

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

завідувач кафедри математики та економіки,

кандидат педагогічних наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК

« ____ » _____ 2024 р.

Повільне зростання центрального індексу степеневого ряду

Спеціальність: 014 «Середня освіта (Математика)»

Магістерська робота

на здобуття професійної кваліфікації – вчитель математики закладу загальної середньої освіти

Автор роботи: Гіщинська Марія Володимирівна

підпис

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук,
доцент
Галь Юрій Михайлович

підпис

Дрогобич, 2024

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Зав. кафедрою

(підпис)

2024 р.

(дата)

**Завдання
на підготовку магістерської роботи**

1. **Тема:** Повільне зростання центрального індексу степеневого ряду.
2. **Перелік питань, що підлягають висвітленню у кваліфікаційній роботі:**

3. **Список рекомендованої літератури:**

4. Етапи підготовки роботи:

№	Назва етапу	Термін виконання	Термін звіту перед керівником, кафедрою
1.	Вивчення й аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури; визначення вихідних положень дослідження (об'єкт, предмет, методи); формування мети; постановка завдань.		
2.	Підготовка 1-го розділу роботи		
3.	Підготовка 2-го розділу роботи.		
4.	Формування висновків. Оформлення роботи.		
5.	Перевірка роботи на плагіат		
6.	Попередній захист роботи і рецензування.		

5. Дата видачі завдання – _____ 2022 р.

6. Термін подачі роботи керівнику – _____ 2024 р.

7. З вимогами до виконання роботи і завданням ознайомлений _____
(підпис студента)

8. Керівник _____.

Захист магістерської роботи

Повільне зростання центрального індексу степеневого ряду (тема роботи)

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

Дата

Голова ЕК _____
підпис

прізвище, ім'я

Секретар ЕК _____
підпис

прізвище, ім'я

Анотація

Отримано необхідні і достатні умови повільного зростання центрального індексу степеневого ряду в термінах Тейлорових коефіцієнтів цього ряду.

Annotation

The necessary and sufficient conditions for the slow growth of the central index of the power series in terms of Teelar's coefficients of these series are obtained.

Зміст

1. Вступ
2. Деякі відомості про максимальний член і центральний індекс степеневого ряду і ряду Діріхле.
3. Основні результати.
4. Висновки.
5. Список використаних джерел.

1. Вступ

Для цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1.1)$$

введемо стандартні позначення $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$,

$\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n : n \geq 0\}$, $\nu_f(r) = \max\{n : |a_n| r^n = \mu_f(r)\}$ - відповідно, максимум модуля, максимальний член і центральний індекс, а

$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta$ - неваніннова характеристика.

Додатну неспадну на $[0, +\infty]$ функцію $\alpha(t)$ називаємо повільно зростаючою, якщо для кожного $c > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(ct)}{\alpha(t)} = 1 \quad (1.2)$$

Легко переконатися, що останнє є рівносильним до умови

$$\alpha(ct) = (1 + o(1))\alpha(2t) \quad (t \rightarrow +\infty)$$

Добре відомо [1], що для всіх $0 < r < R$ $\mu_f(r) \leq M_f(r) \leq 2\mu_f(2r)$,

$$T(r, f) \leq \ln M_f(r) \leq \frac{R+r}{R-r}.$$

Тому з цих нерівностей негайно отримуємо, що $T(r, f)$, $\ln M_f(r)$, $\ln \mu_f(r)$ є повільно зростаючими одночасно. Умови ж повільного зростання цих характеристик отримуються, як умови повільного зростання $\ln \mu_f(r)$.

Умови повільного зростання усередненої лічильної функції $N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt$ додатної послідовності $\lambda_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$), де $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$, також отримують з умов повільного зростання $\ln \mu_f(r)$ для цієї функції f з коефіцієнтами $a_n = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)^{-1}$, бо у цьому випадку

$$N(r) = \ln \mu_f(r), \quad r > 0$$

Крім цього, якщо $n(t)$ - повільно зростаюча, то є повільно зростаючою функцією і її усереднення $N(r)$.

Метою нашої роботи є знаходження необхідних і достатніх умов повільного зростання центрального індексу в термінах тейлових коефіцієнтів цілої функції f , що є частковою відповіддю на проблему поставлену в [2].

Об'єктом дослідження є цілі функції, задані степеневими рядами.

Предметом дослідження є асимптотичні властивості цілих функцій з повільним зростанням центрального індексу.

