

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

Завідувач кафедри математики,
кандидат педагогічних наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК

«___» _____ 2023 р.

Тригонометричні нерівності в олімпіадних задачах з математики

Спеціальність 014. Середня освіта (Математика)

Магістерська робота
на здобуття кваліфікації – Вчитель математики. Вчитель фізики. Вчитель
інформатики.

Автор роботи Бобонич Т. _____
підпис

Науковий керівник
доктор філософії в галузі математики
Войтович Христина Олегівна _____
підпис

Дрогобич, 2023

Зав. кафедри

(підпис)

(дата)

Завдання на підготовку магістерської роботи

1. **Тема:** Тригонометричні нерівності в олімпіадних задачах з математики
2. **Керівник:** Войтович Христина Олегівна
3. **Студент:** Бобонич Тетяна
4. **Перелік питань, що підлягають висвітленню у кваліфікаційній роботі:**
 - збір матеріалів завдань з міжнародних олімпіад з теми тригонометрія.
 - підготовка варіантів розв'язків завдань з міжнародних олімпіад з теми тригонометрія.
5. **Список рекомендованої літератури:**

Titu Andreescu, Zuming Feng, 103 Trigonometry Problems: From the Training of the USA IMO Team, Birkhauser, 2004

Desheng Yang. Trigonometric Functions And Complex Numbers: In Mathematical Olympiad And Competitions. World Scientific Publishing Company, 2016

Етапи підготовки роботи

№	Назва етапу	Термін виконання	Термін звіту перед керівником, кафедрою
1.	Затвердження теми.	Жовтень 2022	
2.	Огляд літератури з даної проблеми.	Листопад-грудень 2022	Грудень 2022
3.	Підготовка першого та другого розділу.	Січень-травень 2023	Червень 2023
4.	Підготовка третього та четвертого розділу.	Вересень-жовтень 2023	Жовтень 2023
5.	Подача магістерської роботи науковому керівнику.	Жовтень 2023	Жовтень 2023
6.	Попередній захист магістерської роботи.	Листопад 2023	Листопад 2023

6. Дата видачі завдання **01.11.2022 р.**
7. Термін подачі роботи керівнику **31.10.2023 р.**
8. З вимогами до виконання кваліфікаційної роботи і завданням ознайомлена

(підпис студента)

9. Керівник _____

(підпис)

Захист магістерської роботи

Раціональні та ірраціональні числа в шкільних математичних задачах

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

_____ Дата _____ Голова ДЕК _____ підпис _____ прізвище, ім'я _____

Секретар ДЕК _____ Підпис _____ прізвище, ім'я _____

Анотація

У даній магістерській роботі зібрані завдання міжнародних математичних змагань, подані розв'язки до цих завдань. Для кращого розуміння подані також теоретичні матеріали. Мета роботи полягає в формуванні міні-посібника, який стане в нагоді при підготовці до математичних олімпіад.

Ключові слова: олімпіада з математики, міжнародні математичні змагання, тригонометрія.

Annotation

In this master's thesis, problems of international mathematical competitions are collected, solutions to these problems are presented. For better understanding, theoretical materials are also presented. The goal of the work is to create a mini-manual that will be useful in preparing for the mathematical Olympiads.

Keywords: mathematics Olympiad, international mathematical competitions, trigonometry.

Зміст

Вступ	6
1. Застосування формул суми та різниці аргументів	8
2. Існування, єдиність і тригонометричні підстановки	18
3. Формула Муавра	31
Висновок	43
Список використаної літератури	44

Вступ

Олімпіада з математики – це почесне змагання, яке проводиться в різних класах і дає учням безцінні можливості продемонструвати свої математичні здібності. Це можливість для молодих людей проявити свої таланти та розширити межі своїх математичних знань, розвивати критичне мислення, міркування та навички вирішення проблем.

На відміну від звичайних шкільних іспитів, математичні олімпіади покликані розкрити справжню суть математичних знань. Ці змагання мають на меті виховати конкурентоспроможність серед учнів та студентів і заохотити їх стати досвідченими розв’язувачами проблем. Вирішуючи складні проблеми за допомогою набутих математичних знань, учні природним чином розвивають впевненість у своїх силах, озброюючи їх цінними навичками, які виходять за межі класної кімнати.

Перша міжнародна математична олімпіада відбулася в Румунії в 1959 році. Спочатку конкурс був обмежений лише країнами Східного блоку, але поступово розширився, щоб охопити більше країн. Перша Всеукраїнська олімпіада з математики відбулася в Чернігові в 1992 році.

Підготовка до олімпіади це завзвичай складний процес, який вимагає зосередження та кропіткої праці. Одним з основних елементів в процесі підготовки є розвинути вміння застосовувати прості математичні методи та прийоми в процесі розв’язування задач, не боятися поєднувати між собою формули, які на перший погляд важко застосувати. Для того щоб розвивати такі вміння дуже корисним є опрацювання олімпіадних задач минулих років. Зазвичай доступ до таких задач можна легко знайти в мережі інтернет.

Олімпіадні задачі належать до різних галузей математики середньої школи, які широко класифікуються як геометрія, теорія чисел, алгебра та комбінаторика. Вони не вимагають знання вищої математики, такої як обчислення та аналіз, а рішення часто елементарні. Однак вони зазвичай маскуються, щоб ускладнити процес розв’язання. Не без уваги залишилися і завдання з тригонометрії. Історія тригонометрії налічує понад 4000 років.

Розвиток тригонометрії від простих спостережень неба неозброєним оком до її використання у складних сучасних технологіях є однією з найважливіших і цікавих історій про те, як математика лежить в основі важливого розділу нашої культурної еволюції.

Тригонометрія містить велику кількість формул, які без розуміння теми важко просто «зазубрити», саме це часто найбільше лякує учнів та студентів на початку вивчення теми. А словосполучення олімпіадні задачі з тригонометрії мабуть налякало чи насторожило не одного любителя математики.

Саме тому **мета** магістерської роботи: підготувати теоретичний та практичний матеріал для підготовки учнів та студентів до участі у олімпіадних змаганнях з основним акцентом на тригонометричні задачі або задачі де застосовуються знання з тригонометрії.

Об'єктом магістерської роботи є задачі з тригонометрії, **предметом** методи, підходи та етапи розв'язування тригонометричних олімпіадних задач.

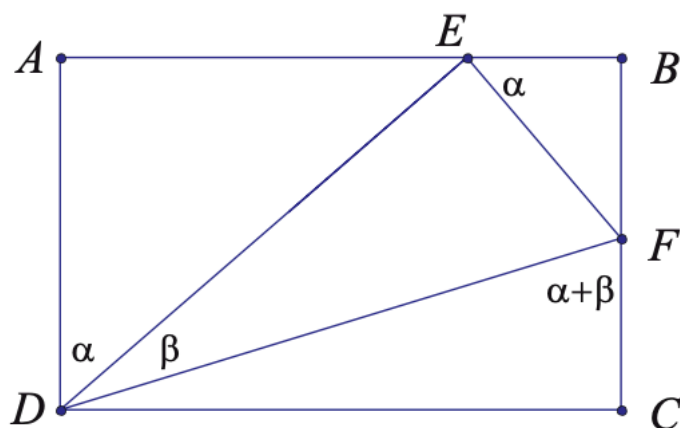
Для реалізації мети магістерської роботи були сформовані наступні завдання:

- огляд літератури за заданою тематикою, дослідження проблематики питання
- пошук теоретичних та практичних завдань за заданою тематикою
- опрацювання знайдених матеріалів, робота над методами та підходами до розв'язування задач за заданою тематикою.
- узагальнення отриманих результатів.

1. Застосування формул суми та різниці аргументів

Для двох кутів α і β з $0^\circ < \alpha, \beta, \alpha + \beta < 90^\circ$ не важко помітити, що тригонометричні функції не задовольняють адитивному розподільчому закону ; тобто такі тотожності, як $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$ і $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha + \cos \beta$, не відповідають дійсності. Наприклад, встановивши $\alpha = \beta = 30^\circ$, ми маємо $\cos(\alpha + \beta) = \cos 60^\circ$, що не дорівнює $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos 30^\circ = \sqrt{3}$. Природно, ми можемо поставити собі такі запитання, як $\sin \alpha$, $\sin \beta$ і $\sin(\alpha + \beta)$ пов'язані між собою.

Розгляньмо схему на рисунку 1.1. Нехай DEF — прямокутний трикутник із $\angle DEF = 90^\circ$, $\angle FDE = \beta$ і $|DF| = 1$, вписаний в прямокутник $ABCD$. (Це завжди можна зробити таким чином. Побудувати пряму l_1 , яка проходить через D поза трикутником DEF так, щоб прямі l_1 і DE утворювали гострий кут, відповідний до α . Побудувати пряму l_2 , яка проходить через D і перпендикулярна до прямої l_1 . Тоді точка A є основою перпендикуляра від E до прямої l_1 , а точка C основа перпендикуляра від F до l_2 . Точка B є точкою перетину прямих AE і CF .)



Обчислимо довжини відрізків всередині цього прямокутника. В трикутнику DEF маємо $|DE| = |DF| \cdot \cos \beta = \cos \beta$ і $|EF| = |DF| \cdot \sin \beta = \sin \beta$. В

трикутнику ADE , $|AD| = |DE| \cdot \cos \alpha = \cos \alpha \cos \beta$ і $|AE| = |DE| \cdot \sin \alpha = \sin \alpha \cos \beta$.

З того, що $\angle DEF = 90^\circ$ слідує $\angle AED + \angle BEF = 90^\circ = \angle AED + \angle ADE$, і тому $\angle BEF = \angle ADE = \alpha$. (Альтернативно, можна скористатися подібністю прямокутних трикутників ADE і BEF .) В трикутнику BEF , маємо $|BE| = |EF| \cdot \cos \alpha = \cos \alpha \sin \beta$ і $|BF| = |EF| \cdot \sin \alpha = \sin \alpha \sin \beta$. Оскільки $AD \parallel BC$, $\angle DFC = \angle ADF = \alpha + \beta$. В прямокутному трикутнику CDF , $|CD| = |DF| \cdot \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta)$ і $|CF| = |DF| \cdot \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta)$.

