

Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка

Юрій ГАЛЬ, Ольга ЗОЛОТА

***ДОДАТНІ ФУНКЦІЇ, ЦІЛІ ФУНКЦІЇ,
РЯДИ ДІРІХЛЕ***

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

Дрогобич
2014

УДК 517.53 (075)
ББК 22.161.5я 73
Г 17

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка
(протокол № 6 від 24.04.2014 р.)

Рецензенти:

Заболоцький М. В., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного моделювання Львівського національного університету імені Івана Франка;

Шаран В. Л., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Відповідальний за випуск: професор Винницький Богдан Васильович

Ю. Галь, О. Золота.

Г - 17 **Додатні функції, цілі функції, ряди Діріхле.** / Навчально-методичний посібник [для студентів і викладачів математичних спеціальностей]. Ю. Галь, О. Золота. – Дрогобич : Видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, 2014. – 136 с.

Навчально-методичний посібник написано відповідно до програми курсу «Додатні функції, цілі функції, ряди Діріхле» галузі знань 0402 «Фізико-математичні науки» спеціальності 7.04020101 «Математика*», затвердженої вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (протокол № 4 від 28 березня 2013 р.). У ньому висвітлено деякі класи додатних функцій, класична шкала їхнього зростання; поняття максимуму модуля, максимального члена, порядку і типу цілої функції; зображення цілих та аналітичних у півплощині функцій рядами Діріхле.

Рекомендований студентам і викладачам математичних спеціальностей університету.

Зміст

Передмова	4
---------------------	---

Розділ I. Додатні функції

Верхня та нижня границі функції.	5
Опуклі функції	9
Повільно змінні функції	14
Функція $\ln^+ x$	18
Напівнеперервні функції.	19
Порядок, тип і категорія зростання.	22
Уточнений порядок.	25
Піки Пойа.	31
Лема Бореля-Неванлінна.	37
Лічильна функція.	40
Щільність послідовності	43
<i>Контрольні запитання</i>	
<i>Приклади розв'язування задач</i>	
<i>Завдання для самостійної роботи</i>	

Розділ II. Цілі функції

Максимум модуля.	52
Порядок і тип цілої функції	57
Нескінченні добутки	64
Розвинення цілої функції у нескінченний добуток	69
<i>Контрольні запитання</i>	
<i>Приклади розв'язування задач</i>	
<i>Завдання для самостійної роботи</i>	

Розділ III. Ряди Діріхле

Область збіжності, абсциси збіжності.	79
Аналоги нерівності Коші	88
Максимальний член і центральний індекс	93
Оцінки максимуму модуля через максимальний член	100
Зростання цілих рядів Діріхле	107
Зростання рядів Діріхле, абсолютно збіжних у півплощині.	116
Класи збіжності	121
<i>Контрольні запитання</i>	
<i>Приклади розв'язування задач</i>	
<i>Завдання для самостійної роботи</i>	
Література	134
Предметний покажчик	135

Передмова

В основу навчально-методичного посібника покладено лекції, які автори протягом багатьох років читали студентам ОКР «Спеціаліст» Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Незважаючи на завершеність теорії аналітичних функцій, деякі її підрозділи (теорія цілих, мероморфних, субгармонійних функцій, зображених тими чи іншими рядами) вимагають істотних досліджень, що часто зводяться до вивчення властивостей додатних функцій.

Щоб зрозуміти текст посібника, потрібно ознайомитися з комплексними числами й алгебраїчними операціями над ними, зі знаннями основ математичного аналізу та теорії аналітичних функцій.

У розділі «Додатні функції» студенти мають можливість згадати поняття границі функції, ознайомитися з деякими класами додатних функцій, а також з класичною шкалою їхнього зростання.

У розділі «Цілі функції» охарактеризовані такі поняття як, максимум модуля, максимальний член, порядок і тип цілої функції, заданої степеневим рядом, нулі та розвинення функції у нескінченний добуток.

У розділі «Ряди Діріхле» розглядаються зображення цілих та аналітичних у півплощині функцій рядами Діріхле як узагальненнями степеневих рядів.

Теоретичний матеріал широко ілюструється розв'язаними прикладами, завданнями для самостійної роботи, контрольними запитаннями.

Посібник буде цікавим тим студентам, які планують навчання у магістратурі та аспірантурі, а також учителям для гурткової роботи.

Розділ I. Додатні функції

Верхня та нижня границі функції

Нехай $\varphi : R \rightarrow R$ — довільна функція. Число p називається частковою границею функції φ при $x \rightarrow +\infty$, якщо існує прямуюча до $+\infty$ послідовність (x_n) така, що $\varphi(x_n) \rightarrow p$ при $n \rightarrow \infty$.

Припустимо, що множина $\{p\}$ часткових границь функції φ обмежена. Тоді існують скінченні числа $M = \sup \{p\}$ і $m = \inf \{p\}$. Покажемо, що $M \in \{p\}$ і $m \in \{p\}$. Для цього припустимо, від супротивного, що, наприклад, $M \notin \{p\}$, тобто M не є частковою границею функції φ . Тоді не існує послідовності $(x_n) \rightarrow +\infty$ такої, що $\varphi(x_n) \rightarrow p$ при $n \rightarrow \infty$, а це означає, що існує число ε таке, що для всіх $x \geq x_0(\varepsilon)$ виконується $\varphi(x) \notin (M - \varepsilon, M + \varepsilon)$. Звідси випливає, що інтервал $(M - \varepsilon, M + \varepsilon)$ не містить часткових границь функції φ , а це неможливо з огляду на означення M .

Отже, якщо множина $\{p\}$ часткових границь функції φ обмежена, то вона має найбільший і найменший елементи. Найбільша з часткових границь називається верхньою границею і позначається одним із символів

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x), \quad \limsup_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x),$$

а найменша — нижньою границею і позначається одним із символів

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x), \quad \liminf_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x).$$

Якщо множина часткових границь необмежена зверху чи знизу, то відповідно приймаємо

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty, \quad \underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty.$$

Легко побачити, що означення верхньої границі можна подати так:

$$\overline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \varphi(x) = A \neq \infty \equiv \begin{cases} 1) (\exists(x_n) \rightarrow +\infty) \{ \varphi(x_n) \rightarrow A \}, \\ 2) (\forall \varepsilon > 0) (\forall x \geq x_0(\varepsilon)) \{ \varphi(x) < A + \varepsilon \}, \end{cases}$$

властивість 1) можна записати у вигляді

$$(\forall \varepsilon > 0) (\forall x) (\exists x > x_0) \{ \varphi(x) > A - \varepsilon \}.$$

Аналогічно,

$$\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \varphi(x) = a \neq \infty \equiv \begin{cases} 1) (\exists(x_n) \rightarrow +\infty) \{ \varphi(x_n) \rightarrow a \}, \\ 2) (\forall \varepsilon > 0) (\forall x \geq x_0(\varepsilon)) \{ \varphi(x) > a - \varepsilon \}, \end{cases}$$

причому властивість 1) можна записати у вигляді

$$(\forall \varepsilon > 0) (\forall x_0) (\exists x > x_0) \{ \varphi(x) < a + \varepsilon \}.$$

Якщо $A = -\infty$, то $\overline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \varphi(x) = \underline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \varphi(x) = -\infty$, а якщо $A = +\infty$, то $\overline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \varphi(x) = +\infty$

означає, що $(\exists(x_n) \rightarrow +\infty) \{ \varphi(x_n) \rightarrow +\infty \}$. Аналогічно, якщо $a = +\infty$, то

$\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \varphi(x) = \overline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \varphi(x) = +\infty$, а якщо $a = -\infty$, то $\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \varphi(x) = -\infty$ означає, що

$$(\exists(x_n) \rightarrow +\infty) \{ \varphi(x_n) \rightarrow -\infty \}.$$

Неважко зрозуміти, як зміняться ці означення, коли $x \rightarrow b \neq +\infty$.

Зазначимо деякі властивості верхньої та нижньої границь.

Лема 1.1. Нерівності

$$\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \varphi_1(x) + \overline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \varphi_2(x) \leq \overline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) \leq \overline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \varphi_1(x) + \overline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \varphi_2(x) \quad (1.1)$$

і

$$\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \varphi_1(x) + \underline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \varphi_2(x) \leq \underline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) \leq \underline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \varphi_1(x) + \underline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \varphi_2(x). \quad (1.2)$$

виконуються завжди, крім випадів, коли у правих чи лівих частинах (1.1) і (1.2) є невизначеність вигляду $+\infty + (-\infty)$.

Доведемо, наприклад, нерівності (1.1). Нехай

$$\underline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \varphi_j(x) = a_j, \quad \overline{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \varphi_j(x) = A_j, \quad j = 1, 2,$$

і для простоти вважатимемо, що A_j і a_j – скінченні числа.

Тоді

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists x_0) (\forall x \geq x_0) \{ \varphi_j(x) < A_j + \varepsilon \},$$

тобто

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_0)(\forall x \geq x_0)\{\varphi_1(x) + \varphi_2(x) < A_1 + A_2 + 2\varepsilon\}$$

і, отже,

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) \leq A_1 + A_2 + 2\varepsilon,$$

звідки, завдяки довільності ε , отримуємо першу нерівність (1.1).

З означення A_2 випливає існування прямоючої до $+\infty$ послідовності (x_n) такої, що $\varphi_2(x_n) > A_2 - \varepsilon$. Для цієї послідовності виконується також нерівність

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_1(x_n) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_1(x) = a_1,$$

тобто $\varphi_1(x_n) > a_1 - \varepsilon$ для досить великих n . Отже, існує прямоюча до $+\infty$ послідовність (x_n^*) така, що $\varphi_1(x_n^*) + \varphi_2(x_n^*) > A_2 + a_1 - 2\varepsilon$, звідки випливає нерівність

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (\varphi_1(x_n^*) + \varphi_2(x_n^*)) \geq A_2 + a_1 - 2\varepsilon,$$

і з огляду на довільність ε маємо другу нерівність (1.1).

Зауважимо, що у випадках, коли у правих чи лівих частинах (1.1) і (1.2) є невизначеність $+\infty + (-\infty)$, ці нерівності можуть не виконуватися. Щоб це побачити, достатньо взяти $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ і $\varphi_2(x) = b - \varphi(x)$, де $\varphi(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$. Тоді $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_1(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_2(x) = -\infty$ і $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = b$, де b може бути будь-яким числом.

З леми 1.1 випливає таке: якщо існує $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_1(x)$, то

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_1(x) + \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \varphi_2(x)$$

і

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_1(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_2(x),$$

крім випадків невизначеності $+\infty + (-\infty)$.

Правильність наступних чотирьох лем випливає або з означення верхньої та нижньої границь, або з міркувань, подібних до тих, які використані при доведення леми 1.1.

Лема 1.2. Істинні рівності

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} (-\varphi(x)) = - \underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x),$$

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} (-\varphi(x)) = - \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x).$$

Лема 1.3. Нехай $\varphi_j(x) \geq 0$ ($x > x_0$), $j = 1, 2$. Нерівності

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \varphi_1(x) \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \varphi_2(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} (\varphi_1(x)\varphi_2(x)) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \varphi_1(x) \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \varphi_2(x)$$

і

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \varphi_1(x) \underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \varphi_2(x) \leq \underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} (\varphi_1(x)\varphi_2(x)) \leq \underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \varphi_1(x) \underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \varphi_2(x)$$

виконуються завжди, крім випадків, коли в їхніх правих чи лівих частинах є невизначеність вигляду $0 \times \infty$.

У випадку існування однієї з границь нерівності у лемі 1.3 перетворюються у рівності.

Лема 1.4. Якщо f – неспадна неперервна функція, то

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(\varphi(x)) = f\left(\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)\right),$$

а якщо f – незростаюча неперервна функція, то

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(\varphi(x)) = f\left(\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)\right).$$

Нехай, як вище, $\varphi : R \rightarrow R$ – довільна функція. Позначимо

$$\Phi_*(x) = \inf \{\varphi(t) : t \geq x\}, \quad \Phi^*(x) = \sup \{\varphi(t) : t \geq x\}.$$

Легко бачити, що $\Phi_*(x)$ – неспадна, а $\Phi^*(x)$ – не зростаюча функція.

Тому існують границі $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_*(x) = b$ і $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi^*(x) = B$, скінченні чи нескінченні.

Позначимо ще $\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = a$ і $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = A$.

Лема 1.5. Істинні рівності $a = b$ і $A = B$.

Доведемо, наприклад, що $A = B$. З означення B випливає, що $\varphi(x) \leq \Phi^*(x)$, тобто $A \leq B$. Припустимо, від супротивного, що $A < B$. Тоді, якщо $A = -\infty$, то $\varphi(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ і, отже, $\Phi^*(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, тобто

$B = -\infty$, що неможливо. Якщо $-\infty < A < +\infty$, то для вибраного C , $A < C < B$ існує x_0 таке, що $\varphi(x) \leq C$ для всіх $x \geq x_0$. Звідси випливає, що $\Phi^*(x_0) \leq C$ і, оскільки функція Φ^* незростаюча, то і $B \leq C$, що неможливо.

Опуклі функції

Нехай функція f задана на (a, b) і $a < x_1 < x_2 < b$. З'єднаємо точки $(x_1, f(x_1))$ і $(x_2, f(x_2))$ площини відрізком. Якщо для будь-яких точок x_1, x_2 такий відрізок лежить над кривою $y = f(x)$, то функція f називається опуклою на (a, b) , а якщо лежить під цією кривою, то f називається ввігнутою на (a, b) . Ми вивчатимемо опуклі функції, оскільки ввігнуті мають подібні властивості.

Рівняння відрізка, що з'єднує точки $(x_1, f(x_1))$ і $(x_2, f(x_2))$, має вигляд

$$\frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

тобто

$$y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Тому опуклість функції f на (a, b) означає виконання нерівності

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \quad (1.3)$$

для кожної трійки чисел $a < x_1 < x < x_2 < b$.

Нарешті, нехай у (1.3) $x = (1 - t)x_1 + tx_2$, $0 < t < 1$. Тоді $x \in (x_1, x_2)$, і опуклість функції f на (a, b) означає виконання нерівності

$$f((1 - t)x_1 + tx_2) \leq (1 - t)f(x_1) + tf(x_2)$$

для усіх $a < x_1 < x_2 < b$ і $0 < t < 1$.

Теорема 1.1. Опукла на (a, b) функція f є неперервною на (a, b) .

Доведення. Якщо в (1.3) спрямуємо $x \downarrow x_1$, то отримаємо нерівність $\lim_{x \downarrow x_1} f(x) \leq f(x_1)$, тобто для кожного $x_0 \in (a, b)$ виконується

$$\overline{\lim_{x \downarrow x_0}} f(x) \leq f(x_0). \quad (1.4)$$

Якщо ж в (1.3) спрямуємо $x_2 \downarrow x$, то отримаємо нерівність $\lim_{x_2 \downarrow x} f(x) \geq f(x)$, тобто для кожного $x_0 \in (a, b)$ виконується

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) \leq f(x_0). \quad (1.5)$$

З (1.4) і (1.5) випливає, що $\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ для кожного $x_0 \in (a, b)$, тобто f неперервна праворуч у кожній точці з (a, b) . Неперервність ліворуч доводиться аналогічно. Потрібно тільки в (1.3) спочатку спрямувати $x \uparrow x_2$, а потім $x_1 \uparrow x$.

Теорему доведено.

Опуклі функції можуть бути недиференційовні, як наприклад, функція $y = |x|$ у точці $x = 0$. Проте правильною є така теорема.

Теорема 1.2. *Опукла на (a, b) функція f має неспадну неперервну похідну на (a, b) , за винятком, можливо, зліченної кількості точок, у яких існують однобічні похідні, в кожній такій точці лівобічна похідна не перевищує правобічну.*

Доведення. Покажемо спочатку, що в кожній точці $x_0 \in (a, b)$ існує правобічна похідна $f'_+(x_0) = \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Для цього доведемо, що функція

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ є неспадною на (x_0, b) , тобто для будь-яких точок $x_0 < x < x_2 < b$

виконується нерівність

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$

Легко перевірити, що нерівність (1.6) рівносильна нерівності (1.3) з $x_1 = x_0$ і, отже, існування правобічної похідної в кожній точці $x_0 \in (a, b)$ доведене.

Існування $f'_-(x_0)$ у кожній точці $x_0 \in (a, b)$ подібно впливає з нерівності

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad a < x_1 < x < x_0, \quad (1.7)$$

яка також рівносильна нерівності (1.3).

Нерівність (1.3) еквівалентна також нерівності

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \quad x_1 < x < x_2. \quad (1.8)$$

Спрямовуючи $x_1 \uparrow x$ і $x_2 \downarrow x$, одержуємо нерівність $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ у кожній точці $x \in (a, b)$.

Візьмемо чотири точки $a < x_1 < x < x_0 < x_2 < b$. Тоді з (1.8) маємо

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}. \quad (1.9)$$

Якщо спрямуємо в (1.9) $x \downarrow x_1$ і $x_2 \downarrow x_0$, то отримаємо нерівність $f'_+(x_1) \leq f'_+(x_0)$, тобто правобічна похідна є неспадною функцією, а отже, є неперервною на (a, b) за винятком зліченної кількості точок. Якщо спрямуємо в (1.9) $x_1 \uparrow x$ і $x_0 \uparrow x_2$, то подібно отримаємо, що лівобічна похідна є неперервною на (a, b) , за винятком зліченної кількості точок. Нарешті, якщо спрямуємо в (1.9) $x \downarrow x_1$ і $x_0 \uparrow x_2$, то матимемо нерівність $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$, $x_1 < x_2$.

Нехай $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ – будь-який інтервал, де f'_+ і f'_- неперервні. Тоді для довільних точок $x_1 < x_0$ із (α, β) виконується нерівність $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$, тобто

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'_+(x_1) \leq f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0),$$

тобто функція f має похідну в кожній точці з (α, β) .

Теорему доведено.

Теорема 1.3. Якщо функція f опукла на (a, b) і в деякій точці $x_0 \in (a, b)$ існує похідна $f'(x_0)$, то для всіх $x \in (a, b)$

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0). \quad (1.10)$$

Доведення. Якщо в (1.6) спрямуємо $x \downarrow x_0$, то отримаємо нерівність $f(x_2) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x_2 - x_0)$, $x_2 > x_0$, тобто і нерівність (1.10) для $x > x_0$. Для $x < x_0$ нерівність (1.10) подібно впливає з (1.7) при спрямуванні $x \uparrow x_0$.

Теорема 1.4. Для того, щоб функція f була опуклою на (a, b) , необхідно і достатньо, щоб

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x \varphi(t) dt, \quad (1.11)$$

де x_0 – довільна фіксована точка з (a, b) , а φ – неспадна функція на (a, b) .

Доведення. Якщо функція f опукла на (a, b) , то, як було показано при доведенні теореми 1.2, вона має неспадну похідну, за винятком, можливо, зліченної кількості точок, у яких ця похідна має розриви першого роду. Тому існує інтеграл

$$\int_{x_0}^x f'_+(t) dt = \int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x) - f(x_0),$$

тобто маємо (1.11) з $\varphi(t) = f'_+(t)$.

Навпаки, оскільки φ – неспадна функція, то для $x_1 < x < x_2$ з (1.11) маємо

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^x \varphi(t) dt \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{x_2 - x} \int_x^{x_2} \varphi(t) dt = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

тобто виконується (1.8), а отже, і (1.3).

Теорему 1.4 доведено.

Наслідок 1.1. Якщо функція f опукла на $(a, +\infty)$, то існує

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in (-\infty, +\infty],$$

а якщо при цьому $a < 0$ і $f(0) = 0$, то $\frac{f(x)}{x} \uparrow k$ ($x \uparrow +\infty$).

Доведення. Оскільки в зображенні (1.11) функція φ неспадна, тобто має границю $k \in (-\infty, +\infty]$, то за правилом Лопіталя

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = k.$$

Якщо ж $a < 0$ і $f(0) = 0$, то з (1.6) при $x = 0$ маємо $f(x)/x \leq f(x_2)/x_2$,
 $0 < x < x_2 < +\infty$.

Наслідок доведено.

Функція F , задана на (α, β) , $\alpha \geq 0$, називається логарифмічно опуклою на (α, β) , якщо функція $f(x) = F(e^x)$ є опуклою на $(\ln \alpha, \ln \beta)$. Отже, функція F є логарифмічно опуклою на (α, β) тоді і тільки тоді, коли для будь-якої трійки чисел x_1, x_2, x_3 ($\ln \alpha < x_1 < x < x_2 < \ln \beta$) виконується нерівність

$$F(e^x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} F(e^{x_1}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} F(e^{x_2}).$$

Якщо зробити заміну $x = \ln r$, це означає, що для будь-якої трійки чисел r_1, r_2, r_3 ($\alpha < r_1 < r < r_2 < \beta$) виконується нерівність

$$F(r) \leq \frac{\ln r_2 - \ln r}{\ln r_2 - \ln r_1} F(r_1) + \frac{\ln r - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1} F(r_2).$$

З означення логарифмічно опуклої функції випливає, що вона є неперервною, має неперервну похідну, за винятком, можливо, зліченної кількості точок, у яких існують однобічні похідні, причому в кожній точці лівобічна похідна не перевищує правобічну.

За теоремою 1.4 функція F є логарифмічно опуклою на (α, β) тоді і тільки тоді, коли

$$F(e^x) = F(e^{x_0}) + \int_{x_0}^x \varphi(t) dt,$$

де x_0 — довільна фіксована точка з $(\ln \alpha, \ln \beta)$, а φ — неспадна функція на $(\ln \alpha, \ln \beta)$. Якщо зробимо заміну $x = \ln r$, то одержимо

$$F(r) = F(r_0) + \int_{\ln r_0}^{\ln r} \varphi(t) dt = F(r_0) + \int_{r_0}^r \frac{\varphi(\ln t)}{t} dt.$$

Звідси, позначивши $\psi(t) = \varphi(\ln t)$, отримуємо, що для того, щоб функція F була логарифмічно опуклою на (α, β) , необхідно і достатньо, щоб

$$F(r) = F(r_0) + \int_{r_0}^r \frac{\psi(t)}{t} dt,$$

де r_0 — довільна фіксована точка з (α, β) , а ψ — неспадна функція на (α, β) .

Повільно змінні функції

Додатна неперервна на $[a, +\infty)$ функція φ називається повільно змінною, якщо

$$\frac{\varphi(cx)}{\varphi(x)} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow +\infty) \quad (1.12)$$

для кожного $c \in (0, +\infty)$. Якщо при цьому функція зростаюча, то вона називається повільно зростаючою.

Теорема 1.5 (Карамати). Якщо функція φ повільно змінна, то прямування до границі в (1.12) рівномірне стосовно c з кожного фіксованого проміжку $[c_1, c_2]$, $0 < c_1 < c_2 < +\infty$.

Доведення. Позначимо $f(x) = \ln \varphi(e^x)$. Тоді (1.12) перепишеться у вигляді

$$f(x + \lambda) - f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty \quad (1.13)$$

для кожного $\lambda \in R$ і, отже, потрібно довести, що прямування до границі в (1.13) рівномірне стосовно $\lambda \in [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $[a, b] = [0, 1]$, бо в протилежному випадку можна розглянути функцію $\tilde{f} = f((b-a)x)$ і звести $[a, b]$ до $[0, 1]$. Тоді

$$f(x + \lambda) - f(x) = \tilde{f}(y + \mu) - \tilde{f}(y) + f(x + a) - f(x),$$

де $y = \frac{x+a}{b-a}$, $\mu = \frac{\lambda-a}{b-a}$ так, що $(x \rightarrow +\infty) \Leftrightarrow (y \rightarrow +\infty)$ і $(\lambda \in [a, b]) \Leftrightarrow (\mu \in [0, 1])$.

Припустимо від супротивного, що прямування до границі в (1.13) не є рівномірним стосовно $\lambda \in [a, b]$. Тоді

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists (x_n) \uparrow +\infty)(\exists \{\mu_n\} \in [0, 1])(\forall n \geq 1) \quad \{f(x_n + \mu_n) - f(x_n) \geq \varepsilon\}. \quad (1.14)$$

Позначимо

$$U_n = \{\mu \in [0, 1]: (\forall m \geq n) \{f(x_m + \mu) - f(x_m) < \varepsilon/2\}\} \quad (1.15)$$

і

$$V_n = \{\lambda \in [0, 1]: (\forall m \geq n) \{f(x_m + \mu_n + \lambda) - f(x_m + \mu_n) < \varepsilon/2\}\}. \quad (1.16)$$

Множини U_n і V_n , завдяки (1.13) мають властивості

$$U_{n-1} \subset U_n \uparrow [0,2], \quad V_{n-1} \subset V_n \uparrow [0,2] \quad (n \rightarrow \infty).$$

Тому $mes U_N > 3/2$ і $mes V_N > 3/2$ для всіх досить великих N . Нехай

$V_N^* = V_N + \mu_N$ (до кожного елемента з V_N додається μ_N). Тоді $mes V_N^* > 3/2$.

Очевидно, що $U_n \subset [0,2] \subset [0,3]$ і $V_N^* \subset [0,3]$. Тому $U_n \cap V_N^* \neq \emptyset$, тобто $(\exists \lambda_0 \in U_N)$

$\{\lambda_0 \in V_N^*\}$ і, отже, $\lambda_0 - \mu_N \in V_N$. Тому з (1.15) випливає, що

$$|f(x_N + \lambda_0) - f(x_N)| < \varepsilon/2, \quad (1.17)$$

а з (1.16) маємо

$$|f(x_N + \mu_N + \lambda_0 - \mu_N) - f(x_N + \mu_N)| < \varepsilon/2,$$

тобто

$$|f(x_N + \lambda_0) - f(x_N + \mu_N)| < \varepsilon/2. \quad (1.18)$$

З (1.17) і (1.18) одержуємо

$$|f(x_N + \mu_N) - f(x_N)| = |f(x_N + \mu_N) - f(x_N + \lambda_0) + f(x_N + \lambda_0) - f(x_N)| < \varepsilon,$$

що неможливо з огляду на (1.14).

Теорема 1.5 доведена.

Використовуючи теорему 1.5, доведемо теорему про зображення повільно змінної функції.

Теорема 1.6 (Карамати). Для того, щоб функція φ , визначена на $[a, +\infty)$, була повільно змінною, необхідно і достатньо, щоб

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) \exp \left\{ \int_a^x \frac{\delta(t)}{t} dt \right\}, \quad (1.19)$$

де φ_0 і δ – неперервні на $[a, +\infty)$ функції, $\varphi_0(t) \rightarrow a_0 > 0$, а $\delta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Доведення. Нехай функція φ повільно змінна на $[1, +\infty)$. Позначимо $f(x) = \ln \varphi(e^x)$. За теоремою 1.5 прямування до границі в (1.13) рівномірне стосовно $\lambda \in [0,1]$. Тому

$$\int_0^1 \{f(x + \lambda) - f(x)\} d\lambda \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty),$$

тобто

$$\varepsilon_1(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt - f(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty),$$

звідки

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x+1} f(t)dt - \varepsilon_1(x) = \int_0^{x+1} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt - \varepsilon_1(x) = \\ &= \int_1^{x+1} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt - \varepsilon_1(x) = \int_0^1 f(t)dt - \varepsilon_1(x) + \int_0^x \{f(t+1) - f(t)\}dt. \end{aligned}$$

Позначимо

$$c(x) = \int_0^1 f(t)dt - \varepsilon_1(x), \quad \Delta(t) = f(t+1) - f(t),$$

$$\text{так що } c(x) \rightarrow c_0 = \int_0^1 f(t)dt, \quad \Delta(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty) \quad \text{і} \quad \ln \varphi(e^x) = f(x) = c(x) + \int_0^x \Delta(t)dt.$$

Звідси

$$\varphi(x) = e^{c(\ln x)} \exp \left\{ \int_0^{\ln x} \Delta(t)dt \right\} = e^{c(\ln x)} \exp \left\{ \int_0^{\ln x} \frac{\Delta(\ln t)}{t} dt \right\}.$$

Позначивши $\varphi_0(x) = e^{c(\ln x)}$ і $\delta(t) = \Delta(\ln t)$, одержуємо (1.19).

Навпаки, для будь-якого $c \in (0, +\infty)$ із (1.19) маємо

$$\frac{\varphi(cx)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi_0(cx)}{\varphi_0(x)} \exp \left\{ \int_x^{cx} \delta(t) d \ln t \right\} = (1 + o(1)) \exp \{o(1) \ln c\} = (1 + o(1)) \quad (x \rightarrow +\infty),$$

тобто функція φ повільно змінна.

Наслідок 1.2. Якщо функція φ повільно змінна, а $\eta > 0$ — фіксоване число,

то $x^{-\eta} \varphi(x) \rightarrow 0$ і $x^\eta \varphi(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$.

Справді, з (1.19) для кожного $\varepsilon \in (0, \eta)$ при $x \geq x_0(\varepsilon)$ маємо

$$\varphi_0(x) \exp \{-\varepsilon \ln x\} \leq \varphi(x) \leq \varphi_0(x) \exp \{\varepsilon \ln x\},$$

звідки легко випливають потрібні співвідношення.

Подамо ще один важливий критерій повільної зміни.

Теорема 1.7. Для того, щоб неперервна функція φ була повільно змінною, необхідно і достатньо, щоб існувала неперервно диференційована функція ψ така, що $\psi(x) \sim \varphi(x)$, $x \rightarrow +\infty$, і

$$\frac{x \psi'(x)}{\psi(x)} \rightarrow 0 \quad x \rightarrow +\infty. \quad (1.20)$$

Доведення. Якщо функція φ повільно змінна, то вона має зображення (1.19). Позначимо

$$\psi(x) = a_0 \exp \left\{ \int_a^x \frac{\delta(t)}{t} dt \right\},$$

так що

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi_0(x)}{a_0} = 1$$

і

$$\frac{x \psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{d \ln \psi'(x)}{\ln x} = \frac{d}{\ln x} \int_a^x \delta(t) d \ln t = \delta(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Навпаки, якщо виконується (1.2), то для кожного $c \in (0, +\infty)$

$$\left| \ln \psi(cx) - \ln \psi(x) \right| = \left| \int_x^{cx} \frac{\xi \psi'(\xi)}{\psi(\xi)} d\xi \right| = o(1) \ln c, \quad x \rightarrow +\infty,$$

тобто

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(cx)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(cx)}{\psi(x)} = 1,$$

що і треба було довести.

Теорему доведено.

При доведенні теореми 1.7 ми показали, що для неперервно диференційованих функцій з умови (1.20) випливає повільна зміна функції ψ . У математичній літературі умову (1.20) часто приймають за означення повільної зміни. Використовуючи (1.20), легко показати, що функція $\psi(x) = \ln_k x$, $k \geq 1$ є повільною змінною функцією (тут $\ln_0 x = x$, $\ln_1 x = \ln x$, $\ln_k x = \ln(\ln_{k-1} x)$). Зауважимо, що з повільної зміни функції φ умова (1.20), загалом кажучи, не випливає, про що свідчить приклад неперервно диференційованої функції $\varphi(x) = \ln x + \sin x$.

Функція $\ln^+ x$

Нехай $D \subset \mathbb{R}$ — область існування функції f . Позначимо $D^+ = \{x \in D : f(x) > 0\}$ і $D^- = \{x \in D : f(x) < 0\}$, а

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D^+, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus D^+, \end{cases} \quad f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & x \in D^-, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus D^-. \end{cases}$$

Зокрема, для числа $a \in \mathbb{R}$

$$a^+ = \frac{|a| + a}{2}, \quad a^- = \frac{|a| - a}{2}, \quad a = a^+ - a^-, \quad |a| = a^+ + a^-,$$

а

$$\ln^+ x = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

Теорема 1.8. Якщо $a_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то

$$\ln^+ \prod_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n \ln^+ a_k, \quad (1.21)$$

а якщо $a_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то

$$\ln^+ \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n \ln^+ a_k + \ln n. \quad (1.22)$$

Доведення. Почнемо з (1.21). Якщо $\prod_{k=1}^n a_k = 0$, то $\ln^+ \prod_{k=1}^n a_k = 0$ і нерівність

(1.21) очевидна. Якщо ж $\prod_{k=1}^n a_k \neq 0$, то $a_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$\ln \prod_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \ln a_k \leq \sum_{k=1}^n \ln^+ a_k,$$

тобто знову приходимо до (1.21).

Використовуючи (1.21), маємо

$$\ln^+ \sum_{k=1}^n a_k \leq \ln^+ (n \max \{a_k : 1 \leq k \leq n\}) \leq \ln^+ n + \ln^+ \max \{a_k : 1 \leq k \leq n\} \leq \sum_{k=1}^n \ln^+ a_k + \ln n.$$

Напівнеперервні функції

Визначена на множині $E \subset \mathbb{R}$ функція $f : E \rightarrow [-\infty; +\infty)$ називається напівнеперервною зверху в точці $x_0 \in E$, якщо для кожного $A > f(x_0)$ існує число $\delta = \delta(x_0, A) > 0$ таке, що для всіх $x \in (E \cap \{|x - x_0| < \delta\})$ виконується нерівність $A > f(x)$. Функція f називається напівнеперервною зверху на множині E , якщо вона напівнеперервна зверху в кожній точці множини E . Функція f називається напівнеперервною знизу (в x_0 , на E), якщо функція $\varphi = -f$ напівнеперервна знизу (відповідно в x_0 , на E). Надалі ми обмежимося вивченням напівнеперервних зверху функцій.

Найпростішими прикладами напівнеперервних зверху функцій є:

$$f(x) = -\frac{1}{|x|} \quad \text{і} \quad f(x) = \ln|x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Безпосередньо з означення напівнеперервної

зверху функції випливають такі їхні властивості:

I. Для того, щоб функція $f : E \rightarrow [-\infty; +\infty)$ була напівнеперервною зверху на E , необхідно і достатньо, щоб множина $\{x \in E : f(x) < A\}$ була відкритою в E для кожного $x \in \mathbb{R}$.

II. Сума двох напівнеперервних зверху функцій є напівнеперервною зверху функцією.

III. Добуток напівнеперервної зверху функції на додатну сталу є напівнеперервною зверху функцією.

IV. Якщо функція f є напівнеперервною зверху в точці x_0 , то $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$.

V. Якщо функція f є напівнеперервною зверху і знизу в точці x_0 , то вона неперервна в цій точці.

Напівнеперервні функції мають деякі властивості, близькі до властивостей неперервних функцій. Наприклад, правильним є аналог класичної теореми Вейерштрасса.