Для розв'язування сформульованої задачі застосовується методи математичного та функціонального аналізу та теорії аналітичних функцій.

2. Деякі відомості про максимальний член і центральний індекс степеневих ряду і ряду Діріхле.

Поряд із степеневим рядом (1.1) тут розглянемо і ряд Діріхле

$$F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it, \quad (*)$$

з абсцисою абсолютної збіжності $\sigma \in (-\infty, +\infty)$

Тоді при кожному σ_a маємо $|a_n|e^{s\lambda_n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, і тому існує максимальний член $\mu(\sigma) = \mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma \lambda_n); n \geq 0\}$ ряду (*). Величина $\nu(\sigma) = \nu(\sigma, F) = \max\{n: |a_n| \exp(\sigma \lambda_n) = \mu(\sigma)\}$ називається центральним індексом ряду (*), а $\lambda_{\nu(\sigma)}$ - його центральним показником. Очевидно, що функції $\nu(\sigma)$ і $\lambda_{\nu(\sigma)}$ є кусково сталі і неперервні праворуч на $(-\infty, \sigma_a)$, причому $\nu(\sigma)$ набирає цілочисельних значень.

З означення видно, що максимальний член і центральний індекс можна означити для будь-якої послідовності $(a_n \exp(s\lambda_n))$, яка прямує до 0 при $n \rightarrow \infty$ для кожного s , $\operatorname{Re} s < A$, де A - деяке число з $(-\infty, +\infty]$. Ця послідовність необов'язково є послідовністю членів абсолютно збіжного ряду Діріхле.

Нехай $h > 0$ - довільне число. Тоді

$$\begin{aligned} \mu(\sigma + h) &= |a_{\nu(\sigma+h)}| \exp\{(\sigma + h)\lambda_{\nu(\sigma+h)}\} \geq |a_{\nu(\sigma)}| \exp\{(\sigma+h)\lambda_{\nu(\sigma)}\} = \\ &= |a_{\nu(\sigma)}| \exp\{\sigma\lambda_{\nu(\sigma)}\} \exp\{h\lambda_{\nu(\sigma)}\} = \mu(\sigma) \exp\{h\lambda_{\nu(\sigma)}\}, \end{aligned}$$

тобто

$$\ln \mu(\sigma + h) - \ln \mu(\sigma) \geq h\lambda_{\nu(\sigma)}. \quad (2.1)$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} \mu(\sigma) &= |a_{\nu(\sigma)}| \exp\{\sigma\lambda_{\nu(\sigma)}\} \geq |a_{\nu(\sigma+h)}| \exp\{\sigma\lambda_{\nu(\sigma+h)}\} = \\ &= |a_{\nu(\sigma+h)}| \exp\{(\sigma + h)\lambda_{\nu(\sigma+h)}\} \exp\{-h\lambda_{\nu(\sigma+h)}\} = \mu(\sigma + h) \exp\{-h\lambda_{\nu(\sigma+h)}\}, \end{aligned}$$

тобто

$$\ln \mu(\sigma + h) - \ln \mu(\sigma) \leq h\lambda_{\nu(\sigma+h)} \quad (2.2)$$

З (2.1) і (2.2) отримуємо

$$\lambda_{\nu(\sigma)} \leq \frac{1}{h} (\ln \mu(\sigma + h) - \ln \mu(\sigma)) \leq \lambda_{\nu(\sigma+h)}$$

Звідси випливає, що функції $\nu(\sigma)$, $\lambda_{\nu(\sigma)}$ і $\ln \mu(\sigma)$ є неспадними.

Наші міркування правильні, якщо $h < 0$. Тому, якщо (σ_1, σ_2) – проміжок сталості функції $\nu(\sigma)$, то при $h \rightarrow 0$ одержимо

$$\frac{d \ln \mu(\sigma)}{d\sigma} = \lambda_{\nu(\sigma)}.$$

Оскільки на кожному скінченному проміжку функція $\lambda_{\nu(\sigma)}$ має скінченну кількість точок розриву, то ми приходимо до рівності

$$\ln \mu(\sigma) - \ln \mu(\sigma_0) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda_{\nu(t)} dt \quad (2.3)$$

для всіх $-\infty < \sigma_0 < \sigma < \sigma_a$. З (2.3) випливає опуклість функції $\ln \mu(\sigma)$.