З вище написаного можна зробити висновок, що

$$\cos \alpha \cos \beta = |AD| = |BC| = |BF| + |FC| = \sin \alpha \sin \beta + \cos(\alpha + \beta),$$

це означає, що

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Аналогічно отримаємо

$$\sin(\alpha + \beta) = |CD| = |AB| = |AE| + |EB| = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

тобто

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

З означення функції tg , отримаємо

$$\begin{aligned} tg(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{tg \alpha + tg \beta}{1 - tg \alpha tg \beta}. \end{aligned}$$

Таким чином, ми довели формули додавання для функцій синуса, косинуса і тангенса для кутів у обмеженому інтервалі. Подібним чином ми можемо отримати формулу додавання для функції котангенса.

Через визначення тригонометричних функцій зручніше мати справу з тригонометричними функціями в контексті прямокутних трикутників. Наведемо декілька прикладів.

Приклад 1.1. На рисунку 1.1 зображено довгу прямокутну смужку паперу, один кут якої було зігнуто вздовж AC до протилежного краю, утворюючи таким чином кут θ ($\angle CAB$ на рисунку 1.2). Враховуючи, що ширина смужки становить w дюймів, виразіть довжину складки AC через w і θ . (Ми припускаємо, що θ знаходиться в діапазоні від 0° до 45° , тому реальна ситуація згортання узгоджується з конфігурацією, показаною на рисунку 1.1) Розглянемо два розв'язки.

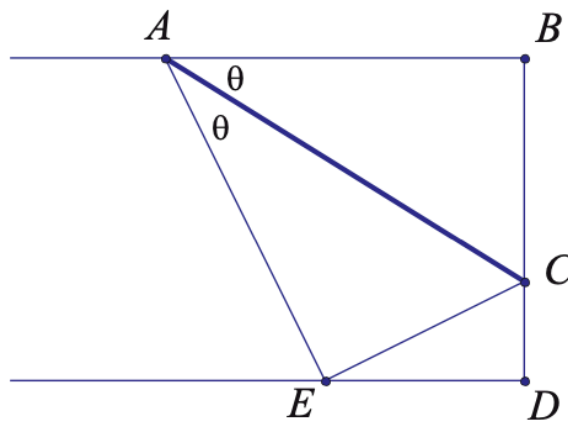


рис. 1.2

Перший розв'язок. В прямокутному трикутнику ABC , маємо $|BC| = |AC| \sin \theta$. В прямокутному трикутнику AEC , маємо $|CE| = |AC| \sin \theta$. З того, що $\angle BCA = \angle ECA = 90^\circ - \theta$ слідує $\angle BCE = 180^\circ - 2\theta$ і $\angle DCE = 2\theta$ (рисунок 1.3). Тоді в прямокутному трикутнику CDE $|CD| = |CE| \cos 2\theta$. Підставивши вище написане, отримаємо

$$w = |BD| = |BC| + |CD| = |AC| \sin \theta + |AC| \sin \theta \cos 2\theta,$$

тобто

$$|AC| = \frac{w}{\sin \theta (1 + \cos 2\theta)}.$$

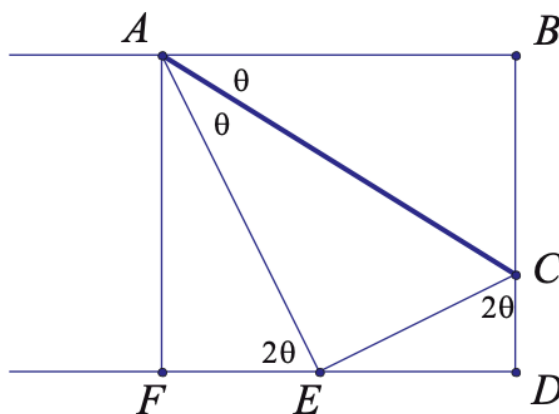


рис.1.3

Другий розв'язок. Нехай F основа перпендикуляра проведеного з точки A до протилежної сторони. Тоді в прямокутному трикутнику AEF , $\angle AEF = 2\theta$ і $|AF| = w$. Тобто $|AF| = |AE| \sin 2\theta$ або $|AF| = \frac{w}{\sin 2\theta}$. В прямокутному трикутнику AEC , $\angle CAE = \angle CAB = \theta$ і $|AE| = |AC| \cos \theta$. Отже,

$$|AC| = \frac{|AE|}{\cos \theta} = \frac{w}{\sin 2\theta \cos \theta}.$$

Поєднуючи ці два підходи разом, маємо

$$|AC| = \frac{w}{\sin \theta (1 + \cos 2\theta)} = \frac{w}{\sin 2\theta \cos \theta}$$

або $\sin \theta (1 + \cos 2\theta) = \sin 2\theta \cos \theta$.

Приклад 1.2. У трапеції $ABCD$ (рис. 1.4) $AB \parallel CD$, $|AB| = 4$ і $|CD| = 10$. Припустимо, що прямі AC і BD перетинаються під прямим кутом, а прямі BC і DA , продовжені до точки Q , утворюють кут 45° . Обчисліть площу трапеції $ABCD$.

Розв'язок. Нехай відрізки AC і BD перетинаються в точці P . Оскільки $AB \parallel CD$, трикутники ABP і CDP є подібними за співвідношенням сторін $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{2}{5}$. Нехай $|AP| = 2x$ і $|BP| = 2y$. Тоді $|CP| = 5x$ і $|DP| = 5y$.

Оскільки $\angle APB = 90^\circ$, то

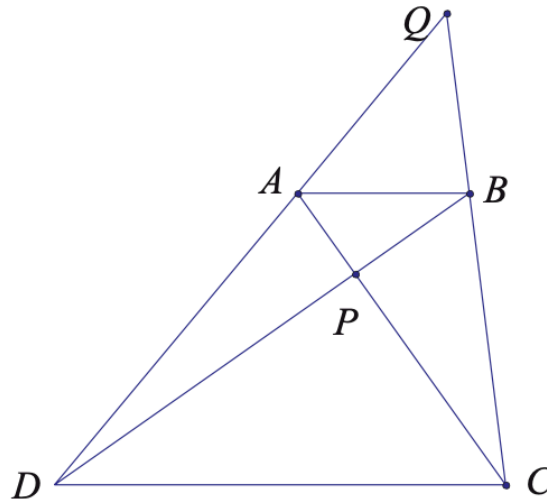


рис.1.4.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BD| = \frac{49xy}{2}.$$

Нехай $\alpha = \angle ADP$ і $\beta = \angle BCP$. З прчмокутних трикутників ADP і BCP , отримаємо

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|AP|}{|DP|} = \frac{2x}{5x} \text{ і } \operatorname{tg} \beta = \frac{|BP|}{|CP|} = \frac{2y}{5x}.$$

Беручи до уваги, що $\angle CPD = \angle CQD + \angle QCP + \angle QDP$ та маючи на увазі, що $\alpha + \beta = \angle QCP + \angle QDP = 45^\circ$. Використавши формули додавання, маємо

$$1 = \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{2x}{5y} + \frac{2y}{5x}}{1 - \frac{2x}{5y} \cdot \frac{2y}{5x}} = \frac{10(x^2 + y^2)}{21xy},$$

яка показує, що $xy = \frac{10(x^2 + y^2)}{21}$.

З трикутника ABP маємо $|AB|^2 = |AP|^2 + |BP|^2$ або $16 = 4(x^2 + y^2)$. Отже $x^2 + y^2 = 4$ і $xy = \frac{40}{21}$. Тому маємо

$$S = \frac{49xy}{2} = \frac{49}{2} \cdot \frac{40}{21} = \frac{140}{3}.$$

Приклад 1.3. У трикутнику ABC $|AB| = |AC|$ (Рисунок 1.5). Точки D і E лежать на промені BC так, що $|BD| = |DC|$ та $|BE| > |CE|$. Припустимо, що

$\operatorname{tg}\angle EAC$, $\operatorname{tg}\angle EAD$ і $\operatorname{tg}\angle EAB$ утворюють геометричну прогресію, а $\operatorname{ctg}\angle DAE$, $\operatorname{ctg}\angle CAE$ і $\operatorname{ctg}\angle DAB$ утворюють арифметичну прогресію. Якщо $|AE| = 10$, обчисліть площу трикутника ABC .

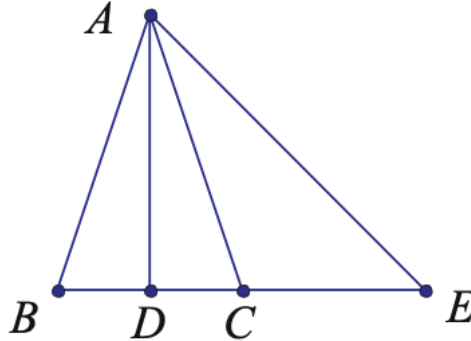


рис.1.5

Розв'язок. Розглянемо прямокутні трикутники ABD , ACD та ADE . Позначимо $\alpha = \angle EAD$ і $\beta = \angle BAD = \angle DAC$. Тоді $\angle EAC = \alpha - \beta$ і $\angle EAB = \alpha + \beta$. Оскільки $\operatorname{tg}\angle EAC$, $\operatorname{tg}\angle EAD$ і $\operatorname{tg}\angle EAB$ утворюють геометричну прогресію, то маємо

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\angle EAD = \operatorname{tg}\angle EAC \operatorname{tg}\angle EAB = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

З формул додавання отримаємо

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}^2\beta},$$

або

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^4\alpha \operatorname{tg}^2\beta = \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta.$$

Отже, $\operatorname{tg}^4\alpha \operatorname{tg}^2\beta = \operatorname{tg}^2\beta$ і тому $\operatorname{tg}\alpha = 1$ або $\alpha = 45^\circ$. Таким чином ADE — рівнобедрений прямокутний трикутник з $|AD| = |DE| = \frac{|AE|}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$. В

прямокутному трикутнику ACD , $|DC| = |AD| \operatorname{tg}\beta$ і тому

$$S = |AD| \cdot |CD| = |AD|^2 \operatorname{tg}\beta = 50 \operatorname{tg}\beta.$$

Оскільки $\operatorname{ctg}\angle DAE = \operatorname{ctg}45^\circ = 1$, $\operatorname{ctg}\angle CAE$ і $\operatorname{ctg}\angle DAB$ утворюють арифметичну прогресію, з цього випливає, що

$$2\operatorname{ctg}(45^\circ - \beta) = 2\operatorname{ctg}\angle CAE = \operatorname{ctg}\angle DAE + \operatorname{ctg}\angle DAB = 1 + \operatorname{ctg}\beta.$$

Підставивши $45^\circ - \beta = \gamma$ у вище згадане рівняння отримаємо $2\operatorname{ctg}\gamma = 1 + \operatorname{ctg}\beta$.

