**Передмова**

Даний посібник складений відповідно до програми курсу аналітичної геометрії для студентів перших курсів фізико-математичних факультетів університетів, охоплює повністю програму курсу.

При написанні посібника ми враховувати і те, що ним будуть користуватися і студенти-заочники, і особи, що вивчають предмет самостійно. Тому для кожної теми коротко викладено необхідний теоретичний матеріал, розв’язані типові приклади, наведені завдання для самостійної роботи та підсумкового контролю.

**ЗМІСТ**

Передмова …………………………………………………………………………..

**Розділ І. Метод координат, елементи векторної алгебри**

1. Декартова та полярна системи координат …………………………………..

2. Перетворення координат ……………………………………………………..

3. Основні задачі на координати ………………………………………………..

4. Вектори та лінійні операції над ними ………………………………………..

5. Скалярний добуток векторів…………………………………………………..

6. Векторний добуток векторів…………………………………………………...

7. Мішаний добуток векторів …………………………………………………….

**Розділ ІІ. Пряма лінія в площині**

* 1. Лінії в площині та їх рівняння.
  2. Основні види рівнянь прямої в площині.

2.3. Загальне рівняння прямої. Геометричний зміст многочлена *Ax+By+C*.

* 1. Взаємне розміщення двох прямих.
  2. Відстань від точки до прямої.
  3. Кут між двома прямими.

**Розділ ІІІ. Лінії другого порядку**

1. Коло…………………………………………………………………….

2. Еліпс…………………………………………………………………….

3. Гіпербола……………………………………………………………….

4. Парабола……………………………………………………………….

5. Рівняння конічних перерізів в полярних координатах………………

6. Загальне рівняння лінії другого порядку. Асимптотичні напрями …………

7. Діаметри ліній другого порядку. Головні напрями та головні діаметри ліній другого порядку…………………………………………………………………….

8. Центр лінії другого порядку……………………………………………………

9. Зведення рівняння лінії до канонічного вигляду…………………………….

**Розділ ІV. Перетворення площини**

* 1. Поняття перетворення площини, приклади.
  2. Група перетворень площини.
  3. Загальне поняття руху, аналітичний вираз руху.
  4. Паралельне перенесення, поворот навколо точки, осьова симетрія, центральна симетрія, ковзка симетрія.
  5. Орієнтовані трикутники.
  6. Розклад рухів на найпростіші.
  7. Група рухів площини та її підгрупи.
  8. Групова симетрія геометричних фігур, застосування рухів до шкільних задач.
  9. Перетвореня подібності та його властивості, гомотетія.

4.10. Стиск і спорідненість, афінне перетворення площини.

**Розділ V. Площина і пряма площини в просторі**

1. Рівняння площини………………………………………………………………..

2. Рівняння прямої в просторі………………………………………………………

3. Пряма і площина………………………………………………………………….

**Розділ VІ. Поверхні другого порядку**

1. Сфера……………………………………………………………………………….

2. Поверхні обертання………………………………………………………………..

3. Конуси………………………………………………………………………………

4. Циліндри……………………………………………………………………………

**Розділ VІІ. Поверхні другого порядку**

1. Квадрики в ………………………………………………………………………

2. Центр квадрики, перетин квадрик з прямою……………………………………..

3. Діаметр площини квадрики………………………………………………………..

4. Квадрики в ………………………………………………………………………

**Розділ І. Метод координат, елементи векторної алгебри**

1. ***Декартова та полярна системи координат***

Якщо на площині задана прямокутна система координат *хОу*, то точку *М* цієї площини, що має координати *х* та *у*, позначаємо .

У полярній системі координат розміщення точки *М* на площині визначається її відстанню  від полюса *О* ( – полярний радіус-вектор точки) і кутом , утвореним відрізком *ОМ*  з полярною віссю *Ох* ( –полярний кут точки). Кут  вважається додатним при відліку від полярної осі проти годинникової стрілки.

Символ  означає, що точка *М* має полярні координати  і , де , .

Якщо початок декартової прямокутної системи координат сумістити з полюсом, а вісь *Ох* направити по полярній осі, то перехід від полярних координат до декартових координат тієї ж точки здійснюється за формулами:

 .

***Задача 1.*** Знайти полярні координати точки .

*Розв’язання*





.

Оскільки , то кут  знаходиться в четвертій чверті  і тому . Отже, .

Відповідь: .

***Задача 1.*** Побудувати точки, задані полярними координатами: .

*Розв’язання*



0





***Задача 2.*** Знайти прямокутні координати точки .

*Розв’язання*



.

.

Отже, .

Відповідь: .

***Задача 3.*** Знайти полярні координати точок , симетричних відносно полярної осі до точок , , заданих в полярній системі координат.

*Розв’язання*

0









Відповідь: .

***Задача 4.*** Знайти полярні координати точок , симетричних відносно полюса до точок , .

*Розв’язання*









0

Відповідь: .

***Задачі для самостійного розв’язування***

1. Побудувати точки, задані полярними координатами: , , , .

2. Знайти прямокутні координати точок , , , , .

Відповідь: , , , , .

1. Знайти полярні координати точок: ,

.

Відповідь: .

4. Вивести формулу для обчислення відстані між двома точками  і , які задані в полярній системі координат.

5. Трикутник *АВС* заданий полярними координатами вершин . Довести, що даний трикутник рівнобедрений.

6. Довести, що трикутник *АВС* рівносторонній, якщо  задані в полярній системі координат.

7. Обчислити площу трикутника, якщо одна із його вершин міститься в полюсі, а дві інші мають полярні координати:

а) ;

б) .

Відповідь: а) ;

б) .

8. Дано рівносторонній трикутник *АВС*, сторона якого дорівнює 5. Взявши вершину *А* за полюс полярної системи координат, а напрямлену пряму *АВ* за полярну вісь, знайти полярні координати вершин і центра *О* трикутника.

Відповідь:

1) ;

2) .

9. Дано квадрат *ABCD* із стороною 3. Взявши вершину *А* за полюс полярної системи координат, а напрямлену пряму *АВ* за полярну вісь, знайти координати його вершин і точку перетину діагоналей.

Відповідь:

1) ;

2) .

10. Знайти полярні координати точок, симетричних до точок :

а) відносно полюса;

б) відносно полярної осі.

Відповідь:

а) ;

б) .

***2. Перетворення декартових координат***

***Перетворенням системи координат*** називається перехід від одної системи координат до іншої.

Формули перетворення афінної системи координат на площині мають вигляд:

 (1)

де , ,  – нові базисні вектори і новий початок координат у старій системі.

***Перетворення прямокутної системи координат***

1. Паралельне перенесення системи координат:

  (2)

де  – координати нового початку координат у старій системі.

1. Обертання системи координат навколо початку координат:

 (3)

якщо системи і  однаково орієнтовані, і

 ()

якщо системи координат протилежно орієнтовані.

***Задача 1.*** Записати формули перетворення загальної декартової системи координат на площині, якщо дано координати нових базисних векторів і нового початку координат у старій системі: , , .

*Розв’язання*

За умовою задачі , , , , , . Підставивши ці значення у формули (1), матимемо: 

Відповідь: 

***Задача 2.*** Знайти координати нових базисних векторів і нового початку в старій системі, якщо формули перетворення мають вигляд: 

*Розв’язання*

Згідно з формулами (1) матимемо: , , .

Відповідь: , , .

***Задача 3.*** Нехай *ОАВ* – довільний трикутник. Записати формули перетворення координат точок при переході від загальної декартової системи координат  до , якщо , , , , , .

*Розв’язання*

Y



0  A X

, , звідси .

,  звідси .

Тоді , , .

Формули перетворення матимуть вигляд: 

Відповідь: 

***Задача 4.*** Записати формули перетворення прямокутних декартових

координат для систем однакової орієнтації, якщо ,.

*Розв’язання*

Використавши формули (3) матимемо:



Відповідь: 

***Задачі для самостійного розв’язування***

1. Записати формули перетворення загальної декартової системи координат на площині, якщо дано координати нових базисних векторів і нового початку координат у старій системі:

а),  ;

б) ,  ;

в) ,  ;

г) ,  .

2. Знайти координати нових базисних векторів і нового початку в старій системі, якщо формули перетворення мають вигляд:

а) в) 

б)  г) 

3. Написати формули перетворення прямокутних декартових координат, якщо:

а) , , системи однаково орієнтовані;

б) ,, системи протилежно орієнтовні.