Припустимо, що степеневий ряд (1.1) має радіус збіжності $R \in (0, +\infty)$. Тоді для кожного $r \in [0, R)$ існує максимальний член

$\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n : n \geq 0\}$ ряду (1.1). Величина

$\nu_f(r) = \max\{n : |a_n| r^n = \mu_f(r)\}$ називається центральним індексом цього ряду.

Якщо зробимо заміну $z = e^{-s}$ (отже, $r = e^{-\sigma}$), то, враховуючи правильну в цьому випадку рівність $\lambda_{\nu(\sigma)} = \nu(\sigma)$, з (2.3) легко отримаємо рівність

$$\ln \mu_f(r) - \ln \mu_f(r_0) = \int_{r_0}^r \frac{\nu(t)}{t} dt, \quad 0 < r_0 \leq r < R.$$

Позначимо

$$\chi_n = \chi_n(F) = \frac{\ln |a_n| - \ln |a_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$$

Теорема 2.1[3]. Якщо послідовність (χ_n) неспадна, то

$\mu(\chi_n) = |a_n| \exp(\chi_n \lambda_n)$ для всіх n . Якщо, крім того, $\chi_{n-1} < \chi_n$ для деякого $n \geq 1$, то $\nu(\sigma) = n$ і $\mu(\sigma) = |a_n| \exp(\sigma \lambda_n)$ для всіх $\sigma \in [\chi_{n-1}, \chi_n]$ і цього n .

Доведення. Нехай послідовність (χ_n) неспадна. Тоді, якщо $j < n$, то

$$\begin{aligned} |a_j| \exp(\chi_n \lambda_j) &= |a_n| \exp\left\{\sum_{m=j}^{n-1} (\ln |a_{m+1}| - \ln |a_m|) + \chi_n \lambda_j\right\} = \\ &= |a_n| \exp\left\{\sum_{m=j}^{n-1} (\chi_n (\lambda_{m+1} - \lambda_m) + \chi_n \lambda_j)\right\} \leq |a_n| \exp(\chi_n \lambda_j), \end{aligned}$$

а якщо $j > n$, то

$$\begin{aligned} |a_j| \exp(\chi_n \lambda_j) &= |a_n| \exp\left\{\sum_{m=n}^{j-1} (\ln |a_{m+1}| - \ln |a_m|) + \chi_n \lambda_j\right\} = \\ &= |a_n| \exp\left\{-\sum_{m=n}^{j-1} (\chi_n (\lambda_{m+1} - \lambda_m) + \chi_n \lambda_j)\right\} \leq |a_n| \exp(\chi_n \lambda_n), \end{aligned}$$

тобто $\mu(\chi_n) = |a_n| \exp(\chi_n \lambda_n)$.

Якщо $\chi_{n-1} < \chi_n$ для деякого n і $\sigma \in [\chi_{n-1}, \chi_n]$, то аналогічно для $j < n$ отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{|a_j| \exp(\sigma \lambda_j)}{|a_n| \exp(\sigma \lambda_n)} &= \exp\{\ln |a_j| - \ln |a_n| - \sigma(\lambda_n - \lambda_j)\} \leq \\ &\leq \exp\{\chi_{n-1}(\lambda_n - \lambda_j) + \sigma(\lambda_n - \lambda_j)\} = \\ &= \exp\{-(\sigma - \chi_{n-1})(\lambda_n - \lambda_j)\} \leq 1, \end{aligned}$$

а для $j > n$ виконується

$$\frac{|a_j| \exp(\sigma \lambda_j)}{|a_n| \exp(\sigma \lambda_n)} \leq \exp\{-\chi_n(\lambda_j - \lambda_n) + \sigma(\lambda_j - \lambda_n)\} < 1.$$

Отже, $\nu(\sigma) = n$ і $\mu(\sigma) = |a_n| \exp(\sigma \lambda_n)$ для всіх $\sigma \in [\chi_{n-1}, \chi_n]$.

Геометричну інтерпретацію максимального члена і центрального індексу ми подамо, використовуючи діаграму Ньютона. Побудуємо цю діаграму спочатку для простого випадку, коли ряд Діріхле зводиться до експоненціального полінома

$$P(s) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \exp(s\lambda_n), \quad a_n \neq 0$$

На площині $ХОУ$ відзначимо точки $P_n = (\lambda_n - \ln |a_n|)$. З точки P_0 проведемо вертикально вниз промінь і будемо обертати його навколо точки P_0 (проти годинникової стрілки) доти, доки він не торкнеться точки з

$\{P_n\}_{n \geq 1}$. На кінцевому розміщенні променя може лежати декілька таких точок.