Теорема 1.9. Якщо функція f напівнеперервна зверху на компактi K , то вона досягає свого максимуму на K , тобто існує $x_0 \in K$ таке, що $f(x) \leq f(x_0)$ для всіх $x \in K$.

Доведення. Нехай $M = \sup \{f(x) : x \in K\}$. Якщо $f(x) \equiv -\infty$, то $M \equiv -\infty$ і в ролі x_0 можемо взяти будь-яку точку.

Якщо $f(x) \neq -\infty$, то існує послідовність (x_k) точок з K така, що $f(x_k) \rightarrow M$. Оскільки K – компакт, можемо вважати, що $x_k \rightarrow \xi \in K$, і нам потрібно показати, що $f(\xi) = M$. Для цього припустимо, від супротивного, що $f(\xi) = \lambda < M$ і виберемо $\lambda < \mu < M$. Тоді за властивістю I множина $G(\mu) = \{x \in K : f(x) < \mu\}$ є відкритою у K і містить точку ξ . Звідси випливає, що в деякому інтервалі $(\xi - \delta, \xi + \delta) \subset G(\mu)$ є нескінченно багато членів послідовності (x_k) , і ми маємо $M > \mu > f(x_k) \rightarrow M, k \rightarrow \infty$.

Теорема 1.10. Якщо (f_n) – незростаюча послідовність напівнеперервних зверху функцій на множині E , то функція $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ є напівнеперервною зверху функцією на множині E .

Доведення. Зрозуміло, що $f(x) \leq f(x_1) < +\infty$ на E . Нехай $E(A) = \{x \in E : f(x) < A\}$. Нам потрібно показати, що $E(A)$ – відкрита множина.

Візьмемо довільну точку $\xi \in E(A)$. Оскільки $f_n(\xi) \downarrow f(\xi) < A$, то $f_n(\xi) < A$ для всіх $n \geq n_0$. Тому множини $E_n(A) = \{x \in E : f_n(x) < A\}$ є околами точки ξ . Але $f(x) \leq f_n(x)$, тобто $E_n(A) \subset E(A)$. Отже, $E(A)$ містить окіл точки ξ і є відкритою множиною.

Теорема 1.11. Якщо функція f напівнеперервна зверху на множині E , то існує спадна послідовність (f_n) неперервних на E функцій така, що $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Доведення. Розглянемо лише випадок, коли E – компакт.

Можемо вважати, що $f(x) > -\infty$ для всіх $x \in E$, бо у протилежному випадку можна розглянути функцію $\exp \{f(x)\}$, яка є напівнеперервною зверху

на множині E і додатною. Якщо $\varphi_n(x) \downarrow \exp \{f(x)\}, n \rightarrow \infty$, і всі φ_n – неперервні функції, то всі φ_n – додатні функції, а функції $f_n(x) = \ln(1/n + \varphi_n(x))$ неперервні на E і $f_n(x) \downarrow f(x), n \rightarrow \infty$.

Отже, нехай E – компакт і $f(x) > -\infty$ для всіх $x \in E$. Позначимо

$$f_n(x) = \max \{f(y) - n|x - y| : y \in E\},$$

і нехай $y_n = y_n(x)$ таке, що

$$f_n(x) = f(y_n(x)) - n|x - y_n(x)|.$$

Покажемо, що кожна f_n є неперервною функцією на E . Справді, для кожного $x^* \in E$

$$\begin{aligned} f_n(x) &\geq f(y_n(x^*)) - n|x - y_n(x^*)| \geq \\ &\geq f(y_n(x^*)) - n|x^* - y_n(x^*)| - n|x - x^*| = f_n(x^*) - n|x - x^*| \end{aligned}$$

і, аналогічно,

$$f_n(x^*) \geq f_n(x) - n|x - x^*|,$$

тобто

$$|f_n(x^*) - f_n(x)| \geq n|x - x^*|,$$

звідки легко впливає неперервність функції f_n .

Зрозуміло, що послідовність (f_n) спадна. Припустимо, що $f_n(x) \downarrow g(x), n \rightarrow \infty$. Оскільки $f_n(x) \geq f(x) > -\infty$, то $g(x) \geq f(x) > -\infty$. Якщо перейдемо в (1.23) до границі, то отримаємо $y_n(x) \rightarrow x, n \rightarrow \infty$, і отже, за властивістю IV

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(y_n(x)) - n|x - y_n(x)|) \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} f(y_n(x)) \leq f(x),$$

тобто $g(x) = f(x)$. Тому $g(x) = f(x)$, теорему 1.11 доведено.

Порядок, тип і категорія зростання

Нехай функція $A = A(r)$ визначена на $[0, +\infty)$, додатна і неспадна на $[r_0, +\infty)$, $r_0 \geq 0$.

Порядком $\rho = \rho[A]$ і нижнім порядком $\lambda = \lambda[A]$ функції A називаються відповідно величини

$$\rho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln^+ A(r)}{\ln r}, \quad \lambda = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln^+ A(r)}{\ln r}.$$

У випадку, коли $0 \leq \rho < +\infty$, для характеристики зростання функції A вводяться величини типу $T = T[A]$ і нижнього типу $\tau = \tau[A]$ за формулами

$$T = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{A(r)}{r^\rho}, \quad \tau = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln^+ A(r)}{\ln r^\rho}.$$

Якщо $T = 0$, то кажуть, що A має мінімальний (нульовий) тип, якщо $0 < T < +\infty$, то — нормальний (середній), якщо $T = +\infty$, то — максимальний (нескінченний) тип.

Припустимо, що $r_0 = 1$, тобто функція $A = A(r)$ додатна і неспадна на $[1, +\infty)$. Припустимо також, що $\rho = \rho[A] < +\infty$, а $\mu > \rho$. Тоді $A(r) \leq r^\gamma$ для кожного $\gamma \in (\rho, \mu)$ при $r \geq r_0(\gamma)$, і тому

$$\int_1^\infty \frac{A(r)}{r^{\mu+1}} dr < +\infty. \quad (1.23)$$

З іншого боку, якщо виконується (1.23), то для кожного $\varepsilon > 0$ при $r \geq r_0(\varepsilon)$

$$\varepsilon > \int_r^\infty \frac{A(t)}{t^{\mu+1}} dt \geq A(r) \int_r^\infty \frac{1}{t^{\mu+1}} dt = \frac{1}{\mu r^\mu},$$

тобто

$$A(r) < \varepsilon \mu r^\mu \quad r \geq r_0(\varepsilon). \quad (1.24)$$

З (1.23) і (1.24) випливає, що

$$\rho[A] = \inf \left\{ \mu > 0 : \int_1^\infty \frac{A(r)}{r^{\mu+1}} dr < +\infty \right\},$$

причому, якщо інтеграл у (1.23) розбіжний для всіх $\mu > 0$, то вважаємо, що $\rho[A] = +\infty$.

З (1.24) також випливає, що $\rho[A] \leq \mu$, а якщо $\rho[A] = \mu$, то A має мінімальний тип, тобто $T[A] = 0$.

Нехай знову $\rho = \rho[A] < +\infty$. Вважатимемо, що функція A належить до класу збіжності чи розбіжності залежно від того, чи збіжний чи розбіжний інтеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{A(r)}{r^{\rho+1}} dr < +\infty. \quad (1.25)$$

Як було згадано вище, якщо функція A належить до класу збіжності, то вона має мінімальний тип.

Вважатимемо, що функції A_1 і A_2 мають однакову категорію зростання, якщо вони мають однаковий порядок, а при скінченному порядку – однаковий тип і одночасно належать класові збіжності чи розбіжності.

Функція A_2 має вищу категорію зростання, ніж функція A_1 , якщо виконується одна з умов:

а) $\rho[A_2] > \rho[A_1]$;

б) $\rho[A_2] = \rho[A_1]$, але $T[A_2] = +\infty$ і $T[A_1] < +\infty$;

в) $\rho[A_2] = \rho[A_1]$, але $0 < T[A_2] \leq +\infty$ і $T[A_1] = 0$;

г) $\rho[A_2] = \rho[A_1]$, $T[A_2] = T[A_1] = 0$, але A_2 належить до класу розбіжності, а A_1 належить до класу збіжності.

Теорема 1.12. Нехай $A_1(r) \rightarrow +\infty$ ($r_0 \leq r \rightarrow +\infty$), а

$$A_2(r) = c_0 + \int_{r_0}^r \frac{A_1(t)}{t} dt, \quad c_0 = \text{const}.$$

Тоді функції A_1 і A_2 мають однакову категорію зростання.

Доведення. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $c_0 = 0$ і $r_0 = 1$.

Оскільки

$$A_2(er) \geq \int_r^{er} \frac{A(t)}{t} dt \geq A_1(r) \int_r^{er} \frac{dt}{t} = A_1(r), \quad (1.26)$$

то $\rho[A_1] \leq \rho[A_2]$ і, якщо $\rho[A_1] = \rho[A_2] = \rho$, то $T[A_1] \leq T[A_2]e^\rho$. З іншого боку, якщо $\rho[A_1] \leq br^a$, $r \geq r_1$, то

$$A_2(r) \leq \int_{r_1}^r \frac{bt^a}{t} dt = K + \frac{b}{a} r^a, \quad K = \text{const},$$

тобто $\rho[A_2] \leq \rho[A_1]$ і, якщо $\rho[A_1] = \rho[A_2] = \rho$, то $T[A_2] \leq T[A_1]/\rho$.

Звідси випливає, що функції A_1 і A_2 мають однаковий порядок ρ і, якщо $0 < \rho < +\infty$, то і однаковий тип. У випадку, коли $\rho = 0$, функція A_1 має максимальний тип і, завдяки (1.26), такий самий тип має функція A_2 .

Нарешті, якщо $0 < \rho < +\infty$, то

$$\int_1^\infty \frac{A_2(t)}{t^{\rho+1}} dt = \int_1^\infty \frac{dt}{t^{\rho+1}} \int_1^t \frac{A_1(r)}{r} dr = \int_1^\infty \frac{A_1(r)}{r} dr \int_r^\infty \frac{dt}{t^{\rho+1}} = \frac{1}{\rho} \int_1^\infty \frac{A_1(r)}{r^{\rho+1}} dt,$$

тобто функції A_1 і A_2 належать до класу збіжності чи розбіжності одночасно.

Теорему 1.12 доведено.

Уточнений порядок

Задана на $[0; +\infty)$ функція $\rho(r)$ називається уточненим порядком, якщо

- 1) $\rho(r) \geq 0, 0 \leq r < +\infty$;
- 2) $\rho(r) \rightarrow \rho \in [0; +\infty), r \rightarrow +\infty$;
- 3) $\rho(r)$ – неперервно диференційована на $[0; +\infty)$ функція;
- 4) $r\rho'(r)\ln r \rightarrow 0, r \rightarrow +\infty$.

Два уточнені порядки називаються еквівалентними, якщо різниця між ними є $o(1/\ln r)$ при $r \rightarrow +\infty$. Зауважимо, що для еквівалентних уточнених порядків $\rho_1(r)$ і $\rho_2(r)$

$$r^{\rho_1(r)-\rho_2(r)} = \exp\{(\rho_1(r) - \rho_2(r))\ln r\} = e^{o(1)} \rightarrow 1 (r \rightarrow +\infty).$$

Зазначимо деякі найпростіші властивості уточненого порядку.

Лема 1.6. Якщо $\rho(r)$ – уточнений порядок, то функція $l(r) = r^{\rho(r)-\rho}$ повільно змінна.

Справді,

$$\frac{rl'(r)}{l(r)} = \frac{d \ln l(r)}{d \ln r} = r\rho'(r)\ln r + \rho(r) - \rho \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow +\infty),$$

тобто функція l повільно змінна.

Лема 1.7. Якщо $\rho(r)$ – уточнений порядок і $\rho > 0$, то функція $V(r) = r^{\rho(r)}$ зростаюча на $[r_0; +\infty)$.

Справді,

$$V'(r) = (\rho(r) + r\rho'(r)\ln r)r^{\rho(r)-1} = (1 + o(1))\rho r^{\rho(r)-1}, \quad (r \rightarrow +\infty),$$

тобто $V'(r) > 0$ для всіх досить великих r .

Лема 1.8. Якщо $\rho(r)$ – уточнений порядок, а a і b – фіксовані числа, $0 < a < b < +\infty$, то для кожного $\varepsilon > 0$, всіх $r \geq r_0(\varepsilon)$ і кожного $c \in [a; b]$

$$(1 - \varepsilon) c^\rho r^{\rho(r)} \leq (cr)^{\rho(cr)} \leq (1 + \varepsilon) c^\rho r^{\rho(r)}.$$

Справді, нехай $l(r) = r^{\rho(r)-\rho}$. Тоді $\frac{l(cr)}{l(r)} = \frac{(cr)^{\rho(cr)}}{c^\rho r^{\rho(r)}}$, і оскільки за лемою

1.6 функція l повільно змінна, то за теоремою Карамати $\frac{l(cr)}{l(r)} \rightarrow 1, r \rightarrow +\infty$,

рівномірно стосовно $c \in [a, b]$. Звідси отримуємо потрібні нерівності.

Як видно з леми 2.3, функція $r^{\rho(r)}$ поводить себе подібно до функції r^ρ . Про це свідчить також лема 2.4, правильність якої легко перевіряється за допомогою правила Лопіталя.

Лема 1.9. Якщо $\rho(r)$ – уточнений порядок і $\rho(r) \rightarrow \rho > 0$, то при $r \rightarrow +\infty$

$$\int_1^r t^{\rho(t)-q} dt = \frac{(1 + o(1))}{\rho + 1 - q} r^{\rho(r)-q+1}, \quad q < \rho + 1,$$

і

$$\int_r^\infty t^{\rho(t)-q} dt = \frac{(1 + o(1))}{q - \rho - 1} r^{\rho(r)-q+1}, \quad q > \rho + 1.$$

Доведемо, наприклад, перше з цих співвідношень. Маємо

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^r t^{\rho(t)-q} dt}{r^{\rho(r)-q+1}} &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r^{\rho(r)-q}}{r^{\rho(r)-q} (\rho(r) + 1 - q + r \rho'(r) \ln r)} = \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(r) + 1 - q + r \rho'(r) \ln r} = \frac{1}{\rho + 1 - q}. \end{aligned}$$

Нехай тепер A – додатна неспадна функція на $[r_0; +\infty)$. Уточнений порядок $\rho(r)$ називається уточненим порядком функції A , якщо

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{A(r)}{r^{\rho(r)}} = \tau^* \in (0; +\infty). \quad (1.27)$$

Число τ^* називається величиною типу функції A стосовно заданого уточненого порядку $\rho(r)$. Зрозуміло, якщо $\rho(r)$ – уточнений порядок функції A і $\rho(r) \rightarrow \rho(r \rightarrow +\infty)$, то $\rho = \rho[A]$ – порядок функції A . Зауважимо також, що величина типу τ^* не зміниться, якщо в (1.27) $\rho(r)$ замінити еквівалентним йому уточненим порядком.

Уточнений порядок $\lambda(r)$ називається нижнім уточненим порядком функції A , як

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{A(r)}{r^{\lambda(r)}} = \tau_* \in (0; +\infty).$$

Зрозуміло, що $\lambda(r) \rightarrow \lambda = \lambda[A](r \rightarrow +\infty)$, де $\lambda[A]$ – нижній порядок функції A .

Доведення теореми 1.13 Ж. Валірона належить С. Шаху.

Теорема 1.13. Для кожної додатної неспадної на $[0; +\infty)$ функції A скінченного порядку існує її уточнений порядок.

Доведення. Достатньо побудувати функцію $\rho(r)$, яка замість умови 3) в означенні уточненого порядку задовольняє дещо слабшу умову, а саме, $\rho(r)$ є неперервною на $[0; +\infty)$ і неперервно диференційованою на $[0; +\infty)$, за винятком, можливо, ізольованих точок, у яких існують однобічні похідні, бо в досить малих околах кутових точок можна $\rho(r)$ замінити на $o(1/\ln r)$, $r \rightarrow +\infty$, так, щоб нова функція була неперервно диференційована і умови 1), 2), 4) і (1.27) не порушувались. Зауважимо також, якщо $A(r) = O(1)$, $r \rightarrow +\infty$, то для доведення теореми достатньо вибрати $\rho(r) \equiv 0$.

Отже, нехай $A(r) \square +\infty$, $r \rightarrow +\infty$, а ρ – порядок функції A . Позначимо

$$d(r) = \frac{\ln^+ A(r)}{\ln r},$$

так що $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} d(r) = \rho$. Є можливим два випадки:

1) існує послідовність $(r_k) \uparrow +\infty, k \rightarrow \infty$, така, що $d(r_k) > \rho$;

2) для всіх $r \geq r_0$ виконується нерівність $d(r) \leq \rho$.

Розглянемо перший випадок. Нехай $\varphi(r) = \max\{d(x) : x \geq r\}$. Тоді $\varphi(r) \downarrow \rho, r \rightarrow +\infty$, а множина $M = \max\{r : d(r) = \varphi(r)\}$ є необмеженою. Нехай, далі $r_1 \geq \exp_3 1$ і $r_1 \in M$. Означимо

$$\rho(r) = \varphi(r_1), \quad 0 \leq r \leq r_1.$$

Позначимо тепер $t_1 = \min\{t \in N : t \geq r_1 + 1, \varphi(t) < \varphi(r_1)\}$ і

$$\rho(r) = \varphi(r_1), \quad r_1 \leq r \leq t_1.$$

Нехай u_1 – абсциса першої точки перетину кривих $y = \varphi(r)$ і $y = \rho(r) - \ln_3 r + \ln_3 t_1$ при $r \geq t_1$. Позначимо

$$\rho(r) = \rho(r_1) - \ln_3 r + \ln_3 t_1, \quad t_1 \leq r \leq u_1.$$

Очевидно, що $\rho(r) \geq \varphi(r)$ на $[t_1, u_1]$ і $\rho(u_1) = \varphi(u_1)$.

Нехай, нарешті, $r_2 = \min\{M \cap \{r \geq u_1\}\}$. Якщо $r_2 > u_1$, то приймемо

$$\rho(r) = \varphi(r) = \varphi(r_2), \quad u_1 \leq r \leq r_2.$$

Далі з r_2 проводимо ті ж міркування, що і з r_1 , і оскільки

$$r_n - r_{n-1} \geq u_n - r_{n-1} \geq t_n - r_{n-1} \geq 1,$$

то, повторюючи цей процес, визначимо $\rho(r)$ на $[0; +\infty)$.

Так побудована функція $\rho(r)$ є неперервною і має неперервну похідну всюди, за винятком точок t_n і u_n , у яких існують однобічні похідні. Оскільки

або $\rho'(r) \equiv 0$, або $\rho'(r) = -\frac{1}{r \ln r \ln_2 r}$, то умова 4) виконується. За побудовою

$$\rho(r) \geq \varphi(r) \geq d(r) \quad \text{при} \quad r \geq r_1, \quad \rho(r_n) \geq \varphi(r_n) \geq d(r_n) \quad \text{для всіх } n \quad \text{і}$$

$$\rho(r) \rightarrow \rho, r \rightarrow +\infty. \quad \text{Тому} \quad \ln A(r) \leq d(r) \ln r \leq \rho(r) \ln r \quad \text{при} \quad r \geq r_1 \quad \text{і}$$

$$\ln A(r_n) \leq d(r_n) \ln r_n \leq \rho(r_n) \ln r_n \quad \text{для всіх } n \in N. \quad \text{Звідси випливає, що}$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{A(r)}{r^{\rho(r)}} = 1, \quad (2.6)$$

і теорему в цьому випадку доведено.

Розглянемо другий випадок, $0 \leq d(r) < \rho$ для всіх $r_0 \geq \exp_3 1$. Нехай $\psi(r) = \max \{d(x) : r_0 \leq x \leq r\}$. Тоді $\psi(r) \square \rho, r \rightarrow +\infty$, а множина $L = \{r \geq r_0 : d(r) = \psi(r)\}$ є необмеженою. Нехай $r_1 > r_0$, а s_1 – найбільша з абсцис точок перетину кривих $y = \psi(r)$ і $y = \rho + \ln_3 r - \ln_3 r_1$. Очевидно, що при досить великому r_1 існує точка s_1 , що при $0 < s_1 < r_1$ і $L \cap [r_0, s_1] \neq \emptyset$. Позначимо $t_1 = \max \{L \cap [r_0, s_1]\}$ і

$$\rho(r) = \psi(t_1) = d(t_1), \quad 0 \leq r \leq s_1.$$

Візьмемо тепер $r_2 \geq r_1$ настільки великим, щоб найбільша з абсцис s_2 точок перетину кривих $y = \psi(r)$ і $y = \rho + \ln_3 r - \ln_3 r_2$ задовольняла умови $r_1 < s_2 < r_2$ і $L \cap [r_1, s_2] \neq \emptyset$. Позначимо $t_2 = \max \{L \cap [r_1, s_2]\}$, і нехай u_1 – така точка з $[s_1, r_1]$, у якій $\psi(r) = \rho + \ln_3 r - \ln_3 r_1$. Прийmemo

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho + \ln_3 r - \ln_3 r_1, & s_1 \leq r \leq u_1, \\ \psi(t_2) = d(t_2), & u_1 \leq r \leq s_2. \end{cases}$$

Продовжуючи цей процес, завдяки нерівності $r_n \geq r_{n-1} + 1$, побудуємо $\rho(r)$ на $[0; +\infty)$.

З побудови видно, що функція $\rho(r)$ є неперервною і має неперервну похідну всюди, за винятком точок s_n і u_n , у яких існують однобічні похідні і або $\rho'(r) \equiv 0$, або $\rho'(r) = \frac{1}{r \ln r \ln_2 r}$, тобто умова 4) виконується. Зрозуміло, що

$\rho(r) \rightarrow \rho(r \rightarrow +\infty)$, $\rho \geq \rho(r) \geq \psi(r) \geq d(r)$ при $r \geq r_0$ і $\rho(t_n) = \psi(t_n) = d(t_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Звідси, як вище, впливає (2.6). Теорему 2.2 повністю доведено.

Теорема 1.14. Для кожної додатної неспадної на $[0; +\infty)$ функції A скінченного нижнього порядку λ існує її уточнений нижній порядок.

Доведення. Нехай

$$d_1(r) = \frac{\ln r}{\ln r + \ln^+ A(r)}, \quad r \geq 2,$$

так що $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} d_1(r) = \frac{1}{1+\lambda}$. Побудуємо уточнений порядок $\rho_1(r)$ такий, що

$$\rho_1(r) \rightarrow \frac{1}{1+\lambda} \quad \text{при} \quad r \rightarrow +\infty, \quad \rho_1(r) \rightarrow \frac{1}{1+\lambda} \quad \text{при} \quad r \rightarrow +\infty, \quad 0 < \rho_1(r) < 1,$$

$d_1(r) \leq \rho_1(r)$ для всіх $r \geq r_0$ і $d_1(r_n) \leq \rho_1(r_n)$ для деякої зростаючої до $+\infty$

послідовності (r_n) . Позначимо $\lambda(r) = \frac{1}{\rho_1(r)} - 1$. Легко перевірити, що $\lambda(r)$ має

всі властивості уточненого порядку, $\lambda(r) \rightarrow \lambda(r \rightarrow +\infty)$, $\ln A(r) \geq \lambda(r) \ln r$ при $r \geq r_0$ і $\ln A(r_n) \geq \lambda(r_n) \ln r_n$ для всіх $n \geq 1$, тобто $\lambda(r)$ — уточнений нижній порядок функції A .

Піки Пойа

Теорема 1.15. Нехай функції $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ додатні, неперервні на $[r_0; +\infty)$ такі, що φ_2 / φ_1 неспадна на $[r_0; +\infty)$, і

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(r)}{\varphi_2(r)} = +\infty, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(r)}{\varphi_1(r)} = 0. \quad (1.29)$$

Тоді існує послідовність $(r_n) \uparrow +\infty, n \rightarrow \infty$ така, що

$$\varphi(r) \leq \begin{cases} \frac{\varphi(r_n)}{\varphi_1(r_n)} \varphi_1(r), & r_0 \leq r \leq r_n, \\ \frac{\varphi(r_n)}{\varphi_2(r_n)} \varphi_2(r), & r_n \leq r < +\infty. \end{cases} \quad (1.30)$$

Доведення. Припустимо, що $r_0, r_1, \dots, r_n$ вже відомі і позначимо

$$M_n = \max \left\{ \frac{\varphi(r)}{\varphi_1(r)} : r_0 \leq r \leq r_n \right\}$$

(зокрема, $M_0 = \varphi(r_0) / \varphi_1(r_0)$). З першої умови (1.29) випливає існування числа

$$a = \min \left\{ r \geq r_n + 1 : \frac{\varphi(r)}{\varphi_1(r)} = M_n \right\}.$$

Нехай $b \geq a$ таке, що

$$\frac{\varphi(b)}{\varphi_2(b)} = \max \left\{ \frac{\varphi(r)}{\varphi_2(r)} : r \geq a \right\}.$$

Виберемо $r_{n+1} \in [a; b]$ так, щоб

$$\frac{\varphi(r_{n+1})}{\varphi_1(r_{n+1})} = \max \left\{ \frac{\varphi(r)}{\varphi_1(r)} : a \leq r \leq b \right\}, \quad (1.31)$$

і покажемо, що для r_{n+1} справджується (1.30).

Справді, якщо $r_0 \leq r \leq a$, то

$$\frac{\varphi(r)}{\varphi_1(r)} \leq M_n = \frac{\varphi(a)}{\varphi_1(a)} \leq \frac{\varphi(r_{n+1})}{\varphi_1(r_{n+1})},$$

а якщо $a \leq r \leq r_{n-1}$, то за побудовою

$$\frac{\varphi(r)}{\varphi_1(r)} \leq \frac{\varphi(r_{n+1})}{\varphi_1(r_{n+1})}.$$

Отже, на $[r_0, r_{n+1}]$ виконується перша нерівність (2.8) з r_{n+1} замість r_n .

Далі, оскільки φ_2/φ_1 неспадна на $[r_0; +\infty)$, то з (2.9) для $r_{n+1} \leq r \leq b$ маємо

$$\frac{\varphi(r)}{\varphi_2(r)} = \frac{\varphi(r)\varphi_1(r)}{\varphi_1(r)\varphi_2(r)} \leq \frac{\varphi(r_{n+1})\varphi_1(r_{n+1})}{\varphi_1(r_{n+1})\varphi_2(r_{n+1})} = \frac{\varphi(r_{n+1})}{\varphi_2(r_{n+1})},$$

а при $r \geq b$ виконується друга нерівність

$$\frac{\varphi(r)}{\varphi_2(r)} = \frac{\varphi(b)}{\varphi_2(b)} \leq \frac{\varphi(r_{n+1})}{\varphi_2(r_{n+1})}.$$

Отже, на $[r_{n+1}; +\infty)$ виконується друга нерівність (2.8) з r_{n+1} замість r_n , і теорема 2.4 повністю доведена.

Послідовність (r_n) , існування якої доведено вище, називається послідовністю піків Пойа.

Наведемо найпростіші наслідки теореми 1.15.

Наслідок 1.3. *Нехай φ – додатна неперервна неспадна на $[r_0; +\infty)$ функція порядку $\rho \in (0; +\infty)$, а $\varepsilon > 0$ – довільне число. Тоді існує послідовність $(r_n) \uparrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$ піків Пойа така, що*

$$\varphi(r) \leq \begin{cases} \varphi(r_n) \left(\frac{r}{r_n} \right)^{\rho-\varepsilon}, & r_0 \leq r \leq r_n, \\ \varphi(r_n) \left(\frac{r}{r_n} \right)^{\rho+\varepsilon}, & r_n \leq r < +\infty. \end{cases} \quad (1.32)$$

Позначимо $\varphi_1(r) = r^{\rho-\varepsilon}$ і $\varphi_2(r) = r^{\rho+\varepsilon}$. Оскільки φ має порядок ρ , то

$$\frac{\varphi_2(r)}{\varphi_1(r)} = r^{2\varepsilon} \uparrow +\infty, \quad r \rightarrow +\infty,$$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(r)}{\varphi_1(r)} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(r)}{r^{\rho-\varepsilon}} = +\infty,$$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(r)}{\varphi_2(r)} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(r)}{r^{\rho+\varepsilon}} = 0.$$

Тому за теоремою 1.15 існує послідовність піків Пойа, для якої виконується (1.32).

Наслідок 1.4. Нехай φ – додатна неперервна неспадна на $[r_0; +\infty)$ функція нижнього порядку $\lambda \in (0; +\infty)$, а $\varepsilon \in (0; \lambda)$ – довільне число. Тоді існує послідовність $(r_n) \uparrow +\infty, n \rightarrow \infty$. Піків Пойа така, що

$$\varphi(r) \geq \begin{cases} \varphi(r_n) \left(\frac{r}{r_n} \right)^{\lambda+\varepsilon}, & r_0 \leq r \leq r_n, \\ \varphi(r_n) \left(\frac{r}{r_n} \right)^{\lambda-\varepsilon}, & r_n \leq r < +\infty. \end{cases} \quad (1.33)$$

Справді, позначимо $\varphi_1(r) = \frac{\varphi^2(r)}{r^{\lambda+\varepsilon}}$ і $\varphi_2(r) = \frac{\varphi^2(r)}{r^{\lambda-\varepsilon}}$. Оскільки φ має

нижній порядок λ , то

$$\frac{\varphi_2(r)}{\varphi_1(r)} = r^{2\varepsilon} \uparrow +\infty, \quad r \rightarrow +\infty,$$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(r)}{\varphi_1(r)} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{r^{\lambda+\varepsilon}}{\varphi(r)} = +\infty,$$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(r)}{\varphi_2(r)} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{r^{\lambda-\varepsilon}}{\varphi(r)} = 0.$$

Тому за теоремою 1.15 існує послідовність (r_n) піків Пойа така, що

$$\varphi(r) \leq \begin{cases} \frac{\varphi(r_n) r_n^{\lambda+\varepsilon}}{\varphi^2(r_n)} \cdot \frac{\varphi^2(r)}{r^{\lambda+\varepsilon}}, & r_0 \leq r \leq r_n, \\ \frac{\varphi(r_n) r_n^{\lambda-\varepsilon}}{\varphi^2(r_n)} \cdot \frac{\varphi^2(r)}{r^{\lambda-\varepsilon}}, & r_n \leq r < +\infty, \end{cases}$$

Звідки випливають нерівності (1.33).

Якщо використати уточнений порядок, то можна отримати значно гнучкіші твердження.

Теорема 1.16. Нехай φ – додатна неперервна неспадна на $[r_0; +\infty)$ функція порядку $\rho \in (0; +\infty)$. Тоді існують зростаюча послідовність (r_n) , послідовність (ε_n) і невід’ємні послідовності (a_n) , (A_n) і (δ_n) такі, що

1) $\varepsilon_n \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0$ і $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

2) $A_n \rightarrow +\infty$ і $a_n r_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$;

3) для всіх $n \geq n_0$ і $r \in [a_n r_n, A_n r_n]$

$$\varphi(r) \leq (1 + \delta_n) \varphi(r_n) \left(\frac{r}{r_n} \right)^{\rho + \varepsilon_n}. \quad (1.34)$$

Доведення. Нехай $\rho(r)$ – уточнений порядок функції φ , побудований при доведенні теореми 1.14 (Валірона). Тоді

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho(r)} \varphi(r) = 1$$

і

$$|\rho'(r)| \leq \frac{1}{r \ln r \ln_2 r} \quad (r \geq r_0).$$

Позначимо

$$\varphi_1(r) = r^{\rho(r)-1/\ln_2 r}, \quad \varphi_2(r) = r^{\rho(r)+1/\ln_2 r}.$$

Тоді

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = r^{2/\ln_2 r} = \exp \left\{ \frac{2 \ln r}{\ln_2 r} \right\} \uparrow +\infty \quad (r_0 \leq r \rightarrow +\infty),$$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(r)}{\varphi_1(r)} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(r)}{r^{\rho(r)}} r^{1/\ln_2 r} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{\ln r}{\ln_2 r} \right\} = +\infty,$$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(r)}{\varphi_2(r)} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(r)}{r^{\rho(r)}} r^{-1/\ln_2 r} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{\ln r}{\ln_2 r} \right\} = 0.$$

Тому за теоремою 1.15 існує зростаюча до $+\infty$ послідовність (r_n) піків Пойа така, що

$$\varphi(r) \leq \begin{cases} \varphi(r_n) r^{\rho(r)-1/\ln_2 r} r_n^{-\rho(r_n)+1/\ln_2 r_n}, & r_0 \leq r \leq r_n, \\ \varphi(r_n) r^{\rho(r)+1/\ln_2 r} r_n^{-\rho(r_n)-1/\ln_2 r_n}, & r_n \leq r < +\infty. \end{cases} \quad (1.35)$$

Позначимо

$$A_n = \sqrt{\ln_2 r}, \quad a_n = 1 / A_n,$$

так що $A_n \rightarrow +\infty$, $a_n \rightarrow 0$ і $a_n r_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Якщо $a_n r_n \leq r \leq r_n$, то з першої нерівності (2.13) отримуємо

$$\begin{aligned} \varphi(r) &\leq \varphi(r_n) \left(\frac{r}{r_n} \right)^{\rho(r_n)-1/\ln_2 r_n} r^{\rho(r)-\rho(r_n)+1/\ln_2 r_n-1/\ln_2 r} \leq \\ &\leq \varphi(r_n) \left(\frac{r}{r_n} \right)^{\rho(r_n)-1/\ln_2 r_n} r^{\rho(r)-\rho(r_n)} = \\ &= \varphi(r_n) \left(\frac{r}{r_n} \right)^{\rho+\rho(r_n)-\rho-1/\ln_2 r_n} \exp \{ (\rho(r) - \rho(r_n)) \ln r \}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Позначимо $\varepsilon_n = \rho(r_n) - \rho - 1/\ln_2 r_n$, так що $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Далі,

$$\begin{aligned} |(\rho(r) - \rho(r_n)) \ln r| &= \left| \int_{r_n}^r \rho'(\xi) d\xi \right| \ln r \leq \int_{r_n}^r |\rho'(\xi)| d\xi \ln r \leq \\ &\int_{r_n}^r \frac{d\xi}{\xi \ln \xi \ln_2 \xi} \leq \frac{1}{\ln r \ln_2 r} \int_{r_n}^r \frac{d\xi}{\xi} \ln r = \frac{\ln r_n - \ln r}{\ln_2 r} \leq \\ &\leq \frac{\ln r_n - \ln(a_n r_n)}{\ln_2 r} = \frac{\ln A_n}{\ln(\ln r_n - \ln A_n)} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\ln_3 r_n}{\ln \left(\ln r_n - \frac{1}{2} \ln_3 r_n \right)} = \frac{1+o(1)}{2} \frac{\ln_3 r_n}{\ln_2 r_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Тому з (1.36) випливає, що

$$\varphi(r) \leq \varphi(r_n) \left(\frac{r}{r_n} \right)^{\rho+\varepsilon_n} e^{o(1)} = (1+o(1)) \varphi(r_n) \left(\frac{r}{r_n} \right)^{\rho+\varepsilon_n}, \quad n \rightarrow \infty,$$

і існує послідовність $(\delta_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) така, що виконується (1.34).

