

Міністерство освіти і науки України  
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка  
Факультет фізики, математики, економіки та інноваційних технологій  
Кафедра математики та економіки

**«До захисту допускаю»**

завідувач кафедри математики та економіки

кандидат педагогічних наук, доцент

\_\_\_\_\_ Т.І.Війчук «\_\_» \_\_\_\_\_ 2024 р .

***Методичні технології вивчення трикутників у  
курсі геометрії 7 класу***

**Спеціальність: 014 «Середня освіта (Математика)»**

**Магістерська робота  
на здобуття кваліфікації – вчитель математики**

**Автор роботи Качайло Оксана Михайлівна** \_\_\_\_\_  
*підпис*

**Науковий керівник кандидат педагогічних наук,  
доцент Гордієнко Ірина Валеріївна** \_\_\_\_\_  
*підпис*

**Дрогобич, 2024  
Захист магістерської роботи**

***Методичні технології вивчення трикутників  
у курсі геометрії 7 класу***

Оцінка за стобальною шкалою: \_\_\_\_\_

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: \_\_\_\_\_

Коротка мотивація захисту:

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

дата

Голова ДЕК \_\_\_\_\_

підпис

прізвище, ім'я

Секретар ДЕК \_\_\_\_\_

підпис

прізвище, ім'я

**Анотація. Качайло Оксана. МЕТОДИЧНІ ТЕХНОЛОГІЇ ВИВЧЕННЯ  
ТРИКУТНИКІВ У КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ**

У даній роботі проаналізовано дидактичну, психологічну та методичну літературу по темі дослідження. З'ясовано, в якій мірі методична література, підручники та посібники задовольняють умови використання такої методики. Розроблено методичні технології вивчення трикутників у курсі геометрії 7 класу. Експериментально перевірено ефективність використання розробленої методики.

**Annotation. Kachailo Oksana. METHODOLOGICAL TECHNOLOGIES  
OF STUDYING TRIANGLES IN THE 7TH CLASS GEOMETRY COURSE**

Didactic, psychological and methodical literature on the topic of the study was analyzed in this work. It was found out to what extent methodical literature, textbooks and manuals satisfy the conditions for using this method. Methodical technologies for studying triangles in the 7th grade geometry course have been developed. The effectiveness of the use of the developed methodology was experimentally verified.

## ЗМІСТ

|                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>ВСТУП</b> .....                                                                        | 5  |
| <b>РОЗДІЛ I. Теоретичні основи теми “Трикутники”</b> .....                                | 9  |
| 1.1. Місце теми “Трикутники” у курсі елементарної математики .....                        | 9  |
| 1.2. Аналіз методичної літератури по темі дослідження .....                               | 22 |
| 1.3. Аналіз підручників з геометрії для 7-х класів щодо викладу<br>даної теми.....        | 27 |
| <b>РОЗДІЛ II. Методика вивчення трикутників у курсі планіметрії<br/>    7 класу</b> ..... | 34 |
| 2.1. Методика пропедевтичного вивчення трикутників .....                                  | 34 |
| 2.2. Методика вивчення трикутників у курсі планіметрії 7 класу .....                      | 40 |
| 2.3. Експериментальна перевірка розробленої методики.. .....                              | 56 |
| <b>ВИСНОВКИ</b> .....                                                                     | 60 |
| <b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b> .....                                                   | 62 |

## ВСТУП

**Актуальність дослідження.** Математика, як наука сформувалася в Стародавній Греції в VII – IIIст. до нашої ери, коли Фалес, Піфагор, Евклід та інші вчені систематизували відомі на той час математичні знання і викладали їх з точним обґрунтуванням. Тоді ж виникло і слово “математика”, яке в перекладі з грецької означає “знання”, “наука”.

Тепер математика потрібна всім. Без математичних обчислень не можна побудувати не тільки космічного корабля, електростанції, підводного човна, а й звичайного будинку.

