f(x+2nh) \end{vmatrix} + (-1)^n f(x+nh) \begin{vmatrix} f(x+h) & \cdots & f(x+nh) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x+nh) & \cdots & f(x+(2n-1)h) \end{vmatrix} = 0,$$

і коефіцієнти при $f(x), \dots, (-1)^n f(x + nh)$ є визначники $D_{n-1}(x + 2h), \dots, D_{n-1}(x + h)$ і $c_n = D_{n-1}(x + 2h) \neq 0, c_0 = (-1)^n D_{n-1}(x + h) \neq 0$. Ми довели достатність.

Необхідність очевидна. Вона випливає з першої частини теореми 4. Справді, якщо $f(x)$ задовольняє рівняння (3.17), у якому $c_0 \neq 0, c_n \neq 0$, то між функціями $f(x), f(x+h), \dots, f(x+nh)$ існує лінійна залежність і тому з першої частини теореми 4 випливає, що $D[f(x), f(x+h), \dots, f(x+nh)] = 0$, а раніше вже доведено: $D_{n-1}[f(x+h), \dots, f(x+nh)] \neq 0$ для будь-кого $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$.

Відзначимо, що якщо умови теореми 5 виконуються, починаючи з $sx = rh$, то і функції $f(x), f(x+h), \dots, f(x+nh)$ пов'язані лінійною залежністю при $x \geq rh$.

Розглянемо ще деякі властивості часткових розв'язків лінійного однорідного різницевого рівняння.

Нехай $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ – n різних розв'язків рівняння

$$f(x+nh)+P_1(x)f(x+(n-1)h)+...+P_n(x)f(x)=0.$$

Підставляючи в це рівняння $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, отримаємо систему рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(x)f_1(x+(n-1)h)+...+P_n(x)f_1(x)=-f_1(x+nh), \\ P_1(x)f_2(x+(n-1)h)+...+P_n(x)f_2(x)=-f_2(x+nh) \\ \vdots \\ P_1(x)f_n(x+(n-1)h)+...+P_n(x)f_n(x)=-f_n(x+nh) \end{array} \right.$$

За правилом Крамера звідси можна знайти $P_n(x)$:

$$P_n(x) \begin{vmatrix} f_1(x+(n-1)h) & \cdots & f_1(x+h) & f_1(x) \\ f_2(x+(n-1)h) & \cdots & f_2(x+h) & f_2(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(x+(n-1)h) & \cdots & f_n(x+h) & f_n(x) \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} f_1(x+(n-1)h) & f_1(x+(n-2)h) & \cdots & f_1(x+h) & f_1(x+nh) \\ f_2(x+(n-1)h) & f_2(x+(n-2)h) & \cdots & f_2(x+h) & f_2(x+nh) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(x+(n-1)h) & f_n(x+(n-2)h) & \cdots & f_n(x+h) & f_n(x+nh) \end{vmatrix}.$$

У визначниках n -го порядку лівій і правій частині останньої рівності зробимо кругову перестановку стовпців:

$$P_n(x) \begin{vmatrix} f_1(x) & f_1(x+h) & \cdots & f_1(x+(n-1)h) \\ f_2(x) & f_2(x+h) & \cdots & f_2(x+(n-1)h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(x) & f_n(x+h) & \cdots & f_n(x+(n-1)h) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} f_1(x+nh) & f_1(x+h) & \cdots & f_1(x+(n-1)h) \\ f_2(x+nh) & f_2(x+h) & \cdots & f_2(x+(n-1)h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(x+nh) & f_n(x+h) & \cdots & f_n(x+(n-1)h) \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)^{n-1} \begin{vmatrix} f_1(x+h) & f_1(x+(n-1)h) & \cdots & f_1(x+nh) \\ f_2(x+h) & f_2(x+(n-1)h) & \cdots & f_2(x+nh) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(x+h) & f_n(x+(n-1)h) & \cdots & f_n(x+nh) \end{vmatrix}.$$

У результаті транспонування матимемо

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1(x+h) & f_2(x+h) & \cdots & f_n(x+h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(x+(n-1)h) & f_2(x+(n-1)h) & \cdots & f_n(x+(n-1)h) \end{vmatrix} P_n(x) =$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} f_1(x+h) & f_2(x+h) & \cdots & f_n(x+h) \\ f_1(x+2h) & f_2(x+2h) & \cdots & f_n(x+2h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(x+nh) & f_2(x+nh) & \cdots & f_n(x+nh) \end{vmatrix} \quad (3.18)$$

Позначимо

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1(x+h) & f_2(x+h) & \cdots & f_n(x+h) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(x+(n-1)h) & f_2(x+(n-1)h) & \cdots & f_n(x+(n-1)h) \end{vmatrix} = D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]$$

Тоді формула (3.18) запишеться скороченому вигляді

$$(-1)^n D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] P_n(x) = D[f_1(x+h), f_2(x+h), \dots, f_n(x+h)]$$

З цієї формули випливає важливий **наслідок**: нехай $P_n(x) \neq 0$ при $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$; якщо $D[f_1(0), f_2(0), \dots, f_n(0)] = 0$, то і $D[f_1(h), f_2(h), \dots, f_n(h)] = 0$. Тому з умови $D[f_1(h), f_2(h), \dots, f_n(h)] = 0$ випливає, що і $D[f_1(2h), f_2(2h), \dots, f_n(2h)] = 0$ і т. д. Отже, якщо $D[f_1(0), f_2(0), \dots, f_n(0)] = 0$, то $D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] = 0$, при всякому $x = kh, k = 1, 2, 3, \dots$. Отже, якщо для одного значення $x = kh, k = 1, 2, 3, \dots$, вираз $D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] \neq 0$, то за умови $P_n(x) \neq 0 (x = kh, k = 0, 1, 2, \dots)$ випливає, що і $D[f_1(0), f_2(0), \dots, f_n(0)] \neq 0$.

Введемо поняття лінійно незалежних розв'язків різницевого однорідного рівняння.

Означення. Назвемо функції $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ *лінійно незалежними розв'язками* рівняння (3.3), якщо вони приймають скінченні і певні значення при всіх $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$, задовольняють при тих же значеннях x рівняння (3.3) і якщо співвідношення $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$ при будь-яких сталих $c_1, c_2, \dots, c_n$, водночас не рівних нулю хоча б для одного значення $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$, не виконується.

Теорема 6. Рівність $D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] = 0$ неможлива при будь-якому $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$, де $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ — n лінійно незалежних розв'язків різницевого рівняння n -го порядку (3.3).

Доведення проведемо від супротивного. Нехай функції $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ лінійно незалежні, $D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] = 0$ при $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$. На основі формули (3.18) робимо висновки, що з рівності нулю визначника в деякій точці $x \geq 0$ випливає рівність нулю визначника при всіх $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$. Розглянемо систему рівнянь

Визначник цієї системи згідно припущення дорівнює нулю, а система рівнянь однорідна. Тому можна підібрати такі сталі $c_1, c_2, \dots, c_n$, не всі рівні нулю, які дають розв'язок цієї системи. При знайдених $c_1, c_2, \dots, c_n$ маємо

Разом з цим $f_s(x)$ є розв'язком рівняння (3.3) при $x = 0, h, 2h, \dots$. Отже, справедливе співвідношення

яке отримуємо з (3.3) при $x=0$. Помноживши це співвідношення на c_s і просумувавши рівності для $s=1,2,\dots,n$, отримаємо

Враховуючи (3.20), матимемо

Це співвідношення разом з співвідношеннями (3.20) можемо записати так:

Функції $f_s(x)$ задовольняють рівняння

Підставляючи в це рівняння $x = h$, помноживши його на c_s і просумувавши по s , отримаємо

Враховуючи (3.21), маємо

$$\sum_{s=1}^n c_s f_s((n+1)h) = 0.$$

Продовжуючи цей процес далі, одержимо $\sum_{s=1}^n c_s f_s((n+2)h) = 0, \sum_{s=1}^n c_s f_s((n+s)h) = 0$ і т.д. Ми отримали $\sum_{s=1}^n c_s f_s(x) = 0$ при будь-якому $x = 0, h, 2h, \dots, nh, (n+1)h, \dots$, де хоча б одне з c_i не дорівнює нулю при всіх $x = kh, k = 1, 2, 3, \dots$, а це суперечить лінійній незалежності функцій $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$.

Тепер теорему 2 можна сформулювати так.

Теорема 2*. Якщо $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ – лінійно незалежні розв’язки рівняння (3.3), то будь-який інший розв’язок цього рівняння, що приймає скінченні і певні значення при $x \geq 0$ може бути представлений у вигляді $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)$, де $c_1, c_2, \dots, c_n$ – сталі.

Теорема 7. Якщо маємо $n+1$ часткових розв’язків однорідного різницевого рівняння n -го порядку (3.3), то ці розв’язки лінійно залежні.

Доведення. Розглянемо з $n+1$ часткових розв’язків однорідного різницевого рівняння n -го порядку n розв’язків $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$. Можливі два випадки.

1) ці n часткових розв’язків лінійно залежні, тобто має місце співвідношення

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

для всіх $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$, де $c_1, c_2, \dots, c_n$ – сталі, не рівні нулю одночасно. Тоді, очевидно, справедливе співвідношення

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) + 0 \cdot f_{n+1}(x) = 0,$$

де одне із c_i не рівне нулю, і теорема правильна.

2) нехай $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ – лінійно незалежні. Тоді за теоремою 2* будь-який розв’язок однорідного рівняння (3.3) при $x \geq 0$ може бути записаний у вигляді

$$f(x) = c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) \quad (3.22)$$

Оскільки $f_{n+1}(x)$ – розв’язок рівняння (3.3), то можна вибрати $c_1 = c_1^*, \dots, c_n = c_n^*$ такі, що $f_{n+1}(x) = c_1^* f_1(x) + \dots + c_n^* f_n(x)$ або

§6. ЛІНІЙНЕ НЕОДНОРІДНЕ РІЗНИЦЕВЕ РІВНЯННЯ. МЕТОД ВАРІАЦІЇ СТАЛИХ

Ми вже знаємо, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння за теоремою 3, можна побудувати, якщо відомий його частковий розв'язок та загальний розв'язок однорідного рівняння. Викладемо метод варіації сталих для знаходження часткового розв'язку неоднорідного різницевого рівняння, знаючи загальний розв'язок однорідного різницевого рівняння. Цей метод також називають методом Лагранжа.

Нехай $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ – лінійно незалежні розв'язки лінійного рівняння (3.3), коефіцієнти якого скінченні і визначені для будь-якого $x = kh, k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Відносно рівняння зробимо тільки одне припущення, а саме: $P_n(x) \neq 0$ для всякого $x = kh, k = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Загальний розв'язок рівняння (3.3), як ми вже знаємо, має вигляд (3.22), де $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ – лінійно незалежні розв'язки рівняння (3.3), а $c_1, c_2, \dots, c_n$ – довільні сталі.