4. Нехай *ОАВ* – довільний трикутник. Записати формули перетворення координат точок при переході від загальної декартової системи координат  до , якщо

а) , , ;

б) , , .

Відповідь: 1) 

5. У трикутнику *АОВ* проведені медіани *AD* і *ВЕ*, що перетинаються в точці . Записати формули перетворення координат при переході від системи  до , якщо , , , , .

Відповідь: 

6. На площині *ХОУ* дано точку . Систему координат повернули навколо початку координат так, що нова вісь пройшла через точку *М*. Знайти старі координати точки *А*, якщо її нові координати , .

Відповідь: .

7. Дано точку . За нові координатні осі взяли прямі  (вісь ),  (вісь ). Знайти координати точки *А* у новій системі координат.

Відповідь: .

***3. Основні задачі на координати***

Якщо задані дві точки  і , то відстань між ними обчислюється за формулою: .

Координати точки , яка ділить відрізок  у відношенні  знаходимо за формулами: 

Площа трикутника  в площині обчислюється за формулою: , де , , .

***Задача 1.*** Відрізок з’єднує точки  та  і перетинає вісь ординат в точці *М*. В якому відношенні точка *М* ділить цей відрізок?

*Розв’язання*

Нехай точка *М* ділить відрізок *АВ* у відношенні , тоді:  **(1).** Оскільки точка М лежить на осі ординат, то , і матимемо з (1): , звідси .

Відповідь: .

***Задача 2.*** Дано вершини трикутника , , . Знайти довжину медіани *АМ* та бісектриси *ВD* внутрішнього кута *В.*

*Розв’язання*

Знайдемо координати точки *М* – середини відрізка *ВС*: ; . Тоді .

Знайдемо тепер координати точки *D*. Оскільки , то , . Отже, **. Довжина бісектриси .

Відповідь: ; .

***Задача 3.*** Обчислити площу паралелограма, три вершини якого є точки , ,.

*Розв’язання*

Знайдемо площу трикутника *ABC*:

.

Тоді площа паралелограма *S* дорівнює :

.

Відповідь: 20 кв. од.

***Задачі для самостійного розв’язування***

1. На осі ординат знайти точку *М*, відстань від якої до точки  дорівнює 17.

Відповідь: ,.

1. Дано дві протилежні вершини квадрата  і .Обчислити його площу.

Відповідь: 34.

1. Сторона ромба дорівнює , дві його протилежні вершини є , . Обчислити довжину висоти цього ромба.

Відповідь: .

1. Дано дві протилежні вершини квадрата  і . Знайти дві його інші вершини.

Відповідь: ,.

1. Дано дві суміжні вершини квадрата  і . Знайти дві його інші вершини.

Відповідь: ,; ,.

1. Обчислити площу рівностороннього трикутника, вершинами якого є  і .

Відповідь: .

1. Дано вершини чотирикутника , ,,. В якому відношенні діагональ *АС* ділить діагональ *BD*?

Відповідь: 1:3, рахуючи від точки *В*.

1. Дано вершини трикутника , ,. Знайти центр і радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

Відповідь: , *R = 10*.

1. Вершини трикутника лежать у точках , , . Знайти середину середньої лінії трикутника, паралельної до сторони .

Відповідь: .

1. Відрізок між точками  розділити на чотири частини.

Відповідь: .

1. Дано координати трьох вершин паралелограма: , ,. Знайти координати четвертої вершини паралелограма, якщо вершини  і  протилежні.

Відповідь: .

1. Знайти центр ваги однорідної трикутної пластинки, вершини якої є , , .

Відповідь: .

1. Відрізок  продовжений за точку  до точки , причому . Знайти точку , якщо .

Відповідь: .

1. Дано вершини трикутника . Довести, що  – прямокутний і обчислити довжину бісектриси прямого кута.

Відповідь: 2,5.

1. Точки  є серединами сторін трикутника. Знайти його вершини.

Відповідь: .

1. Дано дві суміжні вершини паралелограма  і точка перетину його діагоналей . Знайти дві інші вершини.

Відповідь: .

1. Вершини трикутника є точки . Обчислити довжину його висоти, проведеної з вершини .

Відповідь: 5.

1. Точки  є вершинами паралелограма. Обчислити довжину його висоти, опущеної із вершини  на сторону .

Відповідь: 7, 4.

1. Площа трикутника , дві його вершини є точки , а третя вершина  лежить на осі . Знайти координати вершини .

Відповідь:  або .

1. Площа трикутника , дві його вершини є точки , а третя вершина  лежить на осі . Знайти координати вершини .

Відповідь:  або .

***4. Вектори та лінійні операції над ними***

***Вектор*** – це напрямлений відрізок.

Для вектора  число, що дорівнює його довжині, називається його ***модулем*** і позначається .

Вектор називається ***нульовим***, якщо його модуль дорівнює нулю.

Якщо , то вектор  називається ***одиничним*** або ***ортом***.

Два вектори  і  називаються ***рівними***, якщо:

1. рівні їх модулі;
2. вони паралельні;
3. співнапрямлені.

Два вектори з рівними модулями, що лежать на паралельних прямих, але протилежно напрямлені, називаються ***протилежними***. Вектор, протилежний до вектора , позначають через .

Проекції будь-якого вектора  на осі деякої заданої системи координат позначаються буквами  і записують  або .

Якщо дві точки  і  є початком і кінцем вектора , то його координати , , , тобто . Тоді .

Якщо  – кути, які утворює вектор  з координатними осями, то  називаються ***напрямними косинусами вектора***  і  та .

***Сумою двох векторів***  і  називається вектор, який іде з початку вектора  в кінець вектора  при умові, що вектор  прикладений до кінця вектора (***правило трикутника***).

 



***Правило паралелограма***: якщо вектори  і  зведені до спільного початку і на них побудовано паралелограм, то сумою  є вектор, що співпадає з діагоналлю паралелограма, яка виходить зі спільного початку векторів  і . Звідси випливає, що .







***Різницею***  векторів  і  називається вектор, який в сумі з вектором дорівнює вектору . Якщо два вектори  і  зведені до спільного початку, то вектор, що йде із кінця вектора  до кінця вектора , є різницею .

***Добутком***  (або ) ***вектора на число***  називається вектор, модуль якого дорівнює добутку модуля вектора  на модуль числа ; він паралельний до вектора  або лежить з ним на одній прямій і співнапрямлений з , якщо  і протилежно напрямлений до , якщо .

Якщо ,  задані своїми координатами, то ; ; .

Вектори, що лежать на одній прямій або паралельних прямих, називаються ***колінеарними.***

Якщо , , то ***ознакою*** їх ***колінеарності*** є пропорційність їх координат: .

Вектор , початок якого знаходиться в початку координат, а кінець в точці  називається радіус-вектором точки *М* і позначають . Очевидно, що .

***Задача 1.*** У трикутнику *АВС* сторону *АВ* точками *М* і *N* поділено на три рівні частини. Знайти вектор , якщо , .

*Розв’язання*

C

А М N B

Знаходимо . Значить, . Оскільки , то маємо: .

Відповідь: .

***Задача 2.*** У трикутнику *АВС*  – радіус-вектори його вершин. Знайти радіус-вектор точки перетину медіан трикутника.

*Розв’язання*

В

Р К

М

А D С

Нехай *АК, ВD, CP* – медіани в трикутнику *АВС* і . Тоді .

Точка *К* – середина сторони *ВС*.  .

.

.

Точка *М* – точка перетину медіан.

, тому .

.

Відповідь: .

***Задача 3.*** Дано вектори , . При яких значеннях  будуть колінеарні вектори  і ?

*Розв’язання*

Знаходимо координати векторів  і :

; .

Тоді з умови колінеарності векторів  і :  знаходимо .

Відповідь: .

***Задачі для самостійного розв’язування***

1. Дано точки *А(1;3;2)* і *В(-2;1;1)*. Знайти координати векторів .

Відповідь: .

1. Знайти початок вектора , якщо його кінець співпадає з точкою *В(1;-1;2).*

Відповідь: *А(-1;2;3).*

1. Обчислити модуль вектора, якщо:

а) ;

б) ;

в) ;

г) .

Відповідь:

а) ; б) ; в) ; г) .