Якщо ж $r_n \leq r \leq A_n r_n$, то з другої нерівності (1.35) маємо

$$\begin{aligned}\varphi(r) &\leq \varphi(r_n) \left(\frac{r}{r_n} \right)^{\rho(r_n)+1/\ln_2 r_n} r^{\rho(r)-\rho(r_n)} r^{1/\ln_2 r_n-1/\ln_2 r} = \\ &= \varphi(r_n) \left(\frac{r}{r_n} \right)^{\rho+\varepsilon_n} \exp\{(\rho(r)-\rho(r_n))\ln r\},\end{aligned}$$

де $\varepsilon_n = \rho(r_n) - \rho + 1/\ln_2 r_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), а

$$\begin{aligned}\left|(\rho(r)-\rho(r_n))\ln r\right| &\leq \int_{r_n}^r \frac{d\varepsilon}{\xi \ln \xi \ln_2 \xi} \ln r \leq \frac{\ln r - \ln r_n}{\ln r_n \ln_2 r} \ln r \leq \\ &\leq \frac{\ln(A_n r_n) - \ln r_n}{\ln r_n \ln_2 r_n} \ln(A_n r_n) = \frac{\ln A_n}{\ln r_n \ln_2 r_n} (\ln A_n + \ln r_n) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\ln_3 r_n}{\ln r_n \ln_2 r_n} \left(\ln r_n + \frac{1}{2} \ln_3 r_n \right) = \frac{1+o(1)}{2} \frac{\ln_3 r_n}{\ln_2 r_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

Звідси знову приходимо до існування послідовності $(\delta_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) такої, що виконується (1.34). Теорему 1.16 доведено.

Теорема 1.17. *Нехай φ – додатна неперервна неспадна на $[r_0; +\infty)$ функція нижнього порядку $\lambda \in (0; +\infty)$. Тоді існують послідовності $(r_n), (\varepsilon_n), (a_n), (A_n)$ і (δ_n) , які задовольняють умови 1) – 2) теореми 1.16 і такі, що для всіх $n \geq n_0$ і $r \in [a_n r_n; A_n r_n]$*

$$\varphi(r) \geq (1 - \delta_n) \varphi(r_n) \left(\frac{r}{r_n} \right)^{\lambda + \varepsilon_n}.$$

Доведення цієї теореми подібне до доведення теореми 1.16, але φ_1 і φ_2 треба вибрати так:

$$\varphi_1(r) = \varphi^2(r) r^{-\lambda(r)-1/\ln_2 r}, \quad \varphi_2(r) = \varphi^2(r) r^{-\lambda(r)-1/\ln_2 r}.$$

Лема Бореля-Неванлінни

Теорема 1.18. Нехай u — неперервна на $[r_0; +\infty)$ функція і $u(r) \rightarrow +\infty, r \rightarrow +\infty$, а φ — додатна неперервна на $[u_0; +\infty)$ ($u_0 = u(r_0)$) функція така, що $\varphi(r) \downarrow 0, r \rightarrow +\infty$, і

$$\int_{u_0}^{\infty} \varphi(u) du < +\infty. \quad (1.37)$$

Тоді для всіх $r \geq r_0$, крім, можливо, множини скінченної міри,

$$u(r + \varphi(u(r))) < u(r) + 1. \quad (1.38)$$

Доведення. Позначимо через $E, E \subset [r_0; +\infty)$, замкнену множину, на якій (1.38) не виконується, тобто

$$u(r + \varphi(u(r))) \geq u(r) + 1. \quad (1.39)$$

Нехай $E_r = E \cap [r; +\infty)$. Вважатимемо, що для кожного $r \geq r_0$ множина $E_r \neq \emptyset$, бо у протилежному випадку твердження теореми очевидне.

Нехай

$$r_1 = \min E_{r_0} = \min \{r \in E : r \geq r_0\},$$

$$r'_1 = \min \{r : u(r) = u(r_1) + 1\}.$$

Тоді $r'_1 > r_1$ і $u(r_1 + \varphi(u(r_1))) \geq u(r_1) + 1 = u(r'_1)$. Оскільки функція u , то звідси випливає $r_1 + \varphi(u(r_1)) \geq r'_1$, тобто

$$r'_1 - r_1 \leq \varphi(u(r_1)).$$

Припустимо, що $r_1, \dots, r_n$ і $r'_1, \dots, r'_n$ вже вибрані і позначимо

$$r_{n+1} = \min E_{r'_n} = \min \{r \in E : r \geq r'_n\},$$

$$r'_{n+1} = \min \{r : u(r) = u(r_{n+1}) + 1\}.$$

Тоді, як вище, маємо

$$u(r_{n+1} + \varphi(u(r_{n+1}))) \geq u(r_{n+1}) + 1 = u(r'_{n+1})$$

i

$$r'_{n+1} - r_{n+1} \leq \varphi(u(r_{n+1})).$$

Звідси випливає, що $u(r_n) \rightarrow +\infty$ і $r_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$.

З означення послідовності (r_n) випливає також, що на інтервалах $(r'_{n-1}; r_n)$ виконується (1.38). Отже, множина E , на якій (1.38) не виконується, покрита відрізками $[r_n; r'_n]$. Але

$$\sum_{n=1}^{\infty} (r'_n - r_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(u(r_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(u_0 + n + 1) \leq \varphi(u_0) + \int_{u_0}^{\infty} \varphi(u) du < +\infty,$$

і, отже, теорему 1.18 доведено.

Зауваження. Умову (1.37) послабити не можна. Справді, нехай

$$\int_{u_0}^{\infty} \varphi(u) du = +\infty. \text{ Позначимо } r(u) = \int_{u_0}^u \varphi(u) du, u \geq u_0. \text{ Тоді обернена до } r(u)$$

функція $u(r)$ задовольняє умов теорему 1.18, але на $[r_0; +\infty)$ виконується (1.39), бо

$$\begin{aligned} u(r + \varphi(u(r))) - u(r) &= \int_r^{r+\varphi(u(r))} u'(t) dt = \int_r^{r+\varphi(u(r))} \frac{dt}{r'(u(t))} = \\ &= \int_r^{r+\varphi(u(r))} \frac{dt}{\varphi(u(t))} \geq \frac{1}{\varphi(u(r))} \int_r^{r+\varphi(u(r))} dt = 1. \end{aligned}$$

Наслідок 1.5. Якщо додатна функція u задовольняє умови теореми 2.7 і $\varepsilon > 0$, то для всіх $r \geq r_0$, крім, можливо, множини скінченної міри,

$$u\left(r + \frac{1}{\ln u(r)}\right) \leq u(r)^{1+\varepsilon}. \quad (1.40)$$

Справді, функція $u_1(r) = \sqrt{\ln u(r)}$ і $\varphi(u) = 1/u^2$ задовольняють умови теореми 2.7 і тому для всіх $r \geq r_0^*$, крім, можливо, множини скінченної міри, $u_1(r + \varphi(u_1(r))) < u_1(r) + 1$, тобто

$$\sqrt{\ln u \left(r + \left(\frac{1}{\sqrt{\ln u(r)}} \right)^2 \right)} < \sqrt{\ln u(r)} + 1.$$

Звідси при $r \geq r_0 \geq r_0^*$

$$\ln u \left(r + \frac{1}{\ln u(r)} \right) \leq \ln u(r) + 2\sqrt{\ln u(r)} + 1 < (1 + \varepsilon) \ln u(r).$$

Множину E називатимемо множиною скінченної логарифмічної міри, якщо

$$\int_{E \cap [1; +\infty)} d \ln r < +\infty.$$

Наслідок 1.6. Якщо додатна функція u задовольняє умови теореми 1.18 і $\varepsilon > 0$, то для всіх $r \geq r_0$, крім, можливо, множини скінченної логарифмічної міри,

$$u \left(r + \frac{1}{\ln u(r)} \right) \leq u(r)^{1+\varepsilon}. \quad (1.41)$$

Справді, якщо до функції $u(e^r)$ застосувати наслідок 1, то матимемо

$$u \left(\exp \left\{ r + \frac{1}{\ln u(e^r)} \right\} \right) \leq u(e^r)^{1+\varepsilon} \quad (1.42)$$

для всіх $r \geq r_0^*$, крім, можливо, множини скінченної міри. Позначимо $x = e^r$, тобто $r = \ln x$. При такій заміні множина скінченної міри переходить у множину скінченної логарифмічної міри, а з (1.42) одержуємо

$$u \left(\exp \left\{ \ln x + \frac{1}{\ln u(x)} \right\} \right) \leq u(x)^{1+\varepsilon},$$

тобто $u \left(x \exp \left\{ \frac{1}{\ln u(x)} \right\} \right) \leq u(x)^{1+\varepsilon}$. Оскільки $\exp \left\{ \frac{1}{\ln u(x)} \right\} \leq 1 + \frac{1}{\ln u(x)}$, то з останнього співвідношення отримуємо (1.41).

Лічильна функція та показник збіжності

Нехай (z_n) – комплексна послідовність з єдиною точкою скупчення у ∞ , впорядкована так, що $|z_n| \leq |z_{n+1}|$ (серед членів цієї послідовності можуть бути однакові, а також дорівнювати нулю). Функція

$$n(r) = \sum_{|z_n| \leq r} 1$$

називається лічильною функцією послідовності (z_n) . Це – кількість членів послідовності (z_n) , які містяться у замкненому крузі $\{z : |z| \leq r\}$. Усередненою лічильною функцією або неванліннівською лічильною функцією послідовності (z_n) називається функція

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t) - n(0)}{t} dt + n(0) \ln r.$$

Нехай $z_1 = z_2 = \dots = z_m = 0$ і $z_{m+1} \neq 0$, а $r_0 \in (0; |z_{m+1}|)$ – довільне число.

Тоді при $r \geq r_0$

$$N(r) = \int_0^{r_0} \frac{n(t) - m}{t} dt + \int_{r_0}^r \frac{n(t)}{t} dt - m \int_{r_0}^r \frac{dt}{t} + m \ln r = \int_{r_0}^r \frac{n(t)}{t} dt + m \ln r_0. \quad (1.43)$$

Тому за теоремою 1.23 функції $n(r)$ і $N(r)$ мають однакову категорію зростання. Однак функція $N(r)$ має переваги над функцією $n(r)$. Вона неперервна і неперервно диференційована на $[0; +\infty)$, за винятком зліченної кількості точок, у яких існують односторонні похідні, а в точках, де похідна існує, виконується нерівність $\frac{dN(r)}{dr} = \frac{n(r)}{r}$, тобто $\frac{dN(r)}{d \ln r} = n(r)$. З (1.43) випливає також, що $N(r)$ є логарифмічно опуклою функцією.

Припустимо, що $|z_n| > 0$ для всіх n , а $k(r)$ – найбільше з цілих чисел таких, що $|z_{k(r)}| = \max \{|z_n| : |z_n| \leq r\}$. Тоді з (1.43) отримуємо

$$\begin{aligned}
N(r) &= \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = \sum_{j=1}^{k(r)-1} \int_{|z_j|}^{|z_{j+1}|} \frac{n(t)}{t} dt + \int_{|z_{k(r)}|}^{|r|} \frac{n(t)}{t} dt = \\
&= \sum_{j=1}^{k(r)-1} j \left(\ln |z_{j+1}| - \ln |z_j| \right) + k(r) \left(\ln r - \ln |z_{k(r)}| \right) = \\
&= \ln |z_2| - \ln |z_1| + 2 \left(\ln |z_3| - \ln |z_2| \right) + \dots + \\
&+ \left(k(r) - 1 \right) \left(\ln |z_{k(r)}| - \ln |z_{k(r)-1}| \right) + k(r) \left(\ln r - \ln |z_{k(r)}| \right) = \\
&= -\ln |z_1| - \ln |z_2| - \dots - \ln |z_{k(r)-1}| - \ln |z_{k(r)}| + k(r) \ln r = \sum_{j=1}^{k(r)} \ln \frac{r}{|z_j|} = \sum_{|z_k| \leq r} \ln \frac{r}{|z_j|}. \quad (1.44)
\end{aligned}$$

Оскільки лічильна функція комплексної послідовності (z_n) є лічильною функцією невід'ємної послідовності $(\lambda_n) = (|z_n|)$, а відкидання скінченної кількості членів послідовності на асимптотику лічильної функції не впливає, то надалі будемо вивчати тільки додатні послідовності.

Отже, нехай $0 < \lambda_n \leq +\infty, n \rightarrow \infty$. Припустимо, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^t} < +\infty \quad (1.45)$$

для деякого $t \in (0; +\infty)$. Тоді число

$$\tau = \inf \left\{ t > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^t} < +\infty \right\} \quad (1.46)$$

називається показником збіжності послідовності (λ_n) . Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-t} = +\infty$ для

кожного $t > 0$, то вважаємо $\tau = +\infty$. Зауважимо, що у випадку, коли $0 < \tau < +\infty$,

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\tau}$ може бути як збіжним, так і розбіжним.

Теорема 1.19. Нехай $0 < t < +\infty$. Тоді умова (1.45) рівносильна умові

$$\int_0^{\infty} \frac{n(r)}{r^{t+1}} dr < +\infty. \quad (1.47)$$

Доведення. Нехай $0 < r_0 < \lambda_1$ і $r > r_0$. Тоді $n(t) \equiv 0$ на $[0; r_0]$ і, переходячи до інтеграла Стільтьєса та інтегруючи частинами, маємо

$$\sum_{\lambda_n \leq r} \frac{1}{\lambda_n^t} = \int_{r_0}^r \frac{dn(x)}{x^t} = \frac{n(r)}{r^t} + t \int_{r_0}^r \frac{n(x)}{x^{t+1}} dx = \frac{n(r)}{r^t} + t \int_0^r \frac{n(x)}{x^{t+1}} dx. \quad (1.48)$$

Звідси випливає, що

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x^{t+1}} dx \leq \frac{1}{t} \sum_{\lambda_n \leq r} \frac{1}{\lambda_n^t}.$$

Спрямовуючи $r \rightarrow +\infty$, бачимо, що з (1.47).

Навпаки, якщо виконується (3.5), то для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $r \geq r^*(\varepsilon)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^t} = t \int_0^r \frac{n(x)}{x^{t+1}} dx,$$

так що з (1.47) випливає (1.45). Теорему 1.43 доведено.

З цієї теореми випливає, що показник збіжності послідовності можна позначити рівністю

$$\tau = \inf \left\{ t > 0 : \int_0^{\infty} \frac{n(x)}{x^{t+1}} dx < +\infty \right\}. \quad (1.49)$$

З іншого боку, якщо $\rho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln n(r)}{\ln r}$ – порядок функції $n(r)$, то, як показано в 1.12,

$$\rho = \inf \left\{ \mu > 0 : \int_0^{\infty} \frac{n(x)}{x^{\mu+1}} dx < +\infty \right\}. \quad (1.50)$$

З формул (1.49) і (1.50) випливає така теорема.

Теорема 1.20. Показник збіжності послідовності дорівнює порядкові її лічильної функції.

Щільність послідовності

Нехай $0 < \lambda_n \leq +\infty, n \rightarrow \infty$, а $n(r)$ – лічильна функція послідовності (λ_n) .

Величини

$$D = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r)}{r}, \quad d = \underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r)}{r}$$

називаються, відповідно, верхньою та нижньою щільностями послідовності (λ_n) . Якщо $D = d = \Delta$, то послідовність називається вимірною, а число Δ – її щільністю.

Нехай $r > 0$ – довільне число. Якщо $\lambda_{n-1} < r < \lambda_n$, то $\frac{n-1}{\lambda_n} \leq \frac{n(r)}{r} \leq \frac{n}{\lambda_n}$, а

якщо $r = \lambda_n = \lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{n+q} < \lambda_{n+q+1}$, то $\frac{n(r)}{r} = \frac{n+q}{\lambda_{n+q}}$. Тому

$$D = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n}{\lambda_n}, \quad d = \underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n}{\lambda_n}.$$

Верхню D^* та нижню d^* усередині щільності послідовності (λ_n) позначимо рівностями

$$D^* = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{r}, \quad d^* = \underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{r}, \quad N(r) = \int_0^r \frac{n(x)}{x} dx.$$

Теорема 1.21. Виконуються нерівності $D^* \leq D \leq eD^*$.

Доведення. Якщо $D < +\infty$, то $n(x) \leq (D + \varepsilon)x$ для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх

$x \geq x_0 = x_0(\varepsilon)$. Тому

$$N(r) \leq \int_0^{x_0} \frac{n(x)}{x} dx + \int_{x_0}^r (D + \varepsilon) dx = (D + \varepsilon)r + \text{const},$$

звідки $D^* \leq D + \varepsilon$ і, з огляду на довільність ε , одержуємо нерівність $D^* \leq D$, яка є очевидною, якщо $D = +\infty$.

Далі,

$$N(r) \geq \int_{r/e}^r \frac{n(x)}{x} dx \geq n\left(\frac{r}{e}\right)$$

і

$$D^* \geq \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r/e)}{r} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r/e)}{e(r/e)} = \frac{D}{e},$$

тобто маємо нерівність $D \leq eD^*$. Теорему доведено.

Зауважимо, що отримані в теоремі 1.21 оцінки є точними. Наприклад, якщо $\lambda_n = n$, то $n(r) = r + O(1)$ і $N(r) = r + O(\ln r)$ при $r \rightarrow +\infty$, а тому $D = D^* = 1$. Покажемо, що і оцінка $D \leq eD^*$ є точною. Для цього достатньо побудувати послідовність (λ_n) таку, що $D = 1$ і $D^* = 1/e$.

Нехай (ν_k) – зростаюча до $+\infty$ послідовність натуральних чисел, $\nu_0 = 0$, а для $\nu_{k-1} < n \leq \nu_k$ позначимо

$$\lambda_n = \nu_k + \frac{n - \nu_{k-1}}{\nu_k - \nu_{k-1}}.$$

Тоді, якщо $r > 0$ і $\lambda_n \leq r < \lambda_{n+1}$, то

$$\frac{n(r)}{r} \leq \frac{n}{\lambda_n} \leq \frac{\nu_k}{\nu_k + \frac{n - \nu_{k-1}}{\nu_k - \nu_{k-1}}} \leq 1,$$

а оскільки $\lambda_{\nu_k} = \nu_k + 1$, то

$$1 \geq D = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\lambda_n} \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\nu_k}{\lambda_{\nu_k}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\nu_k}{\nu_k + 1} = 1,$$

тобто $D = 1$.

Далі, оскільки

$$\lambda_{\nu_{k+1}} = \nu_{k+1} + \frac{1}{\nu_{k+1} - \nu_k},$$

то при $\nu_k \leq r \leq \nu_{k+1}$ виконується $n(r) \leq \nu_k$. Але

$$N(r) = \sum_{l \leq k-1} \int_{\nu_l}^{\nu_{l+1}} \frac{n(t)}{t} dt + \int_{\nu_k}^r \frac{n(t)}{t} dt, \quad \nu_k \leq r < \nu_{k+1}.$$

Тому при $\nu_k \leq r \leq \nu_{k+1}$ одержуємо

$$\frac{N(r)}{r} \leq \frac{1}{\nu_k} \left\{ \nu_1 + \sum_{1 \leq l < k} \nu_l \ln \frac{\nu_{l+1}}{\nu_l} \right\} + \frac{\nu_k}{r} \ln \frac{r}{\nu_k}.$$

Оскільки $\frac{1}{x} \ln x \leq \frac{1}{e}$ для всіх $x > 0$, то з останньої нерівності отримуємо

$$\frac{N(r)}{r} \leq \frac{1}{\nu_k} \left\{ \nu_1 + \sum_{1 \leq l < k} \nu_l \ln \frac{\nu_{l+1}}{\nu_l} \right\} + \frac{1}{e}.$$

Досі послідовність (ν_k) була довільною. Якщо ми виберемо її так, щоб

$\nu_k = \lceil \exp_2 k \rceil$, то при $\nu_k \leq r < \nu_{k+1}$ матимемо

$$\begin{aligned} \frac{N(r)}{r} &\leq \frac{\nu_1}{\nu_k} + \frac{\nu_{k-1}}{\nu_k} \ln \frac{\nu_k}{\nu_1} + \frac{1}{e} = \\ &= \frac{1}{e} + o(1) + \frac{\exp_2(k-1) + O(1)}{\exp_2 k + O(1)} \ln \frac{\exp_2 k + O(1)}{\nu_1} = \\ &= \frac{1}{e} + o(1) + (1 + o(1)) e^k \frac{\exp_2(k-1)}{\exp_2 k} = \frac{1}{e} + o(1), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $D^* \leq 1/e$, а це разом з нерівністю $D \leq eD^*$ дає рівність $D^* = 1/e$.

Теорема 1.22. *Виконуються нерівності $d \leq d^* \leq d + d \ln \frac{D}{d}$, де вираз у правій частині потрібно вважати таким, що дорівнює $+\infty$ при $D = +\infty$ та будь-якому d і дорівнює 0 при $D < +\infty$ та $d = 0$.*

Доведення. Якщо $d > 0$, то $n(x) \geq (d - \varepsilon)x$ для кожного $\varepsilon \in (0; d)$ і всіх $x \geq x_0(\varepsilon)$. Тому

$$N(r) \geq \int_0^{x_0} \frac{n(x)}{x} dx + \int_{x_0}^r (d - \varepsilon) dx = (d - \varepsilon)r + \text{const},$$

звідки одержуємо нерівність $d^* \geq d - \varepsilon$ і, з огляду на довільність ε , маємо нерівність $d^* \geq d$, яка є очевидною при $d = 0$.

Припустимо, що $D < +\infty$. Тоді $n(x) \leq (D + \varepsilon)x$ для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $x \geq x_0(\varepsilon)$. Тому, якщо $\alpha > 1$, то

$$\begin{aligned} N(\alpha r) &= \int_0^{x_0} \frac{n(x)}{x} dx + \int_{x_0}^r \frac{n(x)}{x} dx + \int_r^{\alpha r} \frac{n(x)}{x} dx \leq \text{const} + (D + \varepsilon) \int_{x_0}^r dx + \int_r^{\alpha r} \frac{dx}{x} = \\ &= n(\alpha r) \ln \alpha + (D + \varepsilon)r + \text{const}, \end{aligned}$$

тобто,

$$\frac{N(\alpha r)}{\alpha r} \leq \frac{n(\alpha r)}{\alpha r} \ln \alpha + \frac{(D + \varepsilon)}{\alpha} + o(1), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Звідси випливає, що

$$d^* \leq \frac{D}{\alpha} + d \ln \alpha \quad (1.51)$$

для кожного $\alpha > 1$. Якщо $D = +\infty$, нерівність (1.51) є очевидною, і в цьому випадку $d^* \leq +\infty$. Якщо $D < +\infty$ і $d = 0$, то $d^* \leq D/\alpha$ і, спрямовуючи $\alpha \rightarrow +\infty$, отримуємо $d^* = 0$.

Нарешті, нехай $0 < d \leq D < +\infty$. Позначимо $\psi(\alpha) = \frac{D}{\alpha} + d \ln \alpha$. Тоді $\psi(1) = D, \psi(+\infty) = +\infty$, рівняння $\psi'(\alpha) = 0$ має єдиний розв'язок $\alpha^* = D/d$ і $\psi(\alpha^*) = d + d \ln \frac{D}{d} < D$. Тому з (1.51) маємо

$$d^* \leq \min \left\{ \frac{D}{\alpha} + d \ln \alpha : \alpha > 1 \right\} = d + d \ln \frac{D}{d}.$$

Теорему 1.22 доведено.

Нехай знову $0 < \lambda_n \square +\infty, n \rightarrow \infty, n(r)$ – лічильна функція послідовності (λ_n) , а $\xi \in [0;1)$. Величини

$$D(\xi) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r) - n(\xi r)}{r - r\xi}, \quad d(\xi) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r) - n(\xi r)}{r - r\xi}$$

називаються, відповідно, верхньою та нижньою щільностями послідовності (λ_n) за базою $\xi \in [0;1)$. Зрозуміло, що $D(0) = D$ і $d(0) = d$.

Теорема 1.23. Якщо

$$\lambda_1 \geq h > 0, \quad \lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0 \quad (n \geq 1), \quad (1.52)$$

то функції $D(\xi)$ і $d(\xi)$ неперервні на $[0;1)$ і

$$0 \leq d(\xi) \leq d(0) \leq D(0) \leq D(\xi) \leq 1/h. \quad (1.53)$$

Доведення. Нерівності $d(\xi) \geq 0$ і $d(0) \leq D(0)$ є очевидними. Далі, з умови (1.52) випливає, що кількість членів послідовності (λ_n) , що лежать у проміжку $[a;b)$, не перевищує числа $(b-a)/h$. Тому для довільних $0 \leq \xi < \eta < 1$ маємо

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{n(t\eta) - n(t\xi)}{r\eta - r\xi} \leq \frac{1}{h}. \quad (1.54)$$

При $\eta = 1$ звідси випливає нерівність $D(\xi) \leq 1/h$. Нарешті, з тотожності

$$\frac{n(t)}{t} = (1 - \xi) \frac{n(t) - n(t\xi)}{t - t\xi} + \xi \frac{n(t\xi)}{t\xi}$$

отримуємо нерівності

$$d(0) \geq (1 - \xi)d(\xi) + \xi d(0), \quad D(0) \geq (1 - \xi)D(\xi) + \xi D(0)$$

і тому $d(\xi) \leq d(0) \leq D(0) \leq D(\xi)$. Отже, всі нерівності (1.53) доведені, залишилось неперервність функцій $d(\xi)$ і $D(\xi)$.

Нехай знову $0 \leq \xi < \eta < 1$. Використовуючи тотожності (1.54) і

$$(1 - \xi) \frac{n(t) - n(t\xi)}{t - t\xi} = (1 - \eta) \frac{n(t) - n(t\eta)}{t - t\eta} + \frac{n(t\eta) - n(t\xi)}{t},$$

маємо

$$(1 - \eta)d(\eta) \leq (1 - \xi)d(\xi) \leq (1 - \eta)d(\eta) + \frac{\eta - \xi}{h},$$

$$(1 - \eta)D(\eta) \leq (1 - \xi)D(\xi) \leq (1 - \eta)D(\eta) + \frac{\eta - \xi}{h},$$

тобто

$$-\frac{1}{h} \leq \frac{(1 - \eta)d(\eta) - (1 - \xi)d(\xi)}{\eta - \xi} \leq 0,$$

$$-\frac{1}{h} \leq \frac{(1 - \eta)D(\eta) - (1 - \xi)D(\xi)}{\eta - \xi} \leq 0.$$

З цих нерівностей випливає неперервність функцій $(1 - \xi)d(\xi)$ і $(1 - \xi)D(\xi)$, а отже, і функцій $d(\xi)$ і $D(\xi)$. Теорему 3.5 доведено.

Наслідок 1.7. Якщо $D(\eta) = d(\xi)$ для деяких $0 \leq \xi, \eta < 1$, то послідовність (λ_n) вимірنا. Навпаки, якщо послідовність (λ_n) вимірна, то для всіх $0 \leq \xi, \eta < 1$.

Справді, якщо $D(\eta) = d(\xi)$ для деяких $0 \leq \xi, \eta < 1$, то з (1.53) випливає, що $D(0) = d(0)$, тобто послідовність (λ_n) вимірна. Навпаки, з тотожності

$$\frac{n(t) - n(t\xi)}{t - t\xi} = \frac{1}{1 - \xi} \frac{n(t)}{t} - \frac{\xi}{1 - \xi} \frac{n(t\xi)}{t\xi}$$

та існування границі $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{n(t)}{t} = \Delta$ випливає, що

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{n(t) - n(t\xi)}{t - t\xi} = \frac{\Delta}{1 - \xi} - \frac{\Delta\xi}{1 - \xi} = \Delta.$$

Теорема 1.24. *Існують границі*

$$\lim_{\xi \uparrow 1} d(\xi) = d(1), \quad \lim_{\xi \uparrow 1} D(\xi) = d(1)$$

і виконуються нерівності

$$d(1) \leq d(\xi) \leq d(0) \leq D(0) \leq D(\xi) \leq D(1).$$

Доведення. З тотожності

$$\frac{1}{1 - \xi^n} \sum_{\nu=1}^n \frac{n(t\xi^{\nu-1}) - n(t\xi^\nu)}{t\xi^{\nu-1} - t\xi^\nu} (\xi^{\nu-1} - \xi^\nu) = \frac{n(t) - n(t\xi^n)}{t - t\xi^n}$$

випливає, що

$$D(\xi^n) \leq \frac{1}{1 - \xi^n} \sum_{\nu=1}^n D(\xi) (\xi^{\nu-1} - \xi^\nu) = D(\xi)$$

і, подібно, $(\xi^n) \leq \delta(\xi)$. З погляду рівноправності цих нерівностей розглянемо

лише доведення існування границі $\lim_{\xi \uparrow 1} d(\xi) = d(1)$ і доведення нерівності

$$d(1) \leq d(\xi).$$

Нехай $m = \inf \{d(\xi) : 0 \leq \xi < 1\}$. Тоді $d(\xi) \geq m, 0 \leq \xi < 1$ і для кожного $\varepsilon \in (0; 1)$ існує $\gamma \in (0; 1)$ таке, що $d(\gamma) < m + \varepsilon$. Виберемо ξ так, щоб $1 - \varepsilon(1 - \gamma) < \xi < 1$. Тоді $\xi > \gamma$ та існує натуральне число $n > 1$ таке, що $\xi^n \leq \gamma < \xi^{n-1} < \xi$. Оскільки функція $(1 - \xi)d(\xi)$ не зростаюча, то звідси одержуємо

$$(1 - \gamma) d(\gamma) \geq (1 - \xi^{n-1}) d(\xi^{n-1}) \geq (1 - \xi^{n-1}) d(\xi),$$

тобто

$$d(\xi) \leq d(\gamma) \frac{1 - \gamma}{1 - \xi^{n-1}} = d(\gamma) \left\{ 1 + \frac{\xi^{n-1} - \gamma}{1 - \xi^{n-1}} \right\}.$$

Але

$$\xi^{n-1} - \gamma \leq \xi^n (1 - \xi) < \varepsilon (1 - \gamma) \leq \varepsilon (1 - \xi^n)$$

і

$$\frac{\xi^{n-1} - \gamma}{1 - \xi^{n-1}} < \varepsilon \frac{1 - \xi^n}{1 - \xi^{n-1}} < \varepsilon \frac{n}{n-1} \leq 2\varepsilon.$$

Тому

$$m \leq d(\xi) \leq d(\gamma)(1 + 2\varepsilon) < (m + \varepsilon)(1 + 2\varepsilon),$$

звідки, завдяки довільності ε , випливає існування границі

$\lim_{\xi \uparrow 1} d(\xi) = m = d(1) \leq d(\xi)$. Теорема 1.24 доведена.

Величини $d(1)$ і $D(1)$ називаються, відповідно, мінімальною та максимальною щільностями послідовності (λ_n) .

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення верхньої та нижньої границі.
2. Наведіть приклади опуклих функцій.
3. Сформулюйте означення повільно змінної функції та наведіть приклад.
4. Сформулюйте означення напівнеперервної функції та наведіть приклад.
5. Дайте означення класу збіжності чи розбіжності функцій.
6. Сформулюйте означення уточненого порядку функцій та наведіть приклад.
7. Дайте означення лічильної функції та показника збіжності послідовності.
8. Сформулюйте означення верхньої та нижньої щільності послідовності.

Приклади розв'язування задач

Приклад. Знайти верхню та нижню границі функцій:

а) $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, x \rightarrow 0;$

б) $g(x) = (2 - x^2) \cos \frac{1}{x}, x \rightarrow 0.$

Розв'язування.

а) Оскільки $\inf \left\{ \sin^2 \frac{1}{x} \right\} = 0$ при $x = x_n = -\frac{1}{n\pi} (n = 1, 2, \dots)$, а

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x_n} = \inf \left\{ \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right\} = -1,$$

то $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin^2 n\pi + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} (-n\pi) \right) = -1$. Аналогічно, $\sup \left\{ \sin^2 \frac{1}{x} \right\} = 1$ при

$x = x_n = \frac{2}{\pi(1+2n)} (n = 1, 2, \dots)$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x_n} = \sup \left\{ \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right\} = 1$, то

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin^2 \frac{\pi(1+2n)}{2} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi(1+2n)}{n} \right) = 1 + 1 = 2.$$

б) Оскільки $\inf \left\{ \cos \frac{1}{x} \right\} = -1$ при $x = x_n = -\frac{1}{(2n-1)\pi} (n = 1, 2, \dots)$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x_n} = -1$,

а $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - x^2) = 2$, то $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{(2n-1)^2 \pi^2} \right) \cos(2n-1)\pi = -2$.

Аналогічно $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти верхню та нижню границі функції:

1) $f(x) = x^2 \sin x, \quad x \rightarrow 0;$

2) $f(x) = e^{\cos(1/x^2)}, \quad x \rightarrow 0;$

3) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow 0;$

4) $f(x) = \left(\frac{1+x}{1+2x} \right)^x, \quad x \rightarrow \infty;$

5) $f(x) = 2^x, \quad x \rightarrow \infty;$

6) $f(x) = \frac{\cos x}{x}, \quad x \rightarrow 0;$

7) $f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \rightarrow \frac{\pi}{2};$

8) $f(x) = e^{-x^2}, \quad x \rightarrow \infty;$

9) $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}, \quad x \rightarrow 0;$

10) $f(x) = e^{\cos(1/x^2)}, \quad x \rightarrow 0;$

11) $f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow \frac{4}{\pi}.$

Розділ II. Цілі функції

Максимум модуля

Нагадаємо, що функція $f(z)$, $z = x + iy$ називається аналітичною в точці z_0 , якщо вона має неперервну похідну в деякому околі цієї точки. Функція $f(z)$, аналітична в усій комплексній площині, називається цілою. За теоремою Тейлора її можна розвинути у степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (2.1)$$

радіус збіжності якого $R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$. Тобто виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

Величина $M(r) = \max_{|z| \leq r} \{|f(z)|\}$, $0 \leq r < \infty$, швидкість зростання якої при $r \rightarrow \infty$ є однією з найважливіших характеристик цілої функції, називається максимум модуля $f(z)$ у крузі радіуса r .