Оскільки $0^\circ < \beta, \gamma < 45^\circ$, використавши формули додавання маємо

$$1 = \operatorname{ctg}45^\circ = \operatorname{ctg}(\beta + \gamma) = \frac{\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma},$$

або $\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma - 1$.

Розв'яжемо систему рівнянь

$$2\operatorname{ctg}\gamma = 1 + \operatorname{ctg}\beta, \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma - 1$$

або

$$2\operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}\beta + 1, \operatorname{ctg}\gamma(\operatorname{ctg}\beta - 1) = \operatorname{ctg}\beta + 1$$

для $\operatorname{ctg}\beta$ отримаємо $(\operatorname{ctg}\beta + 1)(\operatorname{ctg}\beta - 1) = 2(\operatorname{ctg}\beta + 1)$. З цього випливає, що $\operatorname{ctg}^2\beta - 2\operatorname{ctg}\beta - 3 = 0$.

Розклавши останнє рівняння на множники $(\operatorname{ctg}\beta - 3)(\operatorname{ctg}\beta + 1) = 0$ маємо $\operatorname{ctg}\beta = 3$. Отже,

$$S = 50\operatorname{tg}\beta = \frac{50}{3}.$$

Приклад 1.4. Доведіть у трикутнику ABC, що

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Розв'язок. Почнемо з обчислення суми $\cos A + \cos B$. Нехай $x = \frac{A+B}{2}$ і

$$y = \frac{A-B}{2}, \text{ тоді}$$

$$\cos A + \cos B = \cos \left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \right) + \cos \left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \right) =$$

$$= \cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y =$$

$$= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}.$$

Отже,

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}. \quad (*)$$

Оскільки $A+B+C = 180^\circ = \pi$, маємо $\sin C = \sin(A+B)$ і $\cos C = -\cos(A+B)$. Аналогічно, оскільки $\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, отримаємо

$$\sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2} \text{ і } \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{A+B}{2}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= \cos A + \cos B - \cos(A+B) = \\ &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \left(\cos^2 \frac{A+B}{2} - \sin^2 \frac{A+B}{2} \right) = \\ &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \left(2 \cos^2 \frac{A+B}{2} - 1 \right) = \\ &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) + 1 = \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) + 1. \end{aligned}$$

Аналогічно до рівності (*), ми можемо знайти

$$\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}.$$

Отже,

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2 \sin \frac{C}{2} \left(2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \right) + 1 = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1.$$

Приклад 1.5. Покажіть, що

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{16} + \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{16} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{16} + \operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{16} = 28.$$

Розв'язок. Легко бачити, що аргументи першого та другого доданків за допомогою формул зведення можна подати у вигляді

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{16},$$

$$\frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{16}.$$

Ми зосередимося на пошуку формули для $tg^2\theta + tg^2(90^\circ - \theta)$, маючи на увазі, що для $\theta \in \left\{ \frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{16}, \frac{5\pi}{16}, \frac{7\pi}{16} \right\}$, ми знаємо $tg^2 4\theta = 1$. Ми шукаємо тотожність,

яка включає 4θ . Використовуючи тотожності для $tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,

$$tg^2\theta + tg^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = tg^2\theta + ctg^2\theta.$$

Зробивши не складні математичні перетворення маємо

$$\begin{aligned} tg^2\theta + tg^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= tg^2\theta + ctg^2\theta = \\ &= \left(\frac{1}{\sin 2\theta} - ctg 2\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{\sin 2\theta} + ctg 2\theta\right)^2 = \\ &= 2\left(\frac{1}{\sin 2\theta} + ctg 2\theta\right)^2 = \frac{2}{\sin^2 2\theta} + 2tg^2 2\theta. \end{aligned}$$

Отже,

$$tg^2\theta + tg^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{2}{\sin^2 2\theta} + 2tg^2 2\theta.$$

З тотожності для $\cos 4x$, маємо $\sin^2 2\theta = \frac{1 - \cos 4\theta}{2}$ і використавши

$ctg 2\theta = \frac{1}{\sin 4\theta} + ctg 4\theta$. Підставивши у вище згадану рівність

$$tg^2\theta + tg^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1 - \cos 4\theta}{2} + 2\left(\frac{1}{\sin 4\theta} + ctg 4\theta\right)^2.$$

Тепер підставимо $\theta = \frac{\pi}{16}$ і $\theta = \frac{3\pi}{16}$ у вище згадану рівність, щоб знайти кінцевий результат

$$tg^2\frac{\pi}{16} + tg^2\frac{7\pi}{16} = \frac{4}{1 - \cos\frac{\pi}{4}} + 2\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} + ctg\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{4}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} + 2\left(\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right)^2,$$

$$tg^2\frac{3\pi}{16} + tg^2\frac{5\pi}{16} = \frac{4}{1 - \cos\frac{3\pi}{4}} + 2\left(\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{4}} + ctg\frac{3\pi}{4}\right)^2 = \frac{4}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} + 2\left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 1\right)^2$$

Зробивши обчислення, маємо

$$\frac{4}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} + 2\left(\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right)^2 = \frac{8}{2 - \sqrt{2}} + 2(\sqrt{2} + 1)^2 = \frac{8(\sqrt{2} + 2)}{4 - 2} +$$

$$+ 2(3 + 2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} + 8 + 6 + 4\sqrt{2} = 14 + 8\sqrt{2},$$

$$\frac{4}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} + 2\left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 = \frac{8}{2 + \sqrt{2}} + 2(\sqrt{2} - 1)^2 = \frac{8(\sqrt{2} - 2)}{4 - 2} +$$

$$+ 2(3 - 2\sqrt{2}) = -4\sqrt{2} + 8 + 6 - 4\sqrt{2} = 14 - 8\sqrt{2}.$$

Остаточню маємо

$$tg^2\frac{\pi}{16} + tg^2\frac{3\pi}{16} + tg^2\frac{5\pi}{16} + tg^2\frac{7\pi}{16} = \left(tg^2\frac{\pi}{16} + tg^2\frac{7\pi}{16}\right) +$$

$$+ \left(tg^2\frac{3\pi}{16} + tg^2\frac{5\pi}{16}\right) = (14 + 8\sqrt{2}) + (14 - 8\sqrt{2}) = 28.$$

2. Існування, єдиність і тригонометричні підстановки

Той факт, що $\sin \alpha = \sin \beta$ для $\alpha + \beta = 180^\circ$, уже допоміг нам у багатьох місцях. Це також дає пояснення, чому для розв'язування трикутника буває недостатньо інформації про сторони та кути або інформації про площу та сторони.

Приклад 2.1. Нехай ABC трикутник. Дано:

1. $S_{ABC} = 10\sqrt{3}$, $|AB| = 8$, $|AC| = 5$. Знайти всі можливі значення $\angle A$.
2. $|AB| = 5\sqrt{2}$, $|BC| = 5\sqrt{3}$ і $\angle C = 45^\circ$. Знайти всі можливі значення $\angle A$.
3. $|AB| = 5\sqrt{2}$, $|BC| = 5$ і $\angle C = 45^\circ$. Знайти всі можливі значення $\angle A$.
4. $|AB| = 5\sqrt{2}$, $|BC| = 10$ і $\angle C = 45^\circ$. Знайти всі можливі значення $\angle A$.
5. $|AB| = 5\sqrt{2}$, $|BC| = 15$ і $\angle C = 45^\circ$. Знайти всі можливі значення $\angle A$.

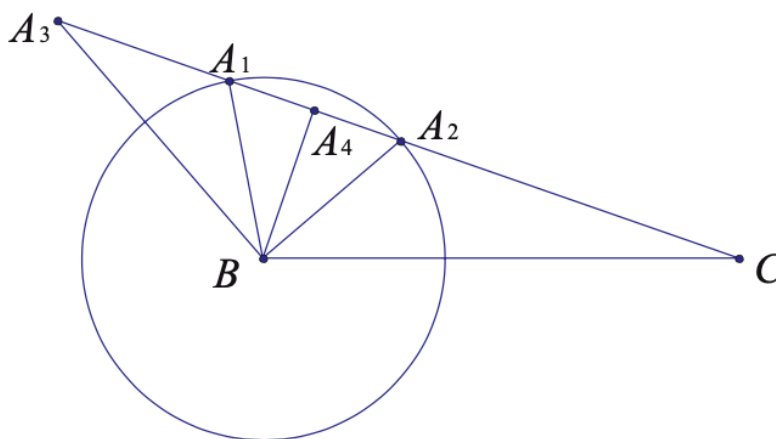


рис.2.1

Розв'язок.

1. Зауважимо, що $b = |AC| = 5$, $c = |AB| = 8$ і площа $S = \frac{1}{2}bc \sin A$.

Отже, $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ і $A = 60^\circ$ або 120° . (A_1 та A_2 на рисунку 2.1).

2. За теоремою синусів, маємо $\frac{|BC|}{\sin \alpha} = \frac{|AB|}{\sin C}$, або $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Отже,

$A = 60^\circ$ або 120° .

3. За теоремою синусів, маємо $\frac{|BC|}{\sin \alpha} = \frac{|AB|}{\sin C}$, або $\sin A = \frac{1}{2}$. Отже,

$A = 30^\circ$ (A_3 на рисунку 2.1).

