

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана
Франка
Факультет фізики, математики, економіки та інноваційних
технологій
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

Завідувач кафедри математики та економіки,

Кандидат педагогічних наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК

«__» _____ 20__ р.

Олімпіадні задачі на геометричні нерівності

Спеціальність: 014 «Середня освіта (Математика)»

Магістерська робота

на здобуття кваліфікації – вчитель математики

Автор роботи: Ваків Олег _____

підпис

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук,

доцент Матурін Юрій Петрович _____

підпис

Дрогобич, 2024

Анотація

Ваків Олег. Олімпіадні задачі на геометричні нерівності

Ця магістерська робота аналізує та систематизує олімпіадні задачі на геометричні нерівності, виявляє основні методи їх розв'язання, виділяє типові підходи для підготовки студентів до математичних змагань, створює об'ємний навчальний ресурс для підвищення рівня математичної підготовки у школах.

Abstract

Vakiv Oleh. Olympiad Problems on Geometric Inequalities

This master's thesis analyzes and systematizes Olympiad problems on geometric inequalities, identifies the main methods of their solution, highlights typical approaches for preparing students for mathematical competitions, and creates a comprehensive educational resource to enhance the level of mathematical training in schools.

Зміст

Вступ

Розділ 1. Допоміжні результати та загальні підходи

Розділ 2. Елементи трикутника

Розділ 3. Чотирикутники

Розділ 4. Різні задачі на нерівність трикутника

Розділ 5. Площа трикутника не перевищує половини добутку двох сторін

Розділ 6. Площі

Розділ 7. Вкладені фігури

Розділ 8. Ламані всередині квадрата

Розділ 9. Чотирикутник .

Розділ 10. Багатокутники

Розділ 11. Різні задачі

Висновки

Список використаної літератури

Вступ

Задачі на геометричні нерівності регулярно зустрічаються на широкому спектрі шкільних математичних конкурсів, включаючи регіональні турніри та міжнародні олімпіади.

Незважаючи на їх значимість і складність, ця область математики часто залишається недостатньо представленою в стандартних шкільних програмах. В результаті, багато талановитих учнів, які можуть демонструвати високі результати на міжнародному рівні, виявляються невідповідними та не можуть повною мірою реалізувати свій потенціал у вирішенні складних математичних завдань.

З огляду на вищезазначене, задачі на геометричні нерівності служать не лише засобом перевірки знань учнів, але й інструментом для розвитку геометричної інтуїції та математичного мислення. Вони стимулюють логічне мислення та аналітичні здібності, які є критично важливими для подальшого академічного та професійного розвитку. Такі задачі можуть служити мостом між теоретичними знаннями та практичними вміннями, підвищуючи загальну математичну культуру учнів.

Метою даної роботи є систематизація олімпіадних задач на геометричні нерівності для створення універсального ресурсу, який би служив як допоміжний матеріал для учнів та вчителів. Робота передбачає підбір, аналіз та класифікацію задач, які використовуються в олімпіадах, з метою виділення типових методів розв'язання та структурування їх у вигляді зручного для навчання формату.

Об'єктом дослідження є олімпіадні задачі на геометричні нерівності, а **предметом** — методи та системи їх упорядкування із залученням критичного огляду існуючих підходів.

Розділ 1. Допоміжні результати та загальні підходи

При вирішенні деяких завдань цього розділу потрібно знати різні алгебричні нерівності. Відомості про ці нерівності та їх доведення можна знайти у списку рекомендованих джерел, але потрібно врахувати, що вони потрібні лише для вирішення досить складних завдань, а для вирішення простих завдань знадобляться лише нерівність $\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$ та наслідки з неї.

Для елементів трикутника використовуються такі позначення:

a, b, c - довжини сторін BC, CA, AB ;

α, β, γ - величини кутів при вершинах A, B, C ;

m_a, m_b, m_c - довжини медіан, проведених з вершин A, B, C ;

h_a, h_b, h_c - довжини висот, опущених з вершин A, B, C ;

l_a, l_b, l_c - довжини бісектрис, проведених з вершин A, B, C ;

r і R — радіуси вписаного та описаного кола.

Якщо A, B, C -довільні точки, то $AB \leq AC + CB$, причому рівність досягається, тільки якщо точка C лежить на відрізку AB (нерівність трикутника).

Проти більшої сторони трикутника лежить більший кут.

Медіана трикутника менше півсуми бічних сторін: $m_a < (b + c)/2$.

Якщо один опуклий багатокутник лежить усередині іншого, то периметр зовнішнього багатокутника більше за периметр внутрішнього.

Сума довжин діагоналей випуклого чотирикутника більша за суму довжин будь-якої пари його протилежних сторін.

Проти більшої сторони трикутника лежить більший кут.

Довжина відрізка, що лежить усередині опуклого багатокутника, не перевищує або найбільшої сторони, або найбільшої діагоналі.

Під час роботи над магістерською було проаналізовано існуючу літературу за темою (див. [1]-[7]) та, врахувавши реалії підготовки до олімпіад з математики в українських середніх школах, побудовано певну класифікацію задач з відповідними прикладами.

Аналіз задач на геометричні нерівності показав, що для їх ефективного розв'язання необхідно використовувати систематичний підхід, який включає кілька ключових методів. Основні методи включають використання нерівності трикутника, алгебраїчних перетворень, та застосування відомих геометричних теорем. Ці методи дозволяють не лише розв'язувати конкретні задачі, але й узагальнювати принципи для застосування в інших задачах.

Нерівність трикутника є базовою нерівністю, яка часто використовується як відправна точка для більш складних доведень. Її узагальнення на інші фігури, такі як чотирикутники і багатокутники, дозволяє отримувати нові нерівності, які можуть бути корисними в різних ситуаціях. Наприклад, нерівність для медіан трикутника або для довжин діагоналей у чотирикутнику може бути ефективно використана для отримання інших важливих результатів.

Класифікація задач за типами фігур (трикутники, чотирикутники, багатокутники, кола) дозволяє більш структуровано підходити до їх розв'язання. Це дає можливість зосередитися на специфічних властивостях кожної фігури та ефективніше використовувати наявні теореми і методи. Наприклад, задачі на медіани, висоти та бісектриси трикутника часто вимагають різних методів розв'язання, але всі вони можуть бути систематизовані в окремий розділ.

Критичний огляд існуючих підходів до розв'язання задач на геометричні нерівності показує, що важливо не тільки знайти правильний метод, але й зрозуміти, чому він працює і як його можна застосувати до інших задач. Аналіз ефективності кожного методу, його застосовність до різних типів задач та можливість узагальнення є ключовими аспектами цього.

Порівняння різних підходів до розв'язання одних і тих же задач з різних джерел, таких як міжнародні олімпіади, національні конкурси та інші математичні змагання, дозволяє побачити різні методики та вибрати найбільш універсальний та ефективний підхід. Це також допомагає виявити слабкі сторони певних методів та знайти способи їх поліпшення.

Систематизація задач на геометричні нерівності також включає створення зручного для навчання формату, який містить не тільки задачі, але й детальні розв'язки з

поясненням методів. Це допомагає учням не тільки вирішувати задачі, але й глибше розуміти принципи, на яких вони базуються. Такий підхід підвищує рівень математичної підготовки учнів та готує їх до успішної участі в математичних олімпіадах.

Таким чином, критичний аналіз та систематизація задач на геометричні нерівності створює ефективний навчальний ресурс, який допомагає учням розвивати свої математичні навички та підвищує їх шанси на успіх у математичних змаганнях.

Розділ 2. Елементи трикутника

У задачах a, b і c — довжини сторін довільного трикутника. Див. [1, с.109], [2, с. 11-59], [5, с. 52], [6, с. 1-38], [7, с.32-43].

Задача 1. Доведіть, що. $\frac{a}{b+c-a} - \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$

Розв'язок. Нехай $x = b + c - a, y = c + a - b, z = a + b - c$.

Згідно з нерівністю трикутника ці числа додатні. Зрозуміло, що

$$a = \frac{y+z}{2}, b = \frac{x+z}{2}, c = \frac{x+y}{2}.$$

Тому необхідна нерівність переписується у вигляді

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geq 3.$$

Залишається зауважити, що $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ і т. д.

Задача 2. Доведіть, що $a = y + z, b = x + z$ та $c = x + y$, де x, y та z — додатні числа.

Розв'язок. Розв'язуючи систему рівнянь $x + y = c, x + z = b, y + z = a$, отримуємо $x = (-a + b + c)/2, y = (a - b + c)/2, z = (a + b - c)/2$.

Позитивність чисел x, y і z впливає з нерівності трикутників.

Задача 3. Доведіть, що $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca)$.

Розв'язок. По нерівності трикутника $a^2 > (b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2, b^2 > a^2 - 2ac + c^2$ і $c^2 > a^2 - 2ab + b^2$. Складаючи ці нерівності отримуємо необхідне.

Задача 4. При будь-якому натуральному n із чисел a^n, b^n і c^n можна скласти трикутник. Доведіть, що серед чисел a, b та c є два рівні.

Розв'язок. Можна вважати, що $a \geq b \geq c$. Доведемо, що $a = b$. Справді, якщо $b < a$, то $b \leq \lambda a$ і $c \leq \lambda a$, де $\lambda < 1$. Тому $b^n + c^n \leq 2\lambda^n a^n$. За достатньо великого n маємо $2\lambda^n < 1$ і отримуємо протиріччя з нерівністю трикутника.

Задача 5. Нехай $p = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ і $q = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$. Доведіть, що $|p - q| < 1$.

Розв'язок. Легко перевірити, що $abc|p - q| = |(b - c)(c - a)(a - b)|$. А оскільки

$|b - c| < a$, $|c - a| < b$ і $|a - b| < c$, то $|(b - c)(c - a)(a - b)| < abc$.

Розглянемо задачі на геометричні нерівності, які пов'язані з медіанами.