Найвіддаленішу від P_0 з них позначимо через P_{n1} , а відрізок

$[P_0, P_{n1}]$ позначимо через l_1 . Тепер з точки P_{n1} в напрямі l_1 проводимо знову промінь, обертаємо його навколо P_{n1} до дотику з точкою з

$\{P_n\}_{n > n_1}$ і найвіддаленішу від P_{n1} точку з кінцевого розміщення цього променя позначимо через P_{n2} , а через l_2 позначимо відрізок $[P_{n1}, P_{n2}]$. Такий процес скінченний і ми прийдемо до відрізка $l_k = [P_{nk}, P_N]$. Нарешті, з точки P_N проведемо вертикально вгору промінь l_{k+1} . В результаті ми отримуємо опуклу ламану L , ланками якої є від-різки l_j

$1 \leq j < k$, і промінь l_{k+1} . Вона називається діаграмою Ньютона і має таку властивість, що жодна з точок P_n не лежить під нею.

Перейдемо до побудови діаграми Ньютона для ряду Діріхле (*). Серед коефіцієнтів a_n , можуть трапитись такі, які дорівнюють нулю, але вважаємо, що він не зводиться до експоненціального полінома. Фактично, як видно з зауваження, ми будуємо діаграму Ньютона для функціональної послідовності $(a_n \exp(s\lambda_n))$. Вважаємо, що $a_0 \neq 0$.

Нехай a_0 визначене рівністю $a_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda n}$ і $a_0 \in (-\infty, +\infty]$. За теоремою [3]

$a_0 \geq \sigma_a$. Через φ_n позначимо кут між променями

$$y = \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n} x \text{ і } y = 0, x \geq 0. \text{ Тоді отримаємо (1.14)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \arctg a_0$$

Як і вище, нехай $P_n = (\lambda_n - \ln|a_n|)$ (у випадку, коли $a_n = 0$, вважаємо, що $-\ln|a_n| = +\infty$), а промінь l' з початком в P_0 обертається з вертикального вниз розміщення проти годинникової стрілки доти, доки не виникне одна з трьох ситуацій:

1) промінь l' торкнеться якої-небудь точки з $\{P_n\}_{n>1}$, на ньому лежить скінченна кількість точок P_n , а всі решта лежать вище l' ;

2) на промені l' лежить нескінченна кількість точок з $\{P_n\}_{n>1}$, а під ним немає таких точок;

3) на l' немає точок з $\{P_n\}_{n>1}$, але при подальшому обертанні під l' опиняться нескінченна кількість таких точок.

У випадках 2) і 3) процес побудови діаграми Ньютона завершуємо і це кінцеве розміщення променя l' позначаємо через L . Зрозуміло, що кут нахилу L дорівнює $\arctg a_0$.

У першому випадку найвіддаленішу від P_0 точку P_n з кінцевого розміщення l' позначимо через P_{n1} , і нехай $l_1 [P_0, P_{n1}]$. З точки P_{n1} , як продовження l_1 проведемо промінь l'' і знову будемо обертати його навколо P_{n1} доти, доки не виникне одна з описаних вище ситуацій. В двох останніх процес завершуємо і через L позначаємо ламану, що складається з l_1 і кінцевого розміщення променя l'' . В першій ситуації найвіддаленішу від P_{n1} точку P_n , $n > n_1$, з кінцевого розміщення l'' позначимо через P_{n2} , і нехай $l_2 = [P_{n1}, P_{n2}]$.

Продовжуючи цей процес, ми побудуємо опуклу ламану L , яка або складається з нескінченної кількості ребер l_n , таких, що кут ψ_n між l_n і променем $y = 0 (x \geq 0)$ зростає до $\arctan a_0$ із зростанням n , або складається з скінченної кількості ребер l_n і променя l^* , який утворює з променем $y = 0 (x \geq 0)$ кут $\arctg a_0$.

Нехай $y = L(x)$ - рівняння цієї діаграми Ньютона L . Тоді ряд Діріхле

$$F_{\text{нн}}(s) = |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-L(\lambda_n) + s\lambda_n\} \quad (2.4)$$

називається мажорантою Ньютона для ряду (*). Ряд (2.4) може бути формальним.