4. За теоремою синусів, маємо $\sin A = 1$. Отже, $A = 90^\circ$ (A_4 на рисунку 2.1).

5. За теоремою синусів, маємо $\sin A = \frac{3}{2}$, що є неможливим. Тому можна

зробити висновок, що трикутника який би задовольняв умови задачі не існує.

Приклад 2.2. В трикутнику ABC , $\angle ABC = 45^\circ$. Точка D розміщена на відрізку BC так, що $2|BD| = |CD|$ і $\angle DAB = 15^\circ$. Знайдіть $\angle ACB$.

Перший розв'язок. Побудуємо цей трикутник у такий спосіб: зафіксуємо відрізок BC , виберемо на відрізку BC точку D так, щоб $2|BD| = |CD|$ (Рисунок 2.2, ліворуч), і проведемо промінь BP так, що $\angle PBC = 45^\circ$. Нехай A — точка на промені BP , яка рухається з B у напрямку променя. Неважко побачити, що $\angle DAB$ зменшується, коли A віддаляється від B . Отже, існує єдина позиція для A , така що $\angle DAB = 15^\circ$. На цьому побудова трикутника ABC завершена.

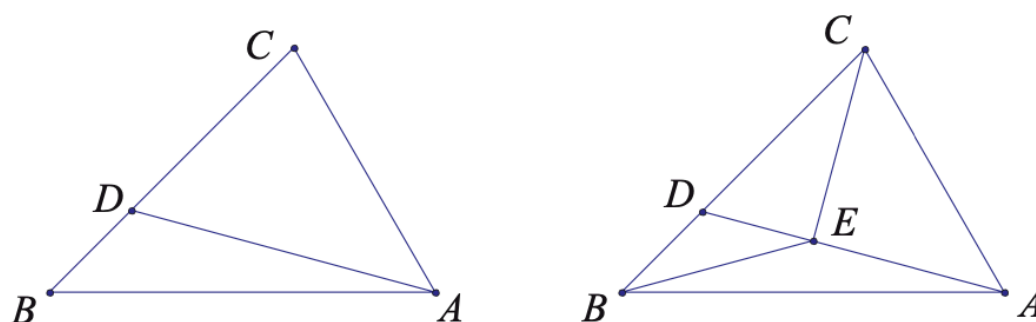


рис.2.2

Цей малюнок нагадує доведення теореми про бісектрису кута. Застосуємо закон синусів до трикутників ACD і ABC . Позначимо $\alpha = \angle CAD$. Зауважимо, що $\angle CDA = \angle CBA + \angle DAB = 60^\circ$. Отримаємо

$$\frac{|CD|}{\sin \alpha} = \frac{|CA|}{\sin 60^\circ} \text{ і } \frac{|BC|}{\sin(\alpha + 15^\circ)} = \frac{|CA|}{\sin 45^\circ}.$$

Поділимо перше рівняння на друге та отримаємо

$$\frac{|CD| \sin(\alpha + 15^\circ)}{|BC| \sin \alpha} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}.$$

Зауваживши, що $\frac{|CD|}{|BC|} = \frac{2}{3} = \left(\frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} \right)^2$ отримуємо

$$\left(\frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} \right)^2 = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + 15^\circ)} \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}.$$

Очевидно, що $\alpha = 45^\circ$ є розв'язком рівняння. Тому $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$ і $\angle ACB = 75^\circ$.

Другий розв'язок. Зауважимо, що $\angle CDA = 60^\circ$ і $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Побудуємо

точку E на відрізку AD (рис. 2.1 справа) так, що $CE \perp AD$. Тоді в трикутнику CDE $\angle DCE = 30^\circ$ і $|DE| = |CD| \sin \angle DCE$, або $|CD| = 2|DE|$. Отже, трикутник BDE є рівнобедреним із $|DE| = |DB|$, що означає, що $\angle DBE = \angle DEB = 30^\circ$. Отже, $\angle CBE = \angle BCE = 30^\circ$ і $\angle EBA = \angle EAB = 15^\circ$, тому трикутники BCE і BAE є рівнобедреними з того, що $|CE| = |BE| = |EA|$. Отже, прямокутний трикутник AEC — рівнобедрений; тобто $\angle ACE = \angle EAC = 45^\circ$. Тому, $\angle ACB = \angle ACE + \angle ECB = 75^\circ$.

Для функції $f : A \rightarrow B$, якщо $f(A) = B$, то кажемо, що f є сюр'єктивним відображенням, тобто кожне $b \in B$ є образом деякого $a \in A$. Якщо кожні два різні елементи a_1 і a_2 в A мають різні зображення, то f є ін'єктивним відображенням (або взаємно однозначним). Якщо f є і ін'єктивним, і сюр'єктивним, то f є бієктивним (або бієкцією, або взаємно-однозначною

відповідністю). Функції синус і косинус є функціями від множини кутів до дійсних чисел. Образами двох функцій є дійсні числа від -1 до 1 . Для точки $P = (x, y)$ з полярними координатами $(1; \theta)$ на одиничному колі зрозуміло, що значення $x = \cos \theta$ і $y = \sin \theta$ безперервно змінюються від -1 до 1 , приймаючи всі проміжні значення. Неважко побачити, що функція синус є бієкцією між набором кутів α з $-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ та інтервалом $[-1, 1]$, а функція косинус є бієкцією між набором кутів α з $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ та інтервал $[-1, 1]$. Для зручності ми можемо написати, що $\sin : [-90^\circ, 90^\circ] \rightarrow [-1, 1]$ є бієкцією. Також неважко побачити, що дотична функція є бієкцією між множиною кутів α з $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$ або $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$) і множиною дійсних чисел (додатних).

Дві функції f і g є взаємно оберненими, якщо $f(g(x)) = x$ для всіх x в області g і $g(f(x)) = x$ для всіх x в області f . Якщо функція f сюр'єктивною та ін'єктивною, то неважко побачити, що f має обернене значення. Для пари функцій f і g , які є оберненими одна до одної, якщо $y = f(x)$, то $g(y) = g(f(x)) = x$; тобто якщо (a, b) лежить на графіку $y = f(x)$, то (b, a) лежить на графіку $y = g(x)$.

З цього випливає, що графіки $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є відображеннями один одного через пряму $y = x$. Для дійсних чисел x із $-1 \leq x \leq 1$ існує єдиний кут θ з $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ такий, що $\sin \theta = x$.

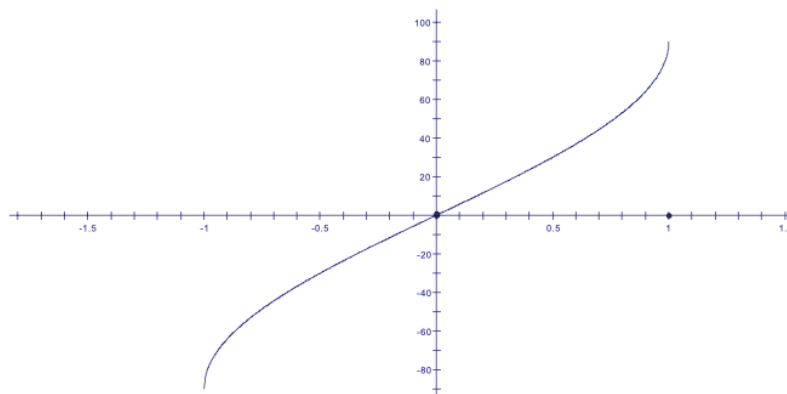


рис.2.3

Отже, ми визначаємо обернену до синуса функцію, яку позначають $\sin^{-1}$ або $\arcsin$, таким чином, що $\sin^{-1} x = \theta$ для $-1 \leq x \leq 1$ і $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. Важливо пам'ятати, що $\sin^{-1} x$ це не те саме, що й $(\sin x)^{-1}$ або $\frac{1}{\sin x}$.

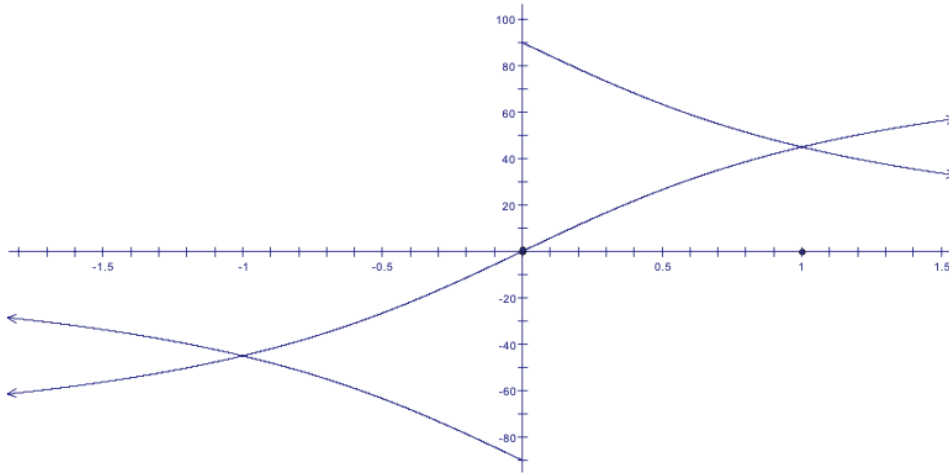


рис.2.4

Подібним чином ми можемо визначити обернені функції $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$. Вони позначаються $\operatorname{tg}^{-1} x$ (або $\operatorname{arctg} x$) і $\operatorname{ctg}^{-1} x$. Обидві функції мають область визначення $\mathbb{R}$. Їхні діапазони $\{\theta \mid -90^\circ < \theta < 90^\circ\}$ і $\{\theta \mid -90^\circ < \theta < 90^\circ, \theta \neq 0^\circ\}$. Їхні графіки показані нижче. Зверніть увагу, що $y = \operatorname{arctg} x$ має дві горизонтальні асимптоти $y = 90$ і $y = -90$. Зауважте також, що $y = \operatorname{ctg}^{-1} x$ має дві частини, і обидві вони асимптотичні до прямої $y = 0$ (див. рис. 2.3).