Задача 6. Доведіть, що $(a + b - c)/2 < m_c < (a + b)/2$.

Розв'язок 1. Нехай C_1 - середина сторони AB . Тоді $CC_1 + C_1A > CA$ і $BC_1 + C_1C > BC$. Тому $2CC_1 + BA > CA + BC$, тобто $m_c > (a + b - c)/2$.

Розв'язок.

Нехай точка C' симетрична C відносно точки C_1 . Тоді $CC_1 = C_1C'$ і $BC' = CA$. Тому $2m_c = CC' < CB + BC' = CB + CA$, тобто $m_c < (a + b)/2$.

Задача 7. Доведіть, що у будь-якому трикутнику сума медіан більше $3/4$ периметра, але менше периметра.

Розв'язок.

З попередньої задачі випливає $m_a < (b + c)/2$, $m_b < (a + c)/2$ і $m_c < (a + b)/2$, тому сума довжин медіан менша за периметр.

Нехай O - точка перетину медіан трикутника ABC . Тоді $BO + OA > BA$, $AO + OC > AC$ і $CO + OB > CB$. Складаючи ці нерівності та враховуючи, що

$AO = 2m_a/3$, $BO = 2m_b/3$, $CO = 2m_c/3$, отримуємо $m_a + m_b + m_c > 3(a + b + c)/4$.

Задача 8. У трикутнику довжини двох сторін дорівнюють 3,14 і 0,67. Знайдіть довжину третьої сторони, якщо відомо, що вона є цілим числом.

Розв'язок. Нехай довжина третьої сторони дорівнює n . За нерівністю трикутника

$3,14 - 0,67 < n < 3,14 + 0,67$. Оскільки n - ціле число, то $n = 3$.

Задача 9. Доведіть, що якщо довжини сторін трикутника зв'язані нерівністю

$$a^2 + b^2 > 5c^2 \text{ то } c - \text{довжина найменшої сторони.}$$

Розв'язок. Припустимо, що c - не найменша сторона, наприклад, $a \leq c$.

Тоді $a^2 \leq c^2$ і $b^2 < (a + c)^2 \leq 4c^2$. Тому $a^2 + b^2 < 5c^2$. Отримано протиріччя.

Задача 10. Дано трикутник ABC і точку D усередині його, причому $AC - DA > 1$ і

$BC - BD > 1$. Нехай E - довільна точка всередині відрізка AB .

Доведіть, що $EC - ED > 1$.

Розв'язок. Відрізок CE перетинає відрізок AD або відрізок BD ; нехай для визначеності він перетинає відрізок AD у точці P . Тоді $AP + PC > AC$ і $EP + PD > ED$, тому $DA + EC > AC + ED$. Отже, $EC - ED > AC - DA > 1$.

Задача 11. Усередині трикутника ABC периметра P взято точку O . Доведіть,

що $P/2 < AO + BO + CO < P$.

Розв'язок. Оскільки $AO + BO > AB$, $BO + OC > BC$ і $CO + OA > AC$, то $AO + BO + CO > (AB + BC + CA)/2$.

Оскільки трикутник ABC містить трикутник ABO , то $AB + BO + OA < AB + BC + CA$, тобто $BO + OA < BC + CA$. Аналогічно $AO + OC < AB + BC$ і $CO + OB < CA + AB$. Додаючи ці нерівності, отримуємо $AO + BO + CO < AB + BC + CA$.

Задача 9. Дано n точок $A_1, \dots, A_n$ та коло радіуса 1. Доведіть ті, що на колі можна вибрати точку M так, що $MA_1 + \dots + MA_n \geq n$.

Розв'язок.

Нехай M_1 та M_2 — діаметрально протилежні точки кола. Тоді $M_1A_k + M_2A_k >$

$M_1M_2 = 2$. Додаючи ці нерівності для $k = 1, \dots, n$, отримуємо

$(M_1A_1 + \dots + M_1A_n) + (M_2A_1 + \dots + M_2A_n) \geq 2n$. Тому або $M_1A_1 + \dots + M_1A_n \geq n$, і тоді покладемо $M = M_1$, або $M_2A_1 + \dots + M_2A_n \geq n$, і тоді покладемо $M = M_2$.

Задача 10. Точки $A_1, \dots, A_n$ не лежать на одній прямій. Нехай дві різні точки P і Q мають ту властивість, що $A_1P + \dots + A_nP = A_1Q + \dots + A_nQ = s$. Доведіть, що тоді $A_1K + \dots + A_nK < s$ для деякої точки K .

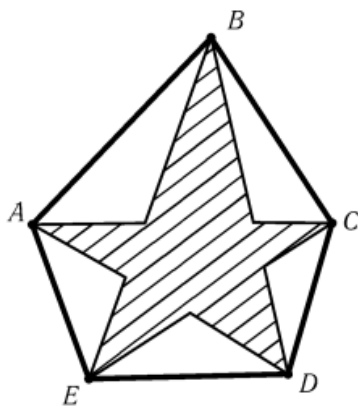
Розв'язок.

В якості K можна взяти середину відрізка PQ . Справді, тоді $A_iK \leq (A_iP + A_iQ)/2$, причому хоча б одна нерівність строга, оскільки точки A_i не можуть усі лежати на прямій PQ .

11. Доведіть, що сума довжин діагоналей опуклого п'ятикутника $ABCDE$ більша за периметр, але менша за подвоєний периметр.

Розв'язок. Ясно, що $AB + BC > AC, BC + CD > BD, CD + DE > CE, DE + EA > DA, EA + AB > EB$. Складаючи всі ці нерівності, отримуємо, що сума довжин діагоналей п'ятикутника менша за подвоєний периметр.

Сума довжин діагоналей більша за суму довжин сторін "променів зірки", а вона, у свою чергу, більша за периметр п'ятикутника (мал. 2).



Мал. 2

Задача 10. На столі лежить 50 годинників, що правильно йдуть. Доведіть, що в деякий момент сума відстаней від центру столу до кінців хвилин стрілок виявиться більшою за суму відстаней від центру столу до центрів годинників

Розв'язок.

Нехай A_i і B_i - положення кінця хвилинних стрілок годинника з номером i в моменти t і $t + 30$ хв, O_i - центр i -го годинника, а O - центр стола.

Тоді $OO_i \leq (OA_i + OB_i)/2$ для будь-якого i . Ясно, що в деякий

момент точки A_i і B_i не лежать на прямій O_iO , тобто принаймні одна з n нерівностей стає строгою.

Тоді або $OO_1 + \dots + OO_n < OA_1 + \dots + OA_n$, або $OO_1 + \dots + OO_n < OB_1 + \dots + OB_n$.

Розділ 3. Чотирикутники

Розглянемо відповідні задачі на чотирикутники. Див. також [1, с.134], [7, с.44-57].

Задача 1. Нехай $ABCD$ - опуклий чотирикутник. Доведіть, що $AB + CD < AC + BD$.

Розв'язок. Нехай O - точка перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$.

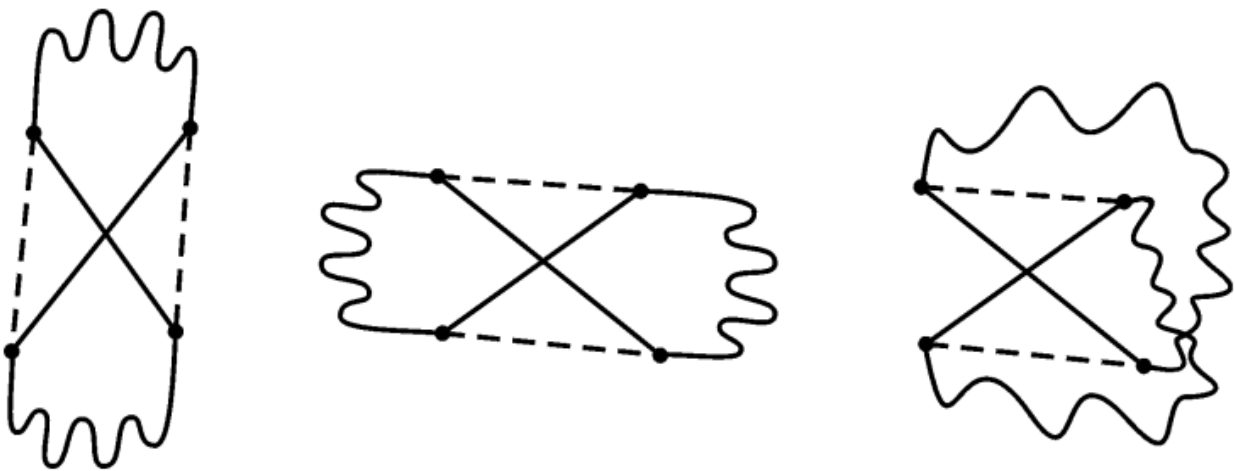
Тоді $AC + BD = (AO + OC) + (BO + OD) = (AO + OB) + (OC + OD) > AB + CD$.

Задача 2. Нехай $ABCD$ - опуклий чотирикутник, причому $AB + BD \leq AC + CD$. Доведіть, що $AB < AC$.

Розв'язок.. Згідно з попередньою задачею $AB + CD < AC + BD$. Складаючи цю нерівність із нерівністю $AB + BD \leq AC + CD$, отримуємо $2AB < 2AC$.

Задача 3. Дано замкнуту ламану, причому будь-яка інша замкнута ламана з тими самими вершинами ламана з тими самими вершинами має більшу довжину. Доведіть, що ця ламана несамоперетинається.

Розв'язок. Нехай ламана найменшої довжини самоперетинається. Розглянемо дві ланки, що перетинаються. Вершини цих ланок можуть з'єднуватися одним із трьох способів. Розглянемо нову ламану, у якій дві перехресні ланки замінено на штрихові ланки (див. мал. 1).