Будемо вважати, що у виразі (3.22) сталі c_i є функціями від x , тобто $c_i = c_i(x)$ і знайдемо умови, які потрібно накласти на $c_i = c_i(x)$, щоб вираз (3.22) задовольняв неоднорідне рівняння

$$f(x + nh) + P_1(x)f(x + (n-1)h) + \dots + P_n(x)f(x) = Q(x). \quad (3.24)$$

Якщо рівняння (3.24) є окремим випадком рівняння першого порядку, то метод Лагранжа нами викладено раніше в §4 розділу 2.

Спочатку проілюструємо цей метод для випадку рівняння другого порядку, тобто

$$f(x + 2h) + P_1(x)f(x + h) + P_2(x)f(x) = Q(x) \quad (3.25)$$

Загальний розв'язок (3.22) для однорідного рівняння (3.25) запишеться так:

$$f(x) = c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x) = \sum_{s=1}^2 c_s(x)f_s(x). \quad (3.26)$$

Підставляючи (3.26) у (3.25), одержимо

$$\sum_{s=1}^2 c_s(x+2h)f_s(x+2h) + P_1(x)\sum_{s=1}^2 c_s(x+h)f_s(x+h) + P_2(x)\sum_{s=1}^2 c_s(x)f_s(x) = Q(x). \quad (3.27)$$

На $c_s(x)$ накладемо умову $\sum_{s=1}^2 \Delta c_s(x)f_s(x+h) = 0$ для будь-якого $x = kh, k = 0, 1, 2, 3, \dots$,

або що те ж саме,

$$\sum_{s=1}^2 c_s(x+h)f_s(x+h) = \sum_{s=1}^2 c_s(x)f_s(x+h). \quad (3.28)$$

Для відповідного диференціального рівняння аналогічною умовою є рівність

$\sum_{s=1}^2 c_s(x)f_s(x) = 0$. Підставляючи в (3.28) замість x значення $x+h$, отримаємо

$$\sum_{s=1}^2 c_s(x+2h)f_s(x+2h) = \sum_{s=1}^2 c_s(x+h)f_s(x+2h) \equiv \sum_{s=1}^2 \Delta c_s(x)f_s(x+2h) + \sum_{s=1}^2 c_s(x)f_s(x+2h),$$

бо $\Delta c_s(x) = c_s(x+h) - c_s(x)$. Отже, з умови (3.28) випливає справедливність формули

$$\sum_{s=1}^2 c_s(x+2h)f_s(x+2h) = \sum_{s=1}^2 \Delta c_s(x)f_s(x+2h) + \sum_{s=1}^2 c_s(x)f_s(x+2h). \quad (3.29)$$

Підставляючи (3.28), (3.29) у (3.27), будемо мати

$$\sum_{s=1}^2 \Delta c_s(x+2h)f_s(x+2h) + \sum_{s=1}^2 c_s(x)f_s(x+2h) + P_1(x)\sum_{s=1}^2 c_s(x)f_s(x+h) + P_2(x)\sum_{s=1}^2 c_s(x)f_s(x) = Q(x)$$

або

$$\sum_{s=1}^2 \Delta c_s(x)f_s(x+2h) + \sum_{s=1}^2 c_s(x)[f_s(x+2h) + P_1(x)f_s(x+h) + P_2(x)f_s(x)] = Q(x).$$

Враховуючи, що $f_s(x)$ задовольняє однорідне рівняння, маємо

$$f_s(x+2h) + P_1(x)f_s(x+h) + P_2(x)f_s(x) = 0,$$

і ми отримали $\sum_{s=1}^2 \Delta c_s(x)f_s(x+2h) = Q(x)$.

Отже, якщо $c_s(x)$ у (3.26) задовольняє умову

$$\sum_{s=1}^2 \Delta c_s(x)f_s(x+h) = 0, \sum_{s=1}^2 \Delta c_s(x)f_s(x+2h) = Q(x), \quad (3.30)$$

то вираз (3.26) є розв'язком неоднорідного рівняння (3.25). Умову (3.30) називають умовою Лагранжа (аналогічною умові (3.30) є умова

$$\sum_{s=1}^2 c'_s(x)y_s(x)=0, \sum_{s=1}^2 c'_s(x)y'_s(x)=Q(x) \text{ для звичайного диференціального рівняння}$$

Розглянемо неоднорідне рівняння n -го порядку. Формула (3.26) для неоднорідного рівняння n -го порядку (3.24) запишеться у вигляді

$$f(x) = c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x) + \dots + c_n(x)f_n(x) = \sum_{s=1}^n c_s(x)f_s(x), \quad (3.31)$$

де $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ – лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння,
отже,

$$f_{\varsigma}(x+nh)+P_1(x)f_{\varsigma}(x+(n-1)h)+...+P_n(x)f_{\varsigma}(x)=0, s=1,2,...,n. \quad (3.32)$$

Підставляючи (3.31) у (3.24), одержимо

$$\sum_{s=1}^n c_s(x+nh)f_s(x+nh)+P_1(x)\sum_{s=1}^n c_s(x+(n-1)h)f_s(x+(n-1)h)+...+P_n(x)\sum_{s=1}^n c_s(x)f_s(x)=Q(x). \quad (3.33)$$

Виберемо $c_s(x)$ у (3.31) так, щоб окрім рівняння (3.33) при будь-якому $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$, виконувалися умови

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n c_s (x+h) f_s(x+h) &= \sum_{s=1}^n c_s f_s(x+h), \\ \sum_{s=1}^n c_s (x+2h) f_s(x+2h) &= \sum_{s=1}^n c_s f_s(x+2h), \\ \sum_{s=1}^n c_s (x+3h) f_s(x+3h) &= \sum_{s=1}^n c_s f_s(x+3h), \\ &\vdots \\ \sum_{s=1}^n c_s (x+(n-1)h) f_s(x+(n-1)h) &= \sum_{s=1}^n c_s f_s(x+(n-1)h). \end{aligned} \tag{3.34}$$

Справедлива наступна формула:

$$\sum_{s=1}^n c_s(x+nh)f_s(x+nh) = \sum_{s=1}^n \Delta c_s(x)f_s(x+nh) + \sum_{s=1}^n c_s(x)f_s(x+nh). \quad (3.35)$$

Дійсно, оскільки умови (3.34) справедливі для будь-якого $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$, то підставляючи в (3.35) рівності (3.34) з $x + h$ замість x , отримаємо

Оскільки $\Delta c_s(x) = c_s(x+h) - c_s(x)$, формула (3.35) доведена.

$$\sum_{s=1}^n \Delta c_s(x) f_s(x+nh) + \sum_{s=1}^n c_s(x) f_s(x+nh) + P_1(x) \sum_{s=1}^n c_s(x) f_s(x+(n-1)h) + P_2(x) \sum_{s=1}^n c_s(x) f_s(x+(n-2)h) + \dots + P_n(x) \sum_{s=1}^n c_s(x) f_s(x) = Q(x)$$
$$\sum_{s=1}^n \Delta c_s(x) f_s(x + nh) + \sum_{s=1}^n c_s(x) [f_s(x + nh) + P_1(x) f_s(x + (n-1)h) + \dots + P_n(x) f_s(x)] = Q(x).$$
$$\sum_{s=1}^n \Delta c_s(x) f_s(x + nh) = Q(x). \quad (3.36)$$
$$0 = \sum_{s=1}^n [c_s(x+h) - c_s(x)] f_s(x+h) = \sum_{s=1}^n \Delta c_s(x) f_s(x+h).$$
$$0 = \sum_{s=1}^n c_s(x+h) f_s(x+2h) - \sum_{s=1}^n c_s(x) f_s(x+2h) = \sum_{s=1}^n \Delta c_s(x) f_s(x+2h).$$
[illegible]

52

$$D[f_1(x+h), f_2(x+h), \dots, f_n(x+h)] = \begin{vmatrix} f_1(x+h) & f_2(x+h) & \dots & f_n(x+h) \\ f_1(x+2h) & f_2(x+2h) & \dots & f_n(x+2h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x+nh) & f_2(x+nh) & \dots & f_n(x+nh) \end{vmatrix} \quad (3.38)$$

відіграє ту ж роль, що і визначник Вронського для фундаментальної системи розв'язків звичайних диференціальних рівнянь. Оскільки $f_1(x), \dots, f_n(x)$ – система лінійно незалежних розв'язків, то за теоремою 6 і на підставі наслідку, наведеного в кінці §5, за умови $P_n(x) \neq 0$ ($x = kh, k = 1, 2, 3, \dots$) визначник (3.38) завжди відмінний від нуля при довільному $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$. Цей визначник отримуємо з визначника $D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]$, замінивши в останньому x на $x+h$. Отже, система (3.37) завжди при $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$, має розв'язок, відмінний від нуля. Розв'язуючи систему (3.37) за правилом Крамера, отримаємо

$$\Delta c_p(x) = (-1)^{n+p} Q(x) \frac{D_p(x)}{D(x)}, \quad (3.39)$$

де $D_p(x)$ шукається з визначника (3.38) шляхом закреслення останнього рядка і p -го стовпця. Наприклад,

$$\begin{aligned} \Delta c_1(x) &= \frac{1}{D[f_1(x+h), \dots, f_n(x+h)]} \begin{vmatrix} 0 & f_2(x+h) & \dots & f_n(x+h) \\ 0 & f_2(x+2h) & \dots & f_n(x+2h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q(x) & f_2(x+nh) & \dots & f_n(x+nh) \end{vmatrix} = \\ &= \frac{(-1)^{n+1} Q(x)}{D(x)} \begin{vmatrix} f_2(x+h) & \dots & f_n(x+h) \\ f_2(x+2h) & \dots & f_n(x+2h) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_2(x+(n-1)h) & \dots & f_n(x+(n-1)h) \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} Q(x) \frac{D_1(x)}{D(x)} \end{aligned}$$

і $D_1(x)$ виходить з визначника (3.38) викреслюванням останнього рядка і першого стовпця.