Теорема 2.1 (Нерівність Коші). Для довільного $n \in \mathbb{N}$ має місце нерівність

$$|a_n r^n| \leq M(r).$$

Доведення. При $0 < r < R$ і $z = re^{i\varphi}$ маємо

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= \left| f(re^{i\varphi}) \right|^2 = f(re^{i\varphi}) \overline{f(re^{i\varphi})} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\varphi} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k r^k e^{-ik\varphi} = \sum_{n,k=0}^{\infty} a_n \bar{a}_k r^{n+k} e^{i(n+k)\varphi}, \end{aligned}$$

причому останній ряд рівномірно збіжний на $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, бо він мажорується рядом

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} |a_n| |a_k| r^{n+k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \right)^2 < \infty.$$

Проінтегрувавши почленно, матимемо

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^2 d\varphi = \sum_{n,k=0}^{\infty} a_n \bar{a}_k r^{n+k} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\varphi} d\varphi.$$

Оскільки

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ 1, & n = k, \end{cases}$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^2 d\varphi \leq \{M(r)\}^2,$$

і нерівність Коші є очевидним наслідком останньої нерівності.

Теорема 2.2 (Ліувілля). Якщо для цілої функції $f(z)$ виконується умова

$$M(r) < Kr^q, \quad r > r_0, \quad K = \text{const}, \quad (2.2)$$

то $f(z)$ – многочлен.

Дійсно, з нерівності Коші при виконанні умови (2.2) дістаємо

$$|a_n| < Kr^{q-n}, \quad r > r_0, \quad q > 0.$$

Спрямуємо r до ∞ . При $n > q$ отримаємо $a_n = 0$. Отже,

$$f(z) = \sum_{n \leq q} a_n z^n.$$

З теореми Ліувілля випливає, що якщо ціла функція $f(z)$ – не многочлен, то $M(r)$ зростає при $r \rightarrow \infty$ швидше, ніж будь-який степінь r .

Функція $M(r)$ посідає важливе місце в теорії цілих функцій. Точне обчислення її навіть для найпростіших цілих функцій може викликати труднощі. Але переважно достатньо вміти оцінити її зверху і знизу.

Розглянемо спочатку випадок многочлена n ($n \geq 1$)

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0.$$

У крузі $|z| \leq r$ маємо

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n| \leq |a_0| + |a_1| \cdot |z| + \dots + |a_n| \cdot |z|^n \leq \\ &\leq |a_0| + |a_1| r + \dots + |a_n| r^n = |a_n| r^n \left(1 + \left[\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} \cdot \frac{1}{r} + \dots + \frac{|a_0|}{|a_n|} \cdot \frac{1}{r^n} \right] \right). \end{aligned}$$

При $r \rightarrow \infty$ сума у квадратних дужках прямує до 0. Тому для кожного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $r_0(\varepsilon)$, що при $r > r_0(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$|P(z)| \leq |a_n| r^n (1 + \varepsilon), \quad |z| \leq r. \quad (2.3)$$

Розглянемо значення $|P(z)|$ в будь-якій точці z_0 , що лежить на колі $|z| = r$. Для неї $|z_0| = r$. У цій точці також виконується (2.3) при $r > r_0(\varepsilon)$. З іншого боку

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n| \leq |a_0| + |a_1| \cdot |z| + \dots + |a_n| \cdot |z|^n \leq \\ |P(z_0)| &= |a_n z_0^n + (a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_0)| \geq |a_n z_0^n| - |a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_0| \geq \\ &\geq |a_n| \cdot |z_0|^n - |a_{n-1}| \cdot |z_0|^{n-1} - \dots - |a_0| = |a_n| \cdot r^n - |a_{n-1}| \cdot r^{n-1} - \dots - |a_0| = \\ &= |a_n| r^n \left(1 - \left[\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} \cdot \frac{1}{r} + \dots + \frac{|a_0|}{|a_n|} \cdot \frac{1}{r^n} \right] \right). \end{aligned}$$

Звідси при $r > r_0(\varepsilon)$ отримуємо

$$|P(z_0)| \geq |a_n| r^n (1 - \varepsilon), \quad |z_0| = r. \quad (2.4)$$

Повертаючись до (2.3), робимо висновок, що ця нерівність справедлива також і в тій точці круга $|z| \leq r$, де $|P(z)|$ досягає свого максимуму $M(r)$. Тому

$$M(r) \leq |a_n| r^n (1 + \varepsilon), \quad r > r_0(\varepsilon). \quad (2.5)$$

З іншого боку, значення $|P(z)|$ в точці z_0 , що лежить на колі $|z| = r$. Не перевищує $M(r)$. Тому

$$M(r) \geq |a_n| r^n (1 - \varepsilon), \quad r > r_0(\varepsilon). \quad (2.6)$$

З (2.5) та (2.6) випливає, що

$$1 - \varepsilon \leq \frac{M(r)}{|a_n| r^n} \leq 1 + \varepsilon, \quad r > r_0(\varepsilon),$$

і оскільки ε — довільне додатне число, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{|a_n| r^n} = 1.$$

Отримане співвідношення сформулюємо так: максимум модуля многочлена степеня n асимптотично дорівнює модулю старшого члена многочлена.

Обчислимо тепер функції $M(r)$ для e^z , $\cos z$ і $\sin z$. Щоб їх розрізнити, введемо позначення $M(r, e^z)$, $M(r, \cos z)$, $M(r, \sin z)$.

У кожному з цих випадків використовуємо оцінку модуля суми степеневих ряду

$$\begin{aligned} |e^z| &= \left| 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \right| \leq 1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \cdots + \frac{|z|^n}{n!} + \cdots \leq \\ &\leq 1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \cdots + \frac{r^n}{n!} + \cdots, \quad |z| \leq r. \end{aligned}$$

Отже, $|e^z| \leq e^r$ у крузі $|z| \leq r$. Але в точці $z = r$ значення $e^z = e^r$ і $|e^z| = e^r$. Тому в цій точці модуль показникової функції досягає максимального значення. І

$$M(r, e^z) = \max_{|z| \leq r} \{|e^z|\} = e^r. \quad (2.7)$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} |\cos z| &= \left| 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots \right| \leq 1 + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^4}{4!} + \frac{|z|^6}{6!} + \cdots \leq \\ &\leq 1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \frac{r^6}{6!} + \cdots, \quad |z| \leq r. \end{aligned}$$

Сума ряду у правій частині останньої нерівності дорівнює $\cosh r = \frac{1}{2}(e^r + e^{-r})$.

Тому

$$|\cos z| \leq \frac{1}{2}(e^r + e^{-r}), \quad |z| \leq r.$$

Але в точці $z = ir$

$$\cos z = \cos(ir) = \frac{1}{2}(e^{i(ir)} + e^{-i(ir)}) = \frac{1}{2}(e^{-r} + e^r), \quad |z| \leq r,$$

тобто

$$M(r, \cos z) = \max_{|z| \leq r} \{|\cos z|\} = \frac{1}{2}(e^{-r} + e^r). \quad (2.8)$$

Нарешті $|\sin z| \leq |z| + \frac{|z|^3}{3!} + \frac{|z|^5}{5!} + \dots \leq r + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^5}{5!} + \dots = \operatorname{sh} r = \frac{1}{2}(e^r - e^{-r})$. Але в

точці $z = ir$ $|\sin z| = |\sin(ir)| = \left| \frac{1}{2i}(e^{i(ir)} - e^{-i(ir)}) \right| = \left| \frac{1}{2i}(e^{-r} - e^r) \right| = \frac{1}{2}(e^r - e^{-r})$.

Тому

$$M(r, \sin z) = \max_{|z| \leq r} \{|\sin z|\} = \frac{1}{2}(e^r - e^{-r}). \quad (2.9)$$

Тепер переконаємося в тому, що функції $M(r, e^z)$, $M(r, \cos z)$, $M(r, \sin z)$ зростаючі. Для першої з них це очевидно. Для $M(r, \sin z)$ зростання впливає з того, що e^r — зростаюча, а e^{-r} — спадна, тому різниця $e^r - e^{-r}$ — зростаюча. Щоб перевірити, чи $M(r, \cos z)$ зростає при $r > 0$, досить знайти її похідну

$$\left(\frac{1}{2}(e^r + e^{-r}) \right)' = \frac{1}{2}(e^r - e^{-r}) > 0, \quad r > 0.$$

Тому $M(r, \cos z)$ — зростаюча при $r > 0$.

Нехай $0 \leq r < \infty$. Тоді $\varphi(n) = |a_n| r^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ і існує $\max \{\varphi(n) : n \geq 0\}$, який позначатимемо через $\mu(r)$, так що $\mu(r) = \max \{\varphi(n) : n \geq 0\}$. Ця величина $\mu(r)$ називається максимальним членом ряду (2.1). З нерівності Коші випливає, що $\mu(r) \leq M(r)$. Остання нерівність теж називається нерівністю Коші. З іншого боку, для кожного $\alpha \in [0; 1]$ маємо

$$M(r) \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\frac{r}{\alpha}\right)^n \alpha^n \leq \mu\left(\frac{r}{\alpha}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n.$$

Так що

$$M(r) \leq \mu\left(\frac{r}{\alpha}\right) \frac{1}{1-\alpha}. \quad (2.10)$$

Зауважимо, що $\mu(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$.

Порядок і тип цілої функції

Величина

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} \quad (2.11)$$

називається порядком функції f , а якщо $0 < \rho < \infty$, то величина

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{r^\rho} \quad (2.12)$$

називається типом цілої функції f . Кажуть, що функція f порядку ρ ($0 < \rho < \infty$) має мінімальний, нормальний, максимальний тип, якщо відповідно $\sigma = 0$, $0 < \sigma < \infty$, $\sigma = \infty$.

Формули (2.11), (2.12) дозволяють за допомогою формул (2.7), (2.8) та (2.9) знайти порядок і тип функцій e^z , $\cos z$, $\sin z$. Оскільки

$$M(r, e^z) = e^r,$$

то порядок функції $\rho = 1$ і тип $\sigma = 1$. Далі

$$M(r, \cos z) = \frac{1}{2} (e^r + e^{-r}) = e^r \cdot \frac{1 + e^{-2r}}{2}.$$

Очевидно, що $e^{-2r} \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) і тому дріб у правій частині останньої нерівності прямує до $\frac{1}{2}$. Знайдемо

$$\ln M(r, \cos z) = r + \ln \frac{1 + e^{-2r}}{2} = r \left(1 + \frac{1}{r} \ln \frac{1 + e^{-2r}}{2} \right).$$

де вираз у дужках прямує до 1 при $r \rightarrow \infty$. Ще одне логарифмування дасть

$$\ln \ln M(r, \cos z) = \ln r + \ln \left(1 + \frac{1}{r} \ln \frac{1 + e^{-2r}}{2} \right),$$

де другий доданок у правій частині прямує до 0 при $r \rightarrow \infty$. Тому

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r, \cos z)}{\ln r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{\ln r} \ln \left(1 + \frac{1}{r} \ln \frac{1 + e^{-2r}}{2} \right) \right] = 1.$$

Це означає, що для функції $\cos z$ маємо $\rho = 1$ і $\sigma = 1$.

Пропонуємо самостійно визначити порядок і тип функцій:

а) $f(z) = \sin z$. Відповідь: $\rho = 1$, $\sigma = 1$;

б) $f(z) = e^{z^k}$. Відповідь: $M(r, e^{z^k}) = e^{r^k}$, $\rho = k$, $\sigma = 1$;

в) $f(z) = e^{e^k}$. Відповідь: $M(r, e^{e^k}) = e^{e^r}$, $\rho = \infty$, σ – не визначений.

У всіх розглянутих прикладах порядок цілої функції дорівнював цілому числу або ∞ . Але існують функції дробових порядків. Наприклад,

$f(z) = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}})$. Ця функція ціла, бо

$$e^{\sqrt{z}} = 1 + \frac{\sqrt{z}}{1!} + \frac{z}{2!} + \frac{z\sqrt{z}}{3!} + \dots,$$

$$e^{-\sqrt{z}} = 1 - \frac{\sqrt{z}}{1!} + \frac{z}{2!} - \frac{z\sqrt{z}}{3!} + \dots.$$

І тому вона зображена всюди збіжним степеневим рядом

$$\frac{1}{2}(e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}}) = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{4!} + \frac{z^3}{6!} \dots.$$

Для неї $M\left(r, \frac{1}{2}(e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}})\right) = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{r}} + e^{-\sqrt{r}})$ і легко перевірити, що порядок

$$\rho = \frac{1}{2}, \text{ а тип } \sigma = 1.$$

Покажемо зараз, що в означених порядку і типу цілої функції замість $M(r)$ можна брати $\mu(r)$.

Теорема 2.3. *Мають місце рівності*

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \mu(r)}{\ln r} = \rho, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(r)}{r^\rho} = \sigma. \quad (2.13)$$

Доведення. Прийmemo

$$\rho_1 = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \mu(r)}{\ln r}, \quad \sigma_1 = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(r)}{r^\rho}.$$

З нерівності Коші $\mu(r) \leq M(r)$ випливає, що $\rho_1 \leq \rho$, $\sigma_1 \leq \sigma$. Далі, якщо припустимо, що $\rho_1 < \infty$, з означення ρ_1 маємо, що $\ln \ln \mu(r) \leq (\rho_1 + \varepsilon) \ln r$ для кожного $\varepsilon > 0$ при $r \geq r_0(\varepsilon)$, тобто $\ln \mu(r) \leq r^{\rho_1 + \varepsilon}$. Тому з (2.10) отримуємо

$$\ln M(r) \leq \ln \mu\left(\frac{r}{\alpha}\right) + \ln \frac{1}{1 - \alpha} \leq r^{\rho_1 + \varepsilon} \alpha^{-(\rho_1 + \varepsilon)} (1 + o(1)), \quad r \rightarrow \infty,$$

звідки $\ln \ln M(r) \leq (\rho_1 + \varepsilon) \ln r + O(1)$ при $r \rightarrow \infty$. З останньої нерівності випливає, що $\rho \leq \rho_1 + \varepsilon$, і завдяки довільності ε маємо $\rho \leq \rho_1$. У випадку, коли $\rho_1 = \infty$, нерівність $\rho \leq \rho_1$ очевидна. Отже, $\rho = \rho_1$.

При $0 < \rho < \infty$ і $\sigma_1 < \infty$ з означення σ_1 маємо $\ln \mu(r) \leq (\sigma_1 + \varepsilon) r^\rho$ для кожного $\varepsilon > 0$ при $r \geq r_0(\varepsilon)$ і з (2.10) дістаємо $\ln M(r) \leq (\sigma_1 + \varepsilon) \alpha^{-\rho} r^\rho (1 + o(1))$, $r \rightarrow \infty$. Звідси випливає, що $\sigma \leq (\sigma_1 + \varepsilon) \alpha^{-\rho}$. Оскільки числа ε і α довільні, то, спрямовуючи ε до 0 і α до 1, отримуємо $\sigma \leq \sigma_1$. При $\sigma_1 = \infty$ нерівність $\sigma \leq \sigma_1$ очевидна. Отже, $\sigma = \sigma_1$, і теорема доведена.

Обчислення порядку і типу цілої функції, виходячи з означення, тобто з формул (2.11) та (2.12), досить трудомістке, бо пов'язане зі знаходженням максимуму модуля кожної конкретної функції. Тому виникає природне бажання отримати формули для обчислення порядку і типу цілої функції через коефіцієнти ряду (2.1).

Теорема 2.4. *Мають місце рівності*

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{-\ln |a_n|}, \quad \sigma = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e \rho} |a_n|^{\rho/n}. \quad (2.14)$$

Доведення. Прийmemo

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{-\ln |a_n|} = k, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e \rho} |a_n|^{\rho/n} = \vartheta.$$

З першої рівності (2.13) маємо $\mu(r) \leq \exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}$ при $\rho < \infty$ для кожного $\varepsilon > 0$ при $r \geq r_0(\varepsilon)$. Тому за означенням $\mu(r)$ отримуємо

$$|a_n| \leq \mu(r) r^{-n} \leq r^{-n} \exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}$$

для всіх $n \geq 0$ і всіх $r \geq r_0(\varepsilon)$. Виберемо $r = n^{1/(\rho+\varepsilon)}$. Тоді маємо $|a_n| \leq \left(e / n^{1/(\rho+\varepsilon)}\right)^n$ при $n \geq n_0$, звідки випливає, що $k \leq \rho$. При $\rho = \infty$ остання нерівність тривіальна.

Припустимо тепер, що $\sigma < \infty$. З другої рівності (2.12) маємо $\mu(r) \leq \exp\{(\sigma + \varepsilon)r^\rho\}$ для кожного $\varepsilon > 0$ при $r \geq r_0(\varepsilon)$, як і раніше,

$$|a_n| \leq r^{-n} \exp\{(\sigma + \varepsilon)r^\rho\}$$

для всіх $n \geq 0$ і $r \geq r_0(\varepsilon)$. Виберемо $r = \left(\frac{n}{\rho(\sigma + \varepsilon)}\right)^{1/\rho}$. Тоді

$|a_n| \leq (e\rho(\sigma + \varepsilon)/n)^{n/\rho}$ при $n \geq n_0(\varepsilon)$, звідки легко випливає, що $\vartheta \leq \sigma$. При $\sigma = \infty$ нерівність $\vartheta \leq \sigma$ очевидна.

Перейдемо тепер до доведення протилежних нерівностей $k \geq \rho$ і $\vartheta \geq \sigma$.

Припустимо спочатку, що $k < \infty$. Тоді з означення k маємо $|a_n| \leq n^{-n/(k+\varepsilon)}$ при $n \geq n_0(\varepsilon) \geq 1$. Тому

$$\mu(r) = \max\{|a_n| r^n : n \geq 0\} \leq \max\left\{\max\{|a_n| r^n : 0 \leq n \leq n_0(\varepsilon)\}\right\},$$

$$\max \left\{ n^{-n/(k+\varepsilon)} r^n : n \geq n_0(\varepsilon) \right\} \leq \max \left\{ O \left(r^{n_0(\varepsilon)} \right) \right\},$$

$$\exp \left(\max \{ \varphi(t) : t \geq 1 \} \right), \quad r \rightarrow \infty,$$

де $\varphi(t) = -\frac{t \ln t}{k + \varepsilon} + t \ln r$. Оскільки $\varphi'(t) = -\frac{\ln t + 1}{k + \varepsilon} + \ln r$ і

$\varphi''(t) = -1/(t(k + \varepsilon)) < 0$, то максимум функції φ досягається в точці $t = \frac{1}{e} r^{k+\varepsilon}$,

тобто

$$\ln \mu(r) \leq \max \left\{ O(\ln r), \frac{r^{k+\varepsilon}}{e(k + \varepsilon)} \right\} = O(r^{k+\varepsilon}), \quad r \rightarrow \infty.$$

Звідси, згідно з першою рівністю (2.13), отримуємо, що $\rho \leq k$. При $k = \infty$ нерівність $\rho \leq k$ очевидна. Отже, $\rho = k$ і перша рівність (2.14) доведена.

Припустимо, що $\vartheta < \infty$. Тоді $|a_n| \leq \left(\frac{1}{n} e \rho(\vartheta + \varepsilon) \right)^{n/\rho}$ для кожного $\varepsilon > 0$ при

$$n \geq n_0(\varepsilon) \geq 1 \text{ і, як і раніше, маємо } \mu(r) \leq \max \left\{ O(r^{n_0(\varepsilon)}), \exp \left(\max \{ \varphi(t) : t \geq 1 \} \right) \right\},$$

Де тепер $\varphi(t) = \frac{t}{\rho} \ln \left(\frac{1}{t} e \rho(\vartheta + \varepsilon) \right) + t \ln r$. Оскільки

$$\varphi'(t) = \ln r - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \ln \left(\frac{1}{t} e \rho(\vartheta + \varepsilon) \right) \text{ і } \varphi''(t) = -\frac{1}{\rho t} < 0, \text{ то максимум модуля}$$

функції φ досягається в точці $t = \rho(\vartheta + \varepsilon) r^\rho$ і

$$\ln \mu(r) \leq \max \left\{ O(\ln r), (\vartheta + \varepsilon) r^\rho \right\} = (1 + o(1))(\vartheta + \varepsilon) r^\rho, \quad r \rightarrow \infty. \text{ Звідси, завдяки}$$

(2.13), впливає, що $\sigma \leq \vartheta$. При $\vartheta = \infty$ нерівність $\sigma \leq \vartheta$ тривіальна. Таким чином, $\sigma = \vartheta$, і друга нерівність (2.14) доведена.

Тепер розглянемо питання про похідну та нулі цілої функції. Спочатку сформулюємо наступне очевидне твердження: 1) якщо $f(z)$ – ціла функція порядку ρ , $0 \leq \rho < \infty$, то функція $P(z) f(z)$, де $P(z)$ – многочлен, має порядок

ρ ; 2) якщо $f(z)$ – ціла функція порядку ρ , $0 < \rho < \infty$, і типу σ , $0 \leq \sigma \leq \infty$, то і функція $P(z)f(z)$ має тип σ при порядку ρ .

Теорема 2.5. У функції $f(z)$ та її похідної $f'(z)$ порядки і типи однакові.

Доведення. У функцій $f'(z)$ та $zf'(z)$ порядки і типи рівні. Тому досить показати, що у функцій $f(z)$ та $zf'(z)$ порядки і типи рівні.

Нехай $f(z)$, зображена рядом (1.1), має порядок ρ . Тоді

$$zf'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, \quad b_n = na_n.$$

За першою з формул (2.14) порядок цієї функції дорівнює

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{\ln |1/b_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \sqrt[n]{|1/b_n|}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \sqrt[n]{1/(na_n)}} = \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \sqrt[n]{1/a_n} - \ln \sqrt[n]{n}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln \sqrt[n]{1/a_n}} = \rho. \end{aligned}$$

Нехай тепер $f(z)$ має порядок ρ і тип σ . За доведеним порядок функції $zf'(z)$ дорівнює ρ , а її тип σ_1 обчислимо за другою з формул (2.14)

$$\sigma_1 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e\rho} |b_n|^{\rho/n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e\rho} |na_n|^{\rho/n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e\rho} |a_n|^{\rho/n} \left(\frac{1}{n} \right)^{\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e\rho} |a_n|^{\rho/n} = \sigma.$$

І теорема повністю доведена.

Нагадаємо, що точка називається нулем функції f , якщо $f(a) = 0$. Коли ж $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, а $f^{(n)}(a) \neq 0$, то a називається нулем n -го порядку f . Для прикладу візьмемо функцію $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$. З розвинення видно, що $z = 0$ є нулем 1-го порядку. Тепер візьмемо функцію

$z - \sin z = \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \dots$, для якої, очевидно, точка $z = 0$ є нулем 3-го порядку.

Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ – послідовність комплексних чисел, причому $|\lambda_n| \uparrow \infty, \lambda_1 \neq 0$. Припустимо, що існує скінченне α таке, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^\alpha} < \infty. \quad (2.15)$$

Нижня грань τ множини чисел α , що задовольняють умові (2.15), називається показником збіжності послідовності $\{\lambda_n\}$. Якщо τ скінченне, то для кожного $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{\tau+\varepsilon}} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{\tau-\varepsilon}} = \infty.$$

Якщо не існує α , при якому виконується умова (2.15), то $\tau = \infty$.

Нехай $f(z)$ – ціла функція скінченного порядку ρ і $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ – її нулі, відмінні від початку координат. Вважаємо, що $|\lambda_n| \uparrow \infty$ і кожен нуль виписуємо стільки ж раз у послідовності $\{\lambda_n\}$, якою є його кратність.

Теорем 2.6. *Нехай $f(z)$ – ціла функція скінченного порядку ρ , а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots, |\lambda_n| \uparrow \infty, \lambda_1 \neq 0$ – її нулі. Тоді $\tau \leq \sigma$.*

Доведення. Вважаємо, що $f(0) \neq 0$ (інакше ми б поділили $f(z)$ на відповідний степінь z і отримали б функцію порядку ρ , яка не дорівнює нулю в початку координат і для якої $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ – нулі). Прийmemo $r_n = |\lambda_n|, R = 2r_n$. У крузі $|z| \leq R$ у функції $f(z)$ є принаймні n нулів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тоді згідно з відомою оцінкою

$$2^n = \left(\frac{R}{r_n} \right)^n \leq \frac{R^n}{|\lambda_1^0 \dots \lambda_n^0|} \leq \frac{M(2r_n)}{|f(0)|} < e^{r_n^{\rho+\varepsilon}}, \quad n > n_0,$$

при великих n маємо

$$n \ln 2 < r_n^{\rho+\varepsilon}, \quad n < r_n^{\rho+2\varepsilon}, \quad r_n > n^{1/(\rho+2\varepsilon)}, \quad r_n^{\rho+3\varepsilon} > n^\beta, \quad \beta = \frac{\rho+3\varepsilon}{\rho+2\varepsilon} > 1.$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{\rho+3\varepsilon}} < \infty$, де $\varepsilon > 0$ – довільне. Тому $\tau \leq \rho$.

Нескінченні добутки

Вираз вигляду

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \cdots, \quad a_n \neq -1 \quad (n \geq 1) \quad (2.16)$$

називається нескінченним добутком і позначається $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$. Вираз

$p_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$ називається частинним добутком. Кажуть, що нескінченний

добуток збігається, якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \neq 0, \infty$. В іншому випадку він

називається розбіжним. Якщо добуток збігається, то позначимо $p = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$.

Необхідна умова збіжності. Якщо добуток збігається, то $a_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Дійсно, $1 + a_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$, звідки випливає, що $a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

Достатня умова збіжності. Якщо $a_n \geq 0 \quad (n \geq 1)$, то добуток (2.16) і ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігаються або розбігаються одночасно.

Дійсно, оскільки в цьому випадку p_n – неспадна функція від n , то p_n прямує або до скінченної границі, або до ∞ . Далі, з того, що $1 + a_n \leq e^{a_n}$, маємо $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \leq e^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$. Ці нерівності показують, що p_n і $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ обмежені чи необмежені одночасно, а це завершує доведення.

Добуток (2.16) називається абсолютно збіжним, якщо збігається добуток

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|). \quad (2.17)$$

З попереднього випливає, що добуток абсолютно збігається тоді і тільки тоді, коли збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Якщо ж добуток (2.17) розбігається, то (2.16) називається умовно збіжним.

Покажемо, що абсолютно збіжний добуток є збіжним. Позначимо

$$p_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k), \quad P_n = \prod_{k=1}^n (1 + |a_k|).$$

Маємо

$$p_n - p_{n-1} = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_{n-1}) a_n, \quad P_n - P_{n-1} = (1 + |a_1|) \cdots (1 + |a_{n-1}|) |a_n|,$$

звідки $|p_n - p_{n-1}| \leq P_n - P_{n-1}$. Нехай добуток збігається абсолютно. Тоді існує

$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \neq \infty$ і, отже, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} (P_n - P_{n-1})$ збігається. Але тоді збігається і ряд

$\sum_{n=2}^{\infty} (p_n - p_{n-1})$. Тому існує $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \neq \infty$. Переконаємося, що $p \neq 0$. Дійсно,

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збігається і $1 + a_n \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$. Тому збігається ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n / (1 + a_n))$. Звідси добуток

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_k}{1 + a_k} \right)$$

прямує до деякої скінченної границі. Але цей добуток дорівнює $\frac{1}{P_n}$. Отже,

границя добутку p_n відмінна від нуля.

Зауважимо, що збіжність добутку, зображеного у вигляді $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$,

рівносильна збіжності ряду $\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln u_n$.

Тепер перейдемо до розгляду функціональних нескінченних добутків вигляду

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z)), \quad (2.18)$$

де $u_n(z)$ – функції, задані в області D , причому $u_n(z) \neq -1$ у D .

Добуток (2.18) називається збіжним в області D , якщо він збігається в кожній точці $z \in D$. Згідно з попередніми результатами маємо, зокрема, що якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)| < \infty, \quad z \in D,$$

то добуток (2.18) називається збіжним в області D . У кожній точці $z \in D$ добуток (2.18) збігається до свого значення $p(z)$, і ми запишемо

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z)).$$

Добуток (2.18) називається рівномірно збіжним в області D , якщо послідовність частинних добутків $p_n(z) = \prod_{k=1}^n (1 + u_k(z))$ рівномірно збігається в області D . Нескінченний добуток називається рівномірно збіжним всередині області D , якщо послідовність частинних добутків рівномірно збігається всередині D .

Достатня ознака рівномірної збіжності в області. Якщо в області D

$$|u_n(z)| \leq a_n \quad (n \geq 1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty,$$

то в області D добуток (2.18) збігається рівномірно.

Дійсно, $p_n(z) - p_{n-1}(z) \leq (1 + u_1(z)) \cdots (1 + u_{n-1}(z)) u_n(z)$. Звідси

$$\begin{aligned} |p_n(z) - p_{n-1}(z)| &\leq (1 + |u_1(z)|) \cdots (1 + |u_{n-1}(z)|) |u_n(z)| \leq \\ &\leq e^{a_1 + \cdots + a_n} \cdot a_n < K |a_n|, \quad K = \text{const}, \end{aligned}$$

тому ряд $\sum_{n=2}^{\infty} (p_n(z) - p_{n-1}(z))$ збігається рівномірно в D , отже, $\{p_n(z)\}$

рівномірно збігається в D .

Достатня ознака рівномірної збіжності всередині області. Нехай $u_n(z)$ – аналітичні функції в однозв’язній області D . Якщо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + u_n(z)) \quad (2.19)$$

рівномірно збігається в D , то добуток (2.18) рівномірно збігається всередині області D .

Дійсно, маємо

$$\prod_{k=1}^n (1 + u_k(z)) = \exp \left[\sum_{k=1}^n \ln(1 + u_k(z)) \right], \quad z \in D.$$

Звідси отримуємо

$$p(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k(z)) = \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + u_k(z)) \right], \quad z \in D.$$

Права частина – аналітична функція у D , тому й $p(z)$ – аналітична функція у D . Далі

$$\begin{aligned} p(z) - \prod_{k=1}^n (1 + u_k(z)) &= \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + u_k(z)) \right] - \exp \left[\sum_{k=1}^n \ln(1 + u_k(z)) \right] = \\ &= p(z) \left\{ 1 - \exp \left[- \sum_{k=n+1}^{\infty} \ln(1 + u_k(z)) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Нехай K – деякий компакт з D . На ньому функція $p(z)$ обмежена, тобто

$|p(z)| \leq M, z \in K$. На компактi K ряд (1.19) збігається рівномірно, тому

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \ln(1 + u_k(z)) \right| < \frac{\varepsilon}{2M} < \frac{1}{2}, \quad z \in K, \quad n > N.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \left| p(z) - \prod_{k=1}^n (1 + u_k(z)) \right| &\leq M \left\{ \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\varepsilon}{2M} \right)^2 + \dots \right\} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2M} \right)^2 + \dots \right\} < \frac{\varepsilon}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right\} = \varepsilon, \quad z \in K, \quad n > N, \end{aligned}$$

що і доводить рівномірну збіжність (2.18) всередині D .

До цих пір ми припускали, що $u_n(z) \neq -1$ у D . Зараз послабимо цю вимогу. Будемо вважати, що D — однозв'язна область, $u_n(z)$ — аналітичні функції у D , які володіють такою властивістю: який би не був компакт $K \subset D$, існує номер $N_0 = N_0(K)$ такий, що $u_n(z) \neq -1$, $z \in K$, $n > N_0$.

Будемо вважати, що добуток (2.18) збігається у D , якщо збігається добуток $\prod_{n=N}^{\infty} (1 + u_n(z))$, $z \in K$, який би не був компакт $K \subset D$. При такому

означенні функція $p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$ може перетворюватися в нуль у деяких точках області D , в точці такого типу в нуль перетвориться принаймні один із співмножників добутку.

Тоді достатня ознака рівномірної збіжності всередині області D буде формулюватися так: якщо ряд $\sum_{n=N_0}^{\infty} \ln(1 + u_n(z))$, $N_0 = N_0(K)$ рівномірно збігається на довільному компактi $K \subset D$, то добуток рівномірно збігається всередині області D .

Розвинення цілої функції у нескінченний добуток

Розглянемо спочатку спосіб побудови цілої функції з заданими нулями.

Позначимо

$$E(u, 0) = 1 - u, \quad E(u, n) = (1 - u) \exp \left\{ u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^n}{n} \right\}, \quad n > 1.$$

Ці вирази називаються первинними множниками. Їхня поведінка при $u \rightarrow \infty$ залежить від n .