Мал. 1

При цьому знову виходить замкнута ламана, але її довжина менша, ніж

у вихідної, оскільки сума довжин протилежних сторін опуклого чотирикутника менша за суму довжин діагоналей. Отримано протиріччя, тому замкнута ламана найменшої довжини не може мати ланок, що перетинаються.

Розділ 4. Різні задачі на нерівність трикутника

Розглянемо тепер різні задачі на нерівності в трикутнику Див. [1, с.109], [2, с. 11-59], [5, с. 52], [6, с. 1-38], [7, с.32-43].

Задача 1. На основі AD трапеції ABCD знайшлася точка E, яка має ту властивість, що периметри трикутників ABE, BCE і CDE рівні.

Доведіть, що тоді $BC = AD/2$.

Розв'язок. Досить довести, що ABCE і BCDE - паралелограми. Добудуємо трикутник ABE до паралелограма ABC₁E. Тоді периметри трикутників BC₁E і ABE рівні, тому рівні периметри трикутників BC₁E і BCE. Отже, C₁ = C, оскільки інакше один із трикутників BC₁E і BCE лежить усередині іншого і їхні периметри не можуть бути рівними.

Тому ABCE - паралелограм. Аналогічно доводиться, що BCDE - паралелограм.

Площа трикутника не перевершує половини добутку двох сторін.

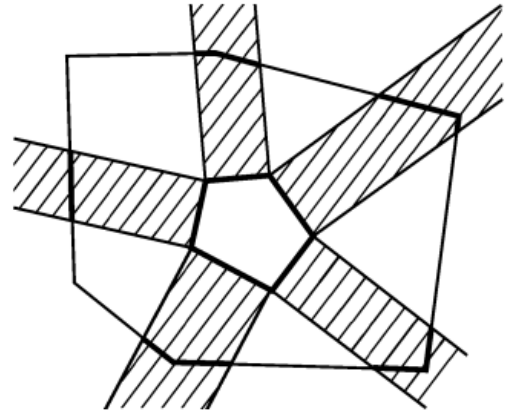
Задача 2. а) Доведіть, що при переході від невіпуклого многокутника до його опуклої оболонки периметр зменшується. (Опуклою оболонкою многокутника називають найменший опуклий многокутник, що його містить).

б) Усередині опуклого многокутника лежить інший опуклий многокутник. Доведіть, що периметр зовнішнього многокутника більший, ніж периметр внутрішнього.

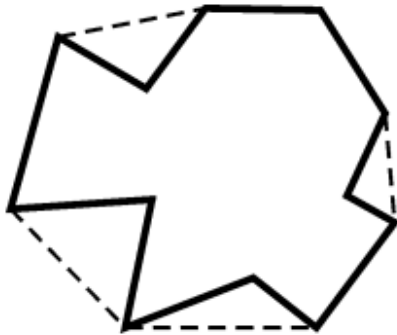
Розв'язок.

а) Під час переходу від невіпуклого многокутника до його опуклої оболонки деякі ламані, утворені сторонами, замінюються прямолінійними відрізками (мал. 3). Залишається зауважити, що довжина ламаної більша за довжини відрізка з тими самими кінцями.

б) Побудуємо на сторонах внутрішнього многокутника напівсмути, звернені назовні; паралельні краї напівсмути перпендикулярні відповідній стороні многокутника (мал. 4). Позначимо через P ту частину периметра зовнішнього многокутника, яка знаходиться всередині цих півсмути. Тоді периметр внутрішнього многокутника не перевищує P , а зовнішнього більший за P .



Мал.4



Мал.3

Розділ 5. Площа трикутника не перевищує половини добутку двох сторін

Тепер розглянемо питання щодо площ трикутників (див [2, с. 69]).

Задача 1. Дано трикутник площі 1 зі сторонами $a \leq b \leq c$. Доведіть, що $b \geq \sqrt{2}$.

Розв'язок. Ясно, що $2 = 2S = ab \sin \gamma \leq ab \leq b^2$, т. е. $b \geq \sqrt{2}$.

Задача 2. Усередині трикутника ABC взято точку M . Доведіть, що $4S \leq AM \cdot BC + BM \cdot AC + CM \cdot AB$, де S - площа трикутника ABC .

Розв'язок 2.

Опустимо з точок B і C перпендикуляри BB_1 і CC_1 на пряму AM .

Тоді $2S_{AMB} + 2S_{AMC} = AM \cdot BB_1 + AM \cdot CC_1 \leq AM \cdot BC$, оскільки $BB_1 + CC_1 \leq BC$. Аналогічно $2S_{BMC} + 2S_{BMA} \leq BM \cdot AC$ і $2S_{CMA} + 2S_{CMB} \leq CM \cdot AB$.

Складаючи ці нерівності, отримуємо потрібне.

Задача 3. Усередині опуклого чотирикутника $ABCD$ площі S взято точку O , причому $AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 2S$. Доведіть, що тоді $ABCD$ - квадрат і O - його центр.

Розв'язок.

Зрозуміло, що $2S_{AOB} \leq AO \cdot OB \leq (AO^2 + BO^2)/2$, причому рівність можлива, тільки якщо $\angle AOB = 90^\circ$ і $AO = BO$. Аналогічно $2S_{BOC} \leq (BO^2 + CO^2)/2$, $2S_{COD} \leq (CO^2 + DO^2)/2$ і $2S_{DOA} \leq (DO^2 + AO^2)/2$. Складаючи ці нерівності, отримуємо $2S = 2(S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA}) \leq AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2$, причому рівність можлива, тільки якщо $AO = BO = CO = DO$ і $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 90^\circ$, тобто $ABCD$ - квадрат і точка O - його центр.

Розділ 6. Площі

Розглянемо тепер в загальному питання щодо площ (див. [6, с. 93-138]).

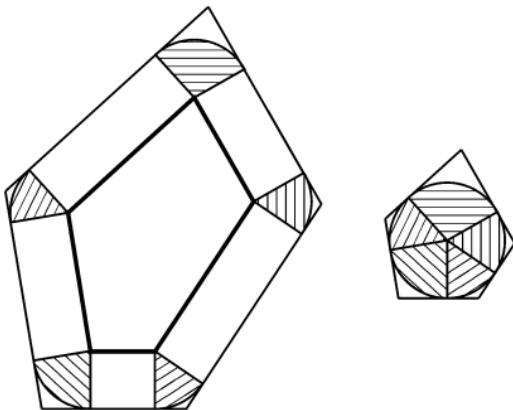
Задача 1. Точки M і N лежать на сторонах AB і AC трикутника ABC , причому $AM = CN$ і $AN = BM$. Доведіть, що площа чотирикутника $BMNC$ принаймні втричі більша за площу трикутника AMN .

Розв'язок. Треба доказати, що $S_{ABC} / S_{AMN} \geq 4$. Так як $AB = AM + MB = AM + AN = AN + NC = AC$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \frac{AB \cdot AC}{AM \cdot AN} = \frac{(AM + AN)^2}{AM \cdot AN} \geq 4$

Задача 2. Усі сторони опуклого багатокутника відсуваються в зовнішню сторону на відстань h . Доведіть, що його площа при цьому збільшиться більш ніж на $Ph + \pi h^2$, де P -периметр.

Розв'язок. Від ріжемо від отриманого багатокутника прямокутники зі стороною h , побудовані зовнішнім чином на сторонах вихідного багатокутника (мал. 5). При цьому крім вихідного багатокутника залишаться ще деякі чотирикутники, з яких можна скласти багатокутник, описаний навколо кола радіуса h . Сума площ цих чотирикутників більша за площу кола радіуса h , тобто більша за πh^2 . Ясно також, що сума площ відрізнаних прямокутників дорівнює Ph .

Мал. 5



Задача 3. Доведіть, що сума площ п'яти трикутників, утворених парами сусідніх сторін і відповідними діагоналями

Розв'язок. Нехай для визначеності ABC - трикутник найменшої площі. Позначимо точку перетину діагоналей AD і EC через F . Тоді $S_{ABCDE} < S_{AED} + S_{EDC} + S_{ABCF}$.

Оскільки точка F лежить на відрізку EC і $S_{EAB} \geq S_{CAB}$, то $S_{EAB} \geq S_{FAB}$. Аналогічно

$S_{DCB} \geq S_{FCB}$. Тому $S_{ABCF} = S_{FAB} + S_{FCB} \leq S_{EAB} + S_{DCB}$. Отже, $S_{ABCDE} < S_{AED} + S_{EDC} + S_{DCB}$; це навіть сильніша нерівність, ніж було потрібно.

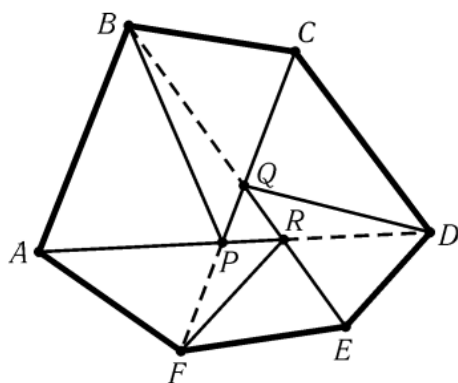
Задача 4. а) Доведіть, що в будь-якому опуклому шестикутнику площі S знайдеться діагональ, що відсікає від нього трикутник площі не більше $S/6$.

б) Доведіть, що в будь-якому опуклому восьмикутнику площі S знайдеться діагональ, що відсікає від нього трикутник площі не більше $S/8$.

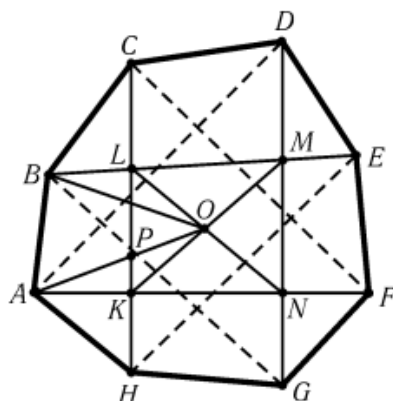
Розв'язок.