4. Дано  і кути , , . Обчислити проекції вектора  на координатні осі.

Відповідь: ; ; .

1. Обчислити напрямні косинуси вектора , якщо:

а) ;

б) .

Відповідь: а) ;

б) .

6. Чи може вектор утворювати з координатними осями кути:

а) , , ;

б) , , ;

в) , , ?

Відповідь: а) так; б) ні; в)так.

7. Вектор утворює з осями *ОХ* і *ОZ* кути , . Який кут він утворює з віссю *ОУ*?

Відповідь: або .

8. Знайти одиничні вектори (орти), співнапрямлені з векторами:

а) ;

б) ;

в) .

Відповідь: а) ; б) ; в) .

9. У трикутнику *АВС* вектори  направлені вздовж медіан. Виразити їх через вектори  і .

Відповідь: .

10. У трикутнику *АВС* точки *D* і *М* – середини сторін *АВ* і *ВС*. Виразити вектори  через  і .

Відповідь: .

11. У паралелограмі *АВСD* в точці *О* – перетинаються діагоналі, а точки *M, N, P, Q* – відповідно середини сторін *АВ, ВС, CD* i *DA.* Побудувати вектори:

а) ; д) ;

б) ; е) ;

в) ; є) .

г) ;

12. Нехай *ABCDFE* – правильний шестикутник, *О* – його центр. Виразити вектори  через вектори  і .

13. Користуючись паралелограмом, побудованим на векторах  і , перевірте справедливість тотожностей:

а)  ;

б) ;

в) .

14. У паралелограмі *АВСD*  точка *О* – точка перетину діагоналей. Знайти  через вектори  і .

15. Дано трикутник АВС і довільна точка О. Нехай  – середини сторін ВС, СА, АВ. Довести, що рівнодійна сил дорівнює рівнодійній сил .

16. У паралелограмі *АВСD*  точки E i F – середини протилежних сторін *ВС* і *AD*, а *О* – точка перетину діагоналей. Вектори  і  – базисні. Знайти координати векторів:

а) ; г) ;

б) ; д) ;

в) ; е) .

Відповідь: а); б) ; в) , г) ;

д) ; е) .

17. У ромбі *АВСD* вектори  і  – базисні. Знайти координати векторів  в цьому базисі.

Відповідь: .

18. Вектори  і  взаємно перпендикулярні, , . Знайти  і .

Відповідь: .

19. Вектори  і  утворюють кут , причому , . Знайти  і .

Відповідь: .

20. Вектори  і  утворюють кут , причому , . Знайти  і .

Відповідь: .

21. При яких значеннях  і  вектори  і  колінеарні?

Відповідь: , .

22. Перевірити, чи точки *А(3;-1;2), В(1;2;-1), С(-1;1;-3), D(3;-5;3)* є вершинами трапеції.

23. Перевірити колінеарність векторів  і . Встановити, який із них довший від другого і у скільки разів, та як вони направлені.

24. Дано вектори , , . Знайти координати векторів:

а) ; в) ;

б) ; г) .

Відповідь: а) ; в) ;

б) ; г) .

25. Серед пар векторів  і  знайти пари колінеарних векторів:

а)  і ;

б)  і ;

в)  і .

26. На площині дано два вектори , . Знайти розклад вектора  за базисом , .

Відповідь: .

27. На площині дано три вектори ,  і . Знайти розклад кожного з цих векторів, беручи за базисні два інших.

Відповідь: .

28. Дано три вектори ,  і . Знайти розклад вектора  за базисними векторами  і .

Відповідь: .

29. Дано вектори ,  і . Знайти розклад вектора  за базисом .

Відповідь: .

30. Дано вектори ,  і . При якому значенні  вектори і  колінеарні?

Відповідь: .

1. ***Скалярний добуток векторів***

***Скалярним добутком векторів***  називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Це записується так:



***Властивості скалярного добутку:***

1. ;
2. ;
3. ;
4. .

Якщо , то .

Скалярні добутки ортів осей координат: , .

Кут  між векторами  обчислюється з формули: .

Якщо вектори  перпендикулярні, то .

Фізичний зміст скалярного добутку двох векторів – робота сили на певному шляху.

***Задача 1.*** Вектори  утворюють кут . Знаючи, що 

, обчислити .

*Розв’язання*

.

Відповідь: .

***Задача 2.*** Знайти кут між векторами .

*Розв’язання*





Відповідь: 

***Задача 3.*** Дано вектори . При якому значенні *m* ці вектори перпендикулярні?

*Розв’язання*

Оскільки , то .

Знаходимо .

Звідси .

Відповідь: .

***Задача 4.*** У трикутнику *АВС* відомо , де  – взаємно перпендикулярні орти. Обчислити довжину медіани *АМ*.

*Розв’язання*

В

М

А С

.

.

, або .

.

Відповідь: .

***Задача 5.*** Обчислити, яку роботу виконує сила , якщо її точка прикладання переміщується з початку в кінець вектора .

*Розв’язання*

Робота .

Відповідь: .

***Задачі для самостійного розв’язування***

1. Вектори  утворюють кут . Знаючи, що , обчислити:

а) ;

б) ;

в) ;

г) .

Відповідь: а) 9; б) 37; в) 73; г) -61.

1. Вектори взаємно-перпендикулярні, а вектор  утворює з ними кути . Знаючи, що , , обчислити:

а) ;

б) ;

в) .

Відповідь: а) 162; б) 373; в) -62.

1. Вектори , ,  попарно утворюють один з одним кути, кожен з яких дорівнює . Обчислити модуль вектора , якщо , .

Відповідь: .

1. Дано, що . При якому значенні  вектори  перпендикулярні?

Відповідь: .

5. Вектори  утворюють кут . Знаючи, що , обчислити кут  між векторами .

Відповідь: 

6. Дано вершини трикутника  Знайти його внутрішній кут при вершині *В*.

Відповідь: .

7. Дано вершини трикутника  Знайти його внутрішній кут при вершині *В*.

Відповідь: .

8. Знайти вектор , колінеарний до вектора  і який задовольняє умову .

Відповідь: .

9. Дано вектори . Знайти вектор , який є перпендикулярний до осі *OZ* і задовольняє умови: .

Відповідь: .

10. Обчислити проекцію вектора  на вісь вектора .

Відповідь: 6.

11. Дано вектори . Обчислити проекцію вектора  на вісь вектора .

Відповідь: -11.

12. Дано точки  Обчислити проекцію вектора  на вісь вектора .

Відповідь: 3.

13. Обчислити, яку роботу виконує сила , якщо її точка прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується з положення  в положення .

Відповідь: 31.

14. Дано сили , прикладені до однієї точки. Обчислити, яку роботу виконує рівнодійна цих сил, якщо її точка прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщається з положення  в положення .

Відповідь: 13.

***6. Векторний добуток векторів***

***Векторним добутком*** вектора  на вектор  називається третій вектор , який задовольняє наступні умови:

1) , де  – кут між векторами  і ;

2) вектор  перпендикулярний до векторів  і ;

3) вектори ,  і  утворюють праву трійку.









Векторний добуток вектора  на вектор  позначають через  або .

*Властивості векторного добутку*

1. ;

2.  – площа паралелограма, побудованого на векторах  і ;

3. ;

4. ;

5. ;

6. .

Якщо , то



або .

*Фізичний зміст векторного добутку*: якщо вектор  зображає силу, прикладену до якої-небудь точки *А*, а вектор  йде від деякої точки *В* у точку *А*, то вектор  є моментом сили  відносно точки *В*.

***Задача 1.*** Знайти площу трикутника з вершинами  .

*Розв’язання*

Площа трикутника *АВС* дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах , тому .

Знаходимо вектори : . Тоді:

.

.

Отже, .

Відповідь: .

***Задача 2.*** Сила  прикладена до точки . Знайти величину моменту цієї сили відносно початку координат.

*Розв’язання*

Момент  сили  відносно початку координат дорівнює . Знаходимо . Тоді . Величина моменту сили дорівнює .

Отже, .

Відповідь 174.

***Задачі для самостійного розв’язування***

1. Знайти координати і модулі векторів:

а) ; в) ;

б) ; г) ,

якщо .

Відповідь: а); б) ; в) ; г) .

1. Спростити вирази:

а) ;

б) ;

в) .

Відповідь:

а) ;

б) ;

в) .