Збільшується не тільки кількість наук, які вже не можуть обходитись без математики, а й обсяг математичних знань, використовуваних цими науками. Ось чому так важливо, щоб наша молодь мала ґрунтовну математичну підготовку.

Коротко мету викладання математики в загальноосвітній середній школі можна визначити так. Шкільний курс математики має забезпечити міцне і свідоме оволодіння системою математичних знань, умінь, які потрібні для загального розвитку учнів, для їх практичної діяльності в умовах сучасного виробництва, для вивчення на достатньо високому рівні споріднених шкільних предметів (фізики, креслення, хімії та ін.) і для продовження освіти [16].

Ознайомлення учнів з науковими методами дослідження, такими, як аналіз, синтез, індукція, дедукція, аналогія та інші, має велике значення для їхнього розвитку як мислителів та дослідників. Математика в цьому відношенні відіграє особливу роль, оскільки вона не лише надає конкретних інструментів для вирішення задач, але й виховує аналітичне мислення, логічний підхід до розв'язання проблем та систематичний підхід до організації знань.

Математика, зокрема геометрія, відіграє важливу роль у розвитку різних аспектів мислення та уяви, які є необхідними не лише для математиків, але й для всіх людей у повсякденному та професійному житті.

Розуміння та використання геометричних концепцій є ключем до успішного функціонування у сучасному світі.

Дослідження трикутників є дуже важливим у вивченні геометрії, оскільки вони є одними з найпростіших та найбільш фундаментальних геометричних фігур. Властивості трикутників визначаються їхніми сторонами, кутами та взаємними відношеннями, і ці властивості є основою для подальшого вивчення геометрії.

Наприклад, вивчення властивостей рівнобедреного трикутника може привести до розуміння симетрії та рівності, а властивості прямокутного трикутника можуть бути використані для розв'язання задач зі схожістю та тригонометрії.

Трикутники є також важливими в контексті будівництва та інженерії, де їх властивості використовуються для розрахунків та планування різноманітних структур. Розглядаючи трикутники, ми можемо розкрити різноманітні аспекти геометрії, такі як взаємодія сторін та кутів, властивості різних типів трикутників, а також їхній зв'язок з іншими геометричними фігурами.

Точно так, вивчення геометрії та її концепцій будується на принципі поступового розширення знань, використання попередніх понять для розуміння нового матеріалу. Цей принцип важливий в методиці викладання математики, оскільки дозволяє учням побачити зв'язок між різними темами та поняттями.

У випадку з кутами та трикутниками, розуміння кутів як комбінацій двох прямих ліній дає основу для розгляду трикутника як комбінації трьох прямих ліній. Це дозволяє учням побачити аналогії та взаємозв'язки між цими геометричними об'єктами, що полегшує їхнє розуміння та сприяє глибшому усвідомленню матеріалу.

Використання цього методу також допомагає учням розвивати аналітичне мислення та вміння використовувати раніше набуті знання для розв'язання нових завдань. Крім того, воно сприяє зміцненню

фундаментальних концепцій геометрії та створює основу для подальшого вивчення складніших тем.

Отже, встановлення зв'язків між різними розділами математики є ключовим аспектом в методиці викладання, який сприяє більш глибокому розумінню та запам'ятовуванню матеріалу. Точно так, створення міцних асоціацій між різними темами геометрії допомагає учням краще розуміти та усвідомлювати матеріал. Це стимулює їхній пізнавальний процес та сприяє розвитку конструктивних здібностей.

Уявлення учнів про геометричні об'єкти та їх взаємозв'язки утворює основу для подальшого вивчення більш складних тем. Коли учні розуміють, як попередні концепції пов'язані з новим матеріалом, вони мають можливість будувати на цих знаннях та розвивати свої розуміння.

Крім того, заохочення учнів до активної участі в процесі вивчення матеріалу, включаючи їх у створення та дослідження геометричних фігур та властивостей, сприяє їхньому розвитку як конструкторів своїх знань. Це може збільшити їхню мотивацію та зацікавленість у вивченні геометрії, а також сприяти розвитку їх конструктивних та творчих здібностей.