а) Позначимо точки перетину діагоналей AD і CF , CF і BE , BE і AD через P , Q , R відповідно (мал.6). Чотирикутники $ABCP$ і $CDEQ$ не мають спільних внутрішніх точок, оскільки сторони CP і QC лежать на прямій CF , а відрізки AB і DE - по різні боки від неї. Аналогічно чотирикутники $ABCP$, $CDEQ$ і $EFAR$ не мають попарно спільних внутрішніх точок. Тому сума їхніх площ не перевищує S . Отже, сума площ трикутників ABP , BSP , CDQ , DEQ , EFR , FAR не перевершує S , тобто площа одного з них, наприклад ABP , не перевищує $S/6$. Точка P лежить на відрізку CF , тому або точка C , або точка F віддалена від прямої AB не більше, ніж точка P . Отже, або $S_{ABC} \leq S_{ABP} \leq S/6$ або $S_{ABF} \leq S_{ABP} \leq S/6$

Мал.6



Мал.7



б) Нехай $ABCDEFGH$ - опуклий восьмикутник (мал. 7). Доведемо спочатку, що чотирикутники $ABEF$, $BCFG$, $CDGH$ і $DEHA$ мають спільну точку. Зрозуміло, що перетином $ABEF$ і $CDGH$ є деякий опуклий чотирикутник $KLMN$. Відрізки AF і HC лежать усередині кутів DAN і AHE відповідно, тому точка K лежить усередині чотирикутника $DEHA$. Аналогічно доводиться, що точка M лежить усередині

чотирикутника $DEHA$, тобто весь відрізок KM лежить усередині його. Аналогічно відрізок LN лежить усередині чотирикутника $BCFG$. Точка перетину діагоналей KM і LN належить усім нашим чотирикутникам; позначимо її O . Розіб'ємо восьмикутник на трикутники, з'єднавши точку O з вершинами. Площа одного з цих трикутників, наприклад ABO , не перевищує $S/8$. Відрізок AO перетинає сторону KL у деякій точці P , тому $S_{ABP} \leq S_{ABO} \leq S/8$. Оскільки точка P лежить на діагоналі CH , то або $S_{ABC} \leq S_{ABP} \leq S/8$, або $S_{ABH} \leq S_{ABP} \leq S/8$.

Задача 5. $ABCD$ - опуклий чотирикутник площі S . Кут між прямими AB і CD дорівнює α , кут між AD і BC дорівнює β . Доведіть, що

$$AB \cdot CD \sin \alpha + AD \cdot BC \sin \beta \leq 2S \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

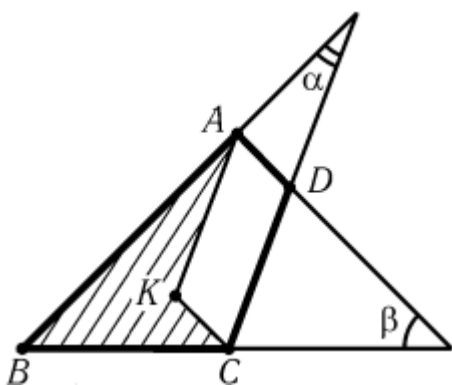
Розв'язок.

Для визначеності можна вважати, що перетинаються промені BA і CD , BC і AD (мал. 8). Тоді, якщо добудувати трикутник ADC до паралелограма $ADCK$, точка K опиниться всередині чотирикутника $ABCD$. Тому

$$2S \geq 2S_{ABK} + 2S_{BCK} = AB \cdot AK \sin \alpha + BC \cdot CK \sin \beta = AB \cdot CD \sin \alpha + BC \cdot AD \sin \beta.$$

Рівність досягається, якщо точка D лежить на відрізку AC .

Нехай точка D' симетрична точці D відносно серединного перпендикуляра до відрізка AC . Тоді $2S = 2S_{ABCD'} = 2S_{ABD'} + 2S_{BCD'} \leq AB \cdot AD' + BC \cdot CD' = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.



Мал.8

Розділ 7. Вкладені фігури

Розглянемо тепер питання щодо вкладених фігур (див. [6, с. 39-58]).

Задача 1. Опуклий багатокутник, площа якого більша за 0,5, поміщено у квадрат зі стороною 1. Доведіть, що всередині багатокутника можна помістити відрізок довжини 0,5, паралельний стороні квадрата.

Розв'язок. Проведемо через усі вершини багатокутника прямі, паралельні до однієї пари сторін квадрата, і розіб'ємо тим самим квадрат на смужки. Кожна така смужка відрізає від багатокутника трапецію або трикутник. Достатньо довести, що довжина однієї з основ цих трапецій більша за 0,5. Припустимо, що довжини основ усіх трапецій не перевищують 0,5. Тоді площа кожної трапеції не перевищує половини висоти смужки, що її укладає. Тому площа багатокутника, що дорівнює сумі площ трапецій і трикутників, на які він розрізаний, не перевищує половини суми висот смужок, тобто не перевищує 0,5. Отримано протиріччя.

Задача 2. У коло радіуса 1 поміщено два трикутники, площа кожного з яких більша за 1. Доведіть, що ці трикутники перетинаються.

Розв'язок.

Достатньо довести, що обидва трикутники містять центр O кола. Доведемо, що якщо трикутник ABC , поміщений у коло радіуса 1, не містить центру кола, то його площа менша за 1. Справді, для будь-якої точки, що лежить за межами трикутника, знайдеться пряма, яка проходить через дві вершини і відокремлює цю точку від третьої вершини. Нехай для визначеності пряма AB розділяє точки C і O . Тоді $h_c < 1$ і $AB < 2$, тому $S = h_c \cdot AB / 2 < 1$.

Задача 3. а) Доведіть, що в опуклий багатокутник площі S і периметра P можна помістити коло радіуса S/P .

Розв'язок.

а) Побудуємо на сторонах багатокутника внутрішнім чином прямокутники з другою стороною $R = S/P$. Вони покривають не весь багатокутник (ці прямокутники перекриваються і можуть вилазити за його межі, а сума їхніх площ дорівнює площі багатокутника). Непокрита точка віддалена від усіх сторін багатокутника більше,

ніж на R , тому коло радіуса R з центром у цій точці цілком лежить усередині многокутника.

б) Усередині опуклого многокутника площі S_1 і периметра P_1 розташований опуклий многокутник площі S_2 і периметра P_2 . Доведіть, що $2S_1/P_1 > S_2/P_2$.

б) Із задачі а) випливає, що у внутрішній многокутник можна помістити коло радіуса S_2/P_2 . Зрозуміло, що це коло лежить усередині зовнішнього многокутника. Залишається довести, що якщо всередині багатокутника лежить

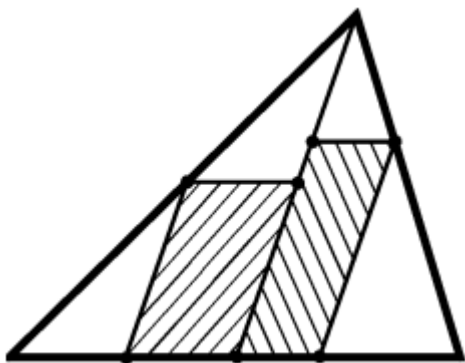
коло радіуса R , то $R \leq 2S/P$. Для цього з'єднаємо центр O кола з вершинами. Тоді багатокутник розіб'ється на трикутники з площами $h_i a_i / 2$, де h_i - відстань від точки O до i -ї сторони, а a_i - довжина i -ї сторони. Так як $h_i \geq R$, то $2S = \sum h_i a_i \geq \sum R a_i = RP$.

Задача 4. Доведіть, що площа паралелограма, що лежить усередині трикутника, не перевершує половини площі трикутника.

Розв'язок.

Розглянемо спочатку випадок, коли дві сторони паралелограма лежать на прямих AB і AC , а вершина X лежить на стороні BC . Якщо $BX : CX = x : (1 - x)$, то відношення площі паралелограма до площі трикутника дорівнює $2x(1 - x) \leq 1/2$. У загальному випадку проведемо паралельні прямі, що містять пару сторін даного паралелограма (мал. 9). Площа даного паралелограма не перевершує суми площ заштрихованих паралелограмів, а вони належать до розібраного вище випадку. Якщо прямі, що містять пару сторін даного паралелограма, перетинають лише дві сторони трикутника, то можна обмежитися одним заштрихованим паралелограмом.

Мал.9

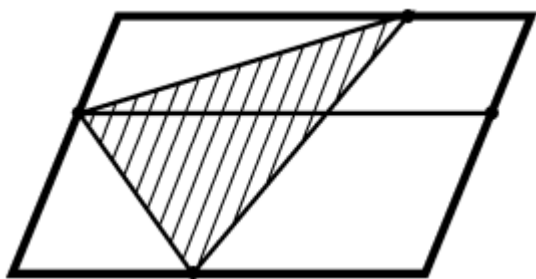


Задача 5. Доведіть, що площа трикутника, вершини якого лежать на сторонах паралелограма, не перевершує половини площі паралелограма.

Розв'язок.

Розглянемо спочатку такий випадок: дві вершини A і B трикутника ABC лежать на одній стороні PQ паралелограма. Тоді $AB \leq PQ$ і висота, опущена на сторону AB , не більша за висоту паралелограма. Тому площа трикутника ABC не більша за половину площі паралелограма.

Якщо ж вершини трикутника лежать на різних сторонах паралелограма, то дві з них лежать на протилежних сторонах. Проведемо через третю вершину трикутника пряму, паралельну цим сторонам (мал.10). Вона розрізає паралелограм на два паралелограми, а трикутник - на два трикутники, причому в обох трикутників дві вершини лежать на сторонах паралелограма. Приходимо до розглянутого випадку.



Мал.10

Задача 6. а) Доведіть, що опуклий багатокутник площі S можна помістити в деякий прямокутник площі не більш як $2S$.