Лема 2.1. *Справедливі нерівності*

$$\left| \ln |E(u, n)| \right| \leq \left| \ln E(u, n) \right| \leq 2 |u|^{n+1}, \quad |u| \leq \frac{1}{2}, \quad (2.20)$$

$$\left| \ln \left| \exp \left\{ u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^n}{n} \right\} \right| \right| \leq (2 |u|)^n, \quad |u| \geq \frac{1}{2}. \quad (2.21)$$

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned} \ln E(u, n) &= \ln(1 - u) + u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^n}{n} = \left(-u - \frac{u^2}{2} - \cdots - \frac{u^n}{n} - \frac{u^{n+1}}{n+1} - \cdots \right) + \\ &+ u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^n}{n} = -\frac{u^{n+1}}{n+1} - \frac{u^{n+2}}{n+2} - \cdots, \quad |u| \leq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

звідки

$$\ln E(u, n) \leq |u|^{n+1} + |u|^{n+2} + \cdots = |u|^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \right) = 2 |u|^{n+1}.$$

Тепер доведемо другу нерівність. Нехай $|u| \geq \frac{1}{2}$. Маємо

$$e^{-|u| - \frac{|u|^2}{2} - \cdots - \frac{|u|^n}{n}} \leq \left| e^{u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^n}{n}} \right| \leq e^{|u| + \frac{|u|^2}{2} + \cdots + \frac{|u|^n}{n}},$$

$$|u| + \frac{|u|^2}{2} + \cdots + \frac{|u|^n}{n} \leq (|u|^{1-n} + \cdots + 1) |u|^n \leq (2^{n-1} + \cdots + 1) |u|^n \leq 2^n |u|^n.$$

Тому $e^{-(2|u|)^n} \leq \left| e^{u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^n}{n}} \right| \leq e^{(2|u|)^n}$. Звідси

$$\left| \ln \left| e^{u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^n}{n}} \right| \right| \leq (2|u|)^n, \quad |u| \geq \frac{1}{2}.$$

Теорема 2.7. Нехай $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, і нехай цілі p_n такі, що для довільного r

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n} \right)^{p_n} < \infty, \quad r_n = |z_n|.$$

Тоді добуток

$$\prod_{n=1}^{\infty} E \left(\frac{z}{z_n}, p_n - 1 \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n} \right) \exp \left\{ \frac{z}{z_n} + \frac{z^2}{2z_n^2} + \dots + \frac{z^{p_n-1}}{(p_n-1)z_n^{p_n-1}} \right\} \quad (2.22)$$

збігається у всій площині і задає цілу функцію $F(z)$, яка має нулі в точках $z_1, z_2, \dots$ і тільки в них.

Доведення. Візьмемо $R > 0$. Нехай $|z| \leq R$ і $|z_n| \leq 2R$ при $n > N$. З нерівності (2.20) випливає, що

$$\left| \ln E \left(\frac{z}{z_n}, p_n - 1 \right) \right| \leq 2 \left(\frac{R}{r_n} \right)^{p_n}, \quad |z| \leq R, n > N,$$

і, отже, ряд $\sum_{n=N}^{\infty} \ln E \left(\frac{z}{z_n}, p_n - 1 \right)$ збігається рівномірно в $|z| \leq R$, а тому добуток

$\prod_{n=N}^{\infty} E \left(\frac{z}{z_n}, p_n - 1 \right)$ збігається рівномірно в $|z| \leq R$ до аналітичної у $|z| \leq R$

функції, що не дорівнює нулю. Тоді добуток (2.22) також збігається в $|z| \leq R$ до аналітичної функції $F(z)$, причому ця функція перетворюється в нуль лише в точках z_j , які лежать у крузі радіуса R . А оскільки R – довільне число, то теорема доведена.

Зауважимо, що можна брати $p_n = n$ ($n \geq 1$).

Теорема 2.8. Нехай $f(z)$ – ціла функція, $z_1, z_2, \dots$ – її нулі (причому кожен з них виписується стільки разів, скільки показує його кратність), відмінні від початку координат. Виберемо цілі p_n так, що для довільного r виконується умова

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n} \right)^{p_n} < \infty, \quad r_n = |z_n|.$$

Тоді

$$f(z) = z^{\lambda} e^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}; p_n - 1\right),$$

де $h(z)$ – ціла функція.

Доведення. Утворимо добуток (2.22), нехай він збігається до $F(z)$.

Позначимо $H(z) = f(z) / z^{\lambda} F(z)$, де λ – кратність нуля $z = 0$. Це ціла функція,

яка ніде не перетворюється у нуль. Звідси $h(z) = \ln H(z) = \int_0^z \frac{H'(\xi)}{H(\xi)} d\xi + \ln H(0)$

– ціла функція. Але тоді

$$f(z) = z^{\lambda} H(z) F(z) = z^{\lambda} e^{h(z)} F(z),$$

і теорема доведена.

Нехай $f(z)$ – ціла функція порядку ρ і $z_1, z_2, \dots, z_m \neq 0$ – її нулі. Нехай далі τ – показник збіжності послідовності $\{z_m\}$. За теоремою 2.6 маємо $\tau \leq \rho$. Нехай k – найменше ціле число, що задовольняє умові

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|z_m|^{k+1}} < \infty. \quad (2.23)$$

Тоді $\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_m} \right)^{k+1} < \infty$, $r_m = |z_m|$ для довільного r . За теоремою 1.8 отримуємо

$$f(z) = z^\lambda e^{h(z)} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_m}\right) \exp \left\{ \frac{z}{z_m} + \frac{z^2}{2z_m^2} + \cdots + \frac{z^k}{kz_m^k} \right\}, \quad (2.24)$$

де $h(z)$ – многочлен степеня $h \leq \rho$. Вираз

$$F(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_m}\right) \exp \left\{ \frac{z}{z_m} + \frac{z^2}{2z_m^2} + \cdots + \frac{z^k}{kz_m^k} \right\} \quad (2.25)$$

називається канонічним добутком.

Теорема 2.9. *Порядок канонічного добутку (2.25) дорівнює τ , причому, якщо*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|z_m|^\tau} < \infty, \quad (2.26)$$

то $F(z)$ – ціла функція порядку τ скінченного типу.

Доведення. У (2.25) ціле число k пов'язане з τ співвідношенням $k \leq \tau \leq k+1$. Нехай θ – число, що задовольняє умовам $\tau \leq \theta \leq k+1$ і

$\sum_{m=1}^{\infty} 1/|z_m|^\theta < \infty$. Таке θ можна вибрати як завгодно близько до τ , а у випадку

(2.26) приймемо $\theta = \tau$. За лемою 2.1 маємо

$$\begin{aligned} |E(u, k)| &\leq e^{(2|u|)^{k+1}} \leq e^{(2|u|)^\theta}, \quad |u| \leq \frac{1}{2}, \\ \left| e^{u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^k}{k}} \right| &\leq e^{(2|u|)^k} \leq e^{(2|u|)^\theta}, \quad |u| \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

З останньої нерівності випливає, що

$$|E(u, k)| \leq e^{(2|u|)^\theta + \ln(1+|u|)} \leq e^{(b|u|)^\theta}, \quad b < \infty, \quad |u| \geq \frac{1}{2}.$$

Отже, для довільного u маємо $|E(u, k)| \leq e^{(b|u|)^\theta}$. Звідси отримуємо

$$|F(z)| \leq \exp \left\{ b \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{z}{z_m} \right|^\theta \right\} = \exp \{ a |z|^\theta \}, \quad a < \infty. \quad (2.27)$$

Тому порядок функції $F(z)$ $\rho_F \leq \theta$. Але θ як завгодно близьке до τ . Отже, $\rho_F \leq \tau$. А за теоремою 2.6 $\tau \leq \rho_F$. Тому $\tau = \rho_F$.

У випадку (2.26) приймемо $\theta = \tau$ і тоді з (2.27) видно, що $F(z)$ – ціла функція порядку τ скінченного типу (те, що вона має порядок τ ми вже довели раніше). Теорема доведена.

Сформулюємо тепер без доведення основну теорему про розвинення цілої функції скінченного порядку у нескінченний добуток.

Теорема 2.10 (Бореля). Нехай $f(z)$ – ціла функція скінченного порядку ρ , $z_1, z_2, \dots$ – її нулі, τ – показник збіжності послідовності $\{z_m\}$, k – найменше ціле число, що задовольняє умові

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|z_m|^{k+1}} < \infty.$$

Тоді має місце зображення (1.24), причому $\rho = \max\{h, \tau\}$.

Наслідок 2.1. Якщо ρ – не ціле число, то $\tau = \rho$.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте теорему Ліувілля.
2. Дайте означення порядку і типу функції.
3. Наведіть формули для обчислення порядку і типу функції через коефіцієнти ряду.
4. Що називається нулем функції?
5. Яка функція називається цілою?
6. Дайте означення максимуму модуля та максимального члена цілої функції.
7. Сформулюйте достатню ознаку збіжності числового добутку.
8. Сформулюйте достатню ознаку рівномірної збіжності функціонального нескінченного добутку в області.
9. Сформулюйте теорему Бореля про розвинення цілої функції скінченного порядку у нескінченний добуток.

Приклади розв'язування задач

1. Знайти порядок і тип функції $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n \ln n} z^n$.

Маємо

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{-\ln |a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{z_n \ln n} = \frac{1}{2},$$

$$\sigma = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e \rho} |a_n|^{\rho/n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{e} \left(e^{-2n \ln n} \right)^{\frac{1}{2n}} = \frac{2}{e}.$$

2. Розвинути у нескінченний добуток функцію $\sin z$.

Нулі цієї функції $\pm k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), $\rho = 1$, $\tau = 1$, $k = 1$. Добуток множників, що відповідають нулям $k\pi$ і $-k\pi$, дорівнює

$$\left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{\frac{z}{k\pi}} \left(1 + \frac{z}{k\pi}\right) e^{-\frac{z}{k\pi}} = 1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}.$$

Тому

$$\sin z = z e^{Az+B} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

З рівності $\frac{\sin z}{z} = e^{Az+B} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right)$ при $z \rightarrow 0$ маємо $e^B = 1$, тобто $B = 0$.

Отже,

$$\sin z = z e^{Az} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

Функція $\sin z$ — непарна, тому $e^{Az} = e^{-Az}$ і $e^{2Az} = 1$. Звідси $A = 0$. Отже,

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

3. Дослідити збіжність добутку $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n + 1}\right)$.

Розглянемо відповідний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$. Оскільки $\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

збігається, як нескінченно спадна геометрична прогресія, то звідси і добуток буде збіжним.

4. Дослідити збіжність добутку $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}\right)$. До відповідного ряду

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}$ застосуємо ознаку Даламбера:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|^n}{n+1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \begin{cases} 0, & |z| \leq 1, \\ \infty, & |z| > 1. \end{cases}$$

Отже, ряд і відповідно добуток збігається для $|z| \leq 1$.

Завдання для самостійної роботи

1. Використовуючи формули (2.13), визначити порядки і типи вказаних функцій ($n \in \mathbb{N}$):

а) $f(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$. Відповідь: $\rho = 0$;

б) $f(z) = e^{az^n}$ ($a > 0$). Відповідь: $\rho = n, \sigma = a$;

в) $f(z) = z^n e^{3z}$. Відповідь: $\rho = 1, \sigma = 3$;

г) $f(z) = z^2 e^{2z} + e^{3z}$. Відповідь: $\rho = 1, \sigma = 3$;

д) $f(z) = e^{5z} - 3e^{2z^3}$. Відповідь: $\rho = 3, \sigma = 2$;

е) $f(z) = e^z \cos z$. Відповідь: $\rho = 1, \sigma = 2$;

є) $f(z) = \cos \sqrt{z}$. Відповідь: $\rho = \frac{1}{2}, \sigma = 1$.

2. Використовуючи формули (2.14), визначити порядки і типи наступних функцій:

а) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n$. Відповідь: $\rho = 1, \sigma = \frac{1}{e}$;

б) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \ln n\right)^{n/a} z^n (a > 0)$. Відповідь: $\rho = a, \sigma = \infty$;

в) $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \ln n\right)^{n/a} z^n (a > 0)$. Відповідь: $\rho = a, \sigma = 0$;

г) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} z^n$. Відповідь: $\rho = 0$;

д) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n / n^{1+a} (a > 0)$. Відповідь: $\rho = 0$;

е) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} z^n (0 < \alpha < 1)$. Відповідь: $\rho = 0$;

є) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n / n^{\alpha n} (a > 0)$. Відповідь: $\rho = \frac{1}{2}, \sigma = \frac{\alpha}{e}$.

3. Дослідити на збіжність наступні нескінченні добутки:

а) $\prod_{n=3}^{\infty} (n^2 - 4) / (n^2 - 1)$. Відповідь: збігається;

б) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n(n+2))$. Відповідь: збігається;

в) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$. Відповідь: збігається;

г) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Відповідь: розбігається;

д) $\prod_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 / n(n+2)$. Відповідь: збігається;

е) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n^p)$. Відповідь: збігається при $p > 1$;

є) $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1 + 1/n}$. Відповідь: збігається;

ж) $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}$. Відповідь: збігається.

4. Дослідити на абсолютну збіжність:

а) $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right]$. Відповідь: збігається умовно;

б) $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right]$. Відповідь: збігається умовно;

в) $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \right]$. Відповідь: збігається абсолютно при $p > 1$, умовно при

$$\frac{1}{2} < p \leq 1;$$

г) $\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{\ln n} \right]$. Відповідь: збігається умовно;

д) $\prod_{n=2}^{\infty} \sqrt{n} / (\sqrt{n} + (-1)^n)$. Відповідь: розбігається;

е) $\prod_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$. Відповідь: розбігається;

є) $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$. Відповідь: збігається умовно;

$$\text{ж)} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n} (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \right]. \text{ Відповідь: збігається умовно.}$$

5. Знайти області збіжності добутків:

$$\text{а)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n). \text{ Відповідь: } |z| < 1;$$

$$\text{б)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^n}{2^n} \right). \text{ Відповідь: } |z| < 2;$$

$$\text{в)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right). \text{ Відповідь: } |z| < \infty;$$

$$\text{г)} \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-n} z^{-n} \right). \text{ Відповідь: } |z| > 1;$$

$$\text{д)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} z^n \right). \text{ Відповідь: } |z| < \frac{1}{e};$$

$$\text{е)} \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{z}{n}. \text{ Відповідь: } |z| < \infty;$$

$$\text{є)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z} \sin \frac{z}{n}. \text{ Відповідь: } |z| < \infty;$$

$$\text{ж)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}}. \text{ Відповідь: } |z| < \infty.$$

6. Довести справедливість наступних розвинень:

$$\text{а)} \cos z = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - 4z^2 / \pi^2 (2k+1)^2 \right);$$

$$\text{б)} shz = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + z^2 / k^2 \pi^2 \right);$$

$$\text{в)} chz = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + 4z^2 / \pi^2 (2k+1)^2 \right);$$

$$\text{г)} e^z - 1 = ze^{\frac{z}{2}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + z^2 / 4k^2 \pi^2 \right).$$

Розділ III. Ряди Діріхле

Область збіжності, абсциси збіжності

Нехай (λ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних і $\lambda_n = 0$, а (a_n) – послідовність комплексних чисел. Ряд

$$F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n) \quad (s = \sigma + it) \quad (3.1)$$

називається рядом Діріхле (або рядом експонент), числа λ_n – його показниками, а a_n – коефіцієнтами.

Якщо в ряді Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z = re^{i\varphi}, \quad (3.2)$$

то прийдемо до ряду Діріхле

$$F(s) = f(e^s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(sn) \quad (3.1')$$

з показником $\lambda_n = n$. Отже, ряд Діріхле є узагальненням ряду Тейлора. Іншим прикладом ряду Діріхле є ряд

$$\zeta(-s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^s = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(s \ln n). \quad (3.3)$$

Функція $\zeta(s)$ називається функцією Рімана і відіграє важливу роль у теорії чисел.

Для знаходження радіуса R збіжності ряду (3.2) використовують формулу Коші-Адамара

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (3.4)$$

Якщо $R > 0$, то на кожному компактні з круга $\{z : |z| < R\}$ ряд (3.2) збіжний абсолютно і рівномірно. Звідси випливає, що ряд (3.1') збіжний абсолютно і

рівномірно на кожному компактї з півплощини $\{s : \operatorname{Re} s < \sigma_\zeta\}$. З (3.4) випливає, що

$$\sigma_\zeta = - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |a_n| = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{|a_n|}.$$

Викладене про ряд (3.1') не можна автоматично переносити на ряд (3.1) з довільними показниками. Загалом, може трапитися так, що ряд (3.1) збігається у тій чи іншій півплощині, але не збігається у ній абсолютно. Відповідні приклади наведемо нижче, а зараз з метою доведення леми Абеля розглянемо перетворення Абеля.

Нехай A_n і B_n – довільні величини, а $C_n = A_p + \dots + A_n, n \geq p$. Тоді $A_p = C_p, A_n = C_n - C_{n-1}, n > p$ і

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^q A_n B_n &= C_p B_p + B_{p+1} (C_{p+1} - C_p) + B_{p+2} (C_{p+2} - C_{p+1}) + \dots + \\ &+ B_q (C_q - C_{q-1}) = C_p (B_p - B_{p+1}) + C_{p+1} (B_{p+1} - B_{p+2}) + \dots + C_{q-1} (B_{q-1} - B_q) + \\ &+ C_q B_q = \sum_{n=p}^{q-1} (B_n - B_{n+1}) C_n + B_q C_q. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Формула (1.5) називається перетворенням Абеля і з її допомогою доведемо наступну теорему, яка є аналогом добре відомої леми Абеля для степеневих рядів.

Теорема 3.1. *Якщо ряд Діріхле (3.1) збіжний у точці $s_0 \in C$, то він збіжний у півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} s_0\}$ і рівномірно збіжний у кожному замкненому куті*

$$\{s : |\arg(s - s_0) - \pi| \leq \gamma\}, \quad 0 < \gamma < \frac{\pi}{2} \quad (3.6)$$

Доведення. Застосовуючи формулу (3.5), одержуємо

$$\sum_{n=p}^q a_n e^{s \lambda_n} = \sum_{n=p}^q a_n e^{s_0 \lambda_n} e^{(s-s_0) \lambda_n} =$$

$$= \sum_{n=p}^q \left(e^{(s-s_0)\lambda_n} - e^{(s-s_0)\lambda_{n+1}} \right) \sum_{j=p}^n a_j e^{s_0 \lambda_j} + e^{(s-s_0)\lambda_q} \sum_{j=p}^q a_j e^{s_0 \lambda_j}. \quad (3.7)$$

Нехай $s_0 = \sigma_0 + it_0$. Тоді, якщо $\sigma < \sigma_0$, то

$$\begin{aligned} \left| e^{(s-s_0)\lambda_n} - e^{(s-s_0)\lambda_{n+1}} \right| &= \left| (s-s_0) \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{(s-s_0)x} dx \right| \leq \\ &\leq |s-s_0| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{(\sigma-\sigma_0)x} dx = \frac{|s-s_0|}{\sigma_0-\sigma} \left[e^{(\sigma-\sigma_0)\lambda_n} - e^{(\sigma-\sigma_0)\lambda_{n+1}} \right]. \end{aligned}$$

Оскільки ряд (3.1) збігається у точці s_0 , то для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\left| \sum_{j=p}^n a_j e^{s_0 \lambda_j} \right| < \varepsilon$$

при $n \geq p \geq n_0$. Тому з (3.7) маємо

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=p}^q a_n e^{s \lambda_n} \right| &\leq \frac{\varepsilon |s_0 - s|}{\sigma_0 - \sigma} \sum_{n=p}^{q-1} \left[e^{(\sigma-\sigma_0)\lambda_n} - e^{(\sigma-\sigma_0)\lambda_{n+1}} \right] + \varepsilon e^{(\sigma-\sigma_0)\lambda_q} \leq \\ &\leq \varepsilon \frac{|s_0 - s|}{\sigma_0 - \sigma} \left[e^{(\sigma-\sigma_0)\lambda_p} - e^{(\sigma-\sigma_0)\lambda_q} \right] + \varepsilon e^{(\sigma-\sigma_0)\lambda_q} \leq \\ &\leq \varepsilon \frac{|s_0 - s|}{\sigma_0 - \sigma} e^{(\sigma-\sigma_0)\lambda_p} + \varepsilon e^{(\sigma-\sigma_0)\lambda_q} \leq \varepsilon \left(\frac{|s_0 - s|}{\sigma_0 - \sigma} + 1 \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

З оцінки (3.8) негайно випливає, що ряд (3.1) збіжний у кожній точці півплощини $\{s : \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} s_0\}$. Якщо s належить до кута (3.6), то $|s_0 - s| / (\sigma_0 - \sigma) \leq 1 / \cos \gamma < +\infty$, і із (1.8) випливає, що

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n e^{s \lambda_n} \right| \leq \varepsilon \left\{ \frac{1}{\cos \gamma} + 1 \right\},$$

тобто в куті (3.6) ряд (3.1) збіжний рівномірно. Теорема 3.1 доведена.

З теореми 3.1 випливає таке: якщо ряд (1.1) збіжний у точці s_0 , то у півплощині $\{s: \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} s_0\}$ його сума $F(s)$ є аналітичною функцією.

З цієї теореми випливає, що ряд (3.1) або збіжний скрізь у C , або розбіжний скрізь у C , або він збіжний у деякій півплощині $\{s: \operatorname{Re} s < \sigma_\zeta\}$ і розбіжний у півплощині $\{s: \operatorname{Re} s > \sigma_\zeta\}$. В останньому випадку число σ_ζ називається абсцисою збіжності ряду (3.1), півплощина $\{s: \operatorname{Re} s < \sigma_\zeta\}$ – півплощиною збіжності, пряма $\{s: \operatorname{Re} s = \sigma_\zeta\}$ – прямою збіжності. Якщо ряд Діріхле збіжний у C , то вважаємо $\sigma_\zeta = +\infty$, якщо ж він ніде не збіжний, то вважаємо $\sigma_\zeta = -\infty$.

Припустимо, що ряд (3.1) у точці $s_0 \in C$ збіжний абсолютно, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{\sigma_0 \lambda_n} < +\infty, \quad \sigma_0 = \operatorname{Re} s_0.$$

Тоді, якщо $\operatorname{Re} s \leq \sigma_a$, то $|a_n| e^{s \lambda_n} \leq |a_n| e^{\sigma_0 \lambda_n}$ і, отже, ряд (3.1) збіжний абсолютно і рівномірно у півплощині $\{s: \operatorname{Re} s < \sigma_0\}$. Звідси випливає, що ряд (3.1) збіжний абсолютно скрізь у C , або в жодній точці з C він не є абсолютно збіжним, або існує число $\sigma_a \in R$ таке, що він збіжний абсолютно у півплощині $\{s: \operatorname{Re} s < \sigma_a\}$, і не є абсолютно збіжним у кожній точці півплощини $\{s: \operatorname{Re} s > \sigma_a\}$. Це число σ_a називається абсцисою абсолютної збіжності ряду (3.1). Якщо ряд Діріхле абсолютно збіжний у C , то вважаємо $\sigma_a = +\infty$, а якщо він ніде не є абсолютно збіжним, то вважаємо $\sigma_a = -\infty$.

Як зазначалось вище, не завжди $\sigma_a = \sigma_\zeta$. Наприклад, для ряду

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(s \ln n) \tag{3.9}$$

маємо $\sigma_a = 1$ і $\sigma_\zeta = 0$. Є ряди Діріхле, для яких $\sigma_a = -\infty$ і $\sigma_\zeta = +\infty$. Таким є ряд

$$1 + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \exp\left(s \sqrt{\ln \ln n}\right). \tag{3.10}$$

Справді, нехай $s = \sigma > 0$. Тоді $\frac{1}{n} \exp(\sigma \sqrt{\ln \ln n}) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Щоб застосувати ознаку Лейбніца, досить показати, що для усіх достатньо великих n правильна нерівність

$$\frac{1}{n} \exp(\sigma \sqrt{\ln \ln n}) \rightarrow \frac{1}{n-1} \exp(\sigma \sqrt{\ln \ln (n-1)}),$$

а це так, бо

$$\sigma (\sqrt{\ln \ln n} - \sqrt{\ln \ln (n-1)}) = \frac{(1 + o(1))\sigma}{2n \ln n \sqrt{\ln \ln n}}, n \rightarrow \infty,$$

$$\ln n - \ln (n-1) = (1 + o(1)) \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty.$$

Отже, ряд (1.10) збіжний у кожній точці $s = \sigma > 0$ і за теоремою 1.1 він збіжний скрізь у C . Проте

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \exp(\sigma \sqrt{\ln \ln n}) = +\infty$$

для кожного $\sigma \in R$, тобто $\sigma_a = +\infty$.

Зауважимо, що завжди $\sigma_{\hat{a}} \leq \sigma_{\zeta}$. Якщо $\sigma_a > -\infty$, то для довільного $\varepsilon > 0$ у кожній півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < \sigma_a - \varepsilon\}$ ряд (1.1) збіжний рівномірно. Верхню межу чисел α таких, що ряд (1.1) у півплощині $\{s : \operatorname{Re} s \leq \alpha\}$ збіжний рівномірно, назовемо абсцисою рівномірної збіжності σ_{δ} . Тоді

$$\sigma_{\hat{a}} \leq \sigma_{\delta} \leq \sigma_{\zeta}.$$

Перейдемо до знаходження абсцис збіжності. Позначимо

$$\alpha_0 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln |a_n|}{\lambda_n}, \quad (3.11)$$

а для $\gamma > 0$ і $\delta \in R$ нехай

$$h(\gamma, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\gamma - 1) \ln |a_n| + \delta \lambda_n}{\ln n}. \quad (3.12)$$

Теорема 3.2. Для кожного ряду Діріхле (1.1) $\sigma_{\dot{\alpha}} \leq \sigma_{\zeta}$, $\sigma_{\dot{\alpha}} \leq \alpha_0$. Якщо $h(\gamma, \delta) > 1$, то $\sigma_{\dot{\alpha}} \geq \gamma\sigma_{\zeta} - \delta$ і $\sigma_{\dot{\alpha}} \geq \gamma\alpha_0 - \delta$.

Доведення. Нерівність $\sigma_{\dot{\alpha}} \leq \sigma_{\zeta}$ очевидна. Припустимо $\alpha_0 < +\infty$. Тоді для кожного $\alpha > \alpha_0$ існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$|a_{n_k}| \geq \exp(-\alpha\lambda_{n_k}),$$

тобто

$$|a_{n_k}| \exp(\sigma\lambda_{n_k}) \geq \exp\{(-\alpha + \sigma)\lambda_{n_k}\} \geq 1$$

для усіх $\sigma \geq \alpha$. Звідси, завдяки довільності α , випливає, що ряд (1.1) збіжний у кожній точці $s = \sigma > \alpha_0$, і отже, $\sigma_{\dot{\alpha}} \leq \alpha_0$. Для $\alpha_0 = +\infty$ ця нерівність очевидна.

Якщо $\alpha_0 > -\infty$, то для кожного $\sigma < \gamma\alpha_0 - \delta$ маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n} > \frac{\sigma + \delta}{\gamma},$$

тобто

$$\ln |a_n| + \frac{\sigma + \delta}{\gamma} \lambda_n = \lambda_n \left(-\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n} + \frac{\sigma + \delta}{\gamma} \right) < 0$$

для усіх досить великих n . Тому для таких n виконується

$$\begin{aligned} |a_n| \exp(\sigma\lambda_n) &= \exp \left\{ -((\gamma - 1) \ln |a_n| + \delta\lambda_n) + \gamma \left(\ln |a_n| + \frac{\sigma + \delta}{\gamma} \lambda_n \right) \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{(\gamma - 1) \ln |a_n| + \delta\lambda_n}{\ln n} \ln n \right\} < \exp \{ -(h(\gamma, \delta) - \varepsilon) \ln n \} \end{aligned} \quad (3.13)$$

для кожного $\varepsilon \in (0; h(\gamma, \delta) - 1)$ і всіх $n \geq n_0(\varepsilon)$. Оскільки $h(\gamma, \delta) - \varepsilon > 1$, то звідси випливає, що ряд (1.1) абсолютно збіжний у точці $s = \sigma$, тобто $\sigma_{\dot{\alpha}} \geq \gamma\alpha_0 - \delta$. Для $\alpha_0 = -\infty$ ця нерівність очевидна.

Нехай, нарешті, $\sigma_{\zeta} > -\infty$ і $\eta \in (-\infty; \sigma_{\zeta})$. Оскільки ряд (1.1) збіжний у точці η , то існує $M > 0$ таке, що для усіх $n \geq 0$

$$|a_n| \exp(\eta\lambda_n) \leq M,$$

тобто

$$\begin{aligned} |a_n| \exp\{(\gamma\eta - \delta)\lambda_n\} &= (|a_n| \exp\{\eta\lambda_n\})^\gamma |a_n|^{1-\gamma} \exp\{-\delta\lambda_n\} \leq \\ &\leq M^\gamma \exp\left\{-\frac{(\gamma-1)\ln|a_n| + \delta\lambda_n}{\ln n} \ln n\right\} < \exp\{-(h(\gamma, \delta) - \varepsilon)\ln n\} \end{aligned}$$

для кожного $\varepsilon \in (0; h(\gamma, \delta) - 1)$ і всіх $n \geq n_0(\varepsilon)$. Звідси, як із (1.13), випливає, що $\sigma_a \geq \gamma\eta - \delta$, а завдяки довільності η , $\sigma_{\dot{a}} \geq \gamma\sigma_{\zeta} - \delta$. Для $\sigma_{\zeta} = -\infty$ ця нерівність очевидна. Теорема 1.2 повністю доведена.

Позначимо

$$\tau_0 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln n. \quad (3.14)$$

Наслідок 3.1. Для кожного ряду Діріхле (1.1) $\sigma_{\dot{a}} \leq \sigma_{\zeta} \leq \sigma_{\dot{a}} + \tau_0$ і $\sigma_{\dot{a}} \leq \alpha_0 \leq \sigma_{\dot{a}} + \tau_0$.

Справді, нехай у теоремі 1.3 $\gamma = 1$ і $\delta = \tau_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тоді

$$h(\gamma, \delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\tau_0 + \varepsilon)\lambda_n}{\ln n} = \frac{\tau_0 + \varepsilon}{\tau_0} > 1$$

і, отже, правильні оцінки $\sigma_{\dot{a}} \geq \alpha_0 - \tau_0 - \varepsilon$ і $\sigma_{\dot{a}} \geq \sigma_{\zeta} - \tau_0 - \varepsilon$, тобто завдяки довільності ε маємо $\sigma_{\dot{a}} \geq \alpha_0 - \tau_0$ і $\sigma_{\dot{a}} \geq \sigma_{\zeta} - \tau_0$.

Приклади рядів (1.9) і (1.10) свідчать, що зазначені оцінки точні. Для першого з цих рядів $\tau_0 = 1$, $\alpha_0 = \sigma_{\zeta} = 0$, $\sigma_{\dot{a}} = -1$, а для другого $\tau_0 = \alpha_0 = \sigma_{\zeta} = +\infty$, $\sigma_{\dot{a}} = -\infty$.

Наслідок 3.2. Якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln|a_n|}{\ln n} = h_0 > 0,$$

то $\sigma_{\dot{a}} \geq \alpha_0(h_0 + 1)/h_0$ і $\sigma_{\dot{a}} \geq \sigma_{\zeta}(h_0 + 1)/h_0$.

Справді, нехай у теоремі 1.3 $\delta = 0$, $\gamma = 1 + \varepsilon + 1/h_0$. Тоді

$$h(\gamma, \delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{h_0} + \varepsilon \right) \frac{\ln |a_n|}{\ln n} \geq 1 + \varepsilon h_0 > 1$$

і, отже, $\sigma_{\dot{a}} \geq (1 + \varepsilon + 1/h_0) \sigma_{\zeta}$ і $\sigma_{\dot{a}} \geq (1 + \varepsilon + 1/h_0) \alpha_0$, звідки завдяки довільності ε отримуємо потрібні нерівності.

Приклад ряду

$$1 + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n n \exp(s \ln n)$$

свідчить про точність згаданих у наслідку 2 оцінок, де $h_0 = 1, \alpha_0 = \sigma_{\zeta} = -1, \sigma_{\dot{a}} = -2$.

Наслідок 3.3. Якщо

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(1/|a_n|)} = h_0 \in [0; 1),$$

то $\sigma_{\dot{a}} \geq \sigma_{\zeta}(1 - h_0)$ і $\sigma_{\dot{a}} \geq \alpha_0(1 - h_0)$.

Справді, якщо в теоремі 1.3 візьмемо $\delta = 0$ і $\gamma = 1 - h_0 - \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1 - h_0$, то

$$h(\gamma, \delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(h_0 + \varepsilon) \ln(1/|a_n|)}{\ln n} = \frac{h_0 + \varepsilon}{h_0} > 1$$

і, отже, $\sigma_{\dot{a}} \geq \sigma_{\zeta}(1 - h_0 - \varepsilon)$ і $\sigma_{\dot{a}} \geq \alpha_0(1 - h_0 - \varepsilon)$, звідки завдяки довільності ε отримуємо потрібні нерівності.

Приклад ряду

$$1 + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \exp(s \ln n)$$

свідчить про точність зазначених у наслідку 2 оцінок. Тут $h_0 = 1/2, \alpha_0 = \sigma_{\zeta} = 2, \sigma_a = 1$.

Використовуючи наслідки 3.1 – 3.3, доведемо таку теорему.

Теорема 3.3. Нехай або $\tau_0 = 0$, або $\ln n = o(\ln |a_n|), n \rightarrow \infty$. Тоді

$$\sigma_{\dot{a}} = \sigma_{\zeta} = \alpha_0.$$

Доведення. Якщо $\tau_0 = 0$, то висновок теореми випливає з наслідку 3.1.

Якщо ж $\ln n = o(\ln |a_n|)$, $n \rightarrow \infty$, то або 1) $\ln |a_n| / \ln n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), або 2) $\ln |1/a_n| / \ln n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), або $\{a_n\} = \{a'_n\} \cup \{a''_n\}$, де $\{a'_n\}$ задовольняє умову 1), а $\{a''_n\}$ задовольняє умову 2). У перших двох випадках правильність теореми випливає з наслідків 2 і 3. У третьому випадку запишемо ряд (1.1) у вигляді суми

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n e^{s\lambda'_n} + \sum_{n=1}^{\infty} a''_n e^{s\lambda''_n}, \quad (3.15)$$

де показники λ'_n і λ''_n відповідають коефіцієнтам a'_n і a''_n . За наслідками 2 і 3

$$\sigma'_\zeta = \sigma'_a = \alpha'_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda'_n} \ln \frac{1}{a'_n}, \quad \sigma''_\zeta = \sigma''_a = \alpha''_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda''_n} \ln \frac{1}{a''_n},$$

де σ'_ζ, σ'_a і $\sigma''_\zeta, \sigma''_a$ – абсциси збіжності та абсолютної збіжності відповідних рядів з (1.15). Зауважимо також, що

$$\sigma_a = \min \{\sigma'_a, \sigma''_a\}, \text{ а } \sigma_\zeta = \min \{\sigma'_\zeta, \sigma''_\zeta\}.$$

Звідси випливає, що

$$\alpha_0 \leq \min \{\alpha'_a, \alpha''_a\} = \min \{\sigma'_a, \sigma''_a\} = \sigma_a \leq \alpha_0$$

і

$$\sigma_\zeta \leq \min \{\sigma'_a, \sigma''_a\} = \sigma_a \leq \sigma_\zeta.$$

Теорема 1.3 повністю доведена.