Отже, співвідношення між різними розділами геометрії є ключовим фактором у методиці викладання, який сприяє глибшому розумінню та активному залученню учнів у процес навчання. А теми, присвячені вивченню трикутників по праву займають особливо важливе місце в шкільному курсі геометрії та в загальному розвитку дитини.

Все це зумовило вибір теми нашого дослідження “Методичні технології вивчення трикутників у курсі геометрії 7 класу”.

**Об'єктом дослідження** є процес навчання математики у середній загальноосвітній школі.

**Предметом дослідження** є методика вивчення трикутників у курсі планіметрії 7 класу.

**Мета дослідження:** розробити методику вивчення трикутників у 7 класі яка дасть можливість учням краще засвоїти курс геометрії, розвинути математичне мислення, увагу, пам'ять в учнів.

У процесі дослідження була висунута **гіпотеза:** впровадження такої методичної системи, яка забезпечуватиме процес засвоєння учнями навчального матеріалу з теми “Трикутники”, сприятиме розвитку в учнів стійкого інтересу до успішного вивчення математики.

Для досягнення мети планується розв'язати такі **завдання:**

1. Визначити основні теоретичні основи теми.
2. З'ясувати, в якій мірі методична література, підручники Нової української школи (НУШ) та посібники з математики задовольняють навчання по темі.
3. Розробити методику вивчення даної теми.
4. Експериментально перевірити ефективність розробленої методики.

Для розв'язання поставлених завдань і перевірки гіпотези планується використати комплекс теоретичних та експериментальних методів: аналіз методичної літератури, підручників і посібників з математики, проведення тематичного контролю, практична діяльність по організації і проведенню навчального процесу на уроках математики, педагогічний експеримент, опрацювання його результатів з використанням методів математичної статистики.

Практичне значення дослідження полягає в тому, що розроблена методика допоможе вчителям при вивченні з учнями трикутників, в підборі та складанні відповідних завдань, завдяки яким учні краще засвоюватимуть навчальний матеріал.

Результати дослідження доповідалися на міжнародній науково-практичній студентсько-викладацькій конференції «Актуальні проблеми сучасної науки» у Дрогобицькому державному педагогічному університеті імені Івана Франка.



## РОЗДІЛ I. Теоретичні основи теми “Трикутники”

### 1.1. Місце теми “Трикутники” в курсі елементарної математики

Розглянемо як подається тема «Трикутники» в елементарній геометрії [1]. Спочатку дається означення многокутника: многокутником називається частина площини, обмежена відрізками прямих ліній. Ці останні утворюють сторони многокутника. Їх кінці утворюють вершини многокутника. Далі говориться, що **трикутник** – це многокутник з трьома сторонами.

Серед трикутників зокрема розрізняють:

*Рівнобедрений трикутник.* Так називається трикутник з двома рівними сторонами. Вершину, спільну цим двом сторонам, називають просто вершиною трикутника, а сторону, розміщену проти неї, – основою.

*Рівносторонній трикутник,* або трикутник з трьома рівними сторонами.

*Прямокутний трикутник,* або трикутник з одним прямим кутом. Сторона, що лежить проти прямого кута, називається *гіпотенузою*; сторони, що утворюють прямий кут, – *катетами*.

**Означення:** *висотою* трикутника називається перпендикуляр, опущений з вершини на протилежну сторону; *медіаною* називається відрізок, що сполучає вершину з серединою протилежної сторони.

**Теорема.** У всякому рівнобедреному трикутнику кути, що лежать проти рівних сторін, рівні між собою.

**Доведення:**

Нехай трикутник  $ABC$  – рівнобедрений (мал. 1). Перевернемо кут  $BAC$  і накладемо його на самого себе так, щоб сторона  $AB$  пішла по стороні  $AC$ , і навпаки. Через те, що  $AB$  і  $AC$  рівні, точка  $B$  займе положення точки  $C$ , і навпаки. Отже, кут  $ABC$  суміститься з кутом  $ACB$ , так що ці два кути рівні.