Просумовуючи формулу (3.39) від $v = 0$ до $v = x-h$, одержимо

$$\begin{aligned} \Delta c_p(0) + \Delta c_p(h) + \dots + \Delta c_p(x-h) &= [c_p(h) - c_p(0)] + [c_p(2h) - c_p(h)] + \dots + [c_p(x) - c_p(x-h)] = \\ &= c_p(x) - c_p(0) = \sum_{t=0}^{x-h} (-1)^{n+p} Q(t) \frac{D_p(t)}{D(t)}. \end{aligned}$$

Звідси

$$c_p(x) = \sum_{t=0}^{x-h} (-1)^{n+p} Q(t) \frac{D_p(t)}{D(t)} + c_p,$$

де $c_p = c_p(0) = \text{const.}$

Тоді частковий розв'язок неоднорідного різницевого рівняння запишеться так:

$$Y(x) = f_1(x) \sum_{t=0}^{x-h} (-1)^{n+1} Q(t) \frac{D_1(t)}{D(t)} + f_2(x) \sum_{t=0}^{x-h} (-1)^{n+2} Q(t) \frac{D_2(t)}{D(t)} + \dots + f_n(x) \sum_{t=0}^{x-h} (-1)^{n+n} Q(t) \frac{D_n(t)}{D(t)}.$$

Розкладемо по елементах останнього рядка наступний визначник:

$$\begin{vmatrix} f_1(t+h) & f_2(t+h) & \dots & f_n(t+h) \\ f_1(t+2h) & f_2(t+2h) & \dots & f_n(t+2h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(t+(n-1)h) & f_2(t+(n-1)h) & \dots & f_n(t+(n-1)h) \\ f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} f_1(x) \begin{vmatrix} f_2(t+h) & \dots & f_n(t+h) \\ f_2(t+2h) & \dots & f_n(t+2h) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_2(t+(n-1)h) & \dots & f_n(t+(n-1)h) \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots + (-1)^{2n} f_n(x) \begin{vmatrix} f_1(t+h) & \dots & f_{n-1}(t+h) \\ f_1(t+2h) & \dots & f_{n-1}(t+2h) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1(t+(n-1)h) & \dots & f_{n-1}(t+(n-1)h) \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1} f_1(x) D_1(t) + (-1)^{n+2} f_2(x) D_2(t) + \dots + (-1)^{2n} f_n(x) D_n(x).$$

Отже, формула для часткового розв'язку $Y(x)$ неоднорідного різницевого рівняння в остаточному вигляді запишеться так:

$$Y(x) = \sum_{t=0}^{x-h} \frac{1}{D(t)} \begin{vmatrix} f_1(t+h) & f_2(t+h) & \dots & f_n(t+h) \\ f_1(t+2h) & f_2(t+2h) & \dots & f_n(t+2h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(t+(n-1)h) & f_2(t+(n-1)h) & \dots & f_n(t+(n-1)h) \\ f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \end{vmatrix} Q(t), \quad (3.40)$$

де $D(t)$ визначається за формулою (3.38).

§7. ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ

Різницеве рівняння

$$\Delta^n f(x) = Q(x) \quad (3.41)$$

згідно формули (1.1) запишемо у виді

$$f(x+nh) + (-1)^{n-1} f(x+(n-1)h) + \dots + (-1)^n f(x) = Q(x). \quad (3.42)$$

Для цього рівняння $P_n(x) = (-1)^n \neq 0$. Далі, ми легко можемо переконатися, що функції

$$f_1(x) = 1, f_2(x) = x, \dots, f_3(x) = x^{n-1}$$

є частковими розв'язками однорідного рівняння $\Delta^n f(x) = 0$. Справді, наприклад, якщо $f_2(x) = x$, то

$$\Delta^2 f_2(x) = f_2(x+2h) - 2f_2(x+h) + f_2(x) = x+2h - 2(x+h) + x = 0.$$

Якщо $f_3(x) = x^2$,

$$\begin{aligned} \text{то} \quad \Delta^3 f_3(x) &= f_3(x+3h) - 3f_3(x+2h) + 3f_3(x+h) - f_3(x) = \\ &= (x+3h)^2 - 3(x+2h)^2 + 3f_3(x+h)^2 - x^2 = 0. \end{aligned}$$

Аналогічно, якщо $f_4(x) = x^3$, то $\Delta^4 f_4(x) = 0$ і т. д., і $\Delta^n f_n(x) = 0$, якщо $f_n(x) = x^{n-1}$.

Ці розв'язки лінійно незалежні, оскільки співвідношення

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_n x^{n-1} = 0$$

є рівнянням, найбільше $n-1$ -го степеня відносно x , і не може мати при довільних сталих, що не дорівнюють нулю, більше, ніж $n-1$ коренів. Тоді співвідношення $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$ при довільних сталих, що не дорівнюють нулю хоча б для одного значення x , $x \geq 0$, що не є коренем рівняння $c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_n x^{n-1} = 0$, не виконується.

Використовуючи формулу (3.23) для рівняння (3.41) або (3.42) і для простоти будемо вважати $h=1$:

$$(-1)^{nx} D[f_1(0), f_2(0), \dots, f_n(0)] \prod_{t=0}^{x-1} P_n(t) = D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)].$$

Помноживши цю рівність на $(-1)^{nx}$ і враховуючи, що $(-1)^{2nx} = 1$, маємо

$$(-1)^{nx} D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] = \prod_{t=0}^{x-1} P_n(t) D[f_1(0), f_2(0), \dots, f_n(0)].$$

Замінивши у цій формулі x на $x+1$, отримаємо

$$(-1)^{n(x+1)} D[f_1(x+1), f_2(x+1), \dots, f_n(x+1)] = \prod_{t=0}^{x-1} P_n(t) D[f_1(0), f_2(0), \dots, f_n(0)]. \quad (3.43)$$

Застосуємо формулу (3.43) до рівняння (3.41) або (3.42) для часткового випадку $h=1$, у якому $P_n(t)=(-1)^n$:

$$\prod_{t=0}^x P_n(t) = \prod_{t=0}^x (-1)^n = (-1)^{(x+1)n} \quad (t=0,1,\dots,x).$$

Маємо

$$D[f_1(0), f_2(0), \dots, f_n(0)] = \begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) & \dots & f_n(0) \\ f_1(0+1) & f_2(0+1) & \dots & f_n(0+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(0+n-1) & f_2(0+n-1) & \dots & f_n(0+(n-1)) \end{vmatrix}.$$

Оскільки $f_1(x)=1, f_2(x)=x, \dots, f_n(x)=x^{n-1}$, то

$$\begin{aligned} D[f_1(0), f_2(0), \dots, f_n(0)] &= \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^{n-1} \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n-1 & (n-1)^2 & \dots & (n-1)^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 1^2 & 2^2 & \dots & (n-1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1^{n-1} & 2^{n-1} & \dots & (n-1)^{n-1} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

а при транспонуванні визначник не змінює свого значення. Отже, формула (3.43) для рівняння (3.41) або (3.42) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} (-1)^{n(x+1)} D[f_1(x+1), f_2(x+1), \dots, f_n(x+1)] &= (-1)^{n(x+1)} D[1, x+1, \dots, (x+1)^{n-1}] = \\ &= (-1)^{n(x+1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 1^2 & 2^2 & \dots & (n-1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1^{n-1} & 2^{n-1} & \dots & (n-1)^{n-1} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Якщо маємо рівняння $\Delta^n f(x)=0$, то для цього рівняння $n-1$ -го порядку функції $f_1(x)=1, f_2(x)=x, f_3(x)=x^2, \dots, f_{n-1}(x)=x^{n-2}$ будуть лінійно незалежними розв'язками рівняння $\Delta^{n-1} f(x)=0$. Тому за формулою (3.44), підставляючи $n-1$ замість n , отримаємо

$$(-1)^{(n-1)(x+1)} D[f_1(x+1), f_2(x+1), \dots, f_{n-1}(x+1)] = (-1)^{(n-1)(x+1)} D[1, x+1, \dots, (x+1)^{n-2}] =$$

$$= (-1)^{(n-1)(x+1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 0 & 1^2 & 2^2 & \dots & (n-2)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1^{n-2} & 2^{n-2} & \dots & (n-2)^{n-2} \end{vmatrix}. \quad (3.45)$$

Формула (3.40) при $h=1$ для рівняння (3.42) запишеться так:

$$Y(x) = \sum_{t=0}^{x-1} \frac{1}{D[1, t+1, (t+1)^2, \dots, (t+1)^{n-1}]} \begin{vmatrix} 1 & t+1 & (t+1)^2 & \dots & (t+1)^{n-1} \\ 1 & t+2 & (t+2)^2 & \dots & (t+2)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t+n-1 & (t+n-1)^2 & \dots & (t+n-1)^{n-1} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \end{vmatrix} Q(t) \quad (3.46)$$

Визначник у чисельнику формули (3.46) є поліномом відносно x степеня $n-1$ і відносно t , оскільки коефіцієнт при x^{n-1} дорівнює $D[1, t+1, (t+1)^2, \dots, (t+1)^{n-1}]$ і відмінний від 0 (функції $f_1(t)=1, f_2(t)=t, \dots, f_{n-1}(t)=t^{n-2}$ – лінійно незалежні розв'язки $\Delta^{n-1}f(x)=0$ і, згідно теореми 6, $D[f_1(t), f_2(t), \dots, f_{n-1}(t)] \neq 0$ при $t=0, 1, 2, \dots$ і, як наслідок, при $t+1$, тобто $D[1, t+1, (t+1)^2, \dots, (t+1)^{n-1}] \neq 0$).

Відомо, наприклад, якщо $ax^2+bx+c=0$ при $x=x_1, x=x_2$, то цей многочлен можна записати у вигляді $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Підставляючи замість x значення $x=t+1$ у визначник чисельника формули (3.46), отримаємо визначник, у якому перший та останній рядки рівні. Тому цей визначник при $x=t+1$ тотожно дорівнює нулю. Аналогічно, цей визначник тотожно дорівнює нулю і при $x=t+2, x=t+3, \dots, x=t+(n-1)$, тобто він дорівнює $u(t)(x-t-1)(x-t-2)\dots(x-t-n+1)$, де $u(t)$ – многочлен відносно t . Але коефіцієнт при x^{n-1} дорівнює $D[1, t+1, \dots, (t+1)^{n-2}] \neq 0$. Звідси випливає, що

$$\begin{vmatrix} 1 & t+1 & (t+1)^2 & \dots & (t+1)^{n-1} \\ 1 & t+2 & (t+2)^2 & \dots & (t+2)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t+n-1 & (t+n-1)^2 & \dots & (t+n-1)^{n-1} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= D[1, t+1, \dots, (t+1)^{n-2}] (x-t-1)(x-t-2)\dots(x-t-n+1)$$

і формулу (3.46) можна записати так:

$$Y(x) = \sum_{t=0}^{x-1} \frac{D[1, (t+1), (t+1)^2, \dots, (t+1)^{n-2}] (x-t-1)(x-t-2)\dots(x-t-n+1)}{D[1, t+1, (t+1)^2, \dots, (t+1)^{n-1}]} Q(t).$$

Доведемо, що

$$\frac{D[1, t+1, (t+1)^2, \dots, (t+1)^{n-2}]}{D[1, t+1, (t+1)^2, \dots, (t+1)^{n-1}]} = \frac{1}{(n-1)!}, \quad (3.47)$$

і тому

$$Y(x) = \sum_{t=0}^{x-1} \frac{(x-t-1)(x-t-2)\dots(x-t-n+1)}{(n-1)!} Q(t). \quad (3.48)$$

Дійсно, використаємо формули (3.44) і (3.45). У знаменнику формули (3.46) згідно (3.44) маємо визначник Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j),$$

де $x_1 = 0, x_2 = 1, \dots, x_n = n-1$, тому

$$\prod_{i>j} (x_i - x_j) = [(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)][(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\dots(x_n - x_2)]\dots(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= (n-1)!(n-2)!\dots 2!1!.$$

У чисельнику формули (3.47) згідно (3.45) визначник Вандермонда дорівнює $(n-2)!(n-3)!\dots 2!1!$, тому формулу (3.47) (і, як наслідок, (3.48)) доведено.