б) Доведіть, що в опуклий багатокутник площі S можна вписати паралелограм площі не менше $S/2$.

Розв'язок.

а) Нехай AB - найбільша діагональ або сторона даного багатокутника M .

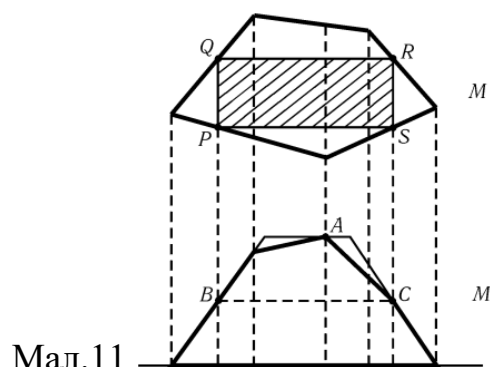
Багатокутник M укладений усередині смуги, утвореної перпендикулярами до відрізка AB , що проходять через точки A і B . Проведемо до багатокутника M дві опорні прямі, паралельні AB ; нехай вони перетинають багатокутник M у точках C і D . У результаті багатокутник M укладено в прямокутник, площа якого дорівнює

$$2S_{ABC} + 2S_{ABD} \leq 2S$$

б) Нехай M - вихідний багатокутник, l - довільна пряма. Розглянемо

многокутник M_1 , одна зі сторін якого - проєкція M на l , а довжини перерізів багатокутників M і M_1 будь-якою прямою, перпендикулярної l , рівні (мал.11). Легко перевірити, що многокутник M_1 теж опуклий, причому його площа дорівнює S .

Нехай A - найбільш віддалена від l точка багатокутника M_1 . Пряма, рівновіддалена від точки A і прямої l , перетинає сторони многокутника M_1 у точках B і C . Проведемо через точки B і C опорні прямі. У результаті навколо многокутника M_1 буде описана трапеція (через точку A теж можна провести опорну пряму); площа цієї трапеції не менша за S . Якщо висота трапеції (тобто відстань від точки A до прямої l) дорівнює h , то її площа дорівнює $h \cdot BC$, а отже, $h \cdot BC \geq S$. Розглянемо перерізи PQ і RS багатокутника M прямими, перпендикулярними l і такими, що проходять через B і C . Довжини цих перерізів дорівнюють $h/2$, тому $PQRS$ - паралелограм, причому його площа дорівнює $BC \cdot h/2 \geq S/2$.



Задача 7. Доведіть, що в будь-який опуклий многокутник площі 1 можна помістити трикутник, площа якого не менша за: а) $1/4$;
б) $3/8$.

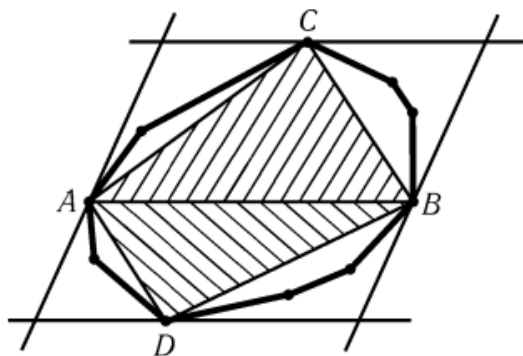
Розв'язок.

а) Укладемо багатокутник у смугу, утворену паралельними прямими.

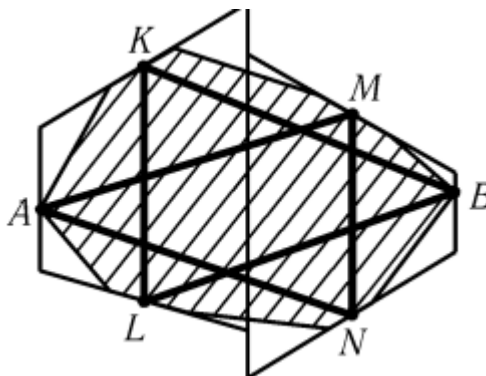
Будемо зсувати ці прямі паралельно до доти, доки на кожну з них не потраплять деякі вершини A і B багатокутника. Потім зробимо те саме для смуги, утвореної прямими, паралельними AB . На ці прямі потраплять деякі вершини C і D (мал.12). Початковий багатокутник укладений у паралелограм, тому площа цього паралелограма не менша за 1. З іншого боку, сума площ трикутників ACB і ADB

дорівнює половині площі паралелограма, тому площа одного з цих трикутників не менша $\frac{1}{4}$

Мал.12.



Мал.13.



б) Як і в задачі а), укладемо багатокутник у смугу, утворену паралельними прямими, так, щоб вершини А і В лежали на цих прямих (мал.12). Нехай ширина цієї смуги дорівнює d . Проведемо три прямі, що ділять цю смугу на рівні смуги шириною $d/4$. Нехай перша і третя прямі перетинають сторони багатокутника в точках К, L і М, N відповідно. Продовжимо сторони, на яких лежать точки К, L, М і N, до перетину зі сторонами вихідної смуги і з прямою, що ділить її навпіл. При цьому утворюються дві трапеції із середніми лініями KL і MN, висоти яких дорівнюють $d/2$. Оскільки ці трапеції покривають увесь багатокутник, сума їхніх площ не менша за його площу, тобто $(d \cdot KL + d \cdot MN)/2 \geq 1$. Сума площ трикутників AMN і BKL, що містяться у вихідному багатокутнику, дорівнює $(3d \cdot MN + 3d \cdot KL)/8 \geq 3/4$. Тому площа одного з цих трикутників не менша за $3/8$.

Розділ 8. Ламані всередині квадрата

Розглянемо тепер питання щодо ламаних (див. [6, с.24-38]).

Задача 1. Усередині квадрата зі стороною 1 розташована несамопересічна ламана довжини 1000. Доведіть, що знайдеться пряма, паралельна одній зі сторін квадрата, що перетинає цю ламану принаймні в 500 точках.

Розв'язок.

Нехай l_i - довжина i -ї ланки ламаної, a_i та b_i - довжини її проекцій на сторони квадрата. Тоді $l_i \leq a_i + b_i$. Отже, $1000 = l_1 + \dots + l_n \leq (a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n)$, тобто або $a_1 + \dots + a_n \geq 500$, або $b_1 + \dots + b_n \geq 500$.

Якщо сума довжин проекцій ланок на бік довжиною 1 не менша за 500, то на одну з точок сторони проектується не менше 500 різних ланок ламаної, тобто перпендикуляр до сторони, що проходить через цю точку, перетинає ламану принаймні у 500 точках.

Задача 2. Усередині квадрата зі стороною 1 розташовано n точок. Доведіть, що існує ламана, яка містить усі ці точки, довжина якої не перевищує $2n$.

Розв'язок.

Розіб'ємо квадрат на n вертикальних смужок, що містять по n точок кожна. Точки всередині кожної смуги з'єднаємо зверху вниз і отримаємо n ламаних. Ці ламані можна з'єднати в одну ламану двома способами (мал.14, а і б). Розглянемо відрізки, що з'єднують різні смуги.

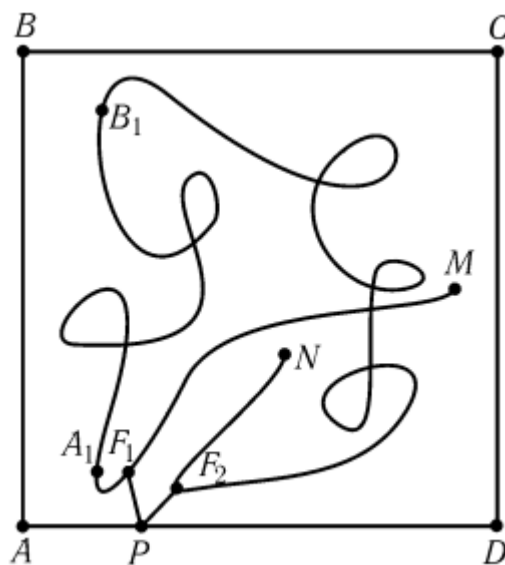
Об'єднання всіх таких відрізків, отриманих обома способами, являє собою пару ламаних, причому сума довжин горизонтальних проекцій ланок кожної з них не перевершує 1. Тому сума довжин горизонтальних проекцій з'єднувальних відрізків для одного зі способів не перевершує 1. Розглянемо саме це з'єднання. Сума довжин горизонтальних проекцій для ланок, що з'єднують, не перевершує 1, а для всіх інших ланок не перевищує $(n - 1)(h_1 + \dots + h_n)$, де h_i - ширина i -ї смуги. Ясно, що $h_1 + \dots + h_n = 1$. Сума вертикальних проекцій усіх ланок ламаної не перевершує n .

Мал.14.

Доведемо, що F_1 і F_2 - шукані точки. Справді, $F_1F_2 \leq F_1P + PF_2 \leq 1$. З іншого боку, йдучи в F_2 з F_1 , ми повинні пройти через точку B , а $F_1B_1 \geq 99$ і $F_2B_1 \geq 99$

оскільки точка B_1 віддалена від сторони BC не більш ніж на $0,5$, а F_1 і F_2 віддалені від сторони AD не більше ніж на $0,5$.

Мал.15.



Розділ 9. Чотирикутник .

Розглянемо тепер питання щодо чотирикутників (див. [2, с. 128-135]).

Задача 1. У чотирикутнику $ABCD$ кути A і B рівні, а $\angle D > \angle C$. Доведіть, що тоді $AD < BC$.

Розв'язок.

Нехай $\angle A = \angle B$. Досить довести, що якщо $AD < BC$, то $\angle D > \angle C$. Візьмемо на стороні BC точку D_1 так, що $BD_1 = AD$. Тоді $ABD_1 D$ - рівнобедрена трапеція.

Тому $\angle D > \angle D_1 DA = \angle DD_1 B > \angle C$.

Задача 2. У трапеції $ABCD$ кути при основі AD задовольняють нерівностям $\angle A < \angle D < 90^\circ$. Доведіть, що тоді $AC > BD$.