1. Обчислити , якщо , , а кут між ними .

Відповідь: 3.

1. Дано , , . Обчислити .

Відповідь: .

1. Дано , , . Обчислити .

Відповідь: .

6. Вектори  і  взаємно-перпендикулярні. Знаючи, що , , обчислити:

а) ;

б) .

Відповідь:

а) 24;

б) 60.

7. Знайти координати векторів, якщо :

а) ;

б) .

Відповідь:

а) ;

б) .

8. Обчислити площу трикутника *АВС* у кожному з випадків:

а) ;

б) ;

в) .

Відповідь: а) ; б) ; в) .

9. Знайти відстань від точки  до прямої, що проходить через точки .

Відповідь: .

10. Знайти момент сили , прикладеної до точки *А*, відносно точки *В*, якщо:

а) ;

б) ;

в) .

Відповідь:

а) , б) , в) .

11. Вектор , перпендикулярний до осі ОZ і до вектора , утворює гострий кут з віссю ОХ. Знаючи, що , знайти його координати.

Відповідь: .

12. Знайти вектор , знаючи, що він перпендикулярний до векторів  та задовольняє умову .

Відповідь: .

13. Вектори  такі, що , . Довести колінеарність векторів .

14. Дано три сили , прикладені до точки . Знайти величину моменту рівнодійної цих сил і його напрямні косинуси відносно точки .

Відповідь: .

15. Дано вершини трикутника . Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини *В* на сторону *АС*.

Відповідь: 5.

***7. Мішаний добуток векторів***

***Мішаним добутком векторів***  ,  і  називається скалярний добуток векторів  на вектор :

.

Якщо , то мішаний добуток

.

***Модуль мішаного добутку*** трьох векторів ,  і  дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

*Властивості мішаного добутку*

1. Мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, якщо:

а) хоч один із цих трьох векторів дорівнює нулю;

б) два вектори колінеарні;

в) усі три вектори паралельні одній і тій же площині (компланарні).

2. Мішаний добуток не зміниться, якщо в ньому поміняти місцями знаки векторного  і скалярного  множення, тобто .

3. Мішаний добуток не змінюється, якщо переставляти вектори в круговому порядку: .

4. При перестановці будь-яких двох векторів мішаний добуток міняє тільки знак: .

Із властивостей мішаного добутку трьох векторів випливає, що:

1. необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів є умова ;
2. об’єм  паралелепіпеда, побудованого на векторах ,  і  і об’єм  утвореної ними трикутної піраміди знаходимо за формулами:

; .

***Задача 1.*** Обчислити  і , якщо , .

*Розв’язання*

. Тоді .

Відповідь: , .

***Задача 2.*** Обчислити .

*Розв’язання*

Оскільки , то ці вектори компланарні.

 



Отже, мішаний добуток цих векторів дорівнює нулю, тобто 

Відповідь: .

***Задача 3.*** Обчислити об’єм трикутної піраміди з вершинами ,

.

*Розв’язання*

Знаходимо вектори , що співпадають з ребрами піраміди, що сходиться у вершині *А*: , ,

. Обчислимо мішаний добуток :

.

Оскільки об’єм піраміди дорівнює  частині об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах , то  (куб.од.)

Відповідь:  куб. од.

***Задачі для самостійного розв’язування***

1. Чи є компланарними вектори ,  і :

а) ;

б) ;

в) .

Відповідь: а) так; б) ні; в) так.

1. Довести, що точки , лежать в одній площині.
2. Довести, що .

4. Вектори ,  і  утворюють праву трійку, взаємно перпендикулярні. Знаючи, що , обчислити .

Відповідь: 24.

1. Вектор  перпендикулярний до векторів  і , кут між  і  дорівнює . Знаючи, що , обчислити .

Відповідь: .

6. Дано паралелепіпед , побудований на векторах . Знайти:

а) об’єм паралелепіпеда;

б) площі граней;

в) довжину висоти, проведеної з вершини  на грань .

Відповідь:

а) ;

б) ;

в) .

7. Дано тетраедр, побудований на векторах  . Знайти:

а) об’єм тетраедра;

б) площі граней;

в) довжину висоти, проведеної з вершини *D*.

Відповідь:

а) ;

б) ;

в) .

8. Об’єм тетраедра , три його вершини знаходяться у точках . Знайти координати четвертої вершини *D*, якщо відомо, що вона лежить на осі *Оу*.

Відповідь: .

9. Об’єм тетраедра , три його вершини знаходяться у точках . Знайти координати четвертої вершини *D*, якщо відомо, що вона лежить на осі *Оz*.

Відповідь: .

10. Обчислити добуток , , , якщо .

Відповідь: .

**Розділ ІІ. Пряма в площині**

У прямокутних координатах рівняння прямої в площині задається в одному із наступних видів:

1. рівняння прямої, що проходить через дану точку  із заданим напрямним вектором : ;
2. рівняння прямої, що проходить через дві задані точки  і : ;
3. рівняння прямої, що проходить через задану точку  і має кутовий коефіцієнт : ;
4. рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом : , де *b* – ордината точки перетину прямої з віссю *ОУ*;
5. рівняння прямої у відрізках: , де *a, b* – довжини відрізків, які відтинає пряма на координатних осях;
6. параметричне рівняння прямої:  де  – напрямний вектор,  – дана точка, *t* – параметр.

7) загальне рівняння прямої: , де  – вектор нормалі прямої,  – напрямний вектор прямої,  – кутовий коефіцієнт,  – рівняння прямої, заданої точкою  і вектором нормалі .

8) нормальне рівняння прямої: , де  – довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму, а  – кут, утворений цим перпендикуляром з додатним напрямом осі ОХ. Для зведення загального рівняння прямої до нормального виду слід обидві його частини помножити на нормуючий множник , причому знак вибирається протилежним до знаку вільного члена *С* рівняння прямої . Особливості нормального рівняння прямої: , вільний член рівняння від’ємний.

9) відстань від точки  до прямої  обчислюється за формулою:

.

1. умови паралельності двох прямих:

а) ;

б) .

11) умови перпендикулярності двох прямих:

а) ;

б) .

12) дві прямі  і  перетинаються лише у випадку, коли .

13) кут між двома прямими обчислюється за формулою , де  – кутові коефіцієнти цих двох прямих відповідно, або

, .

14) якщо  і  – рівняння прямих, що перетинаються, то , де  – числовий множник – рівняння пучка прямих, що проходять через точку перетину (центр пучка) заданих прямих.

***Задача 1.*** Дано загальне рівняння прямої . Написати:

а) рівняння з кутовим коефіцієнтом;

б) рівняння у відрізках;

в) нормальне рівняння.

*Розв’язання*

а) розв’язавши рівняння прямої відносно , одержимо рівняння з кутовим коефіцієнтом:

. Тут .

б) 

в) знаходимо нормуючий множник:



 нормальне рівняння прямої.

Тут .

***Задача 2.*** Які особливості в розміщенні прямих:

1)  4) ,

2) , 5) .

3) ,

Відповідь: 1) проходить через початок координат;

2) паралельна до осі ОУ;

3) паралельна до осі ОХ;

4) співпадає з віссю ОХ;

5) співпадає з віссю ОУ.

***Задача 3.*** Дано вершини трикутника . Скласти рівняння сторін трикутника медіани ; висоти ; прямої , що проходить через вершину , паралельно до сторони .

*Розв’язання*

1. знаходимо рівняння сторін трикутнику за двома точками:

;



або .

Аналогічно шукаємо рівняння двох інших сторін.

1. рівняння медіани  знаходимо, знаючи точки :





3) оскільки вектор  є перпендикулярним до , то рівняння висоти  знайдемо за точкою  і вектором нормалі :



1. для прямої  вектор  є напрямленим вектором, тому скористаємося канонічним рівнянням прямої:

,

де  – координати точки ,  – координати вектора ,



 – рівняння прямої .

***Задача 4.*** Написати рівняння прямої, що проходить

а) через точку ;

б) паралельно до прямої ;

в) перпендикулярно до прямої .

Рівняння шуканих прямих знайдемо у вигляді , де  – точка ,  – кутовий коефіцієнт шуканих прямих.

а) оскільки за умовою задачі дві прямі паралельні, то кутовий коефіцієнт  шуканої прямої дорівнює кутовому коефіцієнту прямої , тобто , тоді рівняння прямої



б) кутовий коефіцієнт шуканої прямої знайдемо з умови , тобто . Тоді



 – рівняння шуканої прямої.