Отже, загальний розв'язок рівняння (3.41) або (3.42) при $h=1$ запишеться так:

$$f(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \dots + c_nx^{n-1} + \sum_{t=0}^{x-1} \frac{(x-t-1)(x-t-2)\dots(x-t-n+1)}{(n-1)!} Q(t). \quad (3.49)$$

Розглянемо наведені різницеві однорідні рівняння

$$Lf(x) = f(x+nh) + P_1(x)f(x+(n-1)h) + \dots + P_n(x)f(x) = 0,$$

$$Lf(x) = f(x+nh) + P_1(x)f(x+(n-1)h) + \dots + P_n(x)f(x) = 0.$$

Справедлива така теорема.

Теорема 8. Якщо $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ – лінійно незалежні розв’язки рівняння $Lf(x) = 0$ і $Lf(x) = 0$, то $P_i(x) = P_i(x)$ при будь-якому $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$, тобто, n лінійно незалежних розв’язків однозначно визначають наведене різницеве рівняння n -го порядку.

Доведення. Віднімемо від рівняння $Lf(x) = 0$ рівняння $Lf(x) = 0$ і, враховуючи, що $f_i(x)$ задовольняє ці рівняння, отримаємо

$$[P_1(x) - P_1(x)]f_i(x+(n-1)h) + \dots + [P_n(x) - P_n(x)]f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Вважаємо, що у цій лінійній однорідній системі $P_i(x) - P_i(x)$ невідомі.

Визначник цієї системи запишеться так

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1(x+h) & \dots & f_1(x+(n-1)h) \\ f_2(x) & f_2(x+h) & \dots & f_2(x+(n-1)h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(x) & f_n(x+h) & \dots & f_n(x+(n-1)h) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1(x+h) & f_2(x+h) & \dots & f_n(x+h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x+(n-1)h) & f_2(x+(n-1)h) & \dots & f_n(x+(n-1)h) \end{vmatrix} = D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)].$$

Оскільки $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ – лінійно незалежні розв’язки, то за теоремою 6 $D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] \neq 0$ при довільному $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$. Тому система однорідних рівнянь має лише нульовий розв’язок і $P_i(x) - P_i(x) = 0$ при $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$. Отже, $P_i(x) = P_i(x)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ при $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$, що і потрібно було довести.

Задача. Задано лінійно незалежні розв'язки $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ деякого лінійного однорідного різницевого рівняння n -го порядку. Знайти це однорідне рівняння.

Розв'язання. Відповідь на це питання дає така формула:

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) & f(x) \\ f_1(x+h) & f_2(x+h) & \dots & f_n(x+h) & f(x+h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x+(n-1)h) & f_2(x+(n-1)h) & \dots & f_n(x+(n-1)h) & f(x+(n-1)h) \\ f_1(x+nh) & f_2(x+nh) & \dots & f_n(x+nh) & f(x+nh) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.50)$$

Розкладемо цей визначник за елементами останнього стовпця і отримаємо різницеве рівняння

$$D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] f(x+nh) + \dots + (-1)^{n+2} D(x) f(x) = 0,$$

де $D(x)$ визначається формулою (3.38). Якщо в останньому стовпці визначника (3.50) замість $f(x)$ поставити $f_i(x)$, то цей визначник буде мати два рівні стовпці, і тому він дорівнює нулю, а це означає, що $f(x) = f_i(x)$ задовольняє різницеве однорідне рівняння. Оскільки $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ лінійно незалежні, то $D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] \neq 0$ і $D(x) \neq 0$.

Контрольні запитання

1. Які функції називаються лінійно залежними?
2. Які розв'язки різницевого рівняння називаються лінійно незалежними?

РОЗДІЛ 4. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ІЗ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

§ 1. ЛІНІЙНЕ ОДНОРІДНЕ РІВНЯННЯ.

ХАРАКТЕРИСТИЧНЕ РІВНЯННЯ

Теорія лінійних різницевих рівнянь із сталими коефіцієнтами є важливим частковим випадком загальної теорії. У цьому випадку можна безпосередньо знайти потрібне число лінійно незалежних розв'язків і за теоремою 2 можна знайти загальний розв'язок цього рівняння. Отже, нехай задано однорідне рівняння з сталими коефіцієнтами

$$f(x + nh) + a_1 f(x + (n-1)h) + a_2 f(x + (n-2)h) + \dots + a_n f(x) = 0, \quad (4.1)$$

де $a_i = \text{const}$, при цьому $a_n \neq 0$. Якщо $a_n = 0$, то рівняння (4.1), як ми знаємо, у випадку $a_{n-1} \neq 0$ заміною $x + h$ на x зводиться до рівняння $n-1$ -го порядку. Отже, якщо ми маємо різницеве рівняння вигляду (4.1), то ми повинні вважати a_n відмінним від нуля. Будемо шукати розв'язок рівняння (4.1) у вигляді

$$f(x) = \lambda^x, \quad (4.2)$$

де число λ підлягає визначенню. Підставляючи (4.2) у рівняння (4.1), отримаємо

$$\lambda^{x+nh} + a_1 \lambda^{x+(n-1)h} + a_2 \lambda^{x+(n-2)h} + \dots + a_n \lambda^x = 0$$

або

$$\lambda^x [\lambda^{nh} + a_1 \lambda^{(n-1)h} + a_2 \lambda^{(n-2)h} + \dots + a_n] = 0.$$

Ми шукаємо ненульовий розв'язок $f(x) = \lambda^x \neq 0$, тому

$$\lambda^{nh} + a_1 \lambda^{(n-1)h} + a_2 \lambda^{(n-2)h} + \dots + a_n = 0. \quad (4.3)$$

Рівняння (4.3) називається *характеристичним рівнянням* різницевого однорідного рівняння (4.1). Отже, щоб вираз (4.2) був розв'язком рівняння (4.1), число λ повинно бути коренем характеристичного рівняння (4.3).

Корені характеристичного рівняння (4.3), звичайно, можуть бути як

прості, так і кратні. Розглянемо можливі випадки.

1. Нехай усі корені рівняння (4.3) прості, які позначимо через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. За теоремою Вієта $(-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = a_n$. Оскільки $a_n \neq 0$, то можна вважати кожне із чисел λ_i відмінним від нуля. Тоді можна вказати n різних розв'язків рівняння (4.1)

$$f_1(x) = \lambda_1^x, f_2(x) = \lambda_2^x, \dots, f_n(x) = \lambda_n^x. \quad (4.4)$$

Доведемо, що в цьому випадку n розв'язків (4.4) рівняння (4.1) лінійно незалежні, тобто, покажемо на основі теореми 6, що визначник $D[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] \neq 0$ при $x = kh, k = 0, 1, 2, \dots$. Складемо із розв'язків (4.4) визначник $D[\lambda_1^x, \lambda_2^x, \dots, \lambda_n^x]$, отримаємо

$$D = D[\lambda_1^x, \lambda_2^x, \dots, \lambda_n^x] = \begin{vmatrix} \lambda_1^x & \lambda_2^x & \dots & \lambda_n^x \\ \lambda_1^{x+h} & \lambda_2^{x+h} & \dots & \lambda_n^{x+h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{x+(n-1)h} & \lambda_2^{x+(n-1)h} & \dots & \lambda_n^{x+(n-1)h} \end{vmatrix}.$$

Якщо із кожного стовпця номера i винесемо за знак визначника λ_i^x , то отримаємо

$$D = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)^x \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^h & \lambda_2^h & \dots & \lambda_n^h \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{(n-1)h} & \lambda_2^{(n-1)h} & \dots & \lambda_n^{(n-1)h} \end{vmatrix}.$$

Перший співмножник $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)^x \neq 0$, оскільки $(-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = a_n \neq 0$.

Отже, питання зводиться до дослідження визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^h & \lambda_2^h & \dots & \lambda_n^h \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{(n-1)h} & \lambda_2^{(n-1)h} & \dots & \lambda_n^{(n-1)h} \end{vmatrix}, \quad (4.5)$$

який є визначником Вандермонда, і, як відомо, він дорівнює добутку $\prod_{i>j} (\lambda_i^h - \lambda_j^h)$, що поширюється на всі значення $i > j$ із рядка $1, 2, \dots, n$.

Оскільки всі λ_i за припущенням різні, то ні одна з таких різниць, а отже, і визначник (4.5) у нуль не перетворюється. Тому розв'язки (4.4) будуть дійсно лінійно незалежними і загальний розв'язок рівняння (4.1) зобразиться так:

$$f(x) = c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x + \dots + c_n \lambda_n^x. \quad (4.6)$$

Нехай серед коренів λ_i є комплексні і всі корені λ_i різні. Будемо шукати дійсні розв'язки рівняння (4.1). Враховуючи, що комплексні корені λ_p і λ_g зустрічаються у спряжених парах, $\lambda_p = \rho(\cos \omega + i \sin \omega)$, $\lambda_g = \rho(\cos \omega - i \sin \omega)$, і вважаючи, що c_p, c_g є також комплексними числами $c_p = \frac{1}{2}(a_p - i a_g)$, $c_g = \frac{1}{2}(a_p + i a_g)$, де a_p, a_g – дійсні числа, суму $c_p \lambda_p^x + c_g \lambda_g^x$ можна перетворити до вигляду

$$\begin{aligned} c_p \lambda_p^x + c_g \lambda_g^x &= \frac{1}{2}(a_p - i a_g)[\rho(\cos \omega + i \sin \omega)]^x + \frac{1}{2}(a_p + i a_g)[\rho(\cos \omega - \\ &- i \sin \omega)]^x = \frac{1}{2}(a_p - i a_g)\rho^x(\cos \omega + i \sin \omega) + \frac{1}{2}(a_p + i a_g)\rho^x(\cos \omega - \\ &- i \sin \omega) = a_p \rho^x \cos \omega x + a_g \rho^x \sin \omega x \end{aligned}$$

Отже, загальний розв'язок (4.6) рівняння (4.1) зображується у цьому випадку у вигляді лінійних комбінацій виразів типу

$$\lambda_2^x, \rho^x \cos \omega x, \rho^x \sin \omega x.$$

2. Випадок кратних коренів. Нехай у нас є корінь λ_1 кратності s ($s > 1$). Тоді визначник Вандермонда (4.5) дорівнює нулю і у виразі (4.4) не міститься n часткових лінійно незалежних розв'язків. Принаймні один із розв'язків (4.4) ($s > 1$) буде тотожно з точністю до сталої співпадати з деякими іншими розв'язками. Тому потрібно шукати нові розв'язки, які не співпадають із найденими в (4.4), при цьому слід використовувати кратність кореня λ_1 . Поступаємо аналогічно теорії диференціальних рівнянь.