Розв'язок.

Нехай B_1 і C_1 - проекції точок B і C на основу AD . Оскільки $\angle BAB_1 < \angle CDC_1$ і $BB_1 = CC_1$, то $AB_1 > DC_1$ і тому $B_1 D < AC_1$. Отже, $BD^2 = B_1 D^2 + B_1 B^2 < AC_1^2 + CC_1^2 = AC^2$.

Задача 3. Доведіть, що якщо два протилежні кути чотирикутника тупі, то діагональ, що з'єднує вершини цих кутів, коротша за іншу діагональ.

Розв'язок.

Нехай кути B і D чотирикутника $ABCD$ тупі. Тоді точки B і D лежать усередині кола з діаметром AC . Оскільки відстань між будь-якими двома точками, що лежать усередині кола, менша за його діаметр, то $BD < AC$.

Задача 4. Доведіть, що сума відстаней від довільної точки до трьох вершин рівнобедреної трапеції більша за відстань від цієї точки до четвертої вершини.

Розв'язок.

У рівнобедреній трапеції $ABCD$ діагоналі AC і BD рівні. Тому $BM + (AM + CM) > BM + AC = BM + BD \geq DM$.

Задача 5. Кут A чотирикутника $ABCD$ тупий; F - середина сторони BC . Доведіть, що $2FA < BD + CD$.

Розв'язок.

Нехай O - середина відрізка BD . Точка A лежить усередині кола з діаметром BD , тому $OA < BD/2$. Крім того, $FO = CD/2$. Отже, $2FA < 2FO + 2OA < CD + BD$.

Задача 6. Нехай M і N - середини сторін BC і CD опуклого чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що $S_{ABCD} < 4S_{AMN}$.

Розв'язок.

Зрозуміло, що $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ABD} = 2S_{AMC} + 2S_{AND} = 2(S_{AMN} + S_{CMN})$. Якщо відрізок AM перетинає діагональ BD у точці A_1 , то $S_{CMN} = S_{A_1MN} < S_{AMN}$. Отже, $S_{ABCD} < 4S_{AMN}$.

Задача 7. Точка P лежить усередині опуклого чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що сума відстаней від точки P до вершин чотирикутника менша за суму попарних відстаней між вершинами чотирикутника.

Розв'язок. Діагоналі AC і BD перетинаються в точці O . Нехай для визначеності точка P лежить усередині трикутника AOB . Тоді $AP + BP \leq AO + BO < AC + BD$ (див. розв'язання задачі 9.30) і $CP + DP < CB + BA + AD$.

Задача 8. Діагоналі ділять опуклий чотирикутник $ABCD$ на чотири трикутники. Нехай P - периметр чотирикутника $ABCD$, Q - периметр чотирикутника, утвореного центрами вписаних кіл отриманих трикутників. Доведіть, що $PQ > 4S_{ABCD}$.

Розв'язок.

Нехай r_i , S_i і p_i - радіуси вписаних кіл, площі та напівпериметри отриманих трикутників. Тоді $Q \geq 2 \sum r_i = 2 \sum (S_i/p_i) >> 4 \sum (S_i/P) = 4S/P$.

Задача 9. Доведіть, що відстань від однієї з вершин опуклого чотирикутника до протилежної діагоналі не перевищує половини цієї діагоналі.

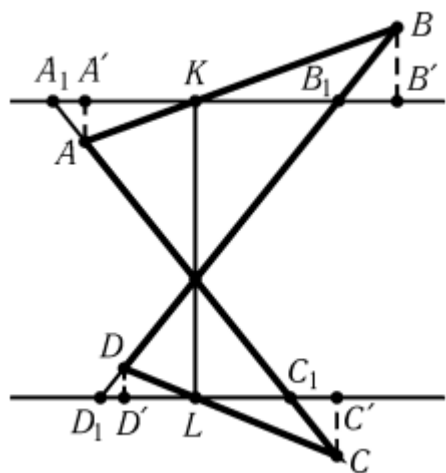
Розв'язок.

Нехай $AC \leq BD$. Опустимо з вершин A і C перпендикуляри AA_1 і CC_1 на діагональ BD . Тоді $AA_1 + CC_1 \leq AC \leq BD$, а отже, $AA_1 \leq BD/2$ або $CC_1 \leq BD/2$.

Задача 10. Відрізок KL проходить через точку перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$, а кінці його лежать на сторонах AB і CD . Доведіть, що довжина відрізка KL не перевищує довжини однієї з діагоналей

Розв'язок.

Проведемо через кінці відрізка KL прямі, йому перпендикулярні, і розглянемо проекції на них вершин чотирикутника, а також точки перетину з ними прямих AC і BD (мал.16). Нехай для визначеності точка A лежить усередині смуги, заданої цими прямими, а точка B - поза нею. Тоді можна вважати, що D лежить усередині смуги, оскільки інакше $BD > KL$, і доказ завершено. Оскільки $\frac{AA'}{BB'} \leq \frac{A_1K}{B_1L} = \frac{C_1L}{D_1L} \leq \frac{CC'}{DD'}$, або $AA' \leq CC'$ (і тоді $AC > KL$), або $BB' > DD'$ (і тоді $BD > KL$).



Мал.16

Розділ 10. Багатокутники

Задача 1. Усередині правильного шестикутника зі стороною 1 взято точку P .

Доведіть, що відстані від точки P до деяких трьох вершин шестикутника не менші за 1.

Розв'язок.

Нехай B - середина сторони A_1A_2 даного шестикутника $A_1 \dots A_6$, O - його центр.

Можна вважати, що точка P лежить усередині трикутника A_1OB . Тоді $PA_3 \geq 1$, оскільки відстань від точки A_3 до прямої BO дорівнює 1; $PA_4 \geq 1$ і $PA_5 \geq 1$, оскільки відстані від точок A_4 і A_5 до прямої A_3A_6 дорівнюють 1.

Задача 2. Доведіть, що якщо сторони опуклого шестикутника $ABCDEF$ дорівнюють 1, то радіус описаного кола одного з трикутників ACE і BDF не перевищує 1.

Розв'язок.

Припустимо, що радіуси описаних кіл трикутників ACE і BDF більші за 1. Нехай O - центр описаного кола трикутника ACE . Тоді $\angle ABC > \angle AOC$, $\angle CDE > \angle COE$ і $\angle EFA > \angle EOA$, а отже, $\angle B + \angle D + \angle F > 2\pi$. Аналогічно $\angle A + \angle C + \angle E > 2\pi$, тобто сума кутів шестикутника $ABCDEF$ більша за 4π . Отримано протиріччя.

Зауваження. Аналогічно можна довести, що радіус описаного кола одного з трикутників ACE і BDF не менший за 1.

Задача 3. Довжини сторін опуклого шестикутника $ABCDEF$ менші за 1. Доведіть, що довжина однієї з діагоналей AD , BE , CF менша за 2.

Розв'язок.

Можна вважати, що $AE \leq AC \leq CE$. $AD \cdot CE \leq AE \cdot CD + AC \cdot DE < AE + AC \leq 2CE$, тобто $AD < 2$.

Задача 4. Доведіть, що зі сторін опуклого багатокутника периметра P можна скласти два відрізки, довжини яких відрізняються не більше ніж на $P/3$.

Розв'язок.

Візьмемо відрізок завдовжки P і розташуємо на ньому сторони багатокутника так: на одному кінці відрізка помістимо найбільший бік, на іншому - наступний за ним за величиною, а всі інші боки помістимо між ними. Оскільки будь-яка сторона багатокутника менша за $P/2$, середина O відрізка не може перебувати на цих двох найбільших сторонах. Довжина сторони, на якій міститься точка O , не перевершує

$P/3$ (інакше перші дві сторони теж були б більшими за $P/3$, і сума трьох сторін була б більшою за P), тому одна з її вершин віддалена від O не більше ніж на $P/6$. Ця вершина розбиває відрізок на два шуканих відрізки, оскільки різниця їхніх довжин не перевищує $2 \cdot P/6 = P/3$.

Задача 5. Многокутник $A_1A_2 \dots A_n$ складено з n твердих стрижнів, з'єднаних шарнірами. Доведіть, що якщо $n > 4$, то його можна деформувати в трикутник. Розв'язок.

Нехай a - найбільша сторона даного многокутника (якщо найбільших сторін кілька, то ми вибираємо будь-яку з них). Розглянемо частину багатокутника, яка залишається після викидання сторони a , і візьмемо точку, яка ділить навпіл периметр цієї частини. Якщо ця точка є вершиною багатокутника, то ми очевидним чином деформуємо цей багатокутник у рівнобедрений трикутник. Припустимо тепер, що ця точка лежить на стороні b , а периметри частин багатокутника, укладених між сторонами a і b , дорівнюють x і y . Тоді $x + b > y$ і $y + b > x$. Якщо, наприклад, $x = 0$, то ми можемо скласти трикутник із відрізків a, b, y . Тому будемо вважати, що $x, y \neq 0$. Припустимо, що трикутник не можна скласти ні з відрізків $a, x, y + b$, ні з відрізків $a, y, x + b$. Відрізок коротший за ламану, що з'єднує його кінці, тому $a < x + y + b$. Крім того, є нерівності $x + b > y$ і $y + b > x$. Отже, мають виконуватися нерівності $a + x \leq y + b$ і $a + y \leq x + b$. Тому $x = y$ і $a \leq b$. Але за припущенням $a > b$, отже, $a = b$. За умовою число сторін багатокутника більше 4. Тому одна з ламаних довжини x складається з двох частин периметра x_1 і x_2 . Легко перевірити, що з відрізків довжини $x, a + x_1, a + x_2$, де $x_1 + x_2 = x$, можна скласти трикутник.

Задача 6. Правильний $2n$ -кутник M_1 зі стороною a лежить усередині правильного $2n$ -кутника M_2 зі стороною $2a$. Доведіть, що многокутник M_1 містить центр многокутника M_2 .