Зауважте, що $y = \cos x$ є бієкцією з $\{\theta \mid 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ\}$ на проміжок $[-1, 1]$.

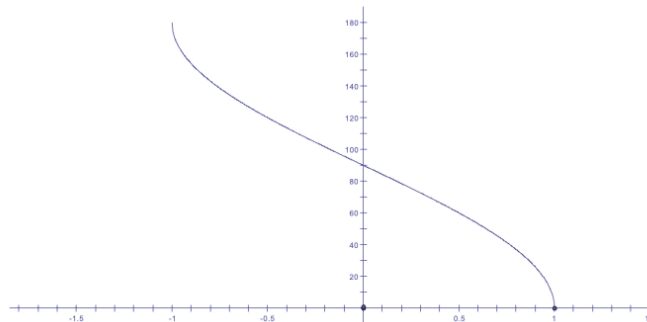


рис.2.5

Хоча область визначення $\cos^{-1} x$ (або $\arccos x$) є такою самою, як область визначення $\arcsin x$, діапазон $\cos^{-1} x$ становить $\{\theta \mid 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ\}$. Дивіться рисунок 2.5.

Розглянемо приклади застосування тригонометричної підстановки.

Приклад 2.3. Нехай $x_0 = 2003$ і $x_{n+1} = \frac{1+x_n}{1-x_n}$ для $n \geq 1$. Обчислити x_{2004} .

Розв'язок. За допомогою невеликих алгебраїчних обчислень ми можемо показати, що ця послідовність має період 4; тобто $x_{n+4} = x_n$ для всіх $n \geq 1$. Але чому? Розкриваємо секрет тригонометричною підстановкою; ми визначаємо α_n з $-90^\circ < \alpha_n < 90^\circ$ таким чином, що $\operatorname{tg} \alpha_n = x_n$. Зрозуміло, що якщо x_n є дійсним числом, то таке α_n є єдиним, оскільки $\operatorname{tg} : (-90^\circ; 90^\circ) \rightarrow \mathbb{R}$ є бієкцією. Оскільки $1 = \operatorname{tg} 45^\circ$, ми можемо переписати цю умову як

$$\operatorname{tg} \alpha_{n+1} = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} \alpha_n}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \alpha_n} = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha_n),$$

за формулами додавання і віднімання. Отже, $\alpha_{n+1} = 45^\circ + \alpha_n$, або $\alpha_{n+1} = 45^\circ + \alpha_n - 180^\circ$ (оскільки tg має період 180°). У будь-якому випадку неважко побачити, що $\alpha_{n+4} = \alpha_n + k \cdot 180^\circ$ для деякого цілого числа k . Отже, $x_{n+4} = \operatorname{tg} \alpha_{n+4} = \operatorname{tg} \alpha_n = x_n$; тобто послідовність $\{x_n\}_{n \geq 0}$ має період 4, що означає, що $x_{2004} = x_0 = 2003$.

Приклад 2.4. Доведіть, що серед будь-яких п'яти різних дійсних чисел є два, a і b , такі, що $|ab + 1| > |a - b|$.

Розв'язання: запишіть числа у вигляді $\operatorname{tg} x_k$, де $-90^\circ < x_k < 90^\circ$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Розглянемо інтервали $(-90^\circ, -45^\circ)$, $(-45^\circ, 0^\circ]$, $(0^\circ, 45^\circ]$ та $(45^\circ, 90^\circ]$. Згідно з принципом розрізу, принаймні два з x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 лежать в одному інтервалі, скажімо x_i та x_j). Тоді $|x_i - x_j| < 45^\circ$, і встановивши $a = \operatorname{tg} x_i$ і $b = \operatorname{tg} x_j$, отримаємо

$$\left| \frac{a-b}{1+ab} \right| = \left| \frac{tgx_i - tgx_j}{1 + tgx_i tgx_j} \right| = \left| tg(x_i - x_j) \right| < tg45^\circ = 1.$$

Доведено.

Приклад 2.5. Нехай x, y, z — додатні дійсні числа, такі що $x + y + z = 1$.

Визначте мінімальне значення

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}.$$

Розв'язання. Застосування нерівності Коші–Шварца робить цю задачу одноетапною. Тим не менш, ми представляємо доказ, який включає лише простішу нерівність $x^2 + y^2 \geq 2xy$ для дійсних чисел x і y , встановлюючи спочатку $x = tga$ і $y = 2tgb$, а потім $x = tga$ і $y = ctga$.

Очевидно, що z — дійсне число в інтервалі $[0,1]$. Отже, існує такий кут a , що $z = \sin^2 a$. Тоді $x + y = 1 - \sin^2 a = \cos^2 a$ або $\frac{x}{\cos^2 a} + \frac{y}{\cos^2 a} = 1$. Для кута b маємо $\cos^2 b + \sin^2 b = 1$. Отже, ми можемо встановити $x = \cos^2 a \cos^2 b$, $y = \cos^2 a \sin^2 b$ для деякого кута b . Тепер знаходимо мінімальне значення

$$P = \sec^2 a \sec^2 b + 4 \sec^2 a \csc^2 b + 9 \csc^2 a,$$

або

$$P = (tg^2 a + 1)(tg^2 b + 1) + 4(tg^2 a + 1)(ctg^2 b + 1) + 9(ctg^2 a + 1).$$

Розкривши дужки отримаємо

$$\begin{aligned} P &= 14 + 5tg^2 a + 9ctg^2 a + (tg^2 b + 4ctg^2 b)(1 + tg^2 a) \geq \\ &\geq 14 + 5tg^2 a + 9ctg^2 a + 2tgb \cdot 2ctgb(1 + tg^2 a) = \\ &= 18 + 9(tg^2 a + ctg^2 a) \geq 18 + 9 \cdot 2tga \cdot ctga = 36. \end{aligned}$$

Рівність справджується коли $tga = ctga$ і $tgb = 2ctgb$ це означає, що $\cos^2 a = \sin^2 a$ і $2\cos^2 b = \sin^2 b$. Оскільки $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, рівність задовольняється коли $\cos^2 a = \frac{1}{2}$ і $\cos^2 b = \frac{1}{3}$; тобто $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{2}$.

Приклад 2.6. Нехай x, y, z дійсні числа такі, що $x \geq y \geq z \geq \frac{\pi}{12}$ і $x + y + z = \frac{\pi}{2}$. Знайдіть найбільше і найменше значення добутку $\cos x \sin y \cos z$.

Розв'язок. Нехай $p = \cos x \sin y \cos z$. Оскільки $\frac{\pi}{2} \geq y \geq z$, $\sin(y - z) \geq 0$.

За формулами добутку на суму ми маємо

$$p = \frac{1}{2} \cos x [\sin(y + z) + \sin(y - z)] \geq \frac{1}{2} \cos x \sin(y + z) = \frac{1}{2} \cos^2 x.$$

Зауважимо, що $x = \frac{\pi}{2} - (y + z) \leq \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$. Отже, мінімальне значення $p \in \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{8}$ отримаємо коли $x = \frac{\pi}{3}$ і $y = z = \frac{\pi}{12}$.

З іншого боку маємо

$$p = \frac{1}{2} \cos z [\sin(x + y) - \sin(x - y)] \leq \frac{1}{2} \cos^2 z,$$

беручи до уваги, що $\sin(x - y) \geq 0$ і $\sin(x + y) = \cos z$. Застосувавши формули подвійного аргументу маємо

$$p \leq \frac{1}{4} (1 + \cos 2z) \leq \frac{1}{4} \left(1 + \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{8}.$$

Таке максимальне значення можна отримати тоді і тільки тоді $x = y = \frac{5\pi}{24}$ і $z = \frac{\pi}{24}$.

Приклад 2.7. Нехай ABC гострокутний трикутник і для $n = 1, 2, 3$ нехай $x_n = 2^{n-3} (\cos^n A + \cos^n B + \cos^n C) + \cos A \cos B \cos C$.

Доведіть, що

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{3}{2}.$$

Розв'язок. За нерівністю про середнє арифметичне та геометричне,

$$\cos^3 x + \frac{\cos x}{4} \geq \cos^2 x$$

для x , таких що $\cos x \geq 0$. Оскільки трикутник ABC гострокутний, $\cos A$, $\cos B$ і $\cos C$ невід'ємні. Встановлюючи $x = A$, $x = B$, $x = C$ і додаючи отримані нерівності, виходить

$$x_1 + x_3 \geq \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 2x_2.$$

Отже,

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 3x_2 = \frac{3}{2}.$$

Приклад 2.8. Припустімо, що калькулятор зламався, і єдині кнопки, які все ще працюють, є кнопки $\sin$, $\cos$, tg , $\arcsin$, $\arccos$ і $arctg$. Дисплей спочатку показує 0. Дано будь-яке додатне раціональне число q , покажіть, що ми можемо змусити q з'явитися на панелі дисплея калькулятора, натиснувши деяку кінцеву послідовність кнопок. Припустімо, що калькулятор обчислює дійсні числа з нескінченною точністю, і що всі функції виражені в радіанах.

Розв'язок. Оскільки $\arccos \sin \theta = \frac{\pi}{2} - \theta$ і $tg \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{1}{tg \theta}$ для

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, для будь якого $x > 0$ маємо

$$tg \arccos \sin arctg x = tg \left(\frac{\pi}{2} - arctg x \right) = \frac{1}{x}. \quad (1)$$

Також, для $x \geq 0$, маємо

$$\cos arctg \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}},$$

отже з (1), маємо

$$tg \arccos \sin arctg \cos arctg \sqrt{x} = \sqrt{x+1}. \quad (2)$$

Доведемо це за допомогою індукції по знаменнику r , покажемо, що $\sqrt{r}$ для кожного невід'ємного раціонального числа r можна отримати за допомогою операцій

$$\sqrt{x} \mapsto \sqrt{x+1} \text{ і } x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Якщо знаменник дорівнює 1, ми можемо отримати $\sqrt{r}$, для будь якого не додатного цілого r шляхом повторного застосування $\sqrt{x} \mapsto \sqrt{x+1}$. Тепер припустимо, що ми можемо отримати $\sqrt{r}$ для всіх раціональних чисел r зі знаменником до n . Зокрема, ми можемо отримати будь-який з

$$\sqrt{\frac{n+1}{1}}, \sqrt{\frac{n+1}{2}}, \dots, \sqrt{\frac{n+1}{n}},$$

отже ми також можемо отримати

$$\sqrt{\frac{1}{n+1}}, \sqrt{\frac{2}{n+1}}, \dots, \sqrt{\frac{n}{n+1}},$$

і $\sqrt{r}$ для будь якого додатного r точного знаменника $n+1$, можна отримати повторним застосуванням $\sqrt{x} \mapsto \sqrt{x+1}$.