З побудови видно, що $\ln |a_0| \leq -L(\lambda_n)$, $n \geq 0$, і

$$\ln |a_{nj}| = -L(\lambda_j), j \geq 0.$$

Припустимо спочатку, що діаграма Ньютона складається з нескінченної кількості ребер і проведемо пряму l з кутовим коефіцієнтом

$\sigma < a_0$ так, щоб вона торкалась ламаної L , але її не перетинала. Ця пряма l може мати спільними з L або одну точку P_v , або відрізок $[P_k, P_v]$, $k = k(\sigma)$, $v = v(\sigma)$.

Покажемо, що $v(\sigma)$ є центральним індексом рядів (*) і (2.4). Справді,

якщо $m < v(\sigma)$, то

$$\frac{\ln |a_m| - \ln |a_{v(\sigma)}|}{\lambda_{v(\sigma)} - \lambda_m} \leq \frac{L(\lambda_{v(\sigma)}) - L(\lambda_m)}{\lambda_{v(\sigma)} - \lambda_m} \leq \sigma$$

звідки випливає нерівність

$$|a_m| \exp(\sigma \lambda_m) \leq |a_{v(\sigma)}| \exp(\sigma \lambda_{v(\sigma)}), \quad (2.5)$$

і така ж нерівність виконується для мажоранти Ньютона. Якщо $m > v(\sigma)$, то

$$\frac{\ln |a_{v(\sigma)}| - \ln |a_m|}{\lambda_m - \lambda_{v(\sigma)}} \leq \frac{L(\lambda_m) - L(\lambda_{v(\sigma)})}{\lambda_m - \lambda_{v(\sigma)}} \geq \sigma$$

звідки знову випливає (2.5) і відповідний аналог для мажоранти Ньютона. З цих нерівностей видно, що член $|a_{v(\sigma)}| \exp(\sigma \lambda_{v(\sigma)})$ є максимальним в

ряді (*), а член $\exp\{L(\lambda_{v(\sigma)}) + \sigma \lambda_{v(\sigma)}\}$ є максимальним в ряді (2.4). Але

$\ln|a_{v(\sigma)}| = -L(\lambda_{v(\sigma)})$. Тому ряди (*) і (2.4) мають одні і ті ж максимальні члени та центральні індекси.

Оскільки рівняння прямої l з кутовим коефіцієнтом σ , що проходить через точку $P_{v(\sigma)}$, має вигляд

$$y = \sigma(x - \lambda_{v(\sigma)}) - \ln|a_{v(\sigma)}|,$$

то, підставляючи сюди $x = 0$, бачимо, що $|\ln\mu(\sigma)|$ є відстань від точки перетину l з віссю $x = 0$ до 0.

Розглянемо випадок, коли в діаграму Ньютона входить промінь $[P_N, \infty)$ з кутовим коефіцієнтом a_0 . Його рівняння має вигляд $y = a_0x - (\ln|a_N| + a_0\lambda_N)$. Тому $\ln|a_n| \leq -L(\lambda_n) = \ln|a_N| + (\lambda_N a_0)$, для всіх $n \geq N$. Звідси випливає, що для всіх $\sigma < \sigma_a(\leq) a_0$ і всіх $n \geq N$

$$|a_n| \exp(\sigma \lambda_n) \leq |a_N| \exp\{(\sigma - a_0)\lambda_n + a_0\lambda_N\} \leq |a_N| \exp(a_0\lambda_N),$$

тобто максимальний член є обмеженою функцією.

Про центральний індекс таке сказати не можна. Для ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(sn)$$

одержуємо $\sigma_a = a_0 = 0$, $\mu(\sigma) = 1$ і $v(\sigma) = 0$ для всіх $\sigma < 0$, а для ряду

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{n} + sn\right)$$

маємо $\sigma_a = a_0 = 0$ і $\mu(\sigma) = 1$ для всіх $\sigma < 0$, але

$$v(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} + O(1) \rightarrow +\infty \quad (\sigma \rightarrow 0).$$

Справді функція $g(x) = -\frac{1}{x} + \sigma x$, $x \geq 1$, досягає свого максимуму в точці $x(\sigma) = 1/\sqrt{|\sigma|}$, а $|v(\sigma) - x(\sigma)| \leq 1$.

3. Основні результати.