Розв'язок.

Припустимо, що центр O многокутника M_2 лежить поза многокутником M_1 . Тоді існує така сторона AB многокутника M_1 , що многокутник M_1 і точка O лежать по різні боки від прямої AB . Нехай CD - сторона многокутника M_1 , паралельна AB . Відстань між прямими AB і CD дорівнює радіусу вписаного кола S многокутника

M_2 , тому пряма CD лежить поза колом S . З іншого боку, відрізок CD лежить усередині многокутника M_2 . Отже, довжина відрізка CD менша за половину довжини сторони многокутника M_2 (див. задачу 10.69). Отримано протиріччя.

Задача 7. Усередині правильного многокутника $A_1 \dots A_n$ взято точку O . Доведіть, що принаймні один із кутів A_iOA_j задовольняє нерівностям $\pi(1 - 1/n) \leq \angle A_iOA_j \leq \pi$.

Розв'язок.

Нехай A_1 - найближча до O вершина многокутника. Розіб'ємо многокутник на трикутники діагоналями, що проходять через вершину A_1 . Точка O опиниться в одному з цих трикутників, наприклад у трикутнику $A_1A_kA_{k+1}$. Якщо точка O потрапить на сторону A_1A_k , то $\angle A_1OA_k = \pi$, і задачу розв'язано. Тому будемо вважати, що точка O лежить строго всередині трикутника $A_1A_kA_{k+1}$. Оскільки $A_1O \leq A_kO$ і $A_1O \leq A_{k+1}O$, то $\angle A_1A_k \leq \angle A_kA_1O$ і $\angle A_1A_{k+1}O \leq \angle A_{k+1}A_1O$. Отже $\angle A_kA_1O + \angle A_{k+1}OA_1 = (\pi - \angle OA_1A_k - \angle OA_kA_1) + (\pi - \angle OA_1A_{k+1} - \angle OA_{k+1}A_1) \geq 2\pi - 2\angle OA_1A_k - 2\angle OA_1A_{k+1} = 2\pi - 2\angle A_kA_1A_{k+1} = 2\pi - \frac{2\pi}{n}$, тобто один із кутів A_kOA_1 і $A_{k+1}OA_1$ не менший за $\pi(1 - \frac{1}{n})$.

Задача 8. Доведіть, що за $n \geq 7$ усередині опуклого n -кутника знайдеться точка, сума відстаней від якої до вершин більша за периметр.

Розв'язок.

Нехай d - довжина найбільшої діагоналі (або сторони) AB даного n -кутника. Тоді його периметр P не перевищує pd (задача 13.45). Нехай A'_i - проекція вершини A_i на відрізок AB . Тоді $\sum AA'_i > nd/2$ або $\sum BA'_i > nd/2$ (задача 9.91); нехай для визначеності виконується перша нерівність. Тоді $\sum AA_i \geq \sum AA'_i \geq nd/2 \geq \pi d \geq P$, оскільки $n/2 > 3,5 > \pi$. Будь-яка точка n -кутника, достатньо близька до вершини A , має необхідну властивість.

Задача 9. а) Опуклі многокутники $A_1 \dots A_n$ і $B_1 \dots B_n$ такі, що всі їхні відповідні сторони, окрім A_1A_n і B_1B_n , рівні й $\angle A_2 \geq \angle B_2, \dots, \angle A_{n-1} \geq \angle B_{n-1}$, причому хоча б одна з нерівностей суворі. Доведіть, що $A_1A_n > B_1B_n$.

б) Відповідні сторони нерівних многокутників $A_1 \dots A_n$ і $B_1 \dots B_n$ рівні.

Запишемо біля кожної вершини многокутника $A_1 \dots A_n$ знак різниці $\angle A_i - \angle B_i$.

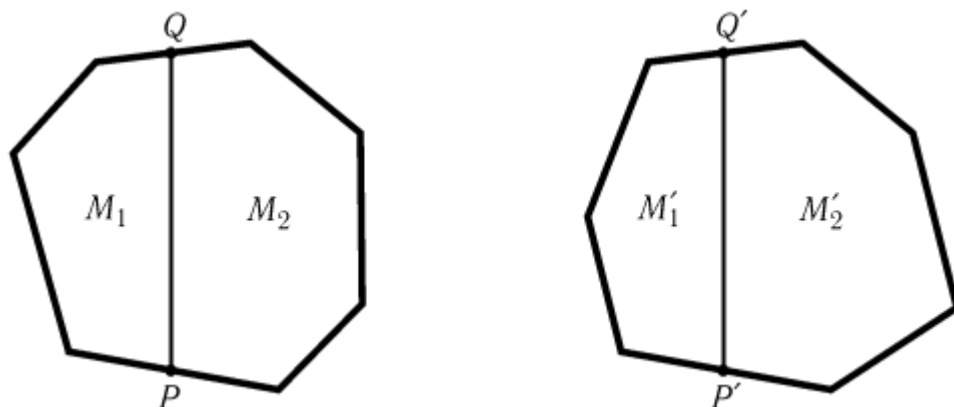
Доведіть, що за $n > 4$ сусідніх вершин з різними знаками буде принаймні чотири пари. (Вершини з нульовою різницею викидаються з розгляду: дві вершини, між якими стоять тільки вершини з нульовою різницею, вважаються сусідніми).

Розв'язок.

а) Припустимо спочатку, що $\angle A_i > B_i$, а для всіх інших розглянутих пар кутів має місце рівність. Розташуємо багатокутники так, щоб вершини $A_1, \dots, A_i$ збіглися з $B_1, \dots, B_i$. У трикутниках $A_1 A_i A_n$ і $A_1 A_i B_n$ сторони $A_i A_n$ і $A_i B_n$ рівні й $\angle A_1 A_i A_n > \angle A_1 A_i B_n$, тому $A_1 A_n > A_1 B_n$.

Якщо ж не рівні кілька кутів, то багатокутники $A_1 \dots A_n$ і $B_1 \dots B_n$ можна включити в ланцюжок багатокутників, послідовні члени якого такі, як у розібраному вище випадку.

б) Під час повного обходу багатокутника знак мінус змінюється на знак плюс стільки ж разів, скільки відбувається зворотна зміна знака. Тому число пар сусідніх вершин з різними знаками парне. Залишається перевірити, що число змін знака не може дорівнювати двом (число змін знака не дорівнює нулю, тому що сума кутів обох багатокутників одна й та сама). Припустимо, що число змін знака дорівнює двом. Нехай P і Q , P' і Q' - середини сторін багатокутників $A_1 \dots A_n$ і $B_1 \dots B_n$, на яких відбувається зміна знака. До пар багатокутників M_1 і M'_1 , M_2 і M'_2 (мал.17) можна застосувати твердження задачі а); в одному випадку отримаємо $PQ > P'Q'$, а в іншому $PQ < P'Q'$, чого не може бути.



Мал.17

Розділ 11. Різні задачі

Розглянемо тепер різні фігури (див. [7, с. 285-412]).

Задача 1. На відрізку завдовжки 1 дано n точок. Доведіть, що сума відстаней від деякої точки відрізка до цих точок не менша $n/2$.

Розв'язок.

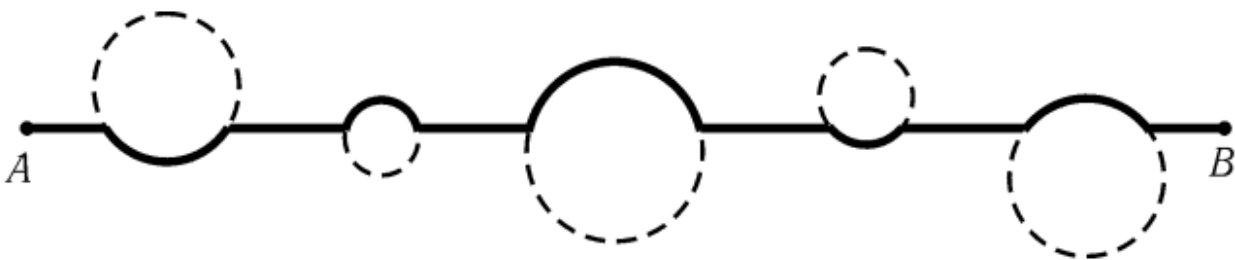
Нехай A і B - кінці відрізка; $X_1, \dots, X_n$ - дані точки. Оскільки $AX_i + BX_i = 1$, то $\sum AX_i + \sum BX_i = n$. Отже, $\sum AX_i > n/2$ або $\sum BX_i > n/2$.

Задача 2. У лісі ростуть дерева циліндричної форми. Зв'язківцю потрібно протягнути дріт із точки A в точку B , відстань між якими дорівнює l . Доведіть, що для цієї мети йому достатньо шматка дроту завдовжки $1,6 l$.

Розв'язок.

Будемо тягнути дріт відрізком AB , огинаючи при цьому дерева, що зустрічаються, за найкоротшою дугою (мал.18). Достатньо довести, що шлях по Мал.20 дузі кола не більш ніж у 1,6 раза довший за шлях по прямій. Відношення довжини дуги кутової величини 2φ до хорди, що її стягує, дорівнює $\varphi / \sin \varphi$. Оскільки $0 < \varphi \leq \pi/2$, то $\varphi / \sin \varphi \leq \pi/2 < 1,6$.

Мал.18.



Задача 3. У деякому лісі відстань між будь-якими двома деревами не перевищує різниці їхніх висот. Усі дерева мають висоту менше 100 м. Доведіть, що цей ліс можна обгородити парканом завдовжки 200 м.

Розв'язок.