Нехай корінь $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ являється двократним, тоді вираз $c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x$ у (4.6) перетворимо наступним чином. Вважаємо, що $\lambda_2 = \lambda_1 + \delta$, де $\delta \neq 0$ і $\lambda_2 = \lim_{\delta \rightarrow 0}(\lambda_1 + \delta)$. Якщо на початку $\delta \neq 0$, то сталі c_1, c_2 вибирають так: $c_1 = \tilde{c}_1 - \frac{1}{\delta} \tilde{c}_2 \lambda_1$, $c_2 = \frac{1}{\delta} \tilde{c}_2 \lambda_1$. У цьому випадку отримаємо

$$c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x = c_1 \lambda_1^x + c_2 \lim_{\delta \rightarrow 0} (\lambda_1 + \delta)^x = \tilde{c}_1 \lambda_1^x + \tilde{c}_2 \lambda_1 \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [(\lambda_1 + \delta)^x - \lambda_1^x]$$

Вираз $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [(\lambda_1 + \delta)^x - \lambda_1^x]$ є невизначеністю $\left(\frac{0}{0}\right)$, і його граничне значення знайдемо за правилом Лопіталя. Маємо $\tilde{c}_2 \lambda_1 \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [(\lambda_1 + \delta)^x - \lambda_1^x] = \tilde{c}_2 \lambda_1 \lim_{\delta \rightarrow 0} x(\lambda_1 + \delta)^{x-1} = \tilde{c}_2 \lambda_1 x \lambda_1^{x-1} = \tilde{c}_2 x \lambda_1^x$

Отже, при $\lambda_1 = \lambda_2$

$$c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x = \tilde{c}_1 \lambda_1^x + \tilde{c}_2 x \lambda_1^x,$$

тобто один частковий розв'язок залишається без зміни, а другий розв'язок є добутком першого розв'язка на x : $f_1(x) = \lambda_1^x$, $f_2(x) = x \lambda_1^x$. Визначник $D[\lambda_1^x, x \lambda_1^x] \neq 0$, отже, розв'язки $f_1(x) = \lambda_1^x$, $f_2(x) = x \lambda_1^x$ лінійно незалежні.

Застосуємо вище викладене правило, коли $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, λ є трикратним коренем характеристичного рівняння. Маємо

$$c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x + c_3 \lambda_3^x = (c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x) + c_3 \lambda_3^x = \tilde{c}_1 \lambda_1^x + \tilde{c}_2 x \lambda_1^x + c_3 \lambda_3^x,$$

тому, що $\lambda_2 = \lambda_1$. Оскільки $\lambda_3 = \lambda_1$, то

$$c_1 \lambda_1^x + c_3 \lambda_3^x = c_1^* \lambda_1^x + \tilde{c}_3 x \lambda_1^x$$

і тому

$$c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x + c_3 \lambda_3^x = c_1^* \lambda_1^x + \tilde{c}_2 x \lambda_1^x + c_3 x \lambda_1^x = c_1^* \lambda_1^x + x(\tilde{c}_2 \lambda_1^x + c_3 \lambda_1^x) = c_1^* \lambda_1^x + x(c_2^* \lambda_1^x + c_3^* x \lambda_1^x) = c_1^* \lambda_1^x + c_2^* x \lambda_1^x + c_3^* x^2 \lambda_1^x$$

Ми отримали три лінійно незалежні розв'язки

$$f_1(x) = \lambda_1^x, f_2(x) = x \lambda_1^x, f_3(x) = x^2 \lambda_1^x,$$

які відповідають трикратному кореню $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Отримане правило для трикратного кореня, можна використати його для чотирикратного кореня і т. д. Якщо $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s$, то

$$c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x + \dots + c_s \lambda_s^x = \lambda_1^x (c_1^* + c_2^* x + \dots + c_s^* x^{s-1}),$$

і ми маємо s лінійно незалежних розв'язків

$$f_1(x) = \lambda_1^x, f_2(x) = x \lambda_1^x, \dots, f_s(x) = x^{s-1} \lambda_1^x, \quad (4.7)$$

які відповідають s -кратному кореню $\lambda = \lambda_1$.

Задача. Довести, що якщо розв'язок рівняння

$$f(x+n) + a_1 f(x+n-1) + a_2 f(x+n-2) + \dots + a_n f(x) = 0 \quad (4.8)$$

шукати у вигляді

$$f(x) = \varphi(x)\lambda^x, \quad (4.9)$$

то $\varphi(x)$ задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^n}{n!} P^{(n)}(\lambda) \Delta^n \varphi(x) + \dots + \frac{\lambda^{s+1}}{(s+1)!} P^{(s+1)}(\lambda) \Delta^{s+1} \varphi(x) + \frac{\lambda^s}{s!} P^{(s)}(\lambda) \Delta^s \varphi(x) + \\ & + \frac{\lambda^{s-1}}{(s-1)!} \Delta^{s-1} \varphi(x) + \dots + \frac{\lambda^2}{2!} P''(\lambda) \Delta^2 \varphi(x) + \frac{\lambda}{1!} P'(\lambda) \Delta \varphi(x) + P(\lambda) \varphi(x) = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

де $P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$.

Розв'язання. Підставляючи (4.9) у (4.8), отримаємо

$$\varphi(x+n)\lambda^{x+n} + a_1 \varphi(x+n-1)\lambda^{x+n-1} + \dots + a_{n-1} \varphi(x+1)\lambda^{x+1} + a_n \varphi(x)\lambda^x = 0$$

або, скорочуючи на $\lambda^x \neq 0$,

$$\varphi(x+n)\lambda^n + a_1 \varphi(x+n-1)\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \varphi(x+1)\lambda + a_n \varphi(x) = 0. \quad (4.11)$$

Замінивши $\varphi(x+n)$, $\varphi(x+n-1)$, ..., $\varphi(x+1)$ за формулою Ньютона (1.3)

для випадку $h = 1$, отримаємо рівняння (4.10).

Справді, нехай $\lambda = \lambda_1$ є коренем кратності s , тоді, як відомо,

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = P''(\lambda_1) = \dots = P^{(s-1)}(\lambda_1) = 0,$$

але $P^{(s)}(\lambda_1) \neq 0$, і рівняння (4.10) перетворюється у наступне

$$\frac{\lambda^n}{n!} P^{(n)}(\lambda_1) \Delta^n \varphi(x) + \dots + \frac{\lambda^{s+1}}{(s+1)!} P^{(s+1)}(\lambda_1) \Delta^{s+1} \varphi(x) + \frac{\lambda^s}{s!} P^{(s)}(\lambda_1) \Delta^s \varphi(x) = 0 \quad (4.13)$$

Одразу видно, що рівняння (4.13) задовольняє будь-який многочлен степеня нижче s , вибраний у якості функції $\varphi(x)$. Зокрема, будь-який із степенів x , тобто

$$\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x, \varphi_3(x) = x^2, \dots, \varphi_n(x) = x^{s-1},$$

буде задовольняти рівняння (4.13). Враховуючи, що $f(x) = \varphi(x)\lambda^x$ є

розв'язком рівняння (4.9), ми можемо стверджувати, що якщо λ є коренем характеристичного рівняння (4.8) кратності s , то функції

$$f_1(x) = \varphi_1(x)\lambda^x = \lambda^x, f_2(x) = \varphi_2(x)\lambda^x = x\lambda^x, \dots, f_n(x) = \varphi_n(x)\lambda^x = x^{s-1}\lambda^x$$

будуть розв'язками рівняння (4.8). Ми отримали розв'язок (4.7) іншим методом для рівняння (4.1) при $h = 1$, використовуючи рівняння (4.10) (див. [2]).

Приклади. Знайти розв'язки рівнянь:

$$1) \Delta^3 f(x) = 0 \text{ при початкових умовах } f(0) = f(1) = 0, f(2) = 1;$$

$$2) f(x+3) - 2f(x+2) + 2f(x+1) - f(x) = 0, f(0) = f(1) = 0, f(2) = 1;$$

$$3) f(x+4) + 2f(x+3) + 3f(x+2) + 2f(x+1) + f(x) = 0,$$

$f(0) = f(1) = f(3) = 0, f(2) = -1$. Знайти $f(100)$. У кінці зробити перевірку.

Розв'язання. 1) Оскільки рівняння $\Delta^3 f(x) = 0$ третього порядку, то його задовольняє будь-який поліном степеня, нижче третього. Отже, загальний розв'язок цього рівняння запишеться так

$$f(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2.$$

З іншого боку, використовуючи формулу

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} c_n^k f(x+k), \quad (1.1)$$

отримаємо

$$\Delta^3 f(x) = \sum_{k=0}^3 (-1)^{3-k} c_3^k f(x+k) = -c_3^0 f(x) + c_3^1 f(x+1) - c_3^2 f(x+2) + c_3^3 f(x+3) = f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) = 0$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0.$$

Корінь $\lambda = 1$ є трикратним коренем характеристичного рівняння, тому загальний розв'язок рівняння задається формулою

$$f(x) = (c_1 + c_2x + c_3x^2)\lambda^x = c_1 + c_2x + c_3x^2$$

$$f(x+n) = \sum_{k=0}^n c_n^k \Delta^k f(x),$$

і ми отримаємо

$$\varphi(x+3) = \varphi(x) + 3\Delta\varphi(x) + 3\Delta^2\varphi(x) + \Delta^3\varphi(x), \quad (4.12)$$

$$\varphi(x+n-2) = \varphi(x) + (n-2)\Delta\varphi(x) + \frac{1}{2!}(n-2)(n-3)\Delta^2\varphi(x) + \cdots + \Delta^{n-2}\varphi(x)$$

$$\varphi(x+n-1) = \varphi(x) + (n-1)\Delta\varphi(x) + \frac{1}{2!}(n-1)(n-2)\Delta^2\varphi(x) + \cdots + \Delta^{n-1}\varphi(x)$$

$$\varphi(x+n) = \varphi(x) + n\Delta\varphi(x) + \frac{1}{2!}n(n-1)\Delta^2\varphi(x) + \cdots + \Delta^n\varphi(x).$$