Надалі ми розглянемо степеневі ряди виду (1.1)

Зауважимо, що у випадку, коли (λ_n) - послідовність точок стрибка центрального індексу $v_f(r)$ (тобто $v_f(r) = j$ для $\lambda_j \leq r < \lambda_{j+1}$ і

$\lambda_{j+1} = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{j+p} < \lambda_{j+p+1}$, якщо $v_f(\lambda_{j+1}) = j + p$), то

$$v_f(r) = \sum_{\lambda_n \leq r} 1 = n(r).$$

Тому природно виникає задача про знаходження умов повільного зростання лічильної функції $n(t)$ — додатної послідовності

$$\lambda_n \nearrow +\infty (n \rightarrow +\infty).$$

Доведемо спочатку наступне твердження

Теорема 3.1. Нехай $h(x)$ – додатна зростаюча до $+\infty$ неперервно диференційована на $[0, +\infty)$ функція така, що

$$\frac{h'(x)}{h(x)} \searrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty)$$

1. Якщо виконується умова

$$\frac{h'(n-1)}{h(n-1)} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty),$$

то функція $h(n(t))$ – повільно зростаюча.

2. Якщо $\lambda_{n+1} - \lambda_n \nearrow$ і $h(n(t))$ – повільно зростаюча, то

$$\frac{h'(n)}{h(n)} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty),$$

Доведення. Зауважимо спочатку, що з умови

$h'(x) = o(h(x)) \quad (x \rightarrow +\infty)$ маємо

$$\begin{aligned} 0 \leq h(x+1) - h(x) &= \int_x^{x+1} h'(t) dt = o\left(\int_x^{x+1} h(t) dt\right) \\ &= o(h(x+1)) \quad (x \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

тому

$$h(x+1) = (1 + o(1))h(x) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

Для $n \geq 1$ і $t \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$ визначаємо функцію

$$l(t) = \frac{t - \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} + n - 1.$$

Звідси,

$$n(t) - 1 \leq l(t) \leq n(t) \quad (t \geq \lambda_1),$$

тому функції $h(n(t))$ і $h(l(t))$ є повільно зростаючими одночасно. Для

$t \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$ правостороння похідна

$$l'(t) = \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n},$$

тому для правосторонньої похідної $\varphi'(t)$ функції $\varphi(t) = h(l(t))$ і для

$t \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$ отримаємо

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} t = h'(l(t)) \frac{l'(t)}{h(l(t))} t \leq \frac{h'(n-1)}{h(n-1)} \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = \frac{h'(n-1)}{h(n-1)} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} + \frac{h'(n-1)}{h(n-1)} = o(1) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

Звідки

$$0 \leq \ln \frac{\varphi(2x)}{\varphi(x)} = \int_x^{2x} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} t \frac{dt}{t} = o\left(\int_x^{2x} \frac{dt}{t}\right) = o(1) \quad (x \rightarrow +\infty),$$

і, отже, $\varphi(2x) = (1 + o(1)) \varphi(x) \quad (x \rightarrow +\infty)$, тобто, функція

$\varphi(t) = h(l(t))$ - повільно зростаюча. Перше твердження теореми (3.1) доведено.

Враховуючи, що за умовами другого твердження теореми

$\lambda_{n+1} - \lambda_n \nearrow$, тому $l'(t) \square (t \rightarrow +\infty)$, звідси

$$\ln \frac{\varphi(2x)}{\varphi(x)} = \int_x^{2x} \frac{h'(l(t))}{\varphi(t)} l'(t) dt \geq x l'(2x) \frac{h'(l(2x))}{h(l(2x))}.$$

Функція $\varphi(x) = h(l(x))$ - повільно зростаюча, тому

$$\ln \frac{\varphi(2x)}{\varphi(x)} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty) \text{ і, отже,}$$

$$\psi(x) \equiv \frac{h'(l(x))}{h(l(x))} x l'(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Залишається пригадати, що для $x \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$

$$\psi(x) \geq \frac{h'(n)}{h(n)} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}.$$

Теорему доведено.

Вибираючи у теоремі 3.1 $h(x) = x$ та $h(x) = \ln x$ негайно отримаємо наступні наслідки

Наслідок 3.1 Достатньою умовою (а за умови $\lambda_{n+1} - \lambda_n \nearrow$ і необхідною) повільного зростання лічильної функції $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$ є умова

$$n \left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - 1 \right) \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Наслідок 3.2 Достатньою умовою (а за умови $\lambda_{n+1} - \lambda_n \nearrow$ і необхідною) повільного зростання функції $\ln n(t)$ є умова

$$n \left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - 1 \right) \ln n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Отримані твердження не складно модифікувати для випадку, коли послідовність (λ_n) має кратні точки. Залишаючи загальний випадок повільного зростання $h(n(t))$ поза розглядом, встановимо лише умови повільного зростання лічильної функції $n(t)$.