Відповідь: а) ; б) .

***Задача 5.***  Знайти рівняння прямої, паралельної до прямої , яка відтинає від координатного кута трикутник, площа якого *3 кв. од.*

*Розв’язання*

Нехай  і  – відрізки, які відтинає шукана пряма на осях ОХ і ОУ відповідно. Тоді



Оскільки шукана пряма паралельна до прямої , то її рівняння матиме вигляд



або



де  .

Отже, маємо



Рівняння шуканої прямої має вигляд:

 або .

Але  – задана пряма в умові задачі, тоді  – шукана.

Відповідь: .

***Задача 6.*** Через точку  провести пряму, відстані якої до точок  і  були б рівні.

*Розв’язання*

Рівняння шуканої прямої, що проходить через точку , запишемо у вигляді:

 або .

Тоді відстань від точки  до цієї прямої дорівнює

,

а від точки  до цієї ж прямої дорівнює

.

Оскільки , тому

.

Звідси  або .

Отже, існує дві прямі

 або ,

 або .

Відповідь:

**Розділ ІІІ. Лінії другого порядку**

***1. Коло***

Коло з центром в точці  і радіусом *R* має вигляд .

Очевидно, що:

1.  – рівняння кола з центром на осі абсцис ;
2.  – рівняння кола з центром на осі ординат ;
3.  – рівняння кола з центром у початку координат .

Рівняння кола може бути в загальному вигляді записане так: .

***Задача 1.*** Коло з центром в точці  проходить через початок координат. Записати його рівняння.

*Розв’язання*

Запишемо рівняння шуканого кола з центром  у вигляді: .

Оскільки коло проходить через початок координат, то матимемо: , звідки .

Таким чином рівняння кола виглядає так: .

Відповідь: .

***Задача 2.*** Записати рівняння кола, описаного навколо трикутника *АВС*, якщо .

*Розв’язання*

Нехай шукане рівняння кола має вигляд: .

Для знаходження *a, b* i *r* запишемо три рівності, підставивши в шукане рівняння замість *х* і *у* координати точок *А, В* і *С*:



Виключивши , отримуємо систему рівнянь:

або , звідки .

Значення  знаходимо з рівняння , тобто .

Рівняння кола є таким .

Відповідь: .

***Задача 3.*** Знайти рівняння хорди кола , що ділиться в точці  пополам.

*Розв’язання*

Знайдемо рівняння діаметра кола, що проходить через точку  (і через  згідно умови): .

Шукана хорда перпендикулярна до діаметра і проходить через точку *А*, тоді її рівняння матиме вигляд: .

Відповідь: .

***Задача 4.*** Знайти рівняння кола, що проходить через точки  і , якщо центр його лежить на прямій .

*Розв’язання*

Центр кола лежить на перетині даної прямої з перпендикуляром, проведеним з середини хорди *АВ*.

Знайдемо рівняння цього перпендикуляра. Точка *М* – середина хорди *АВ*, отже, . Таким чином .

Рівняння перпендикуляра шукаємо у вигляді: .

Рівняння *АВ*: . Тоді  і  – рівняння перпендикуляра.

Знаходимо координати центра кола: , звідки , тобто  – центр кола. Радіус кола .

Отже, рівнянням кола є .

Відповідь: .

***Задачі для самостійного розв’язування***

1. Які з наведених рівнянь є рівняннями кола:

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) ;

е) .

2. Знайти центри і радіуси кіл:

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) ;

Відповідь:

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) , кола не існує.

3. Через точки  провести кола з центром

а) на осі абсцис;

б) на осі ординат.

Відповідь:

а) ;

б) .

4. Скласти рівняння кола, що проходить через точки .

Відповідь: 

5. Записати рівняння кола, що проходить через точки , знаючи, що його центр лежить на прямій .

Відповідь: .

6. Скласти рівняння кола з центром в точці  і дотичною .

Відповідь: .

7. Скласти рівняння кола, якщо точки  є кінцями одного із діаметрів кола.

Відповідь: .

8. Скласти рівняння хорди кола , що ділиться в точці  пополам.

Відповідь: .

9. Записати рівняння кола, що проходить через точку  і точки перетину кіл .

Відповідь: .

10. Визначити, які лінії задаються наступними рівняннями:

1) ; 5) ;

2) ; 6) ;

3) ; 7) ;

4) ; 8) .

11. Скласти рівняння кола, симетричного до кола  відносно прямої .

Відповідь: .

12. Скласти рівняння дотичної до кола  у точці .

Відповідь: .

13. Скласти рівняння дотичної до кола  у точці .

Відповідь: .

14. Скласти рівняння дотичної до кола , що проходять через точку .

Відповідь: .

15. З точки  проведені дотичні до кола . Скласти їх рівняння.

Відповідь: .

***2. Еліпс***

***Еліпсом*** називається геометричне місце точок, сума відстаней яких від двох даних точок (фокусів) є величина стала і більша, ніж відстань між фокусами.

Сталу суму відстаней довільної точки еліпса до фокусів позначають через *2а*. Фокуси еліпса позначають буквами , а відстань між ними через *2с*. Згідно означення еліпса  або .

***Канонічне рівняння еліпса*** , де . Тоді фокуси еліпса розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат.

у

В М d

  0  А  х

ОА = *а* – велика піввісь; ОВ = *b* – мала піввісь;  – фокуси; .

Число  називається ***ексцентриситетом*** еліпса (). Ексцентриситет характеризує ступінь видовженості еліпса.

Відрізки  називаються ***фокальними радіусами*** точки  еліпса і .

Прямі  називаються ***директрисами*** еліпса. Якщо , то директриси мають рівняння .

Кожна директриса володіє властивістю: якщо *r* – відстань від будь-якої точки еліпса до деякого фокуса, *d* – відстань від цієї ж точки до односторонньої з цим фокусом директриси, то відношення  є величина стала і дорівнює ексцентриситету еліпса:.

***Фокальний параметр*** еліпса *р* – довжина половини його хорди, що проходить через один з фокусів, перпендикулярно до великої осі: .

***Діаметр*** еліпса – пряма, на якій лежать середини паралельних хорд еліпса. Рівняння діаметра еліпса, спряженого до хорд з кутовим коефіцієнтом *k* має вигляд: .

Два діаметри еліпса, кожен з яких спряжений до хорд, паралельних до другого діаметра, називаються ***спряженими діаметрами***. Умова спряженості двох діаметрів еліпса: .

***Рівняння дотичної*** до еліпса  ***в точці***  має вигляд: .

***Задача 1.*** Знайти канонічне рівняння еліпса, що проходить через точку  і має ексцентриситет .

*Розв’язання*

Канонічне рівняння еліпса має вигляд: . Еліпс проходить через точку *А*, значить, її координати задовольняють рівняння еліпса. Маємо: .

За умовою задачі . Звідси ,  і . Тоді  і маємо систему:  розв’язавши яку, одержимо .

Отже,  – шукане рівняння еліпса.

Відповідь: .

***Задача 2.*** Ексцентриситет еліпса дорівнює , а відстань від точки *М* еліпса до директриси дорівнює 12. Знайти відстань від точки *М* до відповідного фокуса.

*Розв’язання*

За умовою задачі маємо, що , . Тому, скориставшись рівністю , знаходимо  – відстань від точки *М* до фокуса.

Відповідь: .

***Задачі для самостійного розв’язування***

1. Написати рівняння еліпса, що проходить через точку , фокуси якого знаходяться у точках .

Відповідь: .

2. Знайти рівняння і фокуси еліпса з вершинами  .

Відповідь: , .

3. Знайти довжини осей еліпса .

Відповідь: .

4. Знайти координати вершин еліпса 

Відповідь: .

5. Фокуси еліпса лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат. Різниця осей 6, а їх відношення 2. Знайти рівняння цього еліпса.

Відповідь: .

6. Фокуси еліпса лежать в точках , а його ексцентриситет дорівнює 0,8. Знайти рівняння еліпса.

Відповідь: .

7. При якому відношенні між осями еліпса його ексцентриситет дорівнює:

а) ; б) .

Відповідь: а) , б) .