Помножимо перше із рівнянь (4.12) на a_n , друге – на $a_{n-1}\lambda$, третє – на $a_{n-2}\lambda^2$ і т. д., останнє – на λ^n , і отримані рівності почленно додамо. Очевидно, у лівій частині отриманої тотожності буде стояти ліва частина рівняння (4.11). Прирівнявши праву частину отриманої тотожності до нуля, отримаємо рівняння, еквівалентне рівнянню (3.11). Згрупуємо члени, які містять $\varphi(x)$:

$$\lambda^n \varphi(x) + a_1 \lambda^{n-1} \varphi(x) + a_2 \lambda^{n-2} \varphi(x) + \cdots + a_{n-1} \lambda \varphi(x) + a_n \varphi(x) = (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n) \varphi(x) = P(\lambda) \varphi(x)$$

Випишемо вираз, який містить $\Delta\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} & n\lambda^n \Delta\varphi(x) + a_1(n-1)\lambda^{n-1}\Delta\varphi(x) + a_2(n-2)\lambda^{n-2}\Delta\varphi(x) + \cdots + \\ & + a_{n-2}\lambda^2\Delta\varphi(x) + a_{n-1}\lambda\Delta\varphi(x) = \lambda[n\lambda^{n-1} + a_1(n-1)\lambda^{n-2} + a_2(n-2)\lambda^{n-3} + \\ & \cdots + a_{n-2}\lambda + a_{n-1}]\Delta\varphi(x) = \frac{\lambda}{n!}P'(\lambda)\Delta\varphi(x) \end{aligned}$$

Вираз, який містить множник $\Delta^2 \varphi(x)$, має вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2!}n(n-1)\lambda^n\Delta^2\varphi(x) + \frac{1}{2!}(n-1)(n-2)\lambda^{n-1}a_1\Delta^2\varphi(x) + \cdots + \lambda^2a_{n-2}\Delta^2\varphi(x) = \\ & = \frac{\lambda^2}{2!}[n(n-1)\lambda^{n-2} + a_1(n-1)(n-2)\lambda^{n-3} + \cdots + 2a_{n-2}]\Delta^2\varphi(x) = \\ & \frac{\lambda^2}{2!}P''(\lambda)\Delta^2\varphi(x) \end{aligned}$$

Продовжуючи цей процес далі, отримаємо рівняння (4.10), що і потрібно було довести.

Вигляд рівняння (4.10) зручний тим, що він, як ми зараз побачимо, легко дозволяє використовувати кратність кореня характеристичного

рівняння. Використовуючи початкові умови, отримаємо $0 = f(0) = c_1$, $0 = f(1) = c_2 + c_3$, $1 + f(2) = 2c_2 + 4c_3$. Звідси $c_1 = 0$, $c_2 = -\frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{1}{2}$, і частковий розв'язок запишеться так

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x(x-1).$$

Перевірка. $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$. Підставляючи вирази

$$f(x+3) = \frac{1}{2}[(x+3)^2 - (x+3)], \quad f(x+2) = \frac{1}{2}[(x+2)^2 - (x+2)],$$

$$f(x+1) = \frac{1}{2}[(x+1)^2 - (x+1)], \quad f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x),$$

у рівняння $f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) = 0$, отримаємо $0 = 0$, отже, функція $f(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$ задовольняє наше рівняння.

$$2) f(x+3) - 2f(x+2) + 2f(x+1) - f(x) = 0.$$

Коренями характеристичного рівняння $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$ будуть

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
 Запишемо корінь

$$a + ib = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

у тригонометричній формі. Маємо

$$a + ib = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = 1, \quad \cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{3},$$

$$\lambda^x = (\cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3})^x = \cos \frac{\pi}{3} x \pm i \sin \frac{\pi}{3} x$$

і загальний розв'язок нашого рівняння має вигляд

$$f(x) = c_1 + c_2 \cos \frac{\pi}{3} x + c_3 \sin \frac{\pi}{3} x.$$

Використовуючи початкові умови $f(0) = f(1) = 0$, $f(2) = 1$, отримаємо

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3 = 0,$$

$$c_1 + c_2 \cos \frac{2\pi}{3} + c_3 \sin \frac{2\pi}{3} = c_1 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_3 = 1.$$

Отже, $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, і розв'язок рівняння при вищевказаних початкових умовах буде

$$f(x) = 1 - \cos \frac{\pi}{3} x - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} x.$$

Підставляючи $f_1(x) = 1, f_2(x) = \cos \frac{\pi}{3} x, f_3(x) = \sin \frac{\pi}{3} x$ у рівняння

$$f(x+3) - 2f(x+2) + 2f(x+1) - f(x) = 0, \quad \text{переконуємося, що ці}$$

часткові розв'язки задовольняють однорідне рівняння.

$$3) f(x+4) + 2f(x+3) + 3f(x+2) + 2f(x+1) + f(x) = 0,$$

$$f(0) = f(1) = f(3) = 0, f(2) = -1.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda^2 + \lambda + 1)^2 = 0.$$

Корені рівняння $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} = a \pm ib = \rho(\cos \alpha \pm i \sin \alpha),$$

$$\rho = 1, \cos \alpha = -\frac{1}{2}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha = \frac{2\pi}{3},$$

$$\lambda_{1,2} = \cos \frac{2\pi}{3} \pm i \sin \frac{2\pi}{3}, \lambda_{3,4} = \cos \frac{2\pi}{3} \pm i \sin \frac{2\pi}{3},$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \lambda_2 = \lambda_4 = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

Оскільки корені характеристичного рівняння кратні, то загальний розв'язок має вигляд

$$f(x) = (a_1 + a_2 x)(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})^x + (b_1 + b_2 x)(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3})^x = \\ (a_1 + a_2 x)(\cos \frac{2\pi}{3} x + i \sin \frac{2\pi}{3} x) + (b_1 + b_2 x)(\cos \frac{2\pi}{3} x - i \sin \frac{2\pi}{3} x)$$

$$\text{Нехай } a_1 = \frac{1}{2}c_1 - i \frac{1}{2}c_2, a_2 = \frac{1}{2}c_3 - i \frac{1}{2}c_4; b_1 = \frac{1}{2}c_1 + i \frac{1}{2}c_2, b_2 = \frac{1}{2}c_3 + i \frac{1}{2}c_4,$$

тоді функція

$$f(x) = (c_1 + c_3 x) \cos \frac{2\pi}{3} x + (c_2 + c_4 x) \sin \frac{2\pi}{3} x$$

є загальним розв'язком нашого однорідного різницевого рівняння. Із початкових умов отримаємо

$$f(0) = c_1 = 0, \quad f(1) = c_3 \cos \frac{2\pi}{3} + (c_2 + c_4) \sin \frac{2\pi}{3} = 0, \quad f(3) = 3c_3 = 0,$$

$$f(2) = (c_2 + 2c_4) \sin \frac{4\pi}{3} = -1, \quad c_2 + c_4 = 0, \quad c_2 + 2c_4 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad c_2 = -2c_4 = -\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$c_1 = c_3 = 0$. Отже, $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}(x-1)\sin \frac{2\pi}{3}x$.

Тоді

$$f(100) = \frac{2 \cdot 99}{\sqrt{3}} \sin \frac{200\pi}{(\sqrt{3})^2} = \frac{198}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi}{3}x = \frac{198}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{2} = 99.$$

Підставляючи $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}(x-1)\sin \frac{2\pi}{3}x$ у наше однорідне різницеве рівняння, переконуємось, що ця функція задовольняє рівняння і початкові умови.

Приклад. Використовуючи метод Лагранжа, знайти загальний розв'язок різницевого неоднорідного рівняння $f(n+2) - 5f(n+1) + 6f(n) = n$.

Розв'язання. $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ є характеристичним рівнянням однорідного різницевого рівняння, корені якого $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Маємо $f_1(n) = 2^n, f_2(n) = 3^n$. Отже, $f(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) = c_1 2^n + c_2 3^n$ – загальний розв'язок однорідного рівняння. Умови Лагранжа (3.37) для нашого рівняння мають вигляд

$$\Delta c_1(n) f_1(n+1) + \Delta c_2(n) f_2(n+1) = 0,$$

$$\Delta c_1(n) f_1(n+2) + \Delta c_2(n) f_2(n+2) = Q(n)$$

або

$$\Delta c_1(n) 2^{n+1} + \Delta c_2(n) 3^{n+1} = 0, \Delta c_1(n) 2^{n+2} + \Delta c_2(n) 3^{n+2} = n.$$

Із цієї системи отримаємо $\Delta c_1(n) = -\frac{n}{2^{n+1}}, \Delta c_2(n) = \frac{n}{3^{n+1}}$, звідки

$$c_1(n) = -\sum_{v=0}^{n-1} \frac{v}{2^{v+1}} + \tilde{c}_1, c_2(n) = \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v}{3^{v+1}} + \tilde{c}_2.$$

Підставляючи ці значення у загальний розв'язок однорідного рівняння, отримаємо

$$f(n) = \tilde{c}_1 2^n + \tilde{c}_2 3^n - 2^n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v}{2^{v+1}} + 3^n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v}{3^{v+1}}.$$

Отже, функція

$$Y(n) = -2^n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v}{2^{v+1}} + 3^n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v}{3^{v+1}}$$

буде частковим розв'язком неоднорідного різницевого рівняння.

Перевірка.

$$\begin{aligned}
 Y(n+1) &= -2^{n+1} \sum_{v=0}^n \frac{v}{2^{v+1}} + 3^{n+1} \sum_{v=0}^n \frac{v}{3^{v+1}} = -2^{n+1} \frac{n}{2^{n+1}} - 2^{n+1} \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v}{2^{v+1}} + \\
 &+ 3^{n+1} \frac{n}{3^{n+1}} + 3^{n+1} \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v}{3^{v+1}} = -2^n * 2 \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v}{2^{v+1}} + 3^n * 3 \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v}{3^{v+1}} \\
 Y(n+2) &= -2^{n+2} \sum_{v=0}^{n+1} \frac{v}{2^{v+1}} + 3^{n+2} \sum_{v=0}^{n+1} \frac{v}{3^{v+1}} = n - 2^{n+2} \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v}{2^{v+1}} + \\
 &+ 3^{n+2} \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v}{3^{v+1}}
 \end{aligned}$$

Підставляючи значення $Y(n)$, $Y(n+1)$, $Y(n+2)$ у неоднорідне рівняння, отримаємо $n = n$.