Теорема 3.2 Нехай послідовність (λ_n) ,

$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$) така, що $\lambda_n = \lambda_n^*$ для $n_k \leq n < n_{k+1}$, а $n_k \uparrow +\infty$ ($k \rightarrow +\infty$). Достатньою умовою (а за умови $\frac{n_k - n_{k-1}}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \searrow$ і необхідною) повільного зростання функції $n(x) = \sum_{\lambda_{n_k} \leq x} 1$ є умова

$$\left(\frac{n_k}{n_{k-1} - 1} - 1 \right) \left(1 + \frac{\lambda_{n_k} - \lambda_{n_{k-1}}}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \right) = o(1) \quad (k \rightarrow +\infty)$$

Доведення. Необхідність. Зауважимо, спочатку, що умова

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow +\infty)$$

є необхідною умовою повільного зростання $n(x)$. Справді, нехай $\lambda_{n_k}^* = \lambda_{n_k}$. Враховуючи, що $n(\lambda_{n_k}^*) = n_k$ і $n(\lambda_{n_k}^* - 0) = n_{k-1}$ отримаємо

$$\frac{n(2\lambda_{n_k}^* - 0)}{n(\lambda_{n_k}^* - 0)} \geq \frac{n(\lambda_{n_k}^*)}{n(\lambda_{n_k}^* - 0)} = \frac{n_k}{n_{k-1}} > 1,$$

у тому випадку, коли $n(2x) = (1 + o(1))n(x)$ ($x \rightarrow +\infty$) (тобто $n(x)$ – повільно зростаюча функція), отримуємо, що $\frac{n_{k-1}}{n_k} \rightarrow 1$ ($k \rightarrow +\infty$).

Для $k \geq 1$ і $x \in [\lambda_{n_k}^*, \lambda_{n_{k+1}}^*)$ визначаємо функцію

$$l(x) = \frac{x - \lambda_{n_k}^*}{\lambda_{n_{k+1}}^* - \lambda_{n_k}^*} (n_k - n_{k-1}) + n_{k-1}$$

Для $x \in [\lambda_{n_k}^*, \lambda_{n_{k+1}}^*)$ отримуємо

$$n(x) = n_k > l(x) \geq n_{k-1} = (1 + o(1))n(x) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

Тобто, функції $n(x)$ і $l(x)$ – одночасно повільно зростаючі. Правостороння похідна $l'(t) = \frac{n_k - n_{k-1}}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \quad (x \in [\lambda_k^*, \lambda_{k+1}^*))$ і, тому за умовою є незростаючою функцією. Отже, знову, як і вище

$$\ln \frac{l(2x)}{l(x)} = \int_x^{2x} \frac{l'(t)}{l(t)} dt \geq \frac{l'(2x)}{l(2x)}.$$

Звідки, негайно отримуємо, що

$$\psi(x) \equiv \frac{l'(x)}{l(x)} x \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Залишається зауважити, що при $k \rightarrow +\infty$

$$\psi(\lambda_k^* + 0) = \frac{n_k - n_{k-1}}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \frac{\lambda_k^*}{n_{k-1}} = \left(\frac{n_k}{n_{k-1}} - 1 \right) \frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \rightarrow 1,$$

а, оскільки, $\frac{n_k}{n_{k-1}} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow +\infty)$ то

$$\left(\frac{n_k}{n_{k-1}} - 1 \right) \left(1 + \frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \right) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty)$$

Необхідність доведено.

Достатність. Зауважимо, що з умови

$$\left(\frac{n_k}{n_{k-1}} - 1 \right) \left(1 + \frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \right) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty) \text{ впливає, що } \frac{n_{k+1}}{n_k} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow +\infty)$$

, тому, як і у доведенні необхідності отримуємо, що функції $l(t)$ і $n(t)$ є повільно зростаючими одночасно. Для правосторонньої похідної $l'(t)$ і для $t \in [\lambda_k^*, \lambda_{k+1}^*)$ маємо

$$\frac{l'(t)}{l(t)} t \leq \frac{n_k - n_{k-1}}{n_{k-1}} \frac{\lambda_{k+1}^*}{\lambda_{k+1}^* - \lambda_k^*} =$$

$$= \left(\frac{n_k}{n_{k-1}+1} + 1 \right) \left(1 + \frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \right) = o(1) \quad (k \rightarrow +\infty),$$

тому

$$0 \leq \ln \frac{l(2x)}{l(x)} = \int_x^{2x} \frac{l'(t)}{l(t)} t \frac{dt}{t} = o \left(\int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right) = o(1) \quad (x \rightarrow +\infty),$$

тобто $l(x)$, а разом з нею і $n(x)$ – повільно зростаючі функції.