**Обернена теорема.** Якщо в трикутнику два кути рівні, то трикутник рівнобедрений.

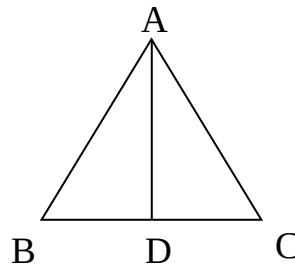
**Доведення:** Нехай  $ABC$  – трикутник, в якому  $\angle B = \angle C$ . Перевернемо цей трикутник так, щоб сторона  $BC$  наклалась на саму себе, точка  $B$  перейшла в точку  $C$ , і навпаки. Через те, що кут  $ABC$  дорівнює куту  $ACB$ , то сторона  $BA$  піде по  $CA$ , і навпаки:  $CA$  – по  $BA$ . Точка  $A$ , як точка перетину  $BA$  і  $CA$ , збереже своє попереднє положення, і сторона  $AB$  займе положення  $AC$ .

**Наслідок.** Рівносторонній трикутник буде в той же час і рівнокутний (тобто всі його кути будуть рівні), і навпаки.

**Теорема.** У всякому рівнобедреному трикутнику бісектриса кута при вершині перпендикулярна до основи і проходить через її середину.

**Доведення:**

Нехай  $AD$  – бісектриса кута  $A$  в рівнобедреному трикутнику  $ABC$  (мал.1).



Мал. 1

Якщо перевернути кут  $BAC$  і накласти його на самого себе, то ця бісектриса не змінить свого положення, і те саме матиме місце для точки  $D$ , в якій бісектриса перетинає основу. Через те, що  $DB$  буде суміщено з  $DC$  і кут  $ADB$  з кутом  $ADC$ , то ми матимемо  $DB = DC$  і  $\angle ADB = \angle ADC$ .

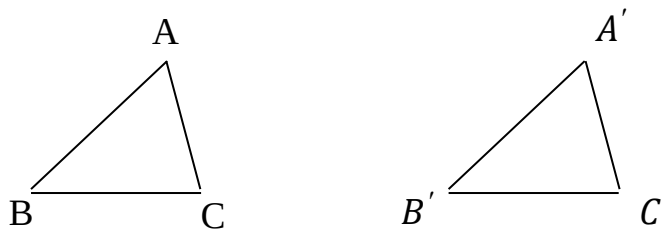
**Перша ознака рівності трикутників.** Два трикутники рівні, якщо вони мають по рівній стороні і прилеглі до цих сторін кути того й другого трикутника відповідно рівні один одному.

**Доведення:**

Нехай дано два трикутники  $ABC$  і  $A'B'C'$  (мал. 2), в яких  $BC = B'C'$ ;  $\angle B = \angle B'$ ;  $\angle C = \angle C'$ .

Накладемо кут  $B'$  на рівний йому кут  $B$  так, щоб сторона  $B'A'$  пішла по стороні  $BA$ , а сторона  $B'C'$  – по стороні  $BC$ . Через те, що  $B'C' = BC$ , точка  $C'$

суміститься з  $C$ , а через те, що кут  $C'$  дорівнює куту  $C$ , сторона  $C'A'$  піде по стороні  $CA$ .



Мал. 2

Внаслідок цього точка  $A'$ , як точка перетину прямих  $B'A'$  і  $C'A'$ , обов'язково попаде в точку перетину прямих  $BA$  і  $CA$ , тобто в точку  $A$ . Суміщення трикутників таким чином доведено.

**Друга ознака рівності трикутників.** Два трикутники рівні, якщо вони мають по рівному куту і сторони того й другого трикутника, між якими лежать ці кути, відповідно дорівнюють одна одній.