Покажемо, що

$$f(n) = c_1 2^n + c_2 3^n - 2^n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v}{2^{v+1}} + 3^n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v}{3^{v+1}} = \tilde{c}_1 2^n + \tilde{c}_2 3^n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}.$$

Дійсно,

$$\begin{aligned}
 \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v}{2^{v+1}} &= \sum_{v=0}^{n-1} v \left(\frac{1}{2}\right)^{v+1} = \frac{1}{4} \sum_{v=0}^{n-1} v \left(\frac{1}{2}\right)^{v-1} = \frac{1}{4} \left(\sum_{v=0}^{n-1} z^v\right)'_{z=\frac{1}{2}} = \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{a_1(1-g^n)}{1-g}\right]'_{g=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)'_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \frac{1}{1-z^2} [-nz^{n-1}(1-z) + 1 - z^n]_{z=\frac{1}{2}} = \\
 &= -\frac{1}{2}n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1
 \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\sum_{v=0}^{n-1} \frac{v}{3^{v+1}} = \frac{1}{9} \sum_{v=0}^{n-1} v \left(\frac{1}{3}\right)^{v-1} = \frac{1}{4} \left[-\frac{2}{3}n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right].$$

Таким чином,

$$Y(n) = -2^n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v}{2^{v+1}} + 3^n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v}{3^{v+1}} = \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}3^n - 2^n$$

і

$$\begin{aligned}
 f(n) &= c_1 2^n + c_2 3^n - 2^n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v}{2^{v+1}} + 3^n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v}{3^{v+1}} = (c_1 - 1)2^n + \\
 &+ \left(c_2 + \frac{1}{4}\right)3^n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} = \tilde{c}_1 2^n + \tilde{c}_2 3^n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Отже, частковий розв'язок неоднорідного рівняння можна записати у вигляді $Y(n) = \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}$.

Приклад. Знайти відповідні різницеві однорідні рівняння, частковими розв'язками якого є функції $f_1(n) = 2^n$, $f_2(n) = 3^n$.

Цей приклад ми розв'язували раніше (див. §4, приклад 10). Тепер розв'яжемо його іншим методом, використовуючи формулу (3.50):

$$\begin{vmatrix} f_1(n) & f_2(n) & f(n) \\ f_1(n+1) & f_2(n+1) & f(n+1) \\ f_1(n+2) & f_2(n+2) & f(n+2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2^n & 3^n & f(n) \\ 2^{n+1} & 3^{n+1} & f(n+1) \\ 2^{n+2} & 3^{n+2} & f(n+2) \end{vmatrix} = 0$$

Розкриваючи цей визначник, маємо рівняння

$$f(n+2) - 5f(n+1) + 6f(n) = n,$$

загальним розв'язком якого є функція $f(n) = c_1 2^n + c_2 3^n$.

§2. ЗНАХОДЖЕННЯ ЧАСТКОВОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО НЕОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ МЕТОДОМ НЕВИЗНАЧЕНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Для знаходження часткового розв'язку неоднорідного лінійного рівняння можна використовувати метод варіації довільних сталих, але в найпростіших випадках правій частині рівняння частковий розв'язок можна підібрати безпосередньо методом невизначених коефіцієнтів.

Розглянемо частковий випадок, коли права частина рівняння є добутком многочлена на λ^x , тобто розглянемо рівняння

$$f(x+n) + a_1 f(x+n-1) + \dots + a_n f(x) = \lambda^x Q(x), \quad (4.14)$$

де $Q(x)$ – поліном степеня p .

Правило. Якщо в правій частині рівняння (4.14) λ не є коренем характеристичного рівняння, то частковий розв'язок неоднорідного рівняння (4.14) потрібно шукати у вигляді

$$Y(x) = \lambda^x (b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \dots + b_{p-1} x + b_p). \quad (4.15)$$

Якщо λ є коренем характеристичного рівняння кратності s , то частковий розв'язок неоднорідного рівняння (4.14) потрібно шукати у вигляді

$$Y(x) = \lambda^x (b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \dots + b_{p-1} x + b_p) x^s. \quad (4.16)$$

Доведення. Будемо шукати розв'язок рівняння (4.14) у вигляді

$$Y(x) = \lambda^x \varphi(x). \quad (4.17)$$

Підставляючи (4.16) у рівняння (4.14), отримаємо

$$Y(x+n)\lambda^{x+n} + a_1\varphi(x+n-1)\lambda^{x+n-1} + \dots + a_1\lambda^x\varphi(x) = \lambda^x Q(x)$$

або, скорочуючи на $\lambda^x \neq 0$, отримаємо рівняння

$$Y(x+n)\lambda^n + a_1\varphi(x+n-1)\lambda^{n-1} + \dots + a_1\varphi(x) = Q(x). \quad (4.18)$$

Використовуючи формулу (4.10), будемо мати рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^n}{n!} P^{(n)}(\lambda) \Delta^n \varphi(x) + \dots + \frac{\lambda^{s+1}}{(s+1)!} P^{(s+1)}(\lambda) \Delta^{s+1} \varphi(x) + \frac{\lambda^s}{s!} P^{(s)}(\lambda) \Delta^s \varphi(x) + \\ & + \frac{\lambda^{s-1}}{(s-1)!} P^{(s-1)}(\lambda) \Delta^{s-1} \varphi(x) + \dots + \frac{\lambda^2}{2!} P''(\lambda) \Delta^2 \varphi(x) + \frac{\lambda}{1!} P'(\lambda) \Delta \varphi(x) + \\ & + P(\lambda) \varphi(x) = Q(x) \end{aligned} \quad (4.19)$$

де $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$.

Права і ліва частини рівняння (4.19) повинні бути поліномами однакового степеня. Оскільки $\Delta\varphi(x), \dots, \Delta^n\varphi(x)$ мають степінь менший, ніж степінь многочлена $\varphi(x)$, то $\varphi(x)$ має той же степінь, що і права частина $Q(x)$, тобто степінь p , і ми отримаємо при $P(\lambda) \neq 0$ частковий розв'язок вигляду (4.15). Нехай λ є коренем характеристичного рівняння кратності s . Тоді

$$P(\lambda) = 0, P'(\lambda) = 0, \dots, P^{(s-1)}(\lambda) = 0, P^{(s)}(\lambda) \neq 0,$$

і рівняння (4.18) матиме вигляд

$$\frac{\lambda^n}{n!} P^{(n)}(\lambda) \Delta^n \varphi(x) + \dots + \frac{\lambda^{s+1}}{(s+1)!} P^{(s+1)}(\lambda) \Delta^{s+1} \varphi(x) + \frac{\lambda^s}{s!} P^{(s)}(\lambda) \Delta^s \varphi(x) = Q(x),$$

$\Delta^s \varphi(x)$ повинно мати степінь $p + s$. Права частина $Q(x) = b_0x^p + b_1x^{p-1} + \dots + b_{p-1}x + b_p$ має $p + 1$ коефіцієнтів. Тому і розклад для $\varphi(x)$ повинен мати $p + 1$ коефіцієнтів. Отже,

$$\varphi(x) = x^s (B_0x^p + B_1x^{p-1} + \dots + B_{p-1}x + B_p),$$

і ми, згідно (4.17), отримаємо (4.16).

Якщо $\lambda = 1$, то права частина рівняння (4.14) є поліномом. Отже, для полінома істотну роль відіграють корені характеристичного рівняння, які дорівнюють одиниці.

Теорема. Якщо права частина $\Psi(x)$ лінійно неоднорідного різницевого рівняння

$$Lf(x) = \Psi_1(x) + \Psi_2(x) + \dots + \Psi_k(x) = \Psi(x) \quad (4.20)$$

складається із суми функцій раніше розглянутого виду, і $\Psi_1(x), \dots, \Psi_k(x)$ – частинні розв’язки відповідних неоднорідних рівнянь

$$Lf(x) = \Psi_1(x), Lf(x) = \Psi_2(x), \dots, Lf(x) = \Psi_k(x),$$

то частковий розв’язок $Y(x)$ неоднорідного рівняння (4.20) запишеться так:

$$Y(x) = Y_1(x) + Y_2(x) \dots + Y_k(x).$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню відповідної теореми для звичайних диференційованих рівнянь.

Приклади. Знайти загальний розв’язок, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів для знаходження часткового розв’язку неоднорідного рівняння:

$$1) f(x+2) - 5f(x+1) + 6f(x) = x^2,$$

$$2) f(n+1) - 2f(n) = n + 1,$$

$$3) f(x+2) - 3f(x+1) + 2f(x) = 3^x(x+5),$$

$$4) f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 3x,$$

Розв’язання.

1) Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ має корені $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$.

Оскільки $\lambda=1$ не є коренем характеристичного рівняння, то частковий розв’язок $Y(x)$ шукаємо у вигляді $Y(x) = ax^2 + bx + c$. Підставляючи $Y(x)$ у рівняння $f(x+2) - 5f(x+1) + 6f(x) = x^2$ і прирівнюючи у лівій і правій частині коефіцієнти при однакових степенях x , отримаємо $a = \frac{1}{5}, b = \frac{6}{35},$

$$c = \frac{5}{14}. \text{ Тому } Y(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{35}x + \frac{5}{14} \text{ і}$$

$$f(x) = c_1 2^x + c_2 3^x + \frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{35}x + \frac{5}{14}$$

є загальним розв’язком рівняння 1.

2) Оскільки $\lambda - 2 = 0$ – характеристичне рівняння, то загальним розв’язком однорідного рівняння є функція $f(n) = c2^n$. Частковий розв’язок $Y(n)$ шукаємо у вигляді $Y(n) = an + b$, оскільки $\lambda = 1$ не є коренем характеристичного рівняння. Підставляючи

$$Y(n) = an + b, Y(n + 1) = a(n + 1) + b$$

у рівняння, отримаємо

$$Y(n + 1) - 2Y(n) = n + 1$$

або

$$a(n + 1) + b - 2an - -2b = n + 1; \quad -a = 1, \quad a - b = 1, \quad a = -1, \quad b = -2;$$

$f(n) = c_1 2^n - n - 2$ – загальний розв’язок рівняння 2. (Раніше таку задачу ми розв’язали методом Лагранжа, використовуючи формулу (2.14)).

Тепер формулу

$$2^n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v+1}{2^{v+1}} = 2^{n+1} - n - 2$$

можна довести більш простим способом. Ми отримали загальний розв’язок у двох видах

$$f(n) = c_1 2^n - n - 2 \text{ або } f(n) = c 2^n + 2^n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v+1}{2^{v+1}}.$$

Нехай $f(2) = 1$. Тоді $f(n) = \frac{5}{4} 2^n - n - 2$; $c_1 = \frac{5}{4}$ і

$$f(n) = -\frac{3}{4} 2^n + 2^n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v+1}{2^{v+1}}, \quad c = -\frac{3}{4}. \text{ Порівнюючи ці два результати,}$$

отримаємо

$$\frac{5}{4} 2^n - n - 2 = -\frac{3}{4} 2^n + 2^n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v+1}{2^{v+1}}.$$

Звідси

$$2^n \sum_{v=0}^{n-1} \frac{v+1}{2^{v+1}} = \frac{5}{4} 2^n - n - 2 + \frac{3}{4} 2^n = 2^{n+1} - n - 2,$$

і формула (2.14) доведена простіше.

3) Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ має корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ і

$f(x) = c_1 + c_2 2^x$ є загальним розв’язком однорідного різницевого рівняння.