Теорему 3.2 доведено.

Із наслідку 3.1 та теореми 3.2 отримуємо наступні твердження, у яких містяться розв'язок сформульованої вище проблеми з [2].

Наслідок 3.3 Нехай $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – ціла функція і $r_n \equiv \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \uparrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$). Для того, щоб центральний індекс $\nu_f(r)$ – був повільно зростаючою функцією, достатньо, а у випадку, коли $r_{n+1} - r_n \nearrow$, і необхідно, щоб

$$n \left(\frac{|a_{n+1}| |a_{n-1}|}{|a_n|^2} - 1 \right) \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Доведення. Добре відомо ([4, Т.2, с.13-15]), що у випадку, коли $r_n \uparrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$) маємо $\nu_f(r) = n$ для $r \in [r_n, r_{n+1})$.

Тобто, досить застосувати наслідок 3.1 до послідовності (r_n) , лічильна функція якої $n(r) = \nu_f(r) + 1$.

Якщо a_n^* – коефіцієнти мажоранти Ньютона (див.[5, с.196-198]- ламана Адамара) $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* z^n$ цілої функції $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, то

$$r_n^* = \frac{a_{n-1}^*}{a_n^*} \nearrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty).$$

$$\nu_f(r) = n \quad r \in [r_n, r_{n+1}),$$

і якщо $n_k \uparrow +\infty (k \rightarrow +\infty)$ така, що $r_n^* \uparrow +\infty$, та $r_n^* = r_{n_k}^*$ для $n_k \leq n < n_{k+1}$, то $v_f(r) = n_k$ і

$$R_k \equiv r_{n_k}^* = \left| \frac{a_{n_{k+1}}}{a_{n_k}} \right|^{\frac{1}{n_k - n_{k-1}}} \uparrow +\infty \quad (k \rightarrow +\infty)$$

Отже, за допомогою теореми 3.2 переконуємось у тому, що правильне наступне твердження.

Наслідок 3.4 Нехай $J = \{n_k\}$ – множина всіх значень центрального індексу $v_f(r)$, занумерованих так, що $0 \leq n_k \uparrow +\infty (k \rightarrow +\infty)$, а

$$R_k = \left| \frac{a_{n_{k+1}}}{a_{n_k}} \right|^{\frac{1}{n_k - n_{k-1}}}$$

Для того, щоб функція $v_f(r)$ була повільно зростаючою, достатньо, а у випадку, коли $\frac{n_k - n_{k-1}}{R_{k+1} - R_k} \searrow$ і необхідно, щоб виконувалася умова

$$\left(\frac{n_k}{n_{k-1} - 1} - 1 \right) \left(1 + \frac{R_k}{R_{k+1} - R_k} \right) = o(1) \quad (k \rightarrow +\infty).$$

Доведення. Застосуємо твердження теореми 3.2 до лічильної функції $n(r) = v_f(r) + 1$ послідовності (r_n^*) , визначеної вище за мажорантою Ньютона $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* z^n$ цілої функції $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Висновки

Таким чином, у даній роботі досліджено асимптотичні властивості цілих функцій з повільною зростаючим центральним індексом. Отримано необхідні і достатні умови повільного зростання центрального індексу степеневого ряду в термінах Тейлових коефіцієнтів.

Основні результати сформульовано і доведено в теоремах 3.1 та 3.2 і наслідках 3.1- 3.4.

Список використаних джерел

1. О.Леонт'єв. Ряди експонент. - М. :Наука, 1976-536 с.
2. М.Заболоцький, М. Шеремета. Про повільне зростання основних характеристик цілих функцій// Мат. замітки. - 1999. - Т.65,№2 - с.206 - 214.
3. М. Шеремета, О. Мулява. Ряди Діріхле: Текст лекцій. - Львів: Видавничий центр ЛНУ ім.Івана Франка, 2001.-64с.
4. Г. Поліа, Г. Сете. Задачі і теореми з аналізу. Т. 1(2) - М. : Наука, 1978. - 392 с.(368 с.)
5. G. Valiron. Fonctions analytiques. - Presses. univ. France, 1954.