Нехай дерева заввишки $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ ростуть у точках $A_1, \dots, A_n$. Тоді за

$$\text{умовою } A_1 A_2 \leq |a_1 - a_2| = a_1 - a_2, \dots, A_{n-1} A_n \leq a_{n-1} - a_n.$$

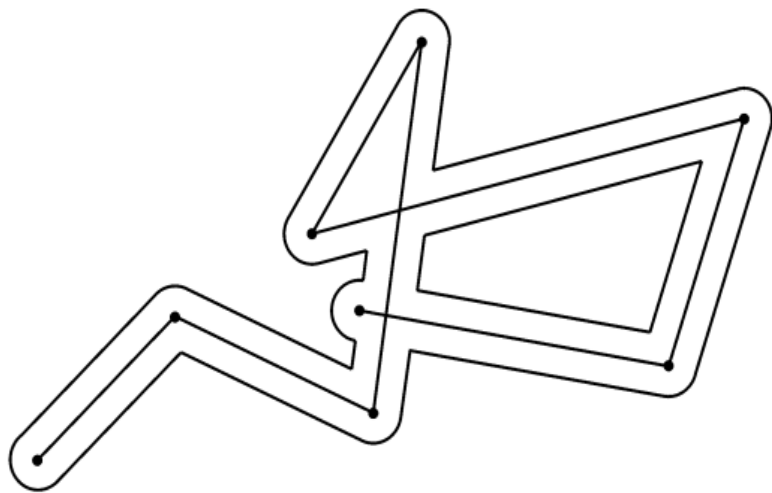
Отже, довжина ламаної

$$A_1 A_2 \dots A_n \text{ не перевершує } (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{n-1} - a_n) = a_1 - a_n < 100 \text{ м. Цю}$$

ламану можна обгородити

парканом, довжина якого не

перевищує 200 м (мал.19)



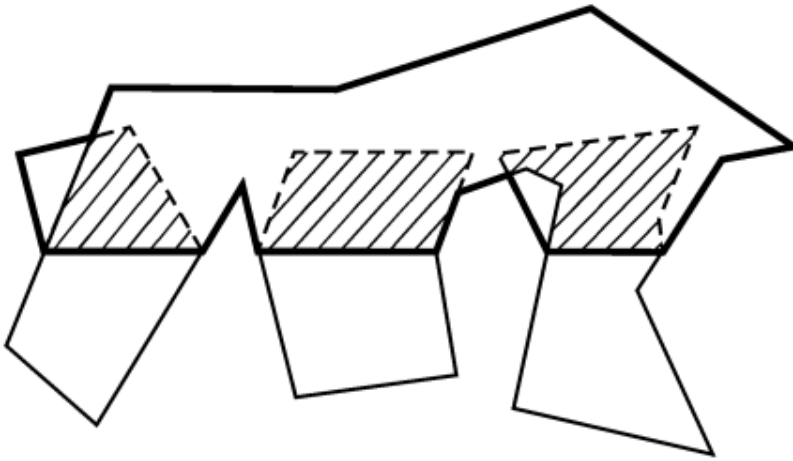
Мал.19.

Задача 4. Многокутник (не обов'язково опуклий), вирізаний із паперу, перегинають по деякій прямій і обидві половинки склеюють. Чи може периметр отриманого многокутника бути більшим, ніж периметр вихідного?

Розв'язок.

Виділимо в отриманому многокутнику частини, за якими відбулося склеювання (на мал.20 ці частини заштриховані). Усі сторони, що не належать заштрихованим многокутникам, входять у периметр вихідного й отриманого многокутників. Що ж стосується заштрихованих багатокутників, то їхні сторони, які лежать на прямій згину, входять до периметра отриманого багатокутника, а всі інші сторони - до периметра вихідного багатокутника. Оскільки в будь-якого многокутника сума його сторін, що лежать на деякій прямій, менша за суму решти сторін, то периметр вихідного многокутника завжди більший, ніж периметр отриманого.

Мал.20.



Задача 5. У трикутник вписано коло. Навколо нього описано квадрат. Доведіть, що поза трикутником лежить не більше половини периметра квадрата.

Розв'язок.

Трикутник торкається вписаного кола в трьох точках, а квадрат торкається його в чотирьох точках. Тому між деякими двома точками мал.17 мал.16 торкання трикутника з колом лежать дві точки торкання квадрата з колом. Отже, усередині трикутника лежить принаймні один "куточок" квадрата (тобто вершина квадрата разом із половинами сторін квадрата, що виходять із неї). Якщо таких куточків буде два, то ми відразу отримуємо, що всередині трикутника лежить принаймні половина периметра квадрата. Припустимо, що такий куточок тільки один, тобто три інші куточки хоча б частково лежать поза трикутником (тоді відповідні вершини квадрата теж лежать поза трикутником). Покажемо, що щонайменше третина периметра кожного з цих трьох куточків лежить усередині трикутника. Поза трикутником лежить частина куточка, що являє собою прямокутний трикутник з катетами a і b та гіпотенузою c . Усередині трикутника лежать відрізки $1 - a$ і $1 - b$ (ми припускаємо, що довжина сторони квадрата дорівнює 2). Зрозуміло, що $(1 - a) + (1 - b) = c$, $a \leq c$ і $b \leq c$. Тому $a + b \leq 2c = 4 - 2(a + b)$, тобто $a + b \leq 4/3$. Це означає, що поза трикутником лежить не більше $2/3$ периметра куточка. Отже, всередині трикутника лежить фігура, що має принаймні такий периметр: $2 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 4$, а периметр усього квадрата дорівнює 8.

Задача 6. Доведіть, що замкнуту ламану довжини 1 можна помістити в коло радіуса 0,25.

Розв'язок.

Візьмемо на ламаній дві точки A і B , що ділять її периметр навпіл. Тоді $AB \leq 1/2$. Доведемо, що всі точки ламаної лежать усередині кола радіуса $1/4$ із центром у середині O відрізка AB . Нехай M - довільна точка ламаної, а точка M_1 симетрична їй відносно точки O . Тоді $MO = M_1M/2 \leq (M_1A + AM)/2 = (BM + AM)/2 \leq 1/4$, оскільки $BM + AM$ не перевищує половини довжини ламаної

Задача 7. Гострокутний трикутник розташований усередині кола. Доведіть, що його радіус не менший за радіус описаного кола трикутника. Чи вірне це твердження для тупокутного трикутника?

Розв'язок.

Нехай гострокутний трикутник ABC розташований усередині кола S . Побудуємо описане коло S_1 трикутника ABC . Оскільки трикутник ABC гострокутний, то кутова величина дуги кола S_1 , що лежить усередині S , більша за 180° . Тому на цій дузі можна вибрати діаметрально протилежні точки, тобто всередині кола S міститься діаметр кола S_1 . Отже, радіус кола S не менший за радіус кола S_1 . Аналогічне твердження для тупокутного трикутника не вірне. Тупокутний трикутник лежить усередині кола, побудованого на найбільшій стороні а як на діаметрі. Радіус цього кола дорівнює $a/2$, а радіус описаного кола трикутника дорівнює $a/(2 \sin \alpha)$. Зрозуміло, що $a/2 < a/(2 \sin \alpha)$.

Задача 8. Доведіть, що периметр гострокутного трикутника не менший за $4R$.

Розв'язок.

Будь-який трикутник периметра P можна помістити в коло радіуса $P/4$, а якщо гострокутний трикутник поміщено в коло радіуса R_1 , то $R_1 \geq R$. Тому $P/4 = R_1 \geq R$. Інший спосіб вирішення. Якщо $0 < x < \pi/2$, то $\sin x > 2x/\pi$ (див. додаток). Тому $a + b + c = 2R(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) > 2R(2\alpha + 2\beta + 2\gamma)/\pi = 4R$.

ВИСНОВКИ

У цій магістерській роботі було ретельно проаналізовано різноманітні типи олімпіадних задач на нерівності в геометрії, які охоплювали широкий спектр геометричних об'єктів, включаючи елементи трикутника, чотирикутника, а також ламані.

Розглянуті методи розв'язування включали алгебричні перетворення, використання теорем про нерівності, а також геометричні побудови. На основі аналізу було розроблено комплексну систему, яка дозволяє систематизувати задачі та надати педагогам засоби для ефективної підготовки учнів до участі в олімпіадах.

Ця система не тільки сприяє підвищенню рівня знань учнів у галузі геометричних нерівностей, але й мотивує їх на глибше розуміння математичних концептів та методів.

Отже, дана робота вносить значний внесок у методику викладання математики, зокрема у підготовку до математичних олімпіад, і може слугувати як основа для подальших досліджень у цій області.

Про результати роботи і супутніх досліджень повідомлялося на міжнародних конференціях (див. [8]-[9]).

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Andreescu, T., & Feng, Z. (2000). *Mathematical Olympiads, problems and solutions from around the world*. Mathematical Association of America. 331 pages.
2. Bottema, O., Djorjevic, R., Janic, R., Mitrinovic, D., & Vasic, P. (1969). *Geometric inequalities*. Wolters-Noordhoff Publishing. 157
3. Branzei, D. (1999). *Notes on geometry*. Editura Paralela 45.340
4. Hadwiger, H., Debrunner, H., & Klee, V. (1964). *Combinatorial geometry in the plane*. Holt, Rinehart and Winston. 114
5. Honsberger, R. (1978). *Mathematical morsels*. Mathematical Association of America. 260 pages.
6. Sedrakyan, H., & Sedrakyan, N. (2017). *Geometric Inequalities: Methods of Proving*. Springer International Publishing. 454 p
7. Nicholas D. Kazarinoff (1975) *Geometric Inequalities Mathematical Association of America 141*
8. Ваків О. Класифікація задач на геометричні нерівності // Матеріали XI Міжнародної науково-практичної конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій «Актуальні проблеми сучасної науки», 25-26 квітня 2024 року, Дрогобич, Україна. – С. 248.
9. Матурін Ю., Ваків О. Геометричні нерівності в елементарній математиці// Матеріали X Міжнародної науково-практичної конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій «Актуальні проблеми сучасної науки», 10-11 травня 2023 року, Дрогобич, Україна. – С. 116.