Таким чином, для будь-якого додатного раціонального числа r ми можемо отримати $\sqrt{r}$. Зокрема ми можемо отримати і $\sqrt{q^2} = q$.

Приклад 2.9. Обчислити значення

$$10 \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arcctg} 7 + \operatorname{arcctg} 13 + \operatorname{arcctg} 21).$$

Розв'язок. Беручи до уваги, що

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) &= \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}. \end{aligned}$$

Нехай $x = \operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arcctg} 7$ і $y = \operatorname{arcctg} 13 + \operatorname{arcctg} 21$.

Тому

$$\begin{aligned} \operatorname{ctgx} &= \frac{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 3) \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 7) - 1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 3) + \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 7)} = \\ &= \frac{3 \cdot 7 - 1}{3 + 7} = 2 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \operatorname{ctgy} &= \frac{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 13) \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 21) - 1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 13) + \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 21)} = \\ &= \frac{13 \cdot 21 - 1}{13 + 21} = 8. \end{aligned}$$

Отже, тоді

$$\operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctgx} \cdot \operatorname{ctgy} - 1}{\operatorname{ctgx} + \operatorname{ctgy}} = \frac{2 \cdot 8 - 1}{2 + 8} = \frac{3}{2}.$$

Тому маємо остаточний результат 15.

Приклад 2.10. Обчислити

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7}.$$

Розв'язок. Спершу доведемо, що

$$\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} -\sin \frac{\pi}{7} &= \sin \frac{8\pi}{7} = 2 \cos \frac{4\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} = \\ &= 4 \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} = 8 \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} = \frac{-1}{8}.$$

Оскільки

$$\cos \frac{4\pi}{7} = -\cos \frac{3\pi}{7},$$

то

$$\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}.$$

Наступним кроком покажемо, що

$$\sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}.$$

Справді, нехай $z = e^{\frac{\pi i}{7}}$, тоді маємо $z^7 = -1$ і $z^{14} = 1$. Тоді

$$(1 - z)(1 - z^6) = 1 + z^7 - z - z^6 = \frac{1}{z} - z,$$

і

$$(1 - z^{13})(1 - z^8) = \left(1 - \frac{1}{z}\right) \left(1 - \frac{1}{z^6}\right) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^6} = z - \frac{1}{z}.$$

Тоді

$$\sin^2 \frac{\pi}{7} = \left[\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right]^2 = \frac{1}{4} (1 - z)(1 - z^6)(1 - z^8)(1 - z^{13}).$$

Аналогічно, отримаємо

$$\sin^2 \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{4} (1 - z^2)(1 - z^5)(1 - z^{12})(1 - z^9),$$

$$\sin^2 \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{4} (1 - z^3)(1 - z^4)(1 - z^{10})(1 - z^{11}).$$

Тоді перемноживши вище написане і беручи до уваги, що $1 - z^7 = 2$, ми отримаємо

$$\left(\sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} \right)^2 = \frac{1}{4^3 \cdot 2} \prod_{i=1}^{13} (1 - z^i).$$

Беручи до уваги, що

$$\prod_{i=1}^{13} (1 - z^i) = f(1) = 14,$$

де $f(x) = x^{13} + x^{12} + \dots + x + 1 = \frac{(x^{14} - 1)}{x - 1}$, яка має 13 коренів $z, z^2, \dots, z^{13}$.

Отже,

$$\left(\sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} \right)^2 = \frac{7}{8^2}$$

або

$$\sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}.$$

Об'єднавши ці дві тотожності, ми отримаємо

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} = \sqrt{7}.$$

3. Формула Муавра

Багато поліномів із дійсними коефіцієнтами не мають дійсних розв'язків, наприклад, $x^2 + 1 = 0$. Традиційним підходом є використання i як числа з властивістю $i^2 = -1$. Щоб розв'язати рівняння $x^2 - 4x + 7 = 0$, потрібно: $(x - 2)^2 = -3$, $x - 2 = \pm \sqrt{3}i$, що означає, що $x = 2 \pm \sqrt{3}i$ є коренями рівнянь. (Можна також пропустити крок доповнення квадрата, застосувавши квадратичну формулу.) Таким чином, ми розглядаємо числа у формі $a + ib$, де a і b — дійсні числа. Такі числа називають комплексними числами. Дійсні числа можна розглядати як комплексні числа, встановивши $a = a + 0i$. Строго кажучи, число i називається уявною одиницею, а $z = bi$ називається чисто уявним числом, якщо b відмінне від нуля.

Щоб не означали ці числа, важливо вміти їх візуалізувати. Ось як це зробити: число $a + ib$ зіставляється з точкою (a, b) або вектором $[a, b]$, який показує напрям від початку координат до (a, b) . Згідно з цією умовою, координатна площина називається комплексною площиною. Таким чином точки $(0, b)$ на осі y узгоджуються з чисто уявними числами bi , тому вісь y називається уявною віссю в комплексній площині. Так само вісь x називається дійсною віссю. Нехай O позначає початок координат, а кожна мала літера позначає комплексне число, присвоєне точці, позначеній відповідною великою літерою. (Наприклад, якщо $z = 3 + 4i$, то $Z = (3, 4)$.) Див. рис. 1.58.

Означення комплексної площини дозволяє говорити про операції над комплексними числами. Сума комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1i$ і $z_2 = a_2 + b_2i$ дорівнює $z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$, а їх різниця дорівнює $z' = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.

Завдяки векторній інтерпретації комплексних чисел неважко побачити, що OZ_1ZZ_2 утворює паралелограм, а z і z' збігаються з діагональними векторами $\overrightarrow{OZ}$ і $\overrightarrow{Z_2Z_1}$.

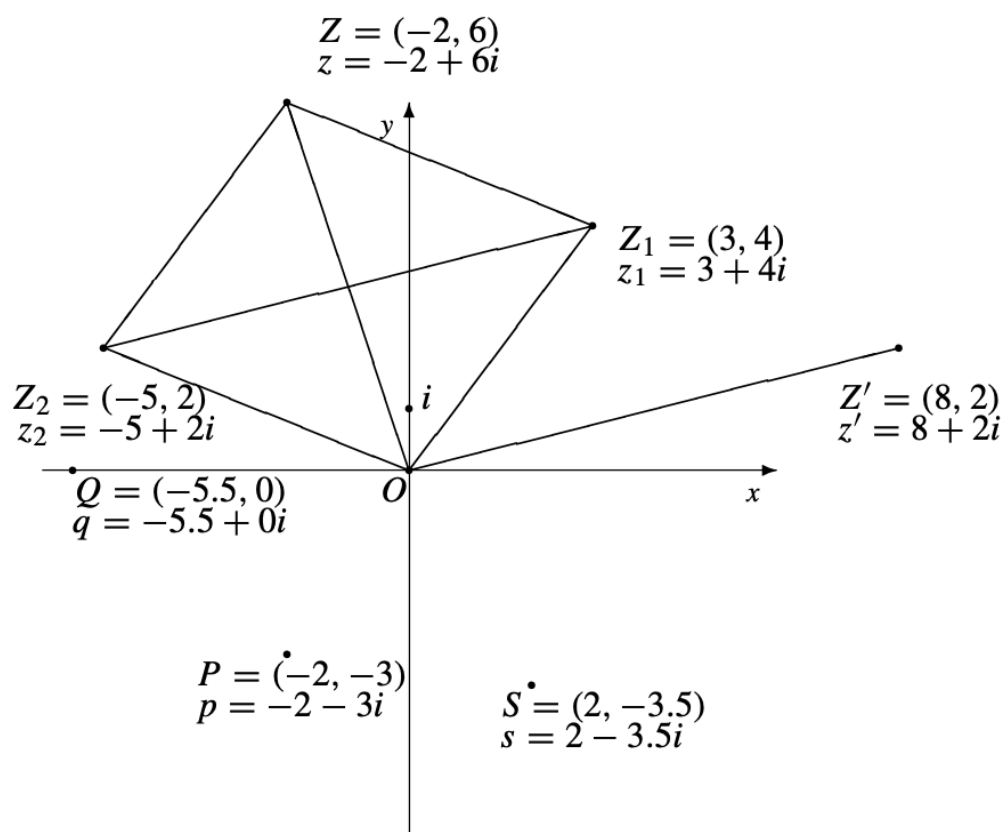


рис.3.1

Ми можемо говорити про величину або довжину комплексного числа z , що позначається $|z|$, враховуючи величину вектора, якому воно відповідає. Наприклад, $|3 - 4i| = 5$, а в загальному випадку $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Отже, усі комплексні числа z з $|z| = 5$ утворюють коло з центром у початку координат радіусом 5. Можна також говорити про полярну форму комплексних чисел. Якщо $Z = (a, b)$ має полярні координати $Z = (r, \theta)$, тоді $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ і $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$. Тому можемо записати

$$z = a + bi = r \cos \theta + ri \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Наприклад, $z = -1 + \sqrt{3}i = 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$.

Нехай z_1 та z_2 комплексне число і $|z_1| = |z_2| = r$. Позначимо $z_1 = r(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ і $z_2 = r(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$. Позначимо $z = z_1 + z_2$. Тоді OZ_1ZZ_2 — ромб, а це означає, що пряма OZ ділить кут Z_1OZ_2 навпіл; тобто

$z = r' \left(\cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + i \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)$ для деякого дійсного числа r' . Зокрема,

якщо $z_1 = 1$ та $z_2 = r(\cos a + i \sin a)$, тоді $z = r' \left(\cos \frac{a}{2} + i \sin \frac{a}{2} \right)$, де $r' = \overrightarrow{OZ}$.