Оскільки $\lambda = 3$ не є коренем характеристичного рівняння, то частковий розв'язок неоднорідного різницевого рівняння шукаємо у вигляді

$$Y(x) = 3^x(b_0x + b_1).$$

Підставляючи $Y(x)$, $Y(x+1)$, $Y(x+2)$ у неоднорідне рівняння, після скорочення лівої і правої частини на 3^x отримаємо

$$2b_0x + 9b_0 + 2b_1 = x + 5, \quad b_0 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = \frac{1}{4},$$

тому $Y(x) = 3^x(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4})$ і загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вид:

$$f(x) = c_1 + c_2 2^x + 3^x(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}).$$

4) Коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ є $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, і тому $f(x) = c_1 + c_2$ – загальний розв'язок однорідного рівняння. Оскільки права частина рівняння є поліномом і $\lambda_{1,2} = 1$ є двократним коренем характеристичного рівняння, то частковий розв'язок потрібно шукати у вигляді

$$Y(x) = x^2(b_0x + b_1) = b_0x^3 + b_1x^2.$$

Підставляючи $Y(x)$, $Y(x+1)$, $Y(x+2)$ у неоднорідне рівняння, після елементарних перетворень маємо

$$6b_0x + 96 + 2b_1 = 3x, \quad b_0 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = -\frac{3}{2}.$$

Отже, $f(x) = c_1 + c_2x + \frac{1}{2}x^2(x-3)$ є загальним розв'язком нашого рівняння.

§3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Система звичайних лінійних диференціальних рівнянь може бути зведена до одного лінійного рівняння вищого порядку. Аналогічно систему різницевих лінійних рівнянь зведемо до одного лінійного різницевого рівняння вищого порядку. Проілюструємо це на прикладах.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок наступної лінійної різницевої системи:

$$\begin{cases} y(x+2) - 3y(x) + z(x+1) + z(x) = x \\ z(x+1) = y(x+1) + 2y(x) - 2z(x) \end{cases}.$$

Розв'язання. Знайдемо із системи значення $y(x+2)$ і $z(x+1)$:

$$\begin{cases} y(x+2) = x + 3y(x) - z(x+1) - z(x) \\ z(x+1) = y(x+1) + 2y(x) - 2z(x) \end{cases}.$$

Підставляючи у перше рівняння значення $z(x+1)$ із другого рівняння, маємо

$$y(x+2) = x + 3y(x) - y(x+1) - 2y(x) + z(x),$$

звідки

$$z(x) = y(x+2) + y(x+1) - y(x) - x.$$

Замінивши x на $x+1$, отримаємо

$$z(x+1) = y(x+3) + y(x+2) - y(x+1) - x - 1.$$

Підставляючи ці значення $z(x)$ і $z(x+1)$ у перше рівняння системи, маємо рівняння $y(x+3) + 3y(x+2) - 4y(x) = 3x + 1$. Загальний розв'язок цього неоднорідного рівняння має вид

$$y(x) = c_1 + (c_2 + c_3 x)(-2)^x + \frac{1}{18}(3x^2 - 5x).$$

Тому $z(x) = y(x+2) + y(x+1) - y(x) - x$, і ми отримали

$$z(x) = c_1 + (c_2 + 6c_3 + c_3 x)(-2)^x + \frac{1}{18}(3x^2 - 5x).$$

Підставляючи ці вирази для $y(x)$ і $z(x)$ у систему рівнянь, переконуємось, що функції $y(x)$, $z(x)$ задовольняють нашу систему.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок системи різницевих рівнянь:

$$\begin{cases} y(x+2) + 2y(x) + z(x) = 2x \\ z(x+1) + y(x+1) - y(x) - z(x) = x. \end{cases}$$

Розв'язання. Із першого рівняння знаходимо

$$z(x) = 2x - y(x+2) - 2y(x),$$

підставляємо цей вираз у друге рівняння:

$$z(x+1) = 3x - y(x+2) - y(x+1) - y(x).$$

Замінюючи у виразі для $z(x)$ значенням $x+1$, маємо

$$z(x+1) = 2x+2 - y(x+3) - 2y(x+1).$$

Порівнюючи ці два вирази для $z(x+1)$, отримаємо різницеве неоднорідне лінійне рівняння

$$y(x+3) - y(x+2) + y(x+1) - y(x) = 2 - x.$$

Коренями характеристичного рівняння $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ є $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \pm i$. Тому загальний розв'язок однорідного рівняння запишемо так:

$$y(x) = c_1 + c_2 \sin \frac{\pi}{2}x + c_3 \cos \frac{\pi}{2}x.$$

Оскільки $\lambda_1 = 1$ – корінь характеристичного рівняння, то частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у виді

$$Y(x) = x(ax + b) = ax^2 + bx.$$

Підставляючи $Y(x)$, $Y(x+1)$, $Y(x+2)$, $Y(x+3)$ у неоднорідне рівняння, отримаємо

$$4ax + 6a + 2b = 2 - x,$$

звідки $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{7}{4}$. Тому

$$y(x) = c_1 + c_2 \sin \frac{\pi}{2}x + c_3 \cos \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{4}x.$$

Із виразу $z(x) = 2x - y(x+2) - 2y(x)$ отримаємо

$$z(x) = -3c_1 - c_2 \sin \frac{\pi}{2}x - c_3 \cos \frac{\pi}{2}x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{5}{2}.$$

Отже, загальний розв'язок нашої системи різницевих рівнянь має вигляд

$$y(x) = c_1 + c_2 \sin \frac{\pi}{2}x + c_3 \cos \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{4}x,$$

$$z(x) = -3c_1 - c_2 \sin \frac{\pi}{2}x - c_3 \cos \frac{\pi}{2}x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{5}{2}.$$

Контрольні запитання

1. Наведіть вигляд характеристичного рівняння різницевого однорідного рівняння.

Завдання для самостійного роботи

1. Знайти загальний розв'язок, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів для знаходження часткового розв'язку неоднорідного рівняння:

а) $f(x+2) - f(x+1) - 6f(x) = 12x - 8$.

Відповідь: $f(x) = c_1 3^x + c_2 (-2)^x - 2x + 1$.

б) $f(n+2) - 5f(n+1) + 6f(n) = n$.

Відповідь: $f(n) = c_1 2^n + c_2 3^n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}$.

в) $f(x+2) - 5f(x+1) + 6f(x) = e^{3x}$.

Відповідь: $f(x) = c_1 2^x + c_2 3^x + e^{3x}/(e^6 - 5e^3 + 6)$. Частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукається у вигляді $Y(x) = ae^{3x}$.

г) $f(x+3) + 3f(x+2) - 4f(x) = 3x + 1$.

Відповідь: $f(x) = c_1 + (c_2 + c_3 x)(-2)^x + \frac{1}{18}(3x^2 - 5x)$. Частковий розв'язок $Y(x)$ шукається у виді $Y(x) = x(ax + b)$, оскільки $\lambda = 1$ є коренем характеристичного рівняння $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$.

1. Знайти різницеві рівняння, розв'язками яких є функції:

а) $y(x) = \frac{c}{x}$.

Відповідь: $(x+1)y(x+1) - xy(x) = 0$;

б) $y(x) = c_1 x + c_2 2^x$.

Відповідь: $(x-1)y(x+2) - (3x-2)y(x) + 2xy(x) = 0$.

2. Знайти загальні розв'язки рівнянь:

1) $y(x+2) + 3y(x+1) - 10y(x) = 0$.

Відповідь: $y(x) = c_1 2^x + c_2 (-5)^x$.

$$2) y(x+3) - y(x+2) - 9y(x+1) + 9y(x) = 0.$$

Відповідь: $y(x) = c_1 + c_2 3^x + c_3 (-3)^x.$

$$3) y(x+2) + 4y(x) = 0.$$

Відповідь: $\lambda_{1,2} = \pm 2i = 2(\cos \frac{\pi}{2} \pm i \sin \frac{\pi}{2}), y(x) = 2^x (c_1 \cos \frac{\pi}{2} x + c_2 \sin \frac{\pi}{2} x)$

$$4) y(x+2) + y(x) - \sqrt{2}y(x+1) = 0.$$

Відповідь: $\lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4}, y(x) = c_1 \cos \frac{\pi}{4} x + c_2 \sin \frac{\pi}{4} x.$

$$5) y(x+4) + 18y(x+2) + 81y(x) = 0.$$

Відповідь:

$$\lambda_{1,2} = \pm 3i, \lambda_{3,4} = \pm 3i, y(x) = 3^x [(c_1 + c_2 x) \cos \frac{\pi}{2} x + (c_3 + c_4 x) \sin \frac{\pi}{2} x].$$

$$6) z(x+2) - 2z(x) = 5.$$

Відповідь: $z(x) = c_1 (\sqrt{2})^x + c_2 (-\sqrt{2})^x - 5.$

$$7) z(x+2) - 4z(x) = x^2.$$

Відповідь: $z(x) = c_1 2^x + c_2 (-2)^x - \frac{1}{27} (9x^2 + 12x + 20).$

$$8) f(n+2) + f(n) = n2^n.$$

Відповідь: $f(n) = c_1 \cos \frac{\pi}{2} n + c_2 \sin \frac{\pi}{2} n + \frac{1}{25} 2^n (5n - 8).$

$$9) z(x+2) - 4z(x+1) + 3z(x) = x + 1.$$

Відповідь: $z(x) = c_1 + c_2 3^x - \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x.$

$$10) \Delta^2 z(x) = 3.$$

Відповідь: $z(x) = c_1 + c_2 x + \frac{3}{2} x^2, z(x+2) - 2z(x+1) + z(x) = 3.$

$$11) \Delta^2 y(x) + 2\Delta y(x) + 2y(x) = x, h \neq 1.$$

Відповідь: $y(x+2h) + y(x) = x, y(x) = c_1 \sin \frac{\pi x}{2h} + c_2 \cos \frac{\pi x}{2h} + \frac{1}{2} x - \frac{h}{2}.$

ЛІТЕРАТУРА

1. Гельфонд А. С. Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967. – 375 с.
2. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. – М.: Изд. физ. мат. лит., 1962. – 340 с.
3. Ковач Ю. И., Галь М. М. К теории линейных разностных уравнений. – К.: Институт математики АН УССР, 1988. – 59 с.
4. Мартынюк Д. И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. – К.: Наук. думка, 1972. – 248 с.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
6. Соколов Ю. Д. Лінійні різницеві рівняння. – Київ: Інститут математики АН УРСР, 1935. – 51с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аргумент

Диференціальне числення

Загальний розв'язок

Кратний корінь

Метод варіації сталих

Рівняння

- лінійне різницеве
- однорідне
- характеристичне

Порядок рівняння

Різниця

Система рівнянь

Сумування функцій

Функція

- факторіальна
- ціла

Частковий розв'язок