Аналоги нерівності Коші

Якщо функція f задана степеневим рядом (3.2) і аналітична в крузі $\{z: |z| < R\}$, то, як відомо із загального курсу комплексного аналізу, $|a_n| r^n \leq M_f(r)$ для усіх $n \geq 0$ і $0 \leq r < R$, $M_f(r) = \max \{|f(z)|: |z| = r\}$. Узагальнимо цю нерівність на ряди Діріхле.

Нехай ряд Діріхле (3.1) має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a \in (-\infty; +\infty]$.

Для $\sigma < \sigma_a$ позначимо

$$M(\sigma) = M(\sigma, F) = \sup \{|F(\sigma + it)|: t \in R\}.$$

Теорема 3.4. Для усіх $n \in Z_+$ і $\sigma < \sigma_a$ правильна нерівність

$$|a_n| \exp(\sigma \lambda_n) \leq M(\sigma, F).$$

Доведення. Зазначена нерівність легко випливає з такої правильної для усіх $n \in Z_+$ і $\sigma < \sigma_a$ рівності:

$$a_n e^{\sigma \lambda_n} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T F(\sigma + it) e^{-it \lambda_n} dt. \quad (3.16)$$

Доведемо цю рівність. Маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F(\sigma + it) e^{-(\sigma + it) \lambda_n} dt &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{(\sigma + it) \lambda_m} e^{-(\sigma + it) \lambda_n} dt = \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} a_m e^{(\sigma + it)(\lambda_m - \lambda_n)} dt + a_n + \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m e^{(\sigma + it)(\lambda_m - \lambda_n)} dt \right\}. \end{aligned}$$

Останній ряд є рівномірно збіжний щодо $t \in R$, його можна почленно інтегрувати і тому, використовуючи співвідношення

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{x(\sigma+it)} dt = \frac{1}{ixT} (e^{ixT} - e^{-ixT}) \rightarrow 0, \quad (T \rightarrow +\infty), \quad x \neq 0,$$

одержуємо

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F(\sigma + it) e^{-i(\sigma+it)\lambda_n} dt = a_n,$$

тобто приходимо до рівності (3.16).

З метою модифікації наведеної у теорему 3.4 нерівності Коші позначимо

$$B(\sigma) = B(\sigma, F) = \sup \{ \operatorname{Re} F(\sigma + it) : t \in R \}, \quad \sigma < \sigma_a.$$

Теорема 3.5. Для усіх $n \in N$ і $\sigma < \sigma_a$ правильна нерівність

$$|a_n| \exp(\sigma \lambda_n) \leq 2B(\sigma, F) - 2 \operatorname{Re} a_0.$$

Доведення. Розглянемо ряд Діріхле

$$F_1(s) = B(\sigma_0) - a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{s\lambda_n},$$

де σ_0 – довільне число, $\sigma_0 < \sigma_a$. Тоді для кожного $\sigma < \sigma_a$

$$\begin{aligned} b_n e^{\sigma \lambda_n} &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F_1(\sigma + it) e^{-it\lambda_n} dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P(\sigma + it) e^{-it\lambda_n} dt + i \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Q(\sigma + it) e^{-it\lambda_n} dt, \end{aligned}$$

де $P = \operatorname{Re} F_1$ і $Q = \operatorname{Im} F_1$. З іншого боку, для $n \geq 1$ і $\sigma < \sigma_a$

$$\begin{aligned} &\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P(\sigma + it) e^{-it\lambda_n} dt + i \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Q(\sigma + it) e^{-it\lambda_n} dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sum_{k=0}^T b_k e^{\sigma \lambda_k} e^{it(\lambda_n + \lambda_k)} dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{\sigma \lambda_k} \frac{1}{iT(\lambda_n + \lambda_k)} (e^{iT(\lambda_n + \lambda_k)} - e^{-iT(\lambda_n + \lambda_k)}) = 0, \end{aligned}$$

звідки

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P(\sigma + it) e^{-it\lambda_n} dt - i \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Q(\sigma + it) e^{-it\lambda_n} dt = 0.$$

Тому для усіх $\sigma < \sigma_a$

$$b_n e^{\sigma \lambda_n} = 2 \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P(\sigma + it) e^{-it\lambda_n} dt.$$

Оскільки $\operatorname{Re} F(\sigma_0 + it) \leq B(\sigma_0, F)$, то $P(\sigma_0 + it) \geq 0$. Тому

$$\begin{aligned} b_n e^{\sigma_0 \lambda_n} &\leq 2 \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T P(\sigma_0 + it) dt = \\ &= 2 \operatorname{Re} b_0 = 2 \operatorname{Re} (B(\sigma_0, F) - a_0) = 2B(\sigma_0, F) - 2 \operatorname{Re} a_0, \end{aligned}$$

отримали потрібну нерівність.

Повернемося до ряду (3.2). Позначимо

$$B_f(r) = \max \left\{ \operatorname{Re} f(re^{i\theta}) : \theta \in [0; 2\pi] \right\}, \quad 0 \leq r < R.$$

Прийнявши, що $z = e^s$ (отже, $r = e^\sigma$), з теореми 3.5 легко одержуємо нерівність

$$|a_n| r^n \leq 2(B_f(r) - \operatorname{Re} a_0) \quad (n \geq 1, 0 \leq r < R).$$

Теорема про три прямі

Спочатку доведемо одну теорему типу Фрагмена-Ліндельофа

Теорема 3.6. *Якщо функція F аналітична й обмежена в замкненій смузі*

$\{s : \sigma_1 \leq \operatorname{Re} s \leq \sigma_2\}$, *а на прямих $\{s : \operatorname{Re} s = \sigma_j\}$, $j = 1, 2$ виконуються нерівності*

$|F(\sigma_j + it)| \leq G \in (0; +\infty)$, *то $F(s) \leq G$ для усіх s , $\sigma_1 \leq \operatorname{Re} s \leq \sigma_2$.*

Доведення. Розглянемо аналітичну в цій смузі функцію

$$g(s) = F(s) e^{\varepsilon s^2}, \quad \varepsilon > 0. \text{ Тоді}$$

$$|g(s)| = \left| F(s) \exp \left\{ \varepsilon (\sigma^2 - t^2 + 2it\sigma) \right\} \right| = |F(s)| \exp \left\{ \varepsilon (\sigma^2 - t^2) \right\}, \quad (3.17)$$

звідки випливає, що на прямих $\{s : \operatorname{Re} s = \sigma_j\}$ ($j = 1, 2$) виконується

$$|g(s)| \leq G \exp \left\{ \varepsilon \left(\sigma_j^2 \right) \right\} \leq G \exp \left\{ \varepsilon \left(\sigma_0^2 \right) \right\}, \quad \sigma_0^2 = \max \left\{ \sigma_1^2; \sigma_2^2 \right\}.$$

З (3.17) та обмеженості функції F випливає, що

$$|g(s)| = O \left(\exp \left(-\varepsilon t^2 \right) \right)$$

при $s \rightarrow \infty$ у смугі $\{s: \sigma_1 \leq \operatorname{Re} s \leq \sigma_2\}$. Тому існує число $t_0 > 0$ таке, що при $|t| \geq t_0 > 0$ і $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ правильна нерівність

$$|g(\sigma + it)| \leq G \exp \left\{ \varepsilon \sigma_j^2 \right\}. \quad (3.18)$$

Ця нерівність правильна на краю прямокутника $\{s = \sigma + it: |t| \leq t_0, \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2\}$ і, отже, в цьому прямокутнику, а з тим в усій смугі $\{s: \sigma_1 \leq \operatorname{Re} s \leq \sigma_2\}$. З (3.17) і (3.18) для кожного s з цієї смуги отримуємо

$$|F(s)| = |g(s)| e^{\varepsilon(t^2 - \sigma^2)} \leq G e^{\varepsilon(\sigma_0^2 + t^2 - \sigma^2)},$$

звідки, завдяки довільності ε , одержуємо нерівність $|F(s)| \leq G$ для кожного $s, \sigma_1 \leq \operatorname{Re} s \leq \sigma_2$. Теорема 3.6 доведена.

Теорема 1.7 називається теоремою про три прямі і є узагальненням теореми Адамара про три круги для цілих функцій.

Теорема 3.7. Нехай $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$. Якщо F аналітична в смугі $\{s: \sigma_1 \leq \operatorname{Re} s \leq \sigma_3\}$, обмежена в ній і не дорівнює нулю, то

$$M(\sigma_2)^{\sigma_3 - \sigma_1} \leq M(\sigma_1)^{\sigma_3 - \sigma_2} M(\sigma_3)^{\sigma_2 - \sigma_1}, \quad M(\sigma) = M(\sigma, F). \quad (3.19)$$

Доведення. Нехай $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді функція $\varphi(s) = e^{\alpha s} F(s)$ аналітична й обмежена в смугі $\{s: \sigma_1 \leq \operatorname{Re} s \leq \sigma_3\}$. На краю смуги виконуються нерівності

$$|\varphi(s)| \leq M(\sigma_j) e^{\alpha \sigma_j}, \quad j = 1, 3.$$

Тому за теоремою 3.6 для $\sigma_1 \leq \operatorname{Re} s \leq \sigma_3$

$$|\varphi(s)| \leq \max \left\{ e^{\alpha \sigma_1} M(\sigma_1), e^{\alpha \sigma_3} M(\sigma_3) \right\},$$

тобто

$$e^{\alpha\sigma_2} M(\sigma_2) \leq \max \left\{ e^{\alpha\sigma_1} M(\sigma_1), e^{\alpha\sigma_3} M(\sigma_3) \right\}.$$

Виберемо тепер α так, щоб

$$e^{\alpha\sigma_1} M(\sigma_1) = e^{\alpha\sigma_3} M(\sigma_3),$$

тобто

$$\alpha = \frac{1}{\sigma_3 - \sigma_1} \ln \frac{M(\sigma_1)}{M(\sigma_3)}.$$

Тоді з останньої нерівності отримуємо

$$\left(\frac{M(\sigma_1)}{M(\sigma_3)} \right)^{\sigma_2/(\sigma_3 - \sigma_1)} M(\sigma_2) \leq \left(\frac{M(\sigma_1)}{M(\sigma_3)} \right)^{\sigma_2/(\sigma_3 - \sigma_1)} M(\sigma_1),$$

Звідки легко одержуємо нерівність (3.19).

Наслідок 3.4. Нехай ряд Діріхле (3.1) має абсцису збіжності $\sigma_a \in [-\infty; +\infty)$.

Тоді функція $\ln M(\sigma, F)$ є опуклою на $(-\infty; \sigma_a)$, отже, неперервною і має неперервну неспадну похідну за винятком, можливо, зліченної кількості точок, у яких існують однобічні похідні, причому лівобічна похідна не перевищує правобічну.

Справді, оскільки ряд (3.1) збіжний абсолютно в $\{s: \operatorname{Re} s \leq \sigma_a\}$, то його сума F є аналітичною й обмеженою у кожній вертикальній смужі з цієї півплощини, і за теоремою 3.7 для кожної трійки $-\infty < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_a$ правильна нерівність (3.19), з якої випливає нерівність

$$(\sigma_3 - \sigma_1) \ln M(\sigma_2) \leq (\sigma_3 - \sigma_2) \ln M(\sigma_1) + (\sigma_2 - \sigma_1) \ln M(\sigma_3),$$

тобто $\ln M(\sigma, F)$ – опукла функція. Решта висновків наслідку випливають з опуклості.

З теореми 3.7, використовуючи заміну $z = e^s$ (отже, $r = e^\sigma$), легко отримуємо правильність такого твердження.

Наслідок 3.5 (теорема Адамара про три круги). Нехай степеневий ряд (3.2) має радіус збіжності $R \in (0; +\infty]$. Тоді для $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq r_3 < R$

$$M_f(r_2)^{\ln r_3 - \ln r_1} \leq M_f(r_1)^{\ln r_3 - \ln r_2} M_f(r_3)^{\ln r_2 - \ln r_1}.$$

Звідси випливає, що функція $\ln M_f(r)$ є опуклою щодо логарифма (логарифмічно опуклою).

Максимальний член і центральний індекс

Нехай ряд Діріхле (3.1) має абсцису збіжності $\sigma_a \in (-\infty; +\infty]$. Тоді при кожному $\sigma < \sigma_a$ маємо $|a_n| \exp(\sigma \lambda_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), і тому існує максимальний член

$$\mu(\sigma) = \mu(\sigma, F) = \max \{|a_n| \exp(\sigma \lambda_n) : n \geq 0\}$$

ряду (3.1). Величина

$$\nu(\sigma) = \nu(\sigma, F) = \max \{n : |a_n| \exp(\sigma \lambda_n) = \mu(\sigma)\}$$

називається центральним індексом ряду (3.1), а $\lambda_{\nu(\sigma)}$ – його центральним показником. Очевидно, що функція $\nu(\sigma)$ і $\lambda_{\nu(\sigma)}$ є кусково сталі і неперервні праворуч на $(-\infty; \sigma_a)$, причому $\nu(\sigma)$ набирає цілочисельних значень.

Зауваження. З означення видно, що максимальний член і центральний індекс можна означити для будь-якої послідовності $(a_n \exp(\sigma \lambda_n))$, яка прямує до 0 при $n \rightarrow \infty$ для кожного $s, \operatorname{Re} s < A$, де A – деяке число з $(-\infty; +\infty]$. Ця послідовність необов'язково є послідовністю членів абсолютно збіжного ряду Діріхле.

Нехай $h > 0$ – довільне число. Тоді

$$\begin{aligned} \mu(\sigma + h) &= |a_{\nu(\sigma+h)}| \exp\{(\sigma + h) \lambda_{\nu(\sigma+h)}\} \geq |a_{\nu(\sigma)}| \exp\{(\sigma + h) \lambda_{\nu(\sigma)}\} = \\ &= |a_{\nu(\sigma)}| \exp\{\sigma \lambda_{\nu(\sigma)}\} \exp\{h \lambda_{\nu(\sigma)}\} = \mu(\sigma) \exp\{h \lambda_{\nu(\sigma)}\}, \end{aligned}$$

тобто

$$\ln \mu(\sigma + h) - \ln \mu(\sigma) \geq h \lambda_{\nu(\sigma)}. \quad (3.20)$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} \mu(\sigma) &= \left| a_{\nu(\sigma)} \right| \exp \left\{ \sigma \lambda_{\nu(\sigma)} \right\} \geq \left| a_{\nu(\sigma+h)} \right| \exp \left\{ \sigma \lambda_{\nu(\sigma+h)} \right\} = \\ &= \left| a_{\nu(\sigma+h)} \right| \exp \left\{ (\sigma + h) \lambda_{\nu(\sigma+h)} \right\} \exp \left\{ -h \lambda_{\nu(\sigma+h)} \right\} = \mu(\sigma + h) \exp \left\{ -h \lambda_{\nu(\sigma+h)} \right\}, \end{aligned}$$

тобто

$$\ln \mu(\sigma + h) - \ln \mu(\sigma) \leq h \lambda_{\nu(\sigma+h)}. \quad (3.21)$$

З (3.20) і (3.21) отримуємо

$$\lambda_{\nu(\sigma)} \leq \frac{1}{h} (\ln \mu(\sigma + h) - \ln \mu(\sigma)) \leq \lambda_{\nu(\sigma+h)}.$$

Звідси випливає, що функції $\nu(\sigma)$, $\lambda_{\nu(\sigma)}$ і $\ln \mu(\sigma)$ є неспадними. Наші міркування правильні, якщо $h < 0$. Тому, якщо (σ_1, σ_2) – проміжок сталості функції $\nu(\sigma)$, то при $h \rightarrow 0$ одержуємо

$$\frac{d \ln \mu(\sigma)}{d \sigma} = \lambda_{\nu(\sigma)}.$$

Оскільки на кожному скінченному проміжку функція $\lambda_{\nu(\sigma)}$ має скінченну кількість точок розриву, то ми приходимо до рівності

$$\ln \mu(\sigma) - \ln \mu(\sigma_0) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda_{\nu(t)} dt \quad (3.22)$$

для всіх $-\infty < \sigma_0 < \sigma < \sigma_a$. З (3.22) випливає опуклість функції $\ln \mu(\sigma)$.

Припустимо, що степеневий ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z = r e^{i\varphi}$ має радіус

збіжності $R \in (0; +\infty)$. Тоді для кожного $r \in [0; R)$ існує максимальний член

$\mu_f(r) = \max \left\{ |a_n| r^n : n \geq 0 \right\}$ цього ряду. Величина $\nu_f(r) = \max \left\{ n : |a_n| r^n = \mu_f(r) \right\}$

називається центральним індексом ряду (3.2). Якщо зробимо заміну $z = e^s$

(отже, $r = e^\sigma$), то, враховуючи правильну в цьому випадку рівність $\lambda_{\nu(\sigma)} = \nu(\sigma)$, з (3.22) легко отримаємо рівність

$$\ln \mu_f(r) - \ln \mu_f(r_0) = \int_{r_0}^r \frac{\nu(t)}{t} dt, \quad 0 \leq r_0 \leq r < R.$$

Позначимо

$$\kappa_n = \kappa_n(F) = \frac{\ln |a_n| - \ln |a_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}.$$

Теорема 3.8. *Якщо послідовність (κ_n) неспадна, то $\mu(\kappa_n) = |a_n| \exp(\kappa_n \lambda_n)$ для усіх n . Якщо, крім того, $\kappa_{n-1} < \kappa_n$ для деякого $n \geq 1$, то $\nu(\sigma) = n$ і $\mu(\sigma) = |a_n| \exp(\sigma \lambda_n)$ для усіх $\sigma \in [\kappa_{n-1}, \kappa_n)$ і цього n .*

Доведення. Нехай послідовність (κ_n) неспадна. Тоді, якщо $j < n$, то

$$\begin{aligned} |a_j| \exp(\kappa_n \lambda_j) &= |a_n| \exp \left\{ \sum_{m=j}^{n-1} ((\ln |a_m| - \ln |a_{m+1}|) + \kappa_n \lambda_j) \right\} = \\ &= |a_n| \exp \left\{ \sum_{m=j}^{n-1} (\kappa_m (\lambda_{m+1} - \lambda_m) + \kappa_n \lambda_j) \right\} \leq |a_n| \exp(\kappa_n \lambda_n), \end{aligned}$$

а якщо $j > n$, то

$$\begin{aligned} |a_j| \exp(\kappa_n \lambda_j) &= |a_n| \exp \left\{ \sum_{m=n}^{j-1} ((\ln |a_{m+1}| - \ln |a_m|) + \kappa_n \lambda_j) \right\} = \\ &= |a_n| \exp \left\{ - \sum_{m=n}^{j-1} (\kappa_m (\lambda_{m+1} - \lambda_m) + \kappa_n \lambda_j) \right\} \leq |a_n| \exp(\kappa_n \lambda_n), \end{aligned}$$

тобто $\mu(\kappa_n) = |a_n| \exp(\kappa_n \lambda_n)$.

Якщо ж $\kappa_{n-1} < \kappa_n$ для деякого n і $\sigma \in [\kappa_{n-1}, \kappa_n)$, то аналогічно для $j < n$ отримуємо

$$\frac{|a_j| \exp(\sigma \lambda_j)}{|a_n| \exp(\sigma \lambda_n)} = \exp \{ \ln |a_j| - \ln |a_n| - \sigma (\lambda_n - \lambda_j) \} \leq$$

$$\leq \exp \left\{ \kappa_{n-1} (\lambda_n - \lambda_j) - \sigma (\lambda_n - \lambda_j) \right\} = \exp \left\{ -(\sigma - \kappa_{n-1}) (\lambda_n - \lambda_j) \right\} \leq 1,$$

а для $j > n$ виконується

$$\frac{|a_j| \exp(\sigma \lambda_j)}{|a_n| \exp(\sigma \lambda_n)} \leq \exp \left\{ -\kappa_n (\lambda_j - \lambda_n) + \sigma (\lambda_j - \lambda_n) \right\} \leq 1.$$

Отже, $\nu(\sigma) = n$ і $\mu(\sigma) = |a_n| \exp(\sigma \lambda_n)$ для усіх $\sigma \in [\kappa_{n-1}, \kappa_n)$.

Геометричну інтерпретацію максимального члена і центрального індексу ми подамо, використовуючи діаграму Ньютона. Побудуємо цю діаграму спочатку для простого випадку, коли ряд Діріхле зводиться до експоненціального полінома

$$P(s) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \exp(s \lambda_n), \quad a_n \neq 0.$$

На площині XOY відзначимо точки $P_n = (\lambda_n, -\ln |a_n|)$. З точки P_0 проведемо вертикально вниз промінь і будемо обертати його навколо точки P_0 (проти годинникової стрілки) доти, доки він не торкнеться точки з $\{P_n\}_{n \geq 1}$. На кінцевому розміщенні променя може лежати декілька таких точок. Найвіддаленішу від P_0 з них позначимо через P_{n_1} , а відрізок $[P_0; P_{n_1}]$ позначимо через l_1 . Тепер з точки P_{n_1} у напрямі l_1 проводимо знову промінь, обертаємо його навколо P_{n_1} до дотику з точкою з $\{P_n\}_{n > n_1}$ і найвіддаленішу від P_{n_1} точку з кінцевого розміщення цього променя позначимо через P_{n_2} , а через l_2 позначимо відрізок $[P_{n_1}; P_{n_2}]$. Такий процес скінченний і ми перейдемо до відрізка $l_k = [P_{n_k}; P_N]$. Нарешті, з точки P_N проведемо вертикально уверх промінь l_{k+1} . У результаті ми отримаємо опуклу ламану L , ланками якої є відрізки $l_j, 1 \leq j \leq k$, і промінь l_{k+1} . Вона називається діаграмою Ньютона і має таку властивість, що жодна з точок P_n не лежить під нею.

Перейдемо до побудови діаграми Ньютона для ряду Діріхле. Серед коефіцієнтів a_n можуть трапитися такі, які дорівнюють нулю, але вважаємо, що він не зводиться до експоненціального полінома. Фактично, як видно із зауваження, ми будуємо діаграму Ньютона для функціональної послідовності $(a_n \exp\{s\lambda_n\})$. Вважаємо, що $a_0 \neq 0$.

Нехай α_0 визначене рівністю (3.14) і $\alpha_0 \in (-\infty; +\infty]$. За теоремою 3.3 $\alpha_0 \geq \sigma_a$. Через φ_n позначимо кут між променями $y = \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n}x$ і $y = 0, x \geq 0$.

Тоді з (3.14) отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \arctg \alpha_0.$$

Як і вище, нехай $P_n = (\lambda_n, -\ln|a_n|)$ (у випадку, коли $a_n = 0$, вважаємо, що $-\ln|a_n| = +\infty$), а промінь l' з початком у P_0 обертається з вертикального вниз розміщення проти годинникової стрілки доти, доки не виникне одна з трьох ситуацій:

1) промінь l' торкнеться якої-небудь точки з $\{P_n\}_{n \geq 1}$, на ньому лежить скінченна кількість точок P_n , а всі решта лежать вище l' ;

2) на промені l' лежить нескінченна кількість точок з $\{P_n\}_{n \geq 1}$, а під ним немає таких точок;

3) на l' немає точок з $\{P_n\}_{n \geq 1}$, але при подальшому обертанні під l' опиниться нескінченна кількість таких точок.

У випадках 2) і 3) процес побудови діаграми Ньютона завершуємо і це кінцеве розміщення променя l' позначаємо через L . Зрозуміло, що кут нахилу L дорівнює $\arctg \alpha_0$.

У першому випадку найвіддаленішу від P_0 точку P_n з кінцевого розміщення l' позначимо через P_{n_1} , і нехай $l_1 = [P_0; P_{n_1}]$. З точки P_{n_1} як продовження l_1 проведемо промінь l'' і знову будемо обертати його навколо P_{n_1}

доти, доки не виникне одна з описаних вище ситуацій. У двох останніх процес завершуємо і через L позначаємо ламану, що складається з l_1 і кінцевого розміщення променя l'' . У першій ситуації найвіддаленішу від P_{n_1} точку $P_n, n > n_1$, з кінцевого розміщення l'' позначимо через P_{n_2} , і нехай $l_2 = [P_{n_1}; P_{n_2}]$.

Продовжуючи цей процес, ми побудуємо опуклу ламану L , яка або складатиметься з нескінченної кількості ребер l_n таких, що кут ψ_n між l_n і променем $y = 0 (x \geq 0)$ зростає до $\arctg \alpha_0$ із зростанням n , або складається з скінченної кількості ребер l_n і променя l^* , який утворює з променем $y = 0 (x \geq 0)$ кут $\arctg \alpha_0$.

Нехай $y = L(x)$ – рівняння цієї діаграми Ньютона L . Тоді ряд Діріхле

$$F_{\lambda}(s) = |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-L(\lambda_n) + s\lambda_n\} \quad (3.23)$$

називається мажорантою Ньютона ряду Діріхле. Ряд (3.11) може бути формальним. З побудови видно, що $\ln |a_n| \leq -L(\lambda_n), n \geq 0$ і $\ln |a_{n_j}| = -L(\lambda_{n_j}), j \geq 0$.

Припустимо спочатку, що діаграма Ньютона складається з скінченної кількості ребер і проведемо пряму l з кутовим коефіцієнтом $\sigma < \alpha_0$ так, щоб вона торкалась ламаної L , але її не перетинала. Ця пряма l може мати спільними з L або одну точку P_ν або відрізок $[P_k; P_\nu], k = k(\sigma), \nu = \nu(\sigma)$. Покажемо, що $\nu(\sigma)$ є центральним індексом ряду Діріхле і ряду (3.23). Справді, якщо $m < \nu(\sigma)$, то

$$\frac{\ln |a_m| - \ln |a_{\nu(\sigma)}|}{\lambda_{\nu(\sigma)} - \lambda_m} \leq \frac{L(\lambda_{\nu(\sigma)}) - L(\lambda_m)}{\lambda_{\nu(\sigma)} - \lambda_m} \leq \sigma,$$

звідки впливає нерівність

$$|a_m| \exp(\sigma \lambda_m) \leq |a_{\nu(\sigma)}| \exp(\sigma \lambda_{\nu(\sigma)}), \quad (3.24)$$

ж така нерівність виконується для мажоранти Ньютона. Якщо $m > \nu(\sigma)$, то

$$\frac{\ln |a_{\nu(\sigma)}| - \ln |a_m|}{\lambda_m - \lambda_{\nu(\sigma)}} \geq \frac{L(\lambda_m) - L(\lambda_{\nu(\sigma)})}{\lambda_m - \lambda_{\nu(\sigma)}} \geq \sigma,$$

звідки знову впливає (3.24) і відповідний аналог для мажоранти Ньютона. З цих нерівностей видно, що член $|a_{\nu(\sigma)}| \exp(\sigma \lambda_{\nu(\sigma)})$ є максимальним у ряді Діріхле, а член $\exp\{L(\lambda_{\nu(\sigma)}) + \sigma \lambda_{\nu(\sigma)}\}$ є максимальним у ряді (3.23). Але $\ln |a_{\nu(\sigma)}| = -L(\lambda_{\nu(\sigma)})$. Тому ряд (3.1) і (3.24) мають одні і ті ж максимальні члени та центральні індекси.

Оскільки рівняння прямої l з кутовим коефіцієнтом σ , що проходить через точку $P_{\nu(\sigma)}$, має вигляд

$$y = \sigma(x - \lambda_{\nu(\sigma)}) - \ln |a_{\nu(\sigma)}|,$$

то, підставляючи сюди $x = 0$, бачимо, що $|\ln \mu(\sigma)|$ є відстань від точки перетину l з віссю $x = 0$ до 0.

Розглянемо випадок, коли в діаграму Ньютона входить промінь $[P_N, \infty)$ з кутовим коефіцієнтом α_0 . Його рівняння має вигляд $y = \alpha_0 x - (\ln |a_N| + \alpha_0 \lambda_N)$. Тому $\ln |a_n| \leq -L(\lambda_n) = \ln |a_N| + (\lambda_N - \lambda_n) \alpha_0$ для усіх $n \geq N$. Звідси випливає, що для усіх $\sigma < \sigma_a (\leq \alpha_0)$ і всіх $n \geq N$

$$|a_n| \exp(\sigma \lambda_n) = |a_N| \exp\{(\sigma - \alpha_0) \lambda_n + \alpha_0 \lambda_N\} \leq |a_N| \exp(\alpha_0 \lambda_N),$$

тобто максимальний член є обмеженою функцією.

Про центральний індекс таке сказати не можна. Для ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(sn)$$

одержуємо $\sigma_a = \alpha_0 = 0$, $\mu(\sigma) = 1$ і $\nu(\sigma) = 0$ для усіх $\sigma < 0$, а для ряду

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{n} + sn\right)$$

маємо $\sigma_a = \alpha_0 = 0, \mu(\sigma) = 1$ для усіх $\sigma < 0$, але

$$\nu(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} + O(1) \rightarrow +\infty \quad (\sigma \rightarrow 0).$$

Справді, функція $g(x) = -\frac{1}{x} + \sigma x, x \geq 1$, досягає свого максимуму в точці

$$x(\sigma) = 1 / \sqrt{|\sigma|}, \text{ а } |\nu(\sigma) - x(\sigma)| \leq 1.$$

Оцінки максимуму модуля через максимальний член

З нерівності Коші (теорема 3.4) випливає, що $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$. Тому нам потрібні оцінки $M(\sigma, F)$ через $\mu(\sigma, F)$ зверху.

Теорема 3.9. Нехай $\sigma_a = A, \gamma > 0$ – довільне число, а $\delta = A(\gamma - 1)$, коли $A < +\infty$, і $\delta \geq 0$ – довільне число, коли $A = +\infty$. Якщо $h(\gamma, \delta) > 1$ (див. 3.15), то для усіх $\sigma \in (\sigma_0; A)$

$$M(\sigma) \leq K \mu\left(\frac{\sigma + \delta}{\gamma}\right)^{\gamma}, \quad K \equiv \text{const}. \quad (3.25)$$

Доведення. Можемо вважати, що всі $a_n \neq 0$, і для $n \geq 1$ позначимо

$$r_n = \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}.$$

Тоді за теоремою 3.3 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \alpha_0 \geq A$. Прийmemo $q(x) = \gamma x - \delta$, якщо

$x \leq A \leq +\infty$, і $q(x) = \gamma A - \delta = A$, якщо $x \geq A$ у випадку $A < +\infty$. Тоді

$$q^{-1}(\sigma) = \frac{\sigma + \delta}{\gamma} \leq \frac{A + \delta}{\gamma} = A$$

для усіх $\sigma \in (-\infty; A)$ і

$$\begin{aligned}
M(\sigma, F) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \exp(\sigma \lambda_n) = \\
&= \left(\sum_{r_n < q^{-1}(\sigma)} + \sum_{q^{-1}(\sigma) \leq r_n < A} + \sum_{r_n \geq A} \right) |a_n| \exp(\sigma \lambda_n) + |a_0|. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

(якщо $A = +\infty$, то третього доданка у (3.26) немає).

Якщо

$$r_n < q^{-1}(\sigma) = \frac{\sigma + \delta}{\gamma}, \text{ то}$$

$$\begin{aligned}
e^{\sigma \lambda_n} &= \left(|a_n| \exp \left\{ \lambda_n \frac{\sigma + \delta}{\gamma} \right\} \right)^{\gamma} \exp \{ -\delta \lambda_n - \gamma \ln |a_n| \} \leq \\
&\leq \mu \left(\frac{\sigma + \delta}{\gamma} \right)^{\gamma} \exp \{ \lambda_n (\gamma r_n - \delta) \} = \mu \left(\frac{\sigma + \delta}{\gamma} \right)^{\gamma} \exp \{ \lambda_n q(r_n) \}.
\end{aligned}$$

Якщо ж $q^{-1}(\sigma) \leq r_n < A$, то $\exp(\sigma \lambda_n) \leq \exp(\lambda_n q(r_n))$. Нарешті, якщо $A < +\infty$, то $\exp(\sigma \lambda_n) \leq \exp(A \lambda_n) = \exp(\lambda_n q(A)) = \exp(\lambda_n q(r_n))$. Тому з нерівності (3.26) отримуємо

$$\begin{aligned}
M(\sigma, F) &\leq \mu \left(\frac{\sigma + \delta}{\gamma} \right)^{\gamma} \sum_{r_n < q^{-1}(\sigma)} |a_n| \exp \{ \lambda_n q(r_n) \} + \\
&\sum_{q^{-1}(\sigma) \leq r_n < A} |a_n| \exp \{ \lambda_n q(r_n) \} + \sum_{r_n \geq A} |a_n| \exp \{ \lambda_n q(r_n) \} + |a_0|.
\end{aligned}$$

Завдяки умові $h(\gamma, \delta) > 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \exp \{ \lambda_n q(r_n) \} &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \exp \left\{ \lambda_n \left(\frac{\gamma}{\lambda_n} \ln \frac{1}{\lambda_n} \right) \right\} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \exp \{ -((\gamma - 1) \ln |a_n| + \delta \lambda_n) \} = \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(\gamma - 1) \ln |a_n| + \delta \lambda_n}{\ln n} \ln n \right\} < +\infty.
\end{aligned}$$

Теорема 3.8. доведена.

Наслідок 3.6. Якщо $\sigma_a = +\infty$ і $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = \tau_0 < +\infty$, то для кожного $\varepsilon > 0$ і

всіх $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$

$$M(\sigma) \leq \mu(\sigma + \tau_0 + \varepsilon). \quad (3.27)$$

Справді, візьмемо $\delta = \tau_0 + \varepsilon / 2$ і $\gamma = 1$. Тоді за теоремою 3.9,

$$M(\sigma) \leq K \mu\left(\sigma + \tau_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad K \equiv \text{const} > 0 \quad (3.28)$$

для всіх $\sigma \geq \sigma_1(\varepsilon)$. Але

$$\ln \mu(\sigma + \tau_0 + \varepsilon) - \ln \mu\left(\sigma + \tau_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \int_{\sigma + \tau_0 + \varepsilon/2}^{\sigma + \tau_0 + \varepsilon} \lambda_{\nu(t)} dt \geq \frac{\varepsilon}{2} \lambda_{\nu(\sigma)} \geq K$$

для всіх $\sigma \geq \sigma_2(\varepsilon)$, тому з (3.28) отримуємо (3.27).