8. Написати рівняння еліпса, якщо:

а) відстань між фокусами 8, а ексцентриситет ;

б) ексцентриситет , мала вісь 4;

в) еліпс проходить через точку  і відстань між фокусами 6;

г) еліпс проходить через точку  і ексцентриситет ;

д) відстань між директрисами 12, а велика вісь ;

е) відстань між директрисами , а між фокусами ;

є) прямі  є директрисами, а мала вісь 4.

Відповідь:

а) ; г) ; є) .

б) ; д) ;

в) ; е) ;

9. Дано еліпс . Знайти фокальні радіуси точок , що належать даному еліпсу.

Відповідь: .

10. Дано еліпс . Знайти відстань від кінців більшої осі до однієї з директрис.

Відповідь: .

11. Відрізок, що з’єднує фокуси еліпса, видно із кінця його малої осі під кутом:

а) ;

б) .

Обчислити ексцентриситет еліпса.

Відповідь: а); б) .

12. На прямій  знайти точку, однаково віддалену від лівого фокуса і верхньої вершини еліпса .

Відповідь: .

13. Скласти рівняння геометричного місця точок, відстань яких від точки  у два рази менша відстані від прямої .

Відповідь: .

14. Знайти рівняння еліпса, якщо відомі її ексцентриситет , фокус  і рівняння відповідної директриси .

Відповідь: .

***3. Гіпербола***

***Гіперболою*** називається геометричне місце точок, для яких різниця відстаней від двох фіксованих точок площини, що називаються ***фокусами***, є величина стала і дорівнює *2а*. Відстань між фокусами дорівнює *2с*, тому *а < c.*

Якщо фокуси гіперболи розміщені на осі абсцис в прямокутній системі координат симетрично відносно початку координат, то рівняння гіперболи в цій системі має вигляд , де  і називається ***канонічним рівнянням гіперболи.*** В цьому випадку початок координат є ***центром симетрії гіперболи***, а осі координат – ***осями симетрії гіперболи***.

Відрізки *2а* і *2b* називають ***дійсною*** і ***уявною осями гіперболи***.

У випадку *а = b* гіпербола  називається ***рівносторонньою***.

Число  називається ***ексцентриситетом*** гіперболи, причому .

Для будь-якої точки  гіперболи відрізки і – ***фокальні радіуси*** точки *М.* Для точок правої вітки гіперболи фокальні радіуси , , а для лівої вітки , .

Прямі  називаються ***директрисами*** гіперболи. Кожна директриса володіє *властивістю*: , де *r* – відстань від довільної точки гіперболи до фокуса, *d* – відстань від цієї ж точки до односторонньої з цим фокусом директриси.

Прямі  називаються ***асимптотами*** гіперболи.

Якщо гіпербола задана рівнянням , то ***рівняння дотичної*** до гіперболи в точці  має вигляд: .

***Рівняння діаметра***, що спряжується хордами з кутовим коефіцієнтом *k*, задається таким рівнянням: .

***Умова спряженості двох діаметрів***: якщо  – кутові коефіцієнти двох взаємно-спряжених діаметрів гіперболи, то .

***Задача 1.*** Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між фокусами дорівнює 8, а кут нахилу однієї із асимптот .

*Розв’язання.*

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд . За умовою *2с = 8*, звідси *с = 4*.

Оскільки , то .

Рівняння асимптоти , де .

Отже, матимемо систему рівнянь: з якої , .

Таким чином, шукана гіпербола має рівняння: .

Відповідь: .

***Задача 2.*** Знайти рівняння дотичної до гіперболи  у точці .

*Розв’язання*

Рівняння дотичної до даної гіперболи запишемо у вигляді , де , . Тоді матимемо:  або .

Відповідь: .

***Задачі для самостійного розв’язування***

1. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо:

а) відстань між фокусами 6 і ексцентриситет дорівнює ;

б) ексцентриситет дорівнює , а дійсна вісь *2а = 16*;

в) гіпербола проходить через точку  і має ексцентриситет ;

г) гіпербола проходить через точку  і кут між асимптотами до-рівнює ;

д) гіпербола проходить через точку  і дійсна піввісь дорівнює 3;

е) гіпербола має асимптоту  і директриси ;

є) рівняння асимптот  і відстань між директрисами дорівнює ;

ж) рівняння асимптот  і відстань між вершинами 48;

з) гіпербола рівнобічна і проходить через точку .

Відповідь:

а) ; г) ; є) ;

б) ; д) ; ж) ;

в) ; е) ; з) .

2. Знайти фокуси, ексцентриситет, величину осей і асимптоти гіперболи:

а) ;

б) ;

в) .

3. Записати рівняння гіперболи, що має спільні фокуси з еліпсом  і проходить через точку .

Відповідь: .

4. Для гіперболи  написати рівняння співфокусної з нею гіперболи, що проходить через точку .

Відповідь: .

5. Фокуси гіперболи співпадають з фокусами еліпса . Знайти рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет дорівнює 2.

Відповідь: .

6. Знайти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать у вершинах еліпса , а директриса проходить через фокуси цього еліпса.

Відповідь: .

7. Знайти кут між асимптотами гіперболи, якщо відомо її ексцентриситет:

а) ;

б) .

Відповідь: а) ;

б) .

8. Кут між асимптотами гіперболи дорівнює . Знайти ексцентриситет гіперболи.

Відповідь: .

9. Знайти фокальні радіуси гіперболи  у точках перетину її з колом .

Відповідь: 6;14.

10. На лівій вітці гіперболи  знайти точку, правий фокальний радіус якої дорівнює 18.

Відповідь: .

11. Через точку  і праву вершину гіперболи  проведена пряма. Знайти другу точку перетину прямої з гіперболою.

Відповідь: .

12. Визначити, які лінії задаються такими рівняннями:

а) ; г) ;

б) ; д) ;

в) ; е) .

13. Знайти рівняння гіперболи, якщо відомі її ексцентриситет , фокус  і рівняння відповідної директриси .

Відповідь: .

14. Точка  лежить на гіперболі, фокус якої , а відповідна директриса дана рівнянням . Знайти рівняння цієї гіперболи.

Відповідь: .

15. Знайти рівняння гіперболи, якщо відомі точка , що їй належить, фокус  і відповідна директриса .

Відповідь: .

16. Знайти рівняння дотичних до гіперболи , які перпендикулярні до прямої .

17. Знайти рівняння дотичних до гіперболи , перпендикулярних до прямої .

Відповідь: ,.

18. Знайти рівняння дотичних до гіперболи , паралельних до прямої .

Відповідь: , .

19. Знайти рівняння дотичних до гіперболи , проведених з точки .

Відповідь: , .

20. Через точку  провести хорду гіперболи , що ділиться в цій точці пополам.

Відповідь: .

***4. Парабола***

***Параболою*** називається геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки, що називається ***фокусом***, і даної прямої – ***директриси.***

Якщо фокусом є точка , а директрисою – пряма , то рівняння

 (1)

є рівнянням параболи, яка розміщена симетрично до осі абсцис.

у

d М

r

0 F х

Рівняння

 **(2)**

є рівнянням параболи, симетричної відносно осі ординат.

При  параболи (1) і (2) напрямлені в додатну сторону відповідної осі, а при  – у від’ємну сторону.

***Довжина фокального радіуса*** параболи  обчислюється за формулою .

***Дотична*** до параболи  у точці  має вигляд .

Для параболи , а рівняння , де *к* – кутовий коефіцієнт хорд, спряжених з діаметром, є ***рівнянням діаметра параболи*** .

Усі діаметри параболи паралельні до її осі.

***Задача 1.*** Парабола симетрична відносно осі абсцис і проходить через точку , а вершина її лежить в початку координат. Знайти її рівняння.

*Розв’язання*

Згідно до умови задачі рівняння параболи може мати вигляд  або . Оскільки шукана парабола проходить через точку *А* з додатною абсцисою, то її рівняння має вигляд . Підставивши в це рівняння координати точки *А*, одержимо , звідси . Тоді  – шукане рівняння параболи.

Відповідь: .

***Задача 2.*** Знайти рівняння діаметра параболи , спряженого з хордою .

*Розв’язання*

Усі діаметри параболи паралельні. Їх рівняння , де *к* – кутовий коефіцієнт спряженої хорди.

У нашому випадку *р = 6*, *к = -3* і рівнянням шуканого діаметра є *у = -2*.

Відповідь: *у = -2*.