Отже, $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ дорівнює нахилу прямої OZ ; тобто,

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1 + \cos a},$$

яка є однією з формул половинного аргумента. Подібним чином можна отримати інші варіанти формул половинного аргумента. також не важко побачити, що $r' = \overrightarrow{OZ} = 2 \cos \frac{a}{2}$.

Приклад 3.1. Нехай a та b дійсні числа такі, що

$$\sin a + \sin b = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos a + \cos b = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Обчисліть $\sin(a + b)$.

Перший розв'язок. Піднесмо обидва рівняння до квадрату та додамо їх

$$\sin^2 a + \cos^2 a + \sin^2 b + \cos^2 b + 2(\sin a \sin b + \cos a \cos b) = \frac{2}{4} + \frac{6}{4},$$

або $\cos(a - b) = 2(\sin a \sin b + \cos a \cos b) = 0$ за формулами додавання і віднімання. Перемноживши задані співвідношень, отримаємо

$$\sin a \cos a + \sin b \cos b + \sin a \cos b + \sin b \cos a = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

або

$$\sin 2a + \sin 2b + 2 \sin(a + b) = \sqrt{3}$$

за формулами подвійного кута та формулами додавання і віднімання. За формулами суми на добуток отримуємо

$$\sin 2a + \sin 2b = 2 \sin(a + b) \cos(a - b) = 0.$$

$$\text{Отже } \sin(a + b) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Другий розв'язок. Позначимо комплексне число $z_1 = \cos a + i \sin a$, $z_2 = \cos b + i \sin b$.

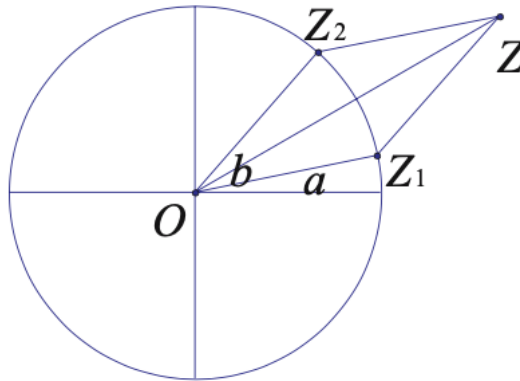


рис.3.2

Тоді за правилом додавання комплексних чисел і за заданими умовами маємо

$$\begin{aligned} z = z_1 + z_2 &= r \left(\cos \frac{a+b}{2} + i \sin \frac{a+b}{2} \right) = \cos a + i \sin a + \cos b + i \sin b = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}, \end{aligned}$$

$$\text{тобто } r' = \sqrt{2} \text{ і } \frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{ отже } \sin(a+b) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Одна з найцікавіших властивостей комплексних чисел пов'язана з добутком. Добуток двох комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ визначимо як

$$\begin{aligned} z = z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_2 b_1 i + a_1 b_2 i + b_1 b_2 i^2 = \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i. \end{aligned}$$

Це, безсумнівно, наслідок формул додавання та віднімання. Дійсно, в полярній формі $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ і $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, ми маємо

$$\begin{aligned} z = z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1))(r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)) = \\ &= r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \right], \end{aligned}$$

враховуючи формули додавання та віднімання

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

і

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2.$$

Тоді не важко побачити

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

Ми довели властивість комплексного множення (ділення) кута додавання (віднімання кута). Ось чому операції над комплексними числами тісно пов'язані з тригонометрією. Наприклад, якщо $\theta_1 = \arctg \frac{1}{2}$ і $\theta_2 = \arctg \frac{1}{3}$, тоді ми можемо показати, що $\theta_1 + \theta_2 = 45^\circ$ за формулами додавання і віднімання. З іншого боку, цей факт також можна показати за допомогою простого комплексного множення: $(2 + i)(3 + i) = 5 + 5i$.

За наведеною вище властивістю, отримаємо

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta,$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta,$$

і так далі. За індукцією ми можемо довести формулу Муавра: для будь-якого кута θ і для будь-якого цілого числа n ,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

З цієї формули неважко вивести формули скороченого множення $\sin n\alpha$ і $\cos n\alpha$ через $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$, розгорнувши ліву частину наведеної вище тотожності та зіставивши відповідні дійсні та уявні частини обох сторін:

$$\begin{aligned}\sin n\alpha &= \binom{n}{1} \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha \\ &\quad + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots, \\ \cos n\alpha &= \binom{n}{0} \cos^n \alpha - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha \\ &\quad + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \dots.\end{aligned}$$

Приклад 3.2. Доведіть, що середнім значенням чисел

$$2 \sin 2^\circ, 4 \sin 4^\circ, 6 \sin 6^\circ, \dots, 180 \sin 180^\circ,$$

є $\operatorname{ctg} 1^\circ$.

Перший розв'язок. Нам потрібно довести

$$2 \sin 2^\circ + 4 \sin 4^\circ + \dots + 178 \sin 178^\circ = 90 \operatorname{ctg} 1^\circ,$$

що є еквівалентним до

$$2 \sin 2^\circ \cdot \sin 1^\circ + 2(2 \sin 4^\circ \cdot \sin 1^\circ) + \dots + 89(2 \sin 178^\circ \cdot \sin 1^\circ) = 90 \cos 1^\circ.$$

Зауважимо, що

$$2 \sin 2k^\circ \sin 1^\circ = \cos(2k - 1)^\circ - \cos(2k + 1)^\circ.$$

Маємо

$$\begin{aligned}&2 \sin 2^\circ \cdot \sin 1^\circ + 2(2 \sin 4^\circ \cdot \sin 1^\circ) + \dots + 89(2 \sin 178^\circ \cdot \sin 1^\circ) = \\&= (\cos 1^\circ - \cos 3^\circ) + 2(\cos 3^\circ - \cos 5^\circ) + \dots + 89(\cos 177^\circ - \cos 179^\circ) = \\&= \cos 1^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 177^\circ - 89 \cos 179^\circ = \\&= \cos 1^\circ + (\cos 3^\circ + \cos 177^\circ) + \dots + (\cos 89^\circ + \cos 91^\circ) + 89 \cos 1^\circ = \\&= \cos 1^\circ + 89 \cos 1^\circ = 90 \cos 1^\circ.\end{aligned}$$

Другий розв'язок. Нехай маємо $z = \cos 2^\circ + i \sin 2^\circ$. Тоді за формулою

Муавра маємо $z^n = \cos 2n^\circ + i \sin 2n^\circ$. Нехай a та b дійсні число таке, що

$$z + 2z^2 + \dots + 89z^{89} = a + bi.$$

Оскільки $\sin 180^\circ = 0$,

$$b = \frac{1}{2} (2 \sin 2^\circ + 4 \sin 4^\circ + \dots + 178 \sin 178^\circ + 180 \sin 180^\circ),$$

цього достатньо щоб показати, що $b = 45 \operatorname{ctg} 1^\circ$.

Позначимо

$$p_n(x) = x + 2x^2 + \dots + nx^n.$$

Тоді

$$(1-x)p_n(x) = p_n(x) - xp_n(x) = x + x^2 + \dots + x^n - nx^{n+1}.$$

Позначимо

$$q_n(x) = (1-x)p_n(x) + nx^{n+1} = x + x^2 + \dots + x^n.$$

Тоді $(1-x)q_n(x)q_n(x) - xq_n(x) = x - x^{n+1}$. Отже, отримаємо

$$p_n(x) = \frac{q_n(x)}{1-x} - \frac{nx^{n+1}}{1-x} = \frac{x - x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n+1}}{1-x}.$$

Це означає, що

$$\begin{aligned} a + ib &= z + 2z^2 + \dots + 89z^{89} = p_{89}z = \\ &= \frac{z - z^{90}}{(1-z)^2} - \frac{89z^{90}}{1-z} = \frac{z+1}{(z-1)^2} - \frac{89}{z-1}, \end{aligned}$$

бо $z^{90} = \cos 180^\circ + i \sin 180^\circ = -1$. Зауважимо, що

$$z + 1 = \cos 2^\circ + i \sin 2^\circ + \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ = 2 \cos 1^\circ (\cos 1^\circ + i \sin 1^\circ)$$

і

$$z - 1 = \cos 2^\circ + i \sin 2^\circ - \cos 0^\circ - i \sin 0^\circ = 2 \sin 1^\circ (\cos 91^\circ + i \sin 91^\circ)$$

і тому

$$\begin{aligned} a + ib &= \frac{2 \cos 1^\circ (\cos 1^\circ + i \sin 1^\circ)}{(2 \sin 1^\circ (\cos 91^\circ + i \sin 91^\circ))^2} - \frac{89}{2 \sin 1^\circ (\cos 91^\circ + i \sin 91^\circ)} = \\ &= \frac{2 \cos 1^\circ (\cos 1^\circ + i \sin 1^\circ)}{4 \sin^2 1^\circ (\cos 182^\circ + i \sin 182^\circ)} - \frac{89 (\cos(-91^\circ) + i \sin(-91^\circ))}{2 \sin 1^\circ} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\cos 1^\circ (\cos(-181)^\circ + i \sin(-180)^\circ)}{2 \sin^2 1^\circ} - \frac{89(\cos(-91)^\circ + i \sin(-91)^\circ)}{2 \sin 1^\circ}.$$

Тому

$$\begin{aligned} b &= \frac{\cos 1^\circ \sin(-181)^\circ}{2 \sin^2 1^\circ} - \frac{89 \sin(-91)^\circ}{2 \sin 1^\circ} = \frac{\cos 1^\circ \sin 1^\circ}{2 \sin^2 1^\circ} + \frac{89 \cos 1^\circ}{2 \sin 1^\circ} = \\ &= \frac{\cos 1^\circ}{2 \sin 1^\circ} + \frac{89 \cos 1^\circ}{2 \sin 1^\circ} = 45 \operatorname{ctg} 1^\circ. \end{aligned}$$

Що і треба було довести.