Наслідок 3.7. Якщо $\sigma_a = +\infty$ і

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{-\ln |a_n|} \leq h_0 < 1, \quad (3.29)$$

то для кожного $\varepsilon \in (0, 1 - h_0)$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$

$$M(\sigma) \leq \mu\left(\frac{\sigma}{1 - h_0 - \varepsilon}\right)^{1 - h_0}. \quad (3.30)$$

Справді, якщо виберемо $\delta = 0$ і $\gamma = 1 - h_0 - \varepsilon$, то за теоремою 3.2

$$M(\sigma) \leq K \mu\left(\frac{\sigma}{1 - h_0 - \varepsilon}\right)^{1 - h_0 - \varepsilon}, \quad K = K(\varepsilon) \equiv \text{const} > 0.$$

Оскільки $\mu(\sigma) \rightarrow +\infty$ ($\sigma \rightarrow +\infty$) для цілих рядів Діріхле, то звідси випливає (3.30).

Наслідок 3.8. Нехай $\sigma_a = +\infty$, $\Phi \in \Omega(+\infty)$ і $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$. Нехай функція φ – обернена до Φ' , а функція Ψ – асоційована з Φ за Ньютоном. Якщо

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))} \leq \beta_0 < 1, \quad (3.31)$$

то для кожного $\varepsilon \in (0; 1 - \beta_0)$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$

$$M(\sigma) \leq \mu \left(\frac{\sigma}{1 - \beta_0 - \varepsilon} \right)^{1 - \beta_0}. \quad (3.32)$$

Справді, $\ln |a_n| \leq -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ і з 3.31 випливає (3.29) з $h_0 = \beta_0$. Тому з (3.30) випливає (3.32).

Розглянемо випадок, коли $\sigma_a = 0$ (загальний випадок $\sigma_a \in R$ зводиться до випадку $\sigma_a = 0$ заміною s на $s - \sigma_a$). У цьому випадку максимальний член може бути обмеженою на $(-\infty; 0)$ функцією.

Для того, щоб $\mu(\sigma, F) \leq K$ для усіх $\sigma < 0$, необхідно і достатньо, щоб $|a_n| \leq K$ для всіх $n \geq 0$. Справді, якщо $\mu(\sigma, F) \leq K$, то $|a_n| \leq K \exp\{-\sigma \lambda_n\}$ для усіх $\sigma < 0$ і $n \geq 0$. Спрямовуючи тут $\sigma \uparrow 0$, отримуємо $|a_n| \leq K$. Навпаки, якщо $|a_n| \leq K$, то $|a_n| \exp\{\sigma \lambda_n\} \leq K$ для усіх $\sigma < 0$ і $n \geq 0$, тобто $\mu(\sigma, F) \leq K$.

У випадку, коли $|a_n| \leq K$ для всіх $n \geq 0$, оцінка $\mu(\sigma, F) \leq K$ є такою:

$$M(\sigma, F) \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \exp(\sigma \lambda_n) \leq K \sum_{n=0}^{\infty} \exp(\sigma \lambda_n)$$

і залежить тільки від щільності показників. Тому вважатимемо, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty. \quad (3.33)$$

З іншого боку, якщо $\sigma_a = 0$, то в теоремі 3.9 можемо брати тільки $\delta = 0$, і тому, якщо $\gamma > 0$ – довільне число і

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{(\gamma - 1) \ln |a_n|}{\ln n} = h(\gamma, 0) > 1, \quad (3.34)$$

то для усіх $\sigma < 0$

$$M(\sigma, F) \leq K \mu \left(\frac{\sigma}{\gamma} \right)^{\gamma}, \quad K \equiv \text{const} > 0. \quad (3.35)$$

Якщо ж $0 < \gamma < 1$, то (3.34) може виконуватись тільки тоді, коли

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{\ln n} < -\frac{1}{1-\gamma},$$

а це можливо з огляду (3.33). Умова (3.34) не може виконуватися і у випадку $\gamma = 1$. Тому залишається випадок $\gamma > 1$. Щоб виконувалась умова (3.34), потрібно, щоб

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{\ln n} \geq \frac{1}{h_0} > 0. \quad (3.36)$$

Наслідок 3.9. Якщо $\sigma_a = 0$ і виконується умова (3.36), то для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $\sigma \in (\sigma_0(\varepsilon), 0)$

$$M(\sigma) \leq \mu \left(\frac{\sigma}{1+h_0+\varepsilon} \right)^{1+h_0+\varepsilon}. \quad (3.37)$$

Справді, якщо візьмемо $1+h_0+\varepsilon/2$, то з (3.36) матимемо $h(\lambda, 0) > 1$, тобто виконується (3.34) і, отже, (3.35) з $\gamma = 1+h_0+\varepsilon/2$. Оскільки завдяки (3.33) $\mu(\sigma, F) \uparrow +\infty (\sigma \uparrow 0)$, то з (3.35) випливає (3.37).

Теорема 3.10. Нехай $\sigma_a = 0$, а послідовність (λ_n) задовольняє умову

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \gamma(\lambda_n)} \leq h_0 < +\infty, \quad (3.38)$$

де γ – додатна неперервна спадна до 0 на $[0; +\infty)$ функція така, що функція $t\gamma(t) \uparrow +\infty (t \rightarrow +\infty)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує стала $K(\varepsilon) > 0$ така, що для усіх $\sigma < 0$

$$M(\sigma) \leq \mu \left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon} \right) \left(\exp \left\{ \frac{\varepsilon |\sigma|}{1+\varepsilon} \gamma^{-1} \left(\frac{\varepsilon |\sigma|}{(1+\varepsilon)^2 (h_0 + \varepsilon^2)} \right) \right\} \right) + K(\varepsilon). \quad (3.39)$$

Доведення. Нехай $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$ – лічильна функція послідовності (λ_n) .

Тоді умова (3.38) рівносильна умові

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln n(t)}{t\gamma(t)} \leq h_0 < +\infty$$

і, отже, для кожного $\varepsilon > 0$ при $t \geq t_0 = t_0(\varepsilon)$ правильна нерівність $\ln n(t) \leq ht\gamma(t)$, де $h = h_0 + \varepsilon^2$. Переходячи до інтеграла Стільтьєса та інтегруючи частинами, одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{M(\sigma)}{\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}\right)} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n| \exp\left(\lambda_n \frac{\sigma}{1+\varepsilon}\right)}{\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}\right)} \exp\left\{-\lambda_n \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\right\} \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon} \lambda_n\right\} = \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon} t\right\} dn(t) \leq \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon} \int_0^{\infty} n(t) \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon} t\right\} dt \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon} \int_{t_0}^{\infty} \exp\left\{-t\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon} - h\gamma(t)\right)\right\} dt + K_1(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.40)$$

де $K_1(\varepsilon) = \text{const} > 0$. Оскільки функція γ^{-1} спадна на $(0; \gamma(0))$ $\gamma^{-1}(x) \uparrow +\infty$ при $x \downarrow 0$, то

$$t(\sigma) = \gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{h(1+\varepsilon)^2}\right) \uparrow +\infty, \quad (\sigma \uparrow 0),$$

так, що $t(\sigma) \geq t_0$ при $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$. Звідси завдяки неспаданню $t\gamma(t)$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t(\sigma)} \exp\left\{-t\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon} - h\gamma(t)\right)\right\} dt &\leq \int_{t_0}^{t(\sigma)} \exp\{th\gamma(t)\} dt \leq t(\sigma) \exp\{ht(\sigma)\gamma(t(\sigma))\} = \\ &= \gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{h(1+\varepsilon)^2}\right) \exp\left\{\frac{\varepsilon|\sigma|}{h(1+\varepsilon)^2} \gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{h(1+\varepsilon)^2}\right)\right\}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

а

$$\int_{t(\sigma)}^{\infty} \exp\left\{-t\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)} - h\gamma(t)\right)\right\} dt = \int_{t(\sigma)}^{\infty} \exp\left\{-t\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)} - h\gamma(t(\sigma))\right)\right\} dt =$$

$$= \int_{t(\sigma)}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2 |\sigma|}{(1+\varepsilon)^2} t \right\} dt = \frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon^2 |\sigma|} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2 |\sigma| t(\sigma)}{(1+\varepsilon)^2} \right\} \leq \frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon^2 |\sigma|}. \quad (3.42)$$

З нерівностей (3.40)-(3.41) при $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$ одержуємо

$$\frac{M(\sigma)}{\mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}\right)} \leq \frac{\varepsilon |\sigma|}{1+\varepsilon} \gamma^{-1} \left(\frac{\varepsilon |\sigma|}{h(1+\varepsilon)^2} \right) \exp \left\{ \frac{\varepsilon |\sigma|}{h(1+\varepsilon)^2} \gamma^{-1} \left(\frac{\varepsilon |\sigma|}{h(1+\varepsilon)^2} \right) \right\} + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} + K_1(\varepsilon),$$

звідки, завдяки тому, що $x\gamma(x) \uparrow +\infty (x \rightarrow \infty)$, тобто $|\sigma| \gamma^{-1}(|\sigma|) \uparrow +\infty (\sigma \uparrow 0)$,

отримуємо (3.39) з сталою $K(\varepsilon) \geq \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} + K_1(\varepsilon)$.

Теорема 3.11. Нехай $\sigma_a = 0$, $\Phi \in \Omega(0)$ і $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ для усіх $\sigma < 0$.

Тоді, якщо

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \Psi(|\varphi(\lambda_n)|)} \leq \beta_0 < +\infty, \quad (3.43)$$

то для кожного $\varepsilon > 0$ існує стала $K(\varepsilon)$ така, що для усіх $\sigma < 0$

$$M(\sigma) \leq \mu(\sigma) \exp \left\{ \frac{\beta_0 + \varepsilon}{1 + \beta_0 + \varepsilon} |\sigma| \Phi' \left(\Psi^{-1} \left(\frac{\sigma}{1 + \beta_0 + \varepsilon} \right) \right) \right\} + K(\varepsilon).$$

Доведення. Маємо, що $\ln |a_n| \leq -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$, $n \geq 0$, а з (3.43) випливає, що

$\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n)) \geq \ln n / (\beta_0 + \varepsilon / 2)$ при $n \geq n_0(\varepsilon)$ і $\ln n(t) \leq (\beta_0 + \varepsilon) |\Psi(\varphi(t))|$ при $t \geq t_0(\varepsilon)$. Тому, якщо виберемо

$$\gamma(\sigma) = \Phi' \left(\Psi^{-1} \left(\frac{\sigma}{1 + \beta_0 + \varepsilon} \right) \right) \uparrow +\infty \quad (\sigma \uparrow 0),$$

то при $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$ матимемо

$$\begin{aligned} M(\sigma) &\leq \left(\sum_{\lambda_n < \gamma(\sigma)} + \sum_{\lambda_n \geq \gamma(\sigma)} \right) |a_n| \exp(\sigma \lambda_n) \leq \\ &\leq \mu(\sigma) n(\gamma(\sigma)) + \sum_{\lambda_n \geq \gamma(\sigma)} \exp \left\{ -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n)) + \lambda_n \gamma^{-1}(\lambda_n) \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mu(\sigma) n(\gamma(\sigma)) + \sum_{n=n_0(\varepsilon)}^{\infty} \exp \left\{ -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n)) + (1 + \beta_0 + \varepsilon) \lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n)) \right\} = \\
&= \mu(\sigma) n(\gamma(\sigma)) + \sum_{n=n_0(\varepsilon)}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\beta_0 + \varepsilon}{\beta_0 + \varepsilon / 2} \ln n \right\} \leq \\
&\leq \mu(\sigma) \exp \left\{ (\beta_0 + \varepsilon) \Phi \left(\Psi^{-1} \left(\frac{\sigma}{1 + \beta_0 + \varepsilon} \right) \right) \frac{|\sigma|}{1 + \beta_0 + \varepsilon} \right\} + K_1(\varepsilon),
\end{aligned}$$

тобто отримуємо (3.44) з деякою сталою $K(\varepsilon) \geq K_1(\varepsilon)$.

Зростання цілих рядів Діріхле

Найуживанішими характеристиками зростання цілих рядів Діріхле є R -порядок

$$\rho_R = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sigma} \ln \ln M(\sigma, F),$$

і R -тип (за умови $0 < \rho_R < +\infty$)

$$T_R = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \exp \{ -\rho_R \sigma \} \ln M(\sigma, F).$$

Теорема 3.12. *Якщо або $\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n)$, або $\ln n = o\left(\ln \frac{1}{|a_n|}\right)$ при $n \rightarrow \infty$,*

то

$$\rho_R = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln |a_n|}, \quad (3.45)$$

а якщо $\ln n = o(\lambda_n)$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$T_R = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n}{e^{\rho_R}} |a_n|^{\rho_R / \lambda_n}. \quad (3.46)$$

Доведення. Нехай $0 < A, B < +\infty$ і $\Phi(\sigma) = Ae^{B\sigma}$. Тоді

$\Phi \in \Omega(+\infty)$, $\varphi(x) = \frac{1}{B} \ln \frac{x}{AB}$, $\Psi(\sigma) = \sigma - \frac{1}{B}$ і $\Psi(\varphi(x)) = \frac{1}{B} \ln \frac{x}{eAB}$. Для того, щоб

$\ln \mu(\sigma, F) \leq Ae^{B\sigma}$ при $\sigma \geq \sigma_0$, необхідно і достатньо, щоб $\ln |a_n| \leq -\frac{\lambda_n}{B} \ln \frac{\lambda_n}{eAB}$

при $n \geq n_0$. Звідси випливає, що

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim_{\sigma \rightarrow +\infty}} \frac{1}{\sigma} \ln \ln \mu(\sigma, F) = k \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim_{\sigma \rightarrow +\infty}} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln |a_n|} \quad (3.47)$$

і

$$T_R \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim_{\sigma \rightarrow +\infty}} \exp\{-\rho_R \sigma\} \ln \mu(\sigma, F) = \kappa \stackrel{\text{def}}{=} T_R = \overline{\lim_{\sigma \rightarrow +\infty}} \frac{\lambda_n}{e\rho_R} |a_n|^{\rho_R/\lambda_n}. \quad (3.48)$$

Доведемо, наприклад, (3.48). Якщо $T < +\infty$, то $\ln \mu(\sigma, F) \leq A \exp\{\rho_R \sigma\}$

для кожного $A > T$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0(A)$, і тому

$$\ln |a_n| \leq -\frac{\lambda_n}{\rho_R} \ln \frac{\lambda_n}{eA\rho_R}, \quad n \geq n_0 \quad (3.49)$$

тобто $\kappa \leq A$ і, завдяки довільності A , отримуємо нерівність $\kappa \leq T$, яка є очевидною, коли $T = +\infty$. Далі, якщо $\kappa < +\infty$, то для кожного $A > \kappa$ і всіх $n \geq n_0(A)$ виконується (3.49), і тому $\ln \mu(\sigma, F) \leq A \exp\{\rho_R \sigma\}$ для усіх $\sigma \geq \sigma_0(A)$, тобто $T \leq A$. Завдяки довільності A , звідси одержуємо нерівність $T \leq \kappa$, яка є очевидною, якщо $\kappa = +\infty$. Отже, $T = \kappa$.

Доведення рівності (3.47) цілком аналогічне.

Якщо $\ln n = o(\lambda_n)$ при $n \rightarrow \infty$, то за наслідком 3.6 з теореми 3.9 і нерівністю Коші отримуємо $\mu(\sigma) \leq M(\sigma) \leq \mu(\sigma + \varepsilon)$ для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$. Тому

$$T \leq T_R \leq \overline{\lim_{\sigma \rightarrow +\infty}} \frac{\ln \mu(\sigma + \varepsilon)}{\exp\{\sigma \rho_R\}} = T \exp\{\varepsilon \rho_R\},$$

звідки з огляду на довільність ε , маємо рівність $T = T_R$, а з (3.48) випливає (3.46).

Припустимо тепер, що $\rho < +\infty$. Тоді для кожного $B > \rho$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0(B)$ правильна нерівність $\ln \mu(\sigma) \leq \Phi(\sigma) = \exp\{B\sigma\}$, а з умови $\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n) (n \rightarrow \infty)$ випливає, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \ln n}{\lambda_n \Phi(\varphi(\lambda_n))} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{B \ln n}{\lambda_n \ln(\lambda_n / eB)} = 0.$$

Тому за наслідком 3.8 з теореми 3.9 $\mu(\sigma) \leq M(\sigma) \leq \mu\left(\frac{\sigma}{1-\varepsilon}\right)$ для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$. За наслідком 3.7 з цієї теореми така сама нерівність виконується і тоді, коли $\ln n = o\left(\ln \frac{1}{|a_n|}\right)$ при $n \rightarrow \infty$, а з неї випливає рівність $\rho_R = \rho$, яка разом з (3.47) дає (3.45). Теорема 3.12 доведена.

Для цілої функції $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ нехай $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$.

Величини

$$\rho = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}$$

і

$$T = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}, \quad 0 < \rho < \infty,$$

називають відповідно порядком і типом функції f . З теореми 3.12 легко випливає такий наслідок.

Наслідок 3.10 (теорема Адамара). *Порядок і тип цілої функції обчислюють за формулами*

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \ln n}{-\ln |a_n|},$$

і

$$T = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e\rho} |a_n|^{\rho/n}.$$

Повернемось до цілих рядів Діріхле. Величини

$$p_R = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(\sigma, F)}{\ln \sigma}, \quad q_R = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \sigma^{-p_R} \ln M(\sigma, F)$$

назвемо логарифмічними, відповідно, R -порядком і R -типом. Легко побачити, що для кожного цілого ряду Діріхле $p_R \geq 1$. Тому при означенні q_R досить вимагати, щоб $p_R < +\infty$.

Теорема 3.13. Якщо або $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln n}{\ln \lambda_n} \leq 1$, або $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{-\ln |a_n|} < 1$, то

$$p_R = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \lambda_n}{\ln \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right)} + 1, \quad (3.50)$$

а якщо $1 < p_R < +\infty$ і або $\ln n = o\left(\lambda_n^{p_R/(p_R-1)}\right)$, або $\ln n = o\left(\ln \frac{1}{|a_n|}\right)$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$q_R = (p_R - 1)^{p_R-1} p_R^{p_R} \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \lambda_n^{p_R} \left(\ln \frac{1}{|a_n|} \right)^{1-p_R}. \quad (3.51)$$

Доведення. Виберемо функцію $\Phi \in \Omega(+\infty)$, так, щоб $\Phi(\sigma) = A\sigma^B$ для усіх досить великих σ , де A і B – додатні сталі і $B > 1$. Тоді

$$\varphi(x) = \left(\frac{x}{AB} \right)^{1/(B-1)}, \quad \Psi(\sigma) = \frac{B-1}{B} \sigma,$$

$$x\Phi(\varphi(x)) = A(B-1) \left(\frac{x}{AB} \right)^{B/(B-1)}$$

для всіх досить великих x . Для того, щоб $\ln \mu(\sigma) \leq A\sigma^B$ ($\sigma \geq \sigma_0$), необхідно і достатньо, щоб

$$\ln |a_n| \leq -A(B-1) \left(\frac{\lambda_n}{AB} \right)^{B/(B-1)} \quad (n \geq n_0).$$

Звідси тим самим методом, що і при доведенні теореми 3.11, одержуємо

$$p \stackrel{def}{=} \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln \mu(\sigma, F)}{\ln \sigma} = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \lambda_n}{\ln \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right)} \quad (3.52)$$

і, якщо $p > 1$,

$$q \stackrel{def}{=} \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \sigma^{-p} \ln \mu(\sigma, F) = (p-1)^{p-1} p^p \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n^p \left(\ln \frac{1}{|a_n|} \right)^{1-p}. \quad (3.53)$$

Припустимо тепер, що $p < +\infty$. Тоді $\ln \mu(\sigma) \leq \Phi(\sigma) = \sigma^B$ для кожного $B > p$ і усіх досить великих σ . З умови

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (\ln \ln n / \ln \lambda_n) \leq 1$$

випливає, що $\ln n = o(\lambda_n^{1+\alpha})$, $n \rightarrow \infty$, для кожного $\alpha > 0$. Тому

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{B-1} \left(\frac{B}{\lambda_n} \right)^{1+1/(B-1)} \ln n = 0,$$

і, використовуючи нерівність Коші та наслідок 3.8 з теореми 3.9, як при доведенні теореми 3.11, отримуємо рівність $p_R = p$. Звідси і з (3.52) випливає (3.50). У разі виконання умови

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln n / \ln \frac{1}{|a_n|} \right) < 1$$

досить замість наслідку 3.8 використати наслідок 3.7 з теореми 3.9.

Доведення рівності $q = p_R$ аналогічне. Теорема доведена.

Найгнучкіша шкала зростання цілих рядів зростання цілих рядів Діріхле характеризується узагальненими порядками. З метою їх означення через L позначимо клас неперервних неспадних функцій α таких, що $\alpha(x) \geq 0$ при $x \geq x_0$, $\alpha(x) = \alpha(x_0)$ при $x \leq x_0$ і на $[x_0; +\infty)$ функція α зростає до $+\infty$. Говоритимемо, що $\alpha \in L^0$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(x(1+o(1))) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$; далі $\alpha \in L_{i\zeta}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(cx) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$; нарешті,

$\alpha \in L_{c\ddot{i}\zeta}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(x\alpha(x)) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Легко побачити, що $L_{c\ddot{i}\zeta} \subset L_{\ddot{i}\zeta} \subset L^0$. Функція з $L_{\ddot{i}\zeta}$ називаються повільно зростаючими, а з $L_{c\ddot{i}\zeta}$ – сильно повільно зростаючими.

Нехай $\alpha \in L, \beta \in L$, а G – будь-яка функція, задана на $[\sigma_0; +\infty)$. Узагальненим порядком функції G називається величина

$$\rho_{\alpha\beta}(G) = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(G(\sigma))}{\beta(\sigma)}.$$

Якщо візьмемо $G(\sigma) = \ln M(\sigma, F)$, то звідси отримаємо означення узагальненого порядку $\rho_{\alpha\beta}(G) = \rho_{\alpha\beta}(\ln M)$ цілого ряду Діріхле.

Позначимо

$$\kappa_{\alpha\beta}(F) = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}\right)}.$$

Накладаючи ті чи інші обмеження на функції α і β , можна знайти умови на λ_n чи a_n , при яких $\rho_{\alpha\beta}(F) = \kappa_{\alpha\beta}(F)$. Ми доведемо одну, але досить просту і загальну теорему.

Теорема 3.14. Нехай $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L^0$ такі, що для кожного $\rho \in (0; +\infty)$

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta(\sigma)} \alpha \left(\int_{\sigma_0}^{\sigma} \alpha^{-1}(\rho\beta(t)) dt \right) \leq \rho, \quad (3.54)$$

де σ_0 – деяке число більше, ніж $\beta^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\alpha(x_0)\right)$. Тоді, якщо або

$\ln n = o\left(\ln \frac{1}{|a_n|}\right), n \rightarrow \infty$, або для кожного $\rho \in (0; +\infty)$ і деякого $t_0 \geq \alpha^{-1}(\rho\beta(x_0))$

$$\ln n = o\left(\int_{t_0}^{\lambda_n} \beta^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\alpha(t)\right) dt\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.55)$$

то $\rho_{\alpha\beta}(F) = \kappa_{\alpha\beta}(F)$.

Доведення. Нехай $\rho_{\alpha\beta}(F) < +\infty$. Тоді $\ln M(\sigma, F) \leq \alpha^{-1}(\rho\beta(\sigma))$ для кожного $\rho > \rho_{\alpha\beta}(F)$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0(\rho)$. Тому за нерівністю Коші $\ln|a_n| \leq \alpha^{-1}(\rho\beta(\sigma)) - \sigma\lambda_n$ для усіх $n \geq 0$ і $\sigma \geq \sigma_0(\rho)$. При $\sigma = \beta^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\alpha(\lambda_n)\right)$, $n \geq n_0(\rho)$, звідси маємо

$$\ln|a_n| \leq \lambda_n - \lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\alpha(\lambda_n)\right),$$

тобто

$$\alpha(\lambda_n) \leq \beta\left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} + 1\right).$$

Оскільки $\beta \in L^0$ і ρ – довільне число, то з останньої нерівності отримуємо нерівність $k_{\alpha\beta}(F) \leq \rho_{\alpha\beta}(F)$, яка є очевидною, якщо $\rho_{\alpha\beta}(F) = +\infty$.

Припустимо, що $k_{\alpha\beta}(F) \neq \rho_{\alpha\beta}(F)$. Тоді $k_{\alpha\beta}(F) < \rho_{\alpha\beta}(F)$. Якщо візьмемо $k_{\alpha\beta}(F) < \rho < \rho_{\alpha\beta}(F)$, то з огляду на зростання функції $\beta^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\alpha(x)\right)$

для $n \geq n_0(\rho)$ матимемо

$$\ln|a_n| \leq -\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\alpha(\lambda_n)\right) \leq \int_{t_0}^{\lambda_n} \beta^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\alpha(t)\right) dt + const. \quad (3.56)$$

Зауважимо, що якщо $\Phi \in \Omega(A)$ і для $\sigma \in [\sigma_0; A)$

$$\Phi(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \omega(t) dt + const, \quad (3.57)$$

де ω – додатна, неперервна і зростаюча до $+\infty$ на $[\sigma_0; A)$ функція, то

$\varphi(x) = w^{-1}(x)$ при $x \geq x_0$, а оскільки $(x\Psi(\varphi(x)))' = (x\varphi(x) - \Phi(\varphi(x)))' = \varphi(x)$,

то

$$x\Psi(\varphi(x)) = \int_{x_0}^x \omega^{-1}(t) dt + \text{const} . \quad (3.58)$$

Для того, щоб для усіх $\sigma \in [\sigma_0; A)$

$$\ln \mu(\sigma, F) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \omega(t) dt + \text{const} ,$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\ln |a_n| \leq - \int_{x_0}^{\lambda_n} \omega^{-1}(t) dt + \text{const} .$$

Використовуючи це твердження, з (3.56) отримуємо нерівність

$$\ln \mu(\sigma, F) \leq \int_{\sigma_0}^{\sigma} \alpha^{-1}(\rho\beta(t)) dt + \text{const} ,$$

звідки, завдяки умовам $\alpha \in L^0$ і (3.54), одержуємо нерівність $\rho_{\alpha\beta}(\ln \mu) \leq \rho$.

Нарешті, з огляду на (3.36) з $\omega(x) = \beta^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\alpha(x)\right)$, умова (3.55) рівносильна умові (3.36) з $\beta_0 = 0$. Тому за наслідком 3.8 з теореми 3.9

$$\ln M(\sigma, F) \leq \ln \mu((1+o(1))\sigma, F), \quad \sigma \rightarrow +\infty . \quad (3.59)$$

Співвідношення (3.59) за наслідком 3.7 з теореми 3.9 також виконується,

якщо $\ln n = o\left(\ln \frac{1}{|a_n|}\right)$, $n \rightarrow \infty$. З нього, завдяки умові $\beta \in L^0$, випливає нерівність

$\rho_{\alpha\beta}(F) \leq \rho_{\alpha\beta}(\ln \mu) \leq \rho$, що неможливо. Рівність $\rho_{\alpha\beta}(F) = k_{\alpha\beta}(F)$ доведена.

Зауваження 1. Оскільки

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \alpha^{-1}(\rho\beta(t)) dt \leq \sigma \alpha^{-1}(\rho\beta(\sigma)) + \text{const} ,$$

то умова (3.54) виконується, якщо $\alpha \in L_{c\bar{c}\zeta}$.

Зауваження 2. Якщо $\alpha \in L_{\bar{\imath}\zeta}$ і $\frac{d\beta^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\alpha(x)\right)}{d\ln x} = O(1)$ при $x \rightarrow +\infty$ для

кожного $\rho \in (0; +\infty)$, то виконується (3.54), а (3.55) можна замінити умовою

$$\ln n = o\left(\lambda_n \beta^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\alpha(\lambda_n)\right)\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.60)$$

Справді, оскільки $\alpha \in L_{\bar{\imath}\zeta}$, то $\frac{\alpha^{-1}(\rho x)}{\alpha^{-1}((\rho + \varepsilon)x)} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty, \varepsilon > 0$, бо,

якщо б $\frac{\alpha^{-1}(\rho x_k)}{\alpha^{-1}((\rho + \varepsilon)x_k)} \geq h > 0$ для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (x_k) ,

то ми мали б $\rho x_k \geq \alpha\left(h\alpha^{-1}((\rho + \varepsilon)x_k)\right) = (1 + o(1))(\rho + \varepsilon)x_k, k \rightarrow \infty$, що неможливо.

Далі, умова $\frac{d\beta^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\alpha(x)\right)}{d\ln x} = O(1)$ при $x \rightarrow +\infty$ є рівносильною умові

$\frac{d\ln \alpha^{-1}(\rho\beta(x))}{dx} \geq c > 0, x \geq x_0$, і тому для кожного $\varepsilon > 0$ маємо

$$\begin{aligned} & \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\overline{\lim}_{\sigma_0} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \alpha^{-1}(\rho\beta(t)) dt}{\alpha^{-1}((\rho + \varepsilon)\beta(\sigma))} \leq \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\overline{\lim}_{\sigma_0} \frac{\alpha^{-1}(\rho\beta(\sigma))}{\alpha^{-1}((\rho + \varepsilon)\beta(\sigma))}}{\left(\alpha^{-1}((\rho + \varepsilon)\beta(\sigma))\right)'} \leq \\ & \leq \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\overline{\lim}_{\sigma_0} \frac{\alpha^{-1}((\rho + \varepsilon)\beta(\sigma))}{\alpha^{-1}((\rho + \varepsilon)\beta(\sigma))}}{\left(\alpha^{-1}((\rho + \varepsilon)\beta(\sigma))\right)'} \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\overline{\lim}_{\sigma_0} \frac{\alpha^{-1}(\rho\beta(\sigma))}{\alpha^{-1}((\rho + \varepsilon)\beta(\sigma))}}{\alpha^{-1}((\rho + \varepsilon)\beta(\sigma))} \leq \\ & \leq \frac{1}{c} \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\overline{\lim}_{\sigma_0} \frac{\alpha^{-1}(\rho(x))}{\alpha^{-1}((\rho + \varepsilon)x)}}{\alpha^{-1}((\rho + \varepsilon)x)} = 0. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \alpha^{-1}(\rho\beta(t)) dt \leq \alpha^{-1}((\rho + \varepsilon)\beta(\sigma))$$

для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$, а отже, умова (3.54) виконується.

Далі,

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_{x_0}^x \beta^{-1} \left(\frac{1}{\rho} \alpha(t) \right) dt}{x \beta^{-1} \left(\frac{1}{\rho} \alpha(x) \right)} = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta^{-1} \left(\frac{1}{\rho} \alpha(x) \right)}{\beta^{-1} \left(\frac{1}{\rho} \alpha(x) \right) + x \left(\beta^{-1} \left(\frac{1}{\rho} \alpha(x) \right) \right)'} = 1,$$

звідки випливає еквівалентність умов (3.60) і (3.55).

Зростання рядів Діріхле, абсолютно збіжних у півплощині

Нехай тепер ряд Діріхле (3.1) має нульову абсцису абсолютної збіжності.

R -порядком і R -типом такого ряду Діріхле називатимемо

$$\rho_R^0 = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0} |\sigma| \ln \ln M(\sigma, F)$$

і

$$T_R^0 = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0} \exp \left\{ -\frac{\rho_R^0}{|\sigma|} \right\} \ln M(\sigma, F), \quad 0 < \rho_R^0 < +\infty,$$

а логарифмічним R -порядком і R -типом називатимемо

$$p_R^0 = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\ln \ln M(\sigma, F)}{\ln(1/|\sigma|)}$$

і

$$q_R^0 = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0} |\sigma|^{p_R^0} \ln M(\sigma, F), \quad 0 < p_R^0 < +\infty.$$

Логарифмічні R -порядок і R -тип часто називають просто порядком і типом. Ми введемо формули для знаходження тільки цих величин.

Теорема 3.15. Якщо або $\varliminf_{n \rightarrow +\infty} (\ln |a_n| / \ln n) > 0$, або

$\ln \ln n = o(\ln \lambda_n)$, $n \rightarrow \infty$, то

$$p_R^0 = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \lambda_n}{\ln \left(\frac{\lambda_n}{\ln |a_n|} \right)} - 1, \quad (3.61)$$

а якщо або $\ln n = o\left(\lambda_n^{p_R^0/(p_R^0+1)}\right)$, $n \rightarrow \infty$, або $\varliminf_{n \rightarrow \infty} (\ln |a_n| / \ln n) = +\infty$, то

$$q_R^0 = \left(p_R^0 + 1\right)^{-(p_R^0-1)} \left(p_R^0\right)^{p_R^0} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n^{-p_R^0} (\ln |a_n|)^{1+p_R^0}. \quad (3.62)$$

Доведення. Виберемо $\Phi(\sigma) = A|\sigma|^{-B}$, де A і B – додатні сталі. Тоді $\Phi \in \Omega(0)$,

$$\varphi(x) = -\left(\frac{AB}{x}\right)^{1/(B+1)}, \quad \Psi(\sigma) = \frac{B+1}{B}\sigma,$$

$$x\Psi(\varphi(x)) = -\frac{B+1}{B}x\left(\frac{AB}{x}\right)^{1/(B+1)} = -(B+1)A^{1/(B+1)}\left(\frac{x}{B}\right)^{B/(B+1)}.$$

Для того, щоб $\ln \mu(\sigma) \leq A|\sigma|^{-B}$, ($0 > \sigma > \sigma_0$), необхідно і достатньо, щоб

$$\ln |a_n| \leq \frac{B+1}{B} \lambda_n \left(\frac{AB}{\lambda_n}\right)^{1/(B+1)} \quad (n \geq n_0).$$

Звідси тим самим методом, що і при доведенні теореми 3.12, маємо

$$p^0 \stackrel{def}{=} \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\ln \ln \mu(\sigma, F)}{\ln(1/|\sigma|)} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \lambda_n}{\ln \left(\frac{\lambda_n}{\ln |a_n|} \right)} - 1, \quad (3.63)$$

і

$$q \stackrel{def}{=} \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0} |\sigma|^{p^0} \ln \mu(\sigma, F) = \left(p^0 + 1\right)^{-(p^0+1)} \left(p^0\right)^{p^0} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n^{-p^0} (\ln |a_n|)^{p^0+1}. \quad (3.64)$$

Якщо $\varliminf_{n \rightarrow \infty} (\ln |a_n| / \ln n) > 0$, то виконується (3.36) з $h_0 < +\infty$, і за наслідком

3.9 з теореми 3.9 маємо (3.37), звідки з огляду на нерівність Коші легко

впливає рівність $p^0 = p_R^0$. Якщо ж $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln |a_n| / \ln n) = +\infty$, то з цього ж наслідку

впливає рівність $q^0 = q_R^0$.