***Задачі для самостійного розв’язування***

1. Знайти координати фокуса і рівняння директриси для кожної з парабол:

а) ; в) ; д) ;

б) ; г) ; е) .

2. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо:

а) фокус ; г) фокус ;

б) фокус ; д) рівняння директриси: ;

в) фокус . е) рівняння директриси: .

3. Знайти канонічне рівняння параболи, якщо фокус знаходиться в точці перетину прямої  з віссю *ОХ*.

Відповідь: .

4. На параболі  знайти точку, віддаль якої до директриси параболи дорівнює 4.

Відповідь: , .

5. Обчислити фокальний радіус точки *М* параболи , якщо її абсциса дорівнює 8.

Відповідь: 10.

6. На параболі  знайти точку, фокальний радіус якої дорівнює 8.

Відповідь: .

7. На параболі  знайти точку, фокальний радіус якої дорівнює 9.

Відповідь: , .

8. Вісь параболи направлена по осі ординат, вершиною її є початок координат, а фокус віддалений від директриси на 8. Знайти параболу.

Відповідь: ; .

9. Парабола  відтинає від прямої, що проходить через початок координат, хорду довжиною . Знайти рівняння цієї прямої.

Відповідь: .

10. На параболі  знайти точку, віддаль якої до прямої  дорівнює 2.

Відповідь: .

11. Визначити, які лінії задані рівняннями:

а) ; г) ; є) ;

б) ; д) ; ж) ;

в) ; е) ; з) .

12. Знайти рівняння параболи, якщо дано її фокус  і директриса .

Відповідь: .

13. Знайти рівняння параболи, якщо дано її фокус  і директриса .

Відповідь: .

14. Знайти рівняння параболи, якщо дано її фокус  і директриса .

Відповідь: .

15. Дано вершину параболи  і рівняння її директриси . Знайти фокус параболи.

Відповідь: .

16. Дано вершину параболи  і рівняння її директриси . Знайти рівняння цієї параболи.

Відповідь: .

17. При яких значеннях кутового коефіцієнта  пряма :

а) перетинає параболу ;

б) дотикається до неї;

в) проходить поза параболою.

Відповідь: а) ; б) ; в) .

18. Знайти точки перетину еліпса  і параболи .

Відповідь: .

19. Знайти точки перетину гіперболи  і параболи .

Відповідь: .

20. Знайти найкоротшу відстань між параболою  і прямою .

Відповідь: .

21. Знайти найкоротшу відстань від точок параболи  до прямої .

Відповідь: .

22. Знайти рівняння дотичної до параболи  в точці .

Відповідь: .

23. Знайти рівняння прямої, що дотикається до параболи  і паралельної до прямої .

Відповідь: .

24. До параболи проведена дотична, яка паралельна до прямої . Обчислити відстань між цією дотичною і даною прямою.

Відповідь: .

25. Знайти рівняння прямої, яка дотикається до параболи  і перпендикулярна до прямої .

Відповідь: .

26. До параболи  з точки  проведені дотичні. Знайти їх рівняння.

Відповідь: .

27. Знайти рівняння діаметра параболи , що проходить через середину її хорди, яка відтинається на прямій .

Відповідь: .

28. Під гострим кутом до горизонту кинули камінь, який, рухаючись по параболі, упав на відстані 24м від початкового положення. Знайти рівняння траєкторії руху, знаючи, що найбільша висота, яку досягнув камінь, дорівнює 6м.

Відповідь: .

29. Струмінь води, направлений під гострим кутом до горизонту, піднявся на висоту 2м і впав на відстані 12м від наконечника шланга. Знайти рівняння траєкторії руху.

Відповідь: .

30. Обчислити площу рівностороннього трикутника *АВС*, вписаного в параболу з параметром *р*, якщо точка *А* є вершиною параболи.

Відповідь: .

***5. Рівняння конічних перерізів в полярних координатах***

Якщо полярна система координат вибрана так, що полюс знаходиться у фокусі, а полярна вісь направлена по осі лінії в бік, протилежний ближчій до цього фокуса директрисі, то полярне рівняння, спільне за формою для еліпса, однієї вітки гіперболи і параболи, має вигляд:

,

де  – полярні координати довільної точки лінії,  – фокальний параметр (половина фокальної хорди лінії, перпендикулярної до осі),  – ексцентриситет кривої.

***Задача 1.*** Яка лінія задана рівнянням  в полярних координатах?

*Розв’язання*

Зведемо дане рівняння до виду : . Оскільки , то ця крива – еліпс.

Відповідь: еліпс.

***Задача 2.*** Знайти рівняння еліпса  у полярній системі координат.

*Розв’язання*

З рівняння еліпса знаходимо: , . Тоді  і ; , а рівняння еліпса в полярних координатах має вигляд: .

Відповідь: .

***Задачі для самостійного розв’язування***

1. Які криві другого порядку задані наступними рівняннями в полярних координатах:

а) ; г) ;

б) ; д) ;

в) ; е) .

2. Написати канонічне рівняння еліпса, заданого полярним рівнянням .

Відповідь: 

3. Написати канонічне рівняння гіперболи, якщо рівняння  визначає праву вітку гіперболи і полюс знаходиться у правому фокусі гіперболи.

Відповідь: .

4. Записати канонічне рівняння параболи, якщо її полярне рівняння: 

Відповідь: .

5. На еліпсі  знайти точки, полярний радіус яких дорівнює 6.

Відповідь: .

6. На гіперболі  знайти точки, полярний радіус яких дорівнює 3.

Відповідь: .

7. На параболі  знайти точки:

а) з найменшим полярним радіусом;

б) з полярним радіусом, що дорівнює параметру параболи.

Відповідь: а) ;

б) .

8. Знайти полярні рівняння кривих:

а) ; г) ;

б) ; д) ;

в)  е) 

Відповідь:

а) ; г) ;

б) ; д) ;

в) ; е) .

9. Знайти полярні рівняння директрис кривої, заданої полярним рівнянням .

Відповідь: .

10. Знайти полярні рівняння директрис кривої, заданої полярним рівнянням: .

Відповідь: .

***6. Загальне рівняння лінії другого порядку***

***6. 1. Перетин лінії з прямою***

У загальній декартовій системі координат лінія другого порядку задається рівнянням

. (1)

***Задача.*** Знайти точки перетину лінії  з прямою .

*Розв’язання*

Для знаходження точок перетину даних лінії і прямої розв’яжемо систему рівнянь:





Отже, існує дві точки  перетину.

Відповідь: .

***Задачі для самостійного розв’язування***

1.Знайти точки перетину лінії  з прямими:

а) 

б) 

Відповідь:

а) ;

б) .

2.Знайти точки перетину лінії  з:

а) віссю *ОХ*;

б) віссю *ОУ*.

Відповідь:

а) ;

б) не існує.

***6. 2. Дотична до лінії***

Для лінії другого порядку (1) рівняння дотичної в точці має вигляд

.

***Задача.*** Знайти дотичну до лінії  у її точці .

*Розв’язання*

Рівняння дотичної даної кривої у точці дотику  має вигляд:

 і у точці  буде таким: 

.

Відповідь: .

***Задачі для самостійного розв’язування***

1. Знайти рівняння дотичних до лінії , що проходять через точку .

Відповідь: , .

1. Через початок координат провести дотичні до лінії .
2. Знайти рівняння дотичних до лінії , які проходять через точку .
3. До лінії  провести дотичні, паралельні до прямої .

Відповідь: .

1. Знайти рівняння дотичних до ліній , паралельних до прямої .

Відповідь:

1. До лінії  провести дотичні, паралельні до прямої .

Відповідь:

***6. 3. Асимптотичні напрями і асимптоти ліній***

Вектор, координати якого задовольняють рівняння , є вектором асимптотичного напряму відносно лінії другого порядку.

Рівняння асимптоти для даної кривої має вигляд .

***Задача.*** Знайти вектор асимптотичного напряму лінії .

*Розв’язання*

Запишемо умову асимптотичності вектора для даної лінії:  або , де . .

Отже, існує два вектори асимптотичного напряму, що мають кутові коефіцієнти . Тому в якості шуканих векторів можна взяти вектори  і .

Відповідь: , 

***Задачі для самостійного розв’язування***

1. Знайти вектори асимптотичного напряму для наступних ліній:

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) .