Приклад 3.3. Обчисліть суми

$$\binom{n}{1} \sin a + \binom{n}{2} \sin 2a + \dots + \binom{n}{n} \sin na$$

і

$$\binom{n}{1} \cos a + \binom{n}{2} \cos 2a + \dots + \binom{n}{n} \cos na.$$

Розв'язок. Нехай S_n і T_n позначають першу і другу суми відповідно. Нехай задано комплексне число $z = \cos a + i \sin a$. Тоді за формулою Муавра маємо $z^n = \cos na + i \sin na$. За біномом Ньютона отримуємо

$$\begin{aligned} 1 + T_n + iS_n &= \binom{n}{1}(\cos a + i \sin a) + \binom{n}{2}(\cos 2a + i \sin 2a) + \dots + \binom{n}{n}(\cos na + i \sin na) \\ &= \binom{n}{0} z^0 + \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \dots + \binom{n}{n} z^n = (1 + z)^n. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} 1 + z &= 1 + \cos a + i \sin a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} + 2i \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \\ &= 2 \cos \frac{a}{2} \left(\cos \frac{a}{2} + i \sin \frac{a}{2} \right), \end{aligned}$$

з цього випливає що

$$(1 + z)^n = 2^n \cos^n \frac{a}{2} \left(\cos \frac{na}{2} + i \sin \frac{na}{2} \right),$$

знову за формулою Муавра. Тому

$$(1 + T_n) + iS_n = \left(2^n \cos^n \frac{a}{2} \cos \frac{na}{2} \right) + i \left(2^n \cos^n \frac{a}{2} \sin \frac{na}{2} \right),$$

і тому

$$S_n = 2^n \cos^n \frac{a}{2} \sin \frac{na}{2} \text{ і } T_n = -1 + 2^n \cos^n \frac{a}{2} \cos \frac{na}{2}.$$

Приклад 3.4. Рівняння $z^6 + z^3 + 1$ має один комплексний корінь з аргументом θ між 90° і 180° у комплексній площині. Визначте градусну міру θ .

Розв'язок. Нам потрібно знайти корені $P(z) = z^6 + z^3 + 1$. Зауважимо, що

$$(z^3 - 1)P(z) = z^9 - 1,$$

який якраз має корінь дев'ятого степеня з одиниці. Однак при множенні на $(z^3 - 1)$ сторонні корені також були включені. Таким чином, $P(z) = \sqrt[9]{1}$, цей корінь також можна подати у вигляді

$$\cos \theta + i \sin \theta,$$

для $\theta = \frac{360^\circ}{9}n$ для $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ та $i = \sqrt{-1}$. Для $P(z) = \sqrt[3]{1}$ запишемо

$$\cos \varphi + i \sin \varphi,$$

для $\varphi = \frac{360^\circ}{3}m$ для $m = 0, 1, 2$.

Єдине значення $\sqrt[9]{1}$, яке має аргумент $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, це $\cos 160^\circ + i \sin 160^\circ$. Отже, відповідь 160° .

Приклад 3.5. Нехай v та w різні, довільно обрані корені рівняння $z^{1997} - 1 = 0$. Нехай $\frac{m}{n}$ буде ймовірністю того, що $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \leq |v + w|$, де m і n взаємно прості натуральні числа. Знайдіть $m + n$.

Розв'язок. Розв'язком рівняння $z^{1997} - 1 = 0$ є корінь 1997 степеня з одиниці або можна подати у вигляді

$$\cos \left(\frac{2\pi k}{1997} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi k}{1997} \right), \text{ для } k = 0, 1, \dots, 1996.$$

Ці корені розташовані у вершинах правильного 1997-кутника, який має центр у початку координат на комплексній площині.

Розглянемо випадок для $v = 1$. Тоді

$$\begin{aligned} |v + w|^2 &= \left| \cos\left(\frac{2\pi k}{1997}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{1997}\right) + 1 \right|^2 = \\ &= \left| \left[\cos\left(\frac{2\pi k}{1997}\right) + 1 \right] + i \sin\left(\frac{2\pi k}{1997}\right) \right|^2 = \\ &= \cos^2\left(\frac{2\pi k}{1997}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{1997}\right) + 1 + \sin^2\left(\frac{2\pi k}{1997}\right) = \\ &= 2 + 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{1997}\right). \end{aligned}$$

За умовою $|v + w|^2 \geq 2 + \sqrt{3}$, тоді отримаємо

$$\cos\left(\frac{2\pi k}{1997}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Нерівність справджується коли

$$\frac{\pi}{6} \geq \frac{2\pi k}{1997} \geq -\frac{\pi}{6},$$

для всіх $k = 166, 165, \dots, -165, -166$. Отже з 1996 можливих розв'язків, задовольняють умову задачі лише 332. Таким чином $\frac{m}{n} = \frac{332}{1996} = \frac{83}{499}$. Отже, відповідь 582.

Приклад 3.6. Нехай α, β і γ три дійсні числа. Припустимо, що

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1$$

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 1.$$

Знайти найменше можливе значення $\cos \alpha$.

Розв'язок. Допустимо $a = \cos \alpha + i \sin \alpha$ та визначимо b, c аналогічно. Зауважимо, що на комплексній площині необхідно, щоб a, b, c лежали на одиничному колі (набір точок, що містять комплексні числа z такі, що $|z| = 1$). Оскільки $a + b + c = 1 + i$, можемо знайти значення $1 + i - a = b + c$. Єдине, що ми знаємо, це те, що $|b + c| \leq 2$. Отже, маємо

$$|b + c|^2 = |2 \cos \beta \cdot \cos \gamma + 2 \sin \beta + 2 \sin \gamma + 2| = |2 \cos(\beta - \gamma) + 2|.$$

Оптимально варіант це отримати рівність, тому що ми намагаємося мінімізувати дійсну частину a , і якщо $\cos \beta, \cos \gamma$ якомога більші, то $\cos \alpha$ мале. Оскільки $|b + c|^2 \leq 2^2$, нам потрібно $\cos(\beta - \gamma) = 1, \beta = \gamma$. Тепер розв'яжемо систему

$$\cos \alpha + 2 \cos \beta = 1,$$

$$\sin \alpha + 2 \sin \beta = 1.$$

Якщо піднести рівняння до квадрату і додати їх, ми отримаємо

$$(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + 4(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) + 4(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = 2,$$

$$5 + 4(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 2,$$

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\frac{3}{4}.$$

Беручи до уваги, що

$$\cos \beta = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \text{ і } \sin \beta = \frac{1 - \sin \alpha}{2}.$$

Якщо ми підставимо їх у отримане рівняння та переставимо (також використовуючи тотожності Піфагора), ми отримаємо

$$\cos \alpha + \sin \alpha = -\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\left(\frac{1}{2} + \cos \alpha\right),$$

$$2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - \frac{3}{4} = 0.$$

Розв'язавши квадратне рівняння, отримаємо $\cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{4}$. Оскільки

нам потрібне найменше можливе значення, то відповідь $\cos \alpha = \frac{-1 - \sqrt{7}}{4}$.

Висновок

У літературі з вирішення математичних проблем є кілька робіт, які зосереджуються на тригонометрії та досліджують її широке застосування. Адже тригонометрія це популярний розділ математики, а завдання на тригонометричні тотожності, графіки та властивості тригонометричних рівнянь, обернені тригонометричні функції та тригонометричні рівняння, розв'язки трикутників, тригонометрична підстановка та тригонометрична нерівність часто з'являються на олімпіадах з математики.

Матеріали магістерської роботи відповідають потребам тих, хто хотів би розширити свої знання з тригонометрії, розвинути міцне розуміння тригонометрії та отримати необхідні навички для вирішення тригонометричних задач. Він містить багато прикладів і задач, взятих із різних змагань і журналів, допомагаючи читачам оцінити актуальність тригонометрії в сучасних математичних змаганнях.

У магістерській роботі ми розглянули лише малу частину тем та задач, але наявність такого матеріалу може значним чином полегшити момент підготовки до олімпіади. Цей матеріал допоможе учням та студентам коли вони застрягли в тригонометрії. Ми також хочемо, щоб ви пам'ятали, що єдиний спосіб вивчити математику – це займатися математикою. Ви не повинні думати, що ви не можете це зробити, спробуйте це, поки не знайдете спосіб вирішення проблем.

Існують різні методи вирішення проблем, вірте в себе, що ви можете знайти один. Початок навчання нелегкий. Однак, якщо ви не боїтеся починати, ви пройшли половину свого шляху до навчання.

Список використаної літератури

1. Andreescu, T.; Feng, Z., 101 Problems in Algebra from the Training of the USA IMO Team, Australian Mathematics Trust, 2001.
2. Andreescu, T.; Feng, Z., 102 Combinatorial Problems from the Training of the USA IMO Team, Birkhäuser, 2002.
3. Andreescu, T.; Feng, Z., USA and International Mathematical Olympiads 2003, Mathematical Association of America, 2004.
4. Andreescu, T.; Feng, Z., USA and International Mathematical Olympiads 2002, Mathematical Association of America, 2003.
5. Andreescu, T.; Feng, Z., USA and International Mathematical Olympiads 2001, Mathematical Association of America, 2002.
6. Andreescu, T.; Feng, Z., USA and International Mathematical Olympiads 2000, Mathematical Association of America, 2001.
7. Andreescu, T.; Feng, Z.; Lee, G.; Loh, P., Mathematical Olympiads: Problems and Solutions from around the World, 2001–2002, Mathematical Association of America, 2004.
8. Lozansky, E.; Rousseau, C. *Winning Solutions*, Springer, 1996.
9. Titu Andreescu, Zuming Feng, 103 Trigonometry Problems: From the Training of the USA IMO Team, Birkhauser, 2004
10. Desheng Yang. Trigonometric Functions And Complex Numbers: In Mathematical Olympiad And Competitions. World Scientific Publishing Company, 2016