Далі, якщо $\ln \ln n = o(\ln \lambda_n)$, $n \rightarrow \infty$, то

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n |\Psi(\varphi(\lambda_n))|} = \frac{B}{B+1} (AB)^{-1/(B+1)} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \lambda_n^{-B/(B+1)} \ln n = 0,$$

яке б не було $B > 0$. Ця ж нерівність виконується, якщо $B = p_R^0$ і

$\ln n = o\left(\lambda_n^{p_R^0/(p_R^0+1)}\right)$, $n \rightarrow \infty$. Тому за теоремою 2.4 для кожного $\varepsilon > 0$ одержуємо

$$\begin{aligned} \ln M(\sigma) &\leq \ln \mu(\sigma) + \frac{\varepsilon |\sigma|}{1+\varepsilon} \Phi' \left(\Psi^{-1} \left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon} \right) \right) + K_1(\varepsilon) = \\ &= \ln \mu(\sigma) + \varepsilon A (B+1)^{B+1} B^{-B} (1+\varepsilon)^B |\sigma|^{-B} + K_1(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.65)$$

де $K_1(\varepsilon)$ – додатна стала. Звідси випливає, що

$$\ln \ln M(\sigma) \leq \max \left\{ \ln \ln \mu(\sigma), B^* \ln \frac{1}{|\sigma|} \right\} + O(1), \quad \sigma \rightarrow 0,$$

де B^* – довільна стала, $B^* > p^0$. З останнього співвідношення і нерівності

Коші, завдяки довільності B^* , легко випливає, що $p_R^0 = p^0$, і тому з (3.63)

отримуємо (3.61). Якщо ж візьмемо $B = p_R^0 = p^0$ і $A > q^0$, то з (3.65) матимемо

нерівність $q_R^0 \leq q^0 + \varepsilon A$, тобто з огляду на довільність ε і нерівність $q^0 \leq q_R^0$

справджується рівність $q_R^0 = q^0$, і тому з (3.64) отримуємо (3.62). Теорема 3.15

доведена.

Для аналітичної в одиничному крузі $\{z: |z| < 1\}$ функції $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

величини

$$p = \overline{\lim_{\sigma \rightarrow +\infty}} \frac{\ln \ln M_f(r)}{-\ln(1-r)}$$

і

$$q = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} (1-r)^\rho \ln M_f(r), \quad 0 < \rho < \infty$$

називаються відповідно порядком і типом. З теореми 2.8 легко випливає такий наслідок.

Наслідок 3.11. *Порядок і тип аналітичної у крузі функції обчислюється за формулами*

$$p = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\ln \left(\frac{n}{\ln |a_n|} \right)} - 1,$$

і

$$q = (p+1)^{-(p+1)} (p)^p \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} n^{-p} (\ln |a_n|)^{1+p}.$$

Формули для R -порядку та R -типу подамо без їхнього доведення.

Теорема 3.16. *Якщо або $\ln n = o(\lambda_n / \ln \lambda_n), n \rightarrow \infty$, або $\ln n = o(\ln |a_n|), n \rightarrow \infty$, то*

$$\rho_R^0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} \ln \lambda_n.$$

Теорема 3.17. *Якщо $\ln n(t) = O(\ln t), t \rightarrow +\infty$, то*

$$T_R^0 = \rho_R^0 \exp \{ \kappa^0 - 1 \}, \quad \kappa^0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln |a_n|}{\rho_R^0 \lambda_n} \ln \frac{\lambda_n}{(\ln \lambda_n)^2} - 1 \right) \lambda_n.$$

На завершення цього розділу наведемо ще дві теореми про узагальнені порядки абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле.

Нехай $\alpha \in L, \beta \in L$. Узагальненим порядком абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле називається величина

$$\rho_{\alpha\beta}^0(F) = \overline{\lim}_{\sigma \uparrow 0} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(1/|\sigma|)}. \quad (3.66)$$

Теорема 3.18. *Нехай функції $\alpha \in L_{\bar{\imath}\zeta}$ і $\beta \in L_{\bar{\imath}\zeta}$ задовольняють умови*

$$\frac{x}{\beta^{-1}(\rho\alpha(x))} \uparrow +\infty, \quad (x_0(\rho) \leq x \rightarrow +\infty) \quad (3.67)$$

i

$$\alpha \left(\frac{x}{\beta^{-1}(\rho \alpha(x))} \right) = (1 + o(1)) \alpha(x) \quad (x \rightarrow +\infty) \quad (3.68)$$

для кожного $\rho \in (0; +\infty)$. Нехай ряд Діріхле (3.1) має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = 0$. Тоді, якщо або $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln |a_n| / \ln n) > 0$, або

$$\alpha(\lambda_n) = o \left(\beta \left(\frac{\lambda_n}{\ln n} \right) \right), \quad n \rightarrow \infty,$$

то

$$\rho_{\alpha\beta}^0(F) = k_{\alpha\beta}^{(1)}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta \left(\frac{\lambda_n}{\ln |a_n|} \right)}.$$

Умови (3.67) і (3.68) задовольняють, наприклад, функції $\alpha(x) = \ln \ln x$ і $\beta(x) = \ln x$.

Теорема 3.19. Нехай функції $\alpha \in L_{\tilde{\zeta}}$ і $\beta \in L_{\tilde{\zeta}}$ для кожного $\rho \in (0; +\infty)$ задовольняють умови

$$\frac{x}{\alpha^{-1}(\rho \beta(x))} \uparrow +\infty, \quad (x_0(\rho) \leq x \rightarrow +\infty) \quad (3.69)$$

i

$$\beta \left(\frac{x}{\alpha^{-1}(\rho \beta(x))} \right) = (1 + o(1)) \beta(x) \quad (x \rightarrow +\infty), \quad (3.70)$$

а ряд Діріхле (3.1) має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = 0$. Тоді, якщо або $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln |a_n| / \ln n) > 0$, або $\alpha(\ln n) = o(\beta(\lambda_n))$, $n \rightarrow \infty$, то

$$\rho_{\alpha\beta}^0(F) = k_{\alpha\beta}^{(2)}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\ln |a_n|)}{\beta(\lambda_n)}.$$

Умови (3.69) і (3.70) задовольняють, наприклад, функції $\alpha(x) = \ln x$ і $\beta(x) = \ln \ln x$.

Класи збіжності

Ми отримаємо зв'язок між зростанням максимуму модуля та поведінням коефіцієнтів у термінах класів збіжності.

Нерівність Гарді

Нехай $p > 1$ $q = p / (p - 1)$, а f – додатна на $(A; B)$ функція, $-\infty \leq A < B \leq +\infty$. Нехай, далі, (λ_n^*) – послідовність додатних чисел, а (a_n) – послідовність чисел із $(A; B)$. Тоді

$$A_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda_1^* a_1 + \cdots + \lambda_n^* a_n}{\lambda_1^* + \cdots + \lambda_n^*} \in (A; B).$$

Добре відомо, нерівність Гарді ми отримаємо з такої теореми.

Теорема 3.20. *Якщо функція $f^{1/p}$ опукла на $(A; B)$, а послідовність (μ_n) додатна і незростаюча, то для кожного $\omega \leq +\infty$ виконується*

$$\sum_{n=1}^{\omega} \mu_n \lambda_n^* f(A_n) \leq q^p \sum_{n=1}^{\omega} \mu_n \lambda_n^* f(a_n). \quad (3.71)$$

Доведення. Позначимо $t = \lambda_1^* + \cdots + \lambda_n^*$, $n \geq 1$. Тоді

$$A_n = \frac{\lambda_1^* a_1 + \dots + \lambda_{n-1}^* a_{n-1}}{t_n} + \frac{\lambda_n^* a_n}{t_n} = \frac{t_{n-1}}{t_n} A_{n-1} + \frac{\lambda_n^*}{t_n} a_n$$

і, оскільки $\frac{t_{n-1}}{t_n} + \frac{\lambda_n^*}{t_n} = 1$, а функція $f^{1/p}$ опукла, то

$$f^{1/p}(A_n) \leq \frac{t_{n-1}}{t_n} f^{1/p}(A_{n-1}) + \frac{\lambda_n^*}{t_n} f^{1/p}(a_n),$$

звідки

$$-f^{1/p}(a_n) \leq \frac{t_{n-1}}{\lambda_n^*} f^{1/p}(A_{n-1}) - \frac{t_n}{\lambda_n^*} f^{1/p}(A_n).$$

Тому, враховуючи рівність $1/p + 1/q = 1$, маємо

$$\begin{aligned} Q_n &\stackrel{def}{=} \lambda_n^* f(A_n) - q \lambda_n^* f^{1/p}(a_n) f^{1/p}(A_n) \leq \\ &\leq \lambda_n^* f(A_n) + q \lambda_n^* \left(\frac{t_{n-1}}{\lambda_n^*} f^{1/q}(A_n) f^{1/p}(A_{n-1}) - \frac{t_n}{\lambda_n^*} f^{1/q}(A_n) f^{1/p}(A_n) \right) = \\ &= \lambda_n^* f(A_n) - q t_n f(A_n) + q t_{n-1} f^{1/q}(A_n) f^{1/p}(A_{n-1}) = \\ &= (\lambda_n^* - q t_n) f(A_n) + q t_{n-1} f^{1/q}(A_n) f^{1/p}(A_{n-1}). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Розглянемо на $[0; +\infty)$ функцію $u(x) = \frac{1}{p} x^p - ax + \frac{1}{q} a^q$, де a – будь-яке

невід'ємне число. Ця функція має єдину точку мінімуму $x = x(a) = a^{1/(p-1)}$, а

$u(x(a)) = 0$. Звідси випливає, що для усіх $a \geq 0$ і $x \geq 0$ правильна нерівність

$\frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} a^q \geq ax$. Тому з (3.2) маємо $Q_1 = -(q-1) \lambda_1^* f(A_1)$ і

$$\begin{aligned} Q_n &\leq (\lambda_n^* - q t_n) f(A_n) + q t_{n-1} \left(\frac{1}{p} f(A_{n-1}) + \frac{1}{q} f(A_n) \right) = \\ &= (\lambda_n^* + t_{n-1} - q t_n) f(A_n) + \frac{q}{p} t_{n-1} f(A_{n-1}) = \\ &= (1-q) t_n f(A_n) + \frac{q}{p} t_{n-1} f(A_{n-1}) = \frac{1}{p-1} (t_{n-1} f(A_{n-1}) - t_n f(A_n)), \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

і оскільки послідовність μ_n не зростаюча, то при $N < +\infty$ виконується

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \mu_n Q_n &\leq \frac{1}{p-1} \sum_{n=2}^N \mu_n (t_{n-1} f(A_{n-1}) - t_n f(A_n)) + \mu_1 Q_1 = \\ &= \frac{1}{p-1} \sum_{n=2}^{N-1} (\mu_n - \mu_{n-1}) t_n f(A_n) - \mu_N t_N f(A_N) < 0. \end{aligned}$$

Згадуючи означення Q_n і використовуючи нерівність Гьольдера

$$\sum_{n=1}^N a_n b_n \leq \left(\sum_{n=1}^N a_n^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^N b_n^q \right)^{1/q},$$

звідси отримуємо

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \mu_n \lambda_n^* f(A_n) &\leq q \sum_{n=1}^N \mu_n \lambda_n^* f^{1/p}(a_n) f^{1/q}(A_n) = \\ &= q \sum_{n=1}^N \left(\mu_n \lambda_n^* f(a_n) \right)^{1/p} \left(\mu_n \lambda_n^* f(A_n) \right)^{1/q} \leq q \left(\sum_{n=1}^N \mu_n \lambda_n^* f(a_n) \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^N \mu_n \lambda_n^* f(A_n) \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Якщо поділимо всю нерівність на останній множник і піднесемо до степеня p , то отримаємо нерівність (3.71) для $\omega = N$, а завдяки довільності N , нерівність (3.71) доведена для усіх ω .

Наслідок 3.12. Нехай $p > 1$, $a_n \geq 0$ і $A_n = \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n) > 0$ Тоді

$$\sum_{n=1}^{\omega} A_n^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{\omega} a_n^p. \quad (3.73)$$

Нерівність (3.73) називається нерівністю Гарді і випливає з (3.71), якщо $\lambda_n^* = 1$, $\mu_n = 1$ ($n \geq 1$) і $f(x) = x^p$.

**Ряди Діріхле скінченного R -порядку
або скінченного логарифмічного R -порядку**

Нехай ціла функція f , зображена рядом $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z = re^{i\varphi}$, має

скінченний порядок $\rho > 0$, а $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Кажуть, що f належить до класу збіжності, якщо

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho+1}} dr < +\infty. \quad (3.74)$$

У 1923 р. Ж. Валірон довів, якщо f належить до класу збіжності, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\rho/n} < +\infty. \quad (3.75)$$

Аналогом співвідношення (3.74) для цілих рядів Діріхле скінченного R -порядку $\rho_R > 0$ є співвідношення

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{\exp(\rho_R \sigma)} d\sigma < +\infty. \quad (3.76)$$

Для того, щоб знайти умови на коефіцієнти ряду Діріхле, при яких виконується співвідношення (3.76) та його аналоги для рядів Діріхле, абсолютно збіжних у півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < 0\}$, як скінченного R -порядку, так і скінченного логарифмічного R -порядку, спочатку доведемо таку теорему.

Теорема 3.21. *Нехай ряд (3.1) має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = \alpha_0 = A \in (-\infty; +\infty]$, де α_0 означене рівністю (3.14). Нехай $\mu(\sigma, F)$ – його максимальний член, а a_n^0 – коефіцієнти мажоранти Ньютона. Нехай, нарешті, β – додатна неперервна неспадна на $[a, A)$ функція така, що інтеграли*

$$\int_a^A \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)}, \quad \int_a^A \frac{\sigma d\sigma}{\beta(\sigma)} \quad (3.77)$$

збіжні. Тоді для того, щоб

$$\int_a^A \frac{\ln \mu(\sigma)}{\beta(\sigma)} d\sigma < +\infty, \quad (3.78)$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) B \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n^0} \right) < +\infty, \quad (3.79)$$

де

$$B(x) = \int_x^A \frac{\sigma - x}{\beta(\sigma)} d\sigma.$$

Доведення. Ряд Діріхле (3.1) та його мажоранта Ньютона (3.11) мають однакові максимальні члени $\mu(\sigma) = \mu(\sigma, F) = \mu(\sigma, F_{i \ i})$ та центральні індекси $\nu(\sigma) = \nu(\sigma, F) = \nu(\sigma, F_{i \ i})$ і $|a_n| \leq a_n^0$ для усіх n .

Припустимо спочатку, що діаграма Ньютона ряду (3.1) складається з нескінченної кількості ребер. З побудови діаграми Ньютона видно, що кутовими коефіцієнтами цих ребер є

$$\kappa_n^0 = \kappa_n^0(F_{i \ i}) = \frac{\ln a_n^0 - \ln a_{n+1}^0}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = \frac{L(\lambda_{n+1}) - L(\lambda_n)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}.$$

Оскільки $\sigma_a = \alpha_0 = A$, то послідовність (κ_n^0) зростає до A . Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $a_0 = a_0^0 = 1$. Тоді $\kappa_0^0 = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{1}{a_1^0}$, і, знову не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\kappa_0^0 \geq a$, бо в протилежному випадку можемо належно доозначити функцію β . Використовуючи рівність (3.10), маємо

$$\begin{aligned} \int_a^A \frac{\ln \mu(\sigma)}{\beta(\sigma)} d\sigma &= \int_a^A \frac{1}{\beta(\sigma)} \left(\int_a^\sigma \lambda_{\nu(t)} dt + \ln \mu(a) \right) d\sigma = \\ &= \int_a^A \lambda_{\nu(t)} \int_t^A \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)} dt + const = \int_a^A \lambda_{\nu(t)} \beta_1(t) dt + const, \end{aligned}$$

де

$$\beta_1(t) = \int_t^A \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)} -$$

спадна до 0 функція. Звідси за теоремою 3.8 випливає, що

$$\begin{aligned}
\int_a^A \frac{\ln \mu(\sigma)}{\beta(\sigma)} d\sigma &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \int_{\kappa_{n-1}^0}^{\kappa_n^0} \beta_1(t) dt + const = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(B(\kappa_{n-1}^0) - B(\kappa_n^0) \right) + const = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) B(\kappa_{n-1}^0) + const, \quad (3.80)
\end{aligned}$$

де

$$B(x) = \int_x^A \beta_1(t) dt = \int_x^A \int_t^A \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)} dt = \int_x^A \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)} \int_x^{\sigma} dt = \int_x^A \frac{\sigma - x}{\beta(\sigma)} d\sigma.$$

Позначимо $B_1(x) = \sqrt{B(x)}$. Тоді $B_1'(x) = \frac{1}{2} B(x)^{-1/2} B'(x)$ і

$$\begin{aligned}
B_1''(x) &= -\frac{1}{4} B^{-3/2}(x) (B'(x))^2 + \frac{1}{2} B^{-1/2}(x) B''(x) = \\
&= \frac{1}{2} B^{-3/2}(x) \left(B(x) B''(x) - \frac{1}{2} (B'(x))^2 \right) = \\
&= \frac{1}{2} B^{-3/2}(x) \left(-\int_x^A \beta_1(t) dt \beta_1'(x) - \frac{1}{2} \beta_1^2(x) \right) \geq \\
&\geq \frac{1}{2} B^{-3/2}(x) \left(-\int_x^A \beta_1(t) \beta_1'(t) dt - \frac{1}{2} \beta_1^2(x) \right) = 0,
\end{aligned}$$

бо $\beta_1'(x) = -1/\beta(x)$ – спадна функція. Отже, функція $B^{1/2}$ опукла на $[a; A)$.

Далі

$$\begin{aligned}
\ln a_n^0 &= \ln a_n^0 - \ln a_{n-1}^0 + \dots + \ln a_1^0 - \ln a_0^0 + \ln a_0^0 = \\
&= -\kappa_{n-1}^0 (\lambda_n - \lambda_{n-1}) - \dots - \kappa_0^0 (\lambda_1 - \lambda_0),
\end{aligned}$$

тобто

$$\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n^0} = \frac{\kappa_0^0 \lambda_1^* + \dots + \kappa_{n-1}^0 \lambda_n^*}{\lambda_1^* + \dots + \lambda_n^*}, \quad \lambda_n^* = \lambda_n - \lambda_{n-1}. \quad (3.81)$$

Тому за теоремою 3.1 з $f(x) = B(x)$, $p = 2$ і $\mu_n = 1$, $n \geq 1$ одержуємо

$$\sum_{n=1}^{\omega} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) B \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n^0} \right) \leq 4 \sum_{n=1}^{\omega} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) B(\kappa_{n-1}^0).$$

З іншого боку, $\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n^0} \leq \kappa_{n-1}^0$, і оскільки функція B спадна, то

$$\sum_{n=1}^{\omega} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) B \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n^0} \right) \geq \sum_{n=1}^{\omega} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) B (\kappa_{n-1}^0).$$

Тому з (3.80) випливає, що (3.78) виконується тоді і тільки тоді, коли виконується (3.79). Теорема 3.21 у випадку нескінченної кількості ребер у мажоранті Ньютона доведена.

Припустимо, що в діаграму входить промінь $[P_N; \infty)$, зрозуміло, з кутовим коефіцієнтом $\alpha_0 = A$. Тоді, з одного боку, максимальний член обмежений і, завдяки (3.77), виконується (3.78), а з іншого боку, і (3.79). Теорема 3.21 повністю доведена.

Використовуючи зв'язки між максимумом модуля та максимальним членом, можна знайти умови на послідовність (λ_n) , при яких у (3.78) можна замість $\ln \mu(\sigma)$ поставити $\ln M(\sigma)$. У цьому підрозділі ми розглянемо тільки випадки скінченного R -порядку і скінченного логарифмічного R -порядку.

Наслідок 3.13. *Нехай цілий ряд Діріхле (3.1) має скінченний R -порядок $\rho_R > 0$ і $\ln n = O(\lambda_n)$ при $n \rightarrow \infty$. Тоді для того, щоб виконувалось співвідношення (3.76), необхідно, а у випадку, коли послідовність $(\kappa_n(F))$ неспадна, і достатньо, щоб*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) |a_n|^{\rho_R / \lambda_n} < +\infty. \quad (3.82)$$

Справді, з умови $\ln n = O(\lambda_n) (n \rightarrow \infty)$ випливає, що $\tau_0 < +\infty$, і за наслідком 3.6 з теореми 3.9 виконується нерівність (3.32). З (3.32) і нерівності Коші випливає, що (3.76) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{\exp(\rho_R \sigma)} d\sigma < +\infty, \quad (3.83)$$

тобто виконується (3.78) з $\beta(\sigma) = \exp\{\rho_R \sigma\}$. У цьому випадку

$$B(x) = \int_x^\infty \int_t^\infty \frac{d\sigma}{\exp(\rho_R \sigma)} dt = \frac{1}{\rho_R^2 \exp\{\rho_R x\}}.$$

Для цілих рядів Діріхле $\sigma_a = \alpha_0 = +\infty$ (див. теорему 3.3). Тому за теоремою 3.21 співвідношення (3.83) виконуються тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \exp \left\{ -\frac{\rho_R}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n^0} \right\} < +\infty. \quad (3.84)$$

Але $|a_n| \leq a_n^0$. Тому з (3.84) випливає (3.82). У випадку, коли послідовність $(\kappa_n(F))$ неспадна, маємо $|a_n| = a_n^0$, тому співвідношення (3.84) і (3.82) рівносильні. Наслідок 3.13 доведено.

Оскільки означення порядку цілої функції і логарифмічного R -порядку $p_R > 1$ означається збіжністю інтегралу

$$\int_1^\infty \frac{\ln M(\sigma, F)}{\sigma^{p_R+1}} d\sigma < +\infty. \quad (3.85)$$

Наслідок 3.14. Нехай цілий ряд Діріхле (3.1) має скінченний логарифмічний R -порядок $p_R > 1$ і або $\ln n = o\left(\lambda_n^{p_R/(p_R-1)}\right)$ при $n \rightarrow \infty$, або виконується умова (3.34). Для того, щоб виконувалось співвідношення (3.85), необхідно, а у випадку, коли послідовність $(\kappa_n(F))$ неспадна, і достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \right)^{1-p_R} < +\infty. \quad (3.86)$$

Справді, якщо виконується (3.34), то з (3.35) і нерівності Коші легко випливає, що (3.85) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\int_1^\infty \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\sigma^{p_R+1}} d\sigma < +\infty. \quad (3.87)$$

У випадку, коли $\ln n = o\left(\lambda_n^{p_R/(p_R-1)}\right)$ при $n \rightarrow \infty$, такий самий висновок можна зробити на основі наслідку 3.8 з теореми 3.11. з $\Phi(x) = x^{p_R}$ для усіх досить великих x .

Якщо візьмемо $\beta(\sigma) = \sigma^{p_R+1}$, то

$$B(x) = \frac{1}{p_R(p_R-1)} x^{1-p_R}$$

і за теоремою 3.2 співвідношення (3.17) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n^0|} \right)^{1-p_R} < +\infty.$$

Подальше доведення наслідку 2 таке саме, як і наслідку 1.

Перейдемо до рядів Діріхле, абсолютно збіжних у півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < 0\}$. Для таких рядів скінченного логарифмічного R -порядку $p_R^0 > 0$ клас збіжності означимо збіжністю інтеграла

$$\int_{-1}^0 |\sigma|^{p_R^0-1} \ln M(\sigma) d\sigma < +\infty. \quad (3.88)$$

Наслідок 3.15. Нехай абсолютно збіжний у півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < 0\}$ ряд Діріхле (3.1) має скінченний логарифмічний R -порядок $p_R^0 > 0$ і або

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n}{\ln \lambda_n} < \frac{p_R^0}{p_R^0 + 1}, \quad (3.89)$$

або $\ln n = o\left(\ln^+ |a_n|\right)$, $n \rightarrow \infty$. Тоді для того, щоб виконувалось співвідношення (3.88), необхідно, а у випадку, коли послідовність $(\kappa_n(F))$ неспадна, і достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \left(\frac{\ln^+ |a_n|}{\lambda_n} \right)^{p_R^0+1} < +\infty. \quad (3.90)$$

Справді, якщо виконується умова (3.89), то, по-перше,

$\ln n = o(\lambda_n)$, $n \rightarrow \infty$, а по-друге, $\ln n = \lambda_n^\alpha (n \geq n_0)$, де $\alpha < \frac{p_R^0}{p_R^0 + 1}$, тобто

виконується (3.56) з $\gamma(x) = x^{\alpha-1}$ і $h_0 = 1$. Тому за наслідком 3.1 з теореми 3.3 $\sigma_a = \alpha_0 = 0$, а за теоремою 3.15 правильна нерівність (3.57), з якої в цьому випадку для усіх $\sigma < 0$ маємо

$$\ln M(\sigma) \leq \ln \mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}\right) + K_1(\varepsilon)|\sigma|^{1-1/(1-\alpha)}, K_1(\varepsilon) = \text{const}, \varepsilon > 0,$$

тобто

$$\int_{-1}^0 |\sigma|^{p_R^0-1} \ln M(\sigma) d\sigma \leq \int_{-1}^0 |\sigma|^{p_R^0-1} \ln \mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}\right) d\sigma + K_1(\varepsilon) \int_{-1}^0 |\sigma|^{p_R^0-1/(1-\alpha)} d\sigma.$$

Оскільки $\alpha < \frac{p_R^0}{p_R^0 + 1}$, то останній інтеграл у цій нерівності збіжний, а тому, з

огляду на нерівність Коші, бачимо, що співвідношення (3.88) рівносильне співвідношенню

$$\int_{-1}^0 |\sigma|^{p_R^0-1} \ln \mu(\sigma) d\sigma < +\infty. \quad (3.91)$$

Якщо ж $\ln n = o(\ln^+ |a_n|)$, $n \rightarrow \infty$, то за наслідком за наслідком 4 $\sigma_a = \alpha_0 = 0$, а за наслідком 3.9 з теореми 3.28 маємо (3.42) з $h_0 = 0$, звідки знову впливає еквівалентність співвідношень (3.88) і (3.91).

Виберемо $\beta(\sigma) = |\sigma|^{1-p_R^0}$. Тоді, якщо $p_R^0 \geq 1$, то функція β є неспадною на $(-\infty; 0)$ і

$$B(x) = \frac{1}{p_R^0(p_R^0 + 1)} |x|^{1+p_R^0}. \quad (3.92)$$

Тому за теоремою 3.21 співвідношення (3.91) виконується тоді і тільки тоді. Коли

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n^0} \right)^{p_R^0 + 1} < +\infty. \quad (3.93)$$

Оскільки $\left| \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n^0} \right| = \left| \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n^0} \right|$ і $\ln^+ |a_n| \leq \ln a_n^0$, то з (3.93) випливає (3.90). У випадку, коли послідовність $(\kappa_n(F))$ неспадна, одержуємо $|a_n| = a_n^0$, і тому співвідношення (3.93) і (3.90) еквівалентні. Наслідок 3 для $p_R^0 \geq 1$ доведено.

Якщо $0 < p_R^0 < 1$, функція β спадна, і ми не можемо посилатись на теорему 3.2. Але з (3.92) видно, що і в цьому випадку функція $B^{1/p}$ при $p = p_R^0 + 1$ є опуклою. Тому за теоремою 3.1 справджується висновок теореми 3.21, а з цим і висновок наслідку 3.15.

Припустимо, що абсолютно збіжний у півплощині $\{s: \operatorname{Re} s < 0\}$ ряд Діріхле (3.1) має скінченний R -порядок $\rho_R^0 > 0$, а клас збіжності означимо збіжністю інтеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{|\sigma|^2 \exp(\rho_R^0 / |\sigma|)} d\sigma < +\infty. \quad (3.94)$$

Наслідок 3.16. Нехай $\ln n = O(\ln \lambda_n)$, $n \rightarrow \infty$, і ряд Діріхле (3.1) має нульову абсцису абсолютної збіжності. Тоді для того, щоб виконувалось співвідношення (3.48), необхідно, а у випадку, коли послідовність $(\kappa_n(F))$ неспадна, і достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \left(\frac{\ln^+ |a_n|}{\lambda_n} \right)^2 \exp \left\{ -\frac{\rho_R^0 \lambda_n}{\ln^+ |a_n|} \right\} < +\infty. \quad (3.95)$$

Звідси випливає, що (3.94) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{|\sigma|^2 \exp(\rho_R^0 / |\sigma|)} d\sigma < +\infty, \quad (3.96)$$

тобто виконується (3.78) з $\beta(\sigma) = |\sigma|^2 \exp(\rho_R^0 / |\sigma|)$. Легко побачити, що функція β зростає на $[-\rho_R^0 / 2; 0)$, а

$$B(x) = \frac{1}{\rho_R^0} \int_0^x \frac{dt}{\exp\{\rho_R^0 / |t|\}} = \frac{1}{\rho_R^0} \int_{1/|x|}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \exp\{\rho_R^0 t\}}.$$

Використовуючи правила Лопіталя, отримуємо

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^y t^{-2} \exp\{-\rho t\} dt}{y^{-2} \exp\{-\rho y\}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^{-2} \exp\{-\rho y\}}{2y^{-3} \exp\{-\rho y\} + \rho y^{-2} \exp\{-\rho y\}} = \frac{1}{\rho}.$$

Тому

$$B(x) = \frac{1 + o(1)}{(\rho_R^0)^2} |x|^2 \exp\left\{-\frac{\rho_R^0}{|x|}\right\}, \quad x \rightarrow 0,$$

і за теоремою 3.21 співвідношення (3.96) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \left| \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n^0} \right|^2 \exp\left\{-\frac{\rho_R^0}{\left| \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n^0} \right|}\right\} < +\infty.$$

Подальше доведення наслідку 3.16 таке саме, як і наслідку 3.15.

Контрольні запитання

1. Навести формули для обчислення абсциси збіжності ряду Діріхле.
2. Сформулювати теорему про три прямі.
3. Дати означення максимального члена і центрального індексу ряду Діріхле.
4. Навести формули для обчислення R -порядку і R -типу цілих рядів Діріхле.
5. Дати означення порядку і типу абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле.

6. Дати означення класу збіжності цілої функції.

Приклади розв'язування задач

1. Знайти абсциси збіжності та абсолютної збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2n} e^{sn \ln n}.$$

$$\text{Якщо у нашому випадку } \tau = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

то використовуючи формулу

$$\sigma_a = \sigma_{\zeta} = - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} = - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^{-2n})}{n \ln n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \ln n}{n \ln n} = 2.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти абсциси збіжності і абсолютної збіжності даних рядів:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^3} e^{sn^2}$. Відповідь: $\sigma_{\zeta} = \sigma_a = +\infty$;

б) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} e^{s \ln \ln n}$. Відповідь: $\sigma_{\zeta} = +\infty, \sigma_a = -1$;

в) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} e^{s \ln \ln n}$. Відповідь: $\sigma_{\zeta} = +\infty, \sigma_a = -\infty$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{s \ln n}$. Відповідь: $\sigma_{\zeta} = 0, \sigma_a = -1$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{e^n} e^{sn^2}$. Відповідь: $\sigma_{\zeta} = \sigma_a = -\infty$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{3n} e^{sn \ln n}$. Відповідь: $\sigma_{\zeta} = \sigma_a = -3$;

є) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{sn}$. Відповідь: $\sigma_{\zeta} = \sigma_a = 0$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2} e^{sn^2}$. Відповідь: $\sigma_{\zeta} = \sigma_a = 2$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty} (1+n^2)^{-2} e^{sn}$. Відповідь: $\sigma_{\zeta} = \sigma_a = 0$.

Література

1. Гольдберг А. А., Островський І. В. Распределение значений мероморфных функций. – М. : Наука, 1970. – 591 с.
2. Кондратюк А. А., Галь Ю. М. Методичні вказівки до спецкурсу «Цілі функції. Ряди Діріхле». – Л. : ЛДУ, 1991. – 36 с.
3. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. – М. : Гостехиздат, 1956. – 632 с.
4. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. – М. : Наука, 1976. – 536.
5. Шеремета М. М, Бордуляк М. Т. Додатні функції. : Тексти лекцій. – Л. : Видавничий центр ЛНУ, 2001. – 61 с.
6. Шеремета М. М, Мулява О. М. Ряди Діріхле. : Тексти лекцій. – Л. : Видавничий центр ЛНУ, 2001. – 64 с.

Предметний покажчик

Абсциса збіжності 80
Абсолютна збіжність 80
Аналітична функція 52

Границя функції 5
Додатні функції 7
Діаграма Ньютона 96

Клас збіжності 121

Лічильна функція 40
Логарифмічний порядок 40

Максимум модуля 52
Максимальний член 93
Множина 5

Напівнеперервні функції 19
Нескінченні добутки 64
Нулі функції 62

Повільнозмінні функції 14
Порядок 57
Піки Пойя 31
Показник збіжності 41
Послідовність 5
Похідна 52,61

Ряд Діріхле 79
Радіус збіжності 52
Рівномірна збіжність 66,82

Степеневий ряд 52
Сума ряду 87

Тип функції 57

Уточнений порядок 25
Узагальнений порядок 111

Функція 5
Функціональний добуток 66

Щільність послідовності 43

Навчальне видання

Юрій ГАЛЬ, Ольга ЗОЛОТА

***ДОДАТНІ ФУНКЦІЇ, ЦІЛІ ФУНКЦІЇ,
РЯДИ ДІРІХЛЕ***

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

**Видавничий відділ
Дрогобицького державного педагогічного університету
імені Івана Франка**

Головний редактор
Ірина Невмержицька
Редактор
Іванна Біблій
Технічний редактор
Світлана Беуко

Здано до набору 06.05.2014 р. Підписано до друку 13.05.2014 р.
Формат 60x84/16. Папір офсетний. Гарнітура. Times. Наклад 300
прим. Ум. друк. арк.8,5. Зам. 85.

Видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного
університету імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб'єкта
видавничої діяльності до державного реєстру видавців, виготівників і
розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 2155 від 12.04.2005
р.). 82100, Дрогобич, вул. І.Франка, 24, к. 42, тел. 2–23–78.