Відповідь:

а)  в)  д) 

б) не існує г) не існує

2. Знайти рівняння асимптот наступних ліній:

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) ;

е) ;

є) ;

ж) .

Відповідь:

а) ;

б) ;

в) ;

г) не існує;

д) ;

е) ;

є) ;

ж) .

***6.4. Діаметри ліній. Головні напрями, головні діаметри ліній***

***Рівняння діаметра лінії другого порядку***

, де вектор  є векто-ром неасимптотичного напряму.

Співвідношення , де  і  є ***умовою спряженості напрямів,*** заданих векторами  і .

Вектор  є ***вектором головного напряму*** лінії другого порядку, якщо виконується умова: .

Рівняння , де  – вектор головного напряму, є ***рівнянням головного діаметра*** лінії другого порядку.

***Задача.*** Для кривої  знайти діаметр, що проходить через точку .

*Розв’язання*

Запишемо рівняння діаметра дано кривої  або , де . Оскільки точка  належить цьому діаметру, то маємо: , звідки .

Підставивши знайдене значення  у загальне рівняння діаметра, одержимо рівняння, що проходить через точку *А*:  або .

Відповідь: .

***Задачі для самостійного розв’язування***

1. Для кривої  знайти діаметри, що спряжені з вектором:

а) ;

б) .

2. Знайти рівняння діаметра, що проходить через точку  для лінії .

3. Знайти рівняння діаметра лінії , що проходить через точку .

4. Знайти рівняння діаметра лінії , що спряжений:

а) з віссю *ОХ*;

б) з віссю *ОУ*.

5. Для яких ліній:

а) усі діаметри паралельні?

б) усі діаметри співпадають?

в) при якій умові вісь *ОХ* є одним із діаметрів лінії, заданої загальним рівнянням?

6. Знайти два спряжених діаметри лінії  з яких один проходить через точку .

7.Знайти два спряжених діаметри лінії , які утворюють кут .

8. Знайти два спряжених діаметри лінії , один з яких паралельний до осі *ОУ*.

9. Знайти два спряжених діаметри лінії , один з яких проходить через точку .

10. Знайти головні напрями наступних ліній другого порядку:

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) .

11. Знайти головні напрями ліній:

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) ;

е) ;

є) ;

ж) ;

з) .

12. Знайти головні діаметри:

а) пари прямих, що перетинаються;

б) пари паралельних прямих.

***6.5. Центр лінії***

***Центром лінії*** називається точка, що є центром симетрії цієї лінії. Лінії, що мають один центр, називаються ***центральними***.

Якщо точка  є центром лінії, то її координати задовольняють систему рівнянь: 

Якщо , то лінія є центральною.

***Задачі для самостійного розв’язування***

1.Знайти множини центрів для кожної з наступних ліній:

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) ;

е) ;

є) ;

ж) .

Відповідь:

а) ; д) немає центра;

б) ; е) немає центра;

в) ; є) ;

г) ; ж) .

2. При яких значеннях *m* i *n* рівняння  задає:

а) центральну лінію;

б) лінію без центра;

в) лінію, що має нескінченно багато центрів.

Відповідь:

а) , *n* – довільне;

б) *m* = 4, ;

h) *m* = 4, *n* = 6.

3. Знайти спільний діаметр двох ліній другого порядку  і .

***6.6. Зведення рівняння лінії до канонічного виду***

Нехай лінія другого порядку має рівняння:

 **(1)**

Якщо , то обертанням системи координат навколо початку на деякий кут  рівняння (1) можна звести до виду:

, **(2)**

де – корені характеристичного рівняння

,



.

Далі рівняння (2) можна спростити перенесенням початку координат.

***Задача.*** Звести рівняння лінії  до канонічного виду.

*Розв’язання*



а) Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:



б) ; .

в) 

і рівняння має вигляд:  або .

г) Знайдемо новий початок координат:







д)  (парабола)

Відповідь: .

***Задачі для самостійного розв’язування***

1. Звести рівняння ліній до канонічного виду:

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) ;

е) ;

є) ;

ж) ;

з) ;

к) .

2. Звести рівняння ліній до канонічного виду:

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) ;

е) ;

є) ;

ж) ;

з) ;

к) .

**Розділ IV. Перетворення площини**

Перетворення площини називається ***рухом***, якщо для кожних двох точок площини *А*, *В* і їх образів  виконується рівність , тобто якщо зберігається відстань між кожними двома точками.

Прямокутні декартові координати точки і її образу при русі задовольняють формули:



де .

Найпростіші види рухів: паралельне перенесення, центральна симетрія, симетрія відносно прямої, обертання.

Перетворення площини називається ***подібністю***, якщо для будь-яких точок *А* і *В* та їх образів  і  має місце рівність , де  – коефіцієнт подібності.

Кожне перетворення подібності можна задати в прямокутній системі координат формулами:



де  – координати образу початку координат,  – кут між віссю *ОХ* і її образом.

***Афінним перетворенням площини*** називається таке перетворення площини на себе, яке зберігає колінеарність точок і просте відношення трьох точок.

Формули перетворення афінної системи координат:



де , , .

***Задачі для самостійного розв’язування***

1. У загальній декартовій системі координат дано афінне перетворення формулами  Знайти:

а) образи точок , , ,  і векторів , , , ;

б) прообрази точок , , ,  і векторів , , , .

Відповідь:

а) , , , ;

, , , .

б) , , , ;

, , , .

1. У загальній декартовій системі координат дано афінне перетворення формулами  Знайти:

І. образи прямих:

а) осі ОХ;

б) ;

ІІ. прообрази прямих:

в) осі ОУ;

г) .

Відповідь:

а) ;

б) ;

в) ;

г) .

1. Знайти нерухомі точки афінних перетворень:

а) 

б) 

в) 

Відповідь:

а) ;

б) пряма нерухомих точок ;

в) немає нерухомих точок.

1. Написати формули афінного перетворення, що переводить точки , ,  в точки , ,  відповідно.

Відповідь: 

1. В даній прямокутній системі координат записати формули:

І. паралельного перенесення на вектор , якщо:

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

ІІ. центральної симетрії з центром в точці *С*, якщо:

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

ІІІ. обертання з центром в точці *С* на кут , якщо:

а) ;

б) ;

в) .

Відповідь:

І. а)  б)  в)  г) 

ІІ. а)  б)  в)  г) 

ІІІ. а)  б)  в) 

1. Записати формули осьової симетрії, вісь якої в прямокутній декартовій системі координат задана рівняннями:

а) ;

б) ;

в) ;

г) .

Відповідь:

а)  б)  в)  

1. У прямокутній декартовій системі координат записати формули ковзкої симетрії з віссю *l* і вектором паралельного перенесення , якщо:

а) ;

б) ;

в) .

Відповідь:

а)  б)  в) 

1. У прямокутній декартовій системі координат записати формули перетворення гомотетії з центром в точці  і коефіцієнтом .

Відповідь: 

1. Знайти координати центра повороту, заданого формулами 

Відповідь: .

1. Записати формули гомотетії, при якій трикутник *АВС* переходить у трикутник , якщо , , , , , .

Відповідь: 

1. Площина обертається навколо точки  на кут  так, що . В яку пряму при цьому обертанні перейде пряма .

Відповідь: .

***Приклади розв’язування задач***

***Задача 1.*** У загальній декартовій системі координат афінне перетворення задане формулами  Знайти образ осі ОУ.

*Розв’язання*

Формули афінного перетворення запишемо так: і знайдемо *у*, додавши до першого рівняння системи друге рівняння. Маємо: , звідки .

Оскільки рівняння осі *ОУ* є , то  і  або  є рівнянням образу прямої ОУ.

Відповідь: .

***Задача 2.*** Знайти рівняння прямої, симетричної до прямої  відносно прямої  в прямокутній системі координат.

*Розв’язання*

Знайдемо координати осьової симетрії, якщо віссю симетрії є пряма . Якщо точки  і  симетричні відносно прямої, то  (напрямний вектор осі симетрії) і середина відрізка  належить осі симетрії.

, ,  – середина .

Отже, маємо:  

Знайдемо  через  з цієї системи.

.

Тоді .

Отже, маємо формули симетрії відносно прямої :

 (1)

Знайдемо образи точок  і  прямої , симетричних відносно осі , згідно формул (1).

 і .

Тоді образом прямої  буде пряма, що переходить через точки . Її рівняння є таким:  або .

Відповідь: .