**Доведення:**

Нехай дано два трикутники  $ABC$  і  $A'B'C'$ , в яких  $\angle A = \angle A'$ ;  $AB = A'B'$ ;  $AC = A'C'$  (мал. 2).

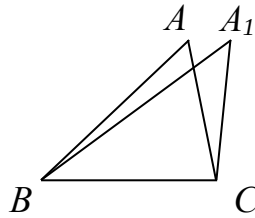
Накладемо кут  $A'$  на рівний йому кут  $A$  так, щоб сторона  $A'B'$  пішла по стороні  $AB$  і сторона  $A'C'$  – по стороні  $AC$ . Через те, що  $A'B' = AB$ , точка  $B'$  піде в точку  $B$ ; так само точка  $C'$  попаде в  $C$ .  $B'C'$  суміститься, таким чином, з  $BC$ , і суміщення трикутників буде повне.

**Третя ознака рівності трикутників.** Два трикутники рівні, якщо вони мають по три відповідно рівні сторони.

**Доведення:**

Нехай дано два трикутники  $ABC$  і  $A'B'C'$ , сторони яких відповідно рівні між собою. Розмістимо другий трикутник так, щоб сторона  $B'C'$  сумістилась з рівною їй стороною  $BC$  і обидва трикутники лежали по одну і ту саму сторону від  $BC$ . Нехай  $BCA_1$  – нове положення трикутника  $B'C'A'$ . Припустимо, що точка  $A_1$  суміститься з точкою  $A$ . Це було б очевидно, коли б пряма  $B'A'$  пішла по  $BA$  або пряма  $C'A'$  пішла по  $CA$ . Коли б це було б не

так, то ми мали б два рівнобедрені трикутники  $BAA_1$  і  $CAA_1$  (мал. 3), і перпендикуляр до відрізка  $AA_1$  в його середині повинен був би пройти через точки  $B$  і  $C$ , інакше кажучи, суміститися з прямою  $BC$ .



Мал. 3

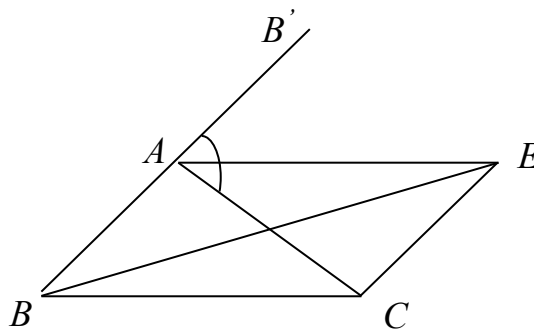
Це неможливо, бо точки  $A$  і  $A_1$  лежать по одну сторону від  $BC$ , і тому  $BC$  не може пройти через середину відрізка  $AA_1$ . Точки  $A$  і  $A_1$  не можуть бути, таким чином, різними, і обидва трикутники суміщаються один з одним.

**Означення:** зовнішнім кутом опуклого многокутника називається кут, утворений однією стороною і продовженням другої сторони.

**Теорема.** Всякий зовнішній кут трикутника більший кожного з внутрішніх кутів, до нього не прилеглих.

**Доведення:**

Нехай є трикутник  $ABC$ , в якому побудовано зовнішній кут  $B'AC$  (мал.4).



Мал. 4

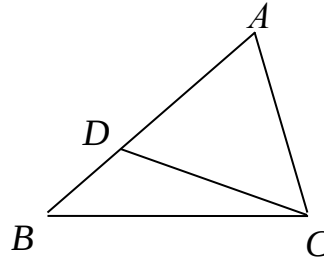
Припустимо, що цей кут більший, наприклад, внутрішнього кута  $C$ . Щоб це довести, проведемо медіану  $BD$ , яку продовжуємо на довжину  $DE$ , рівну їй самій. Точка  $E$  лежить всередині кута  $B'AC$ , який буде більший кута  $EAC$ . А цей останній дорівнює куту  $C$ , бо два трикутники  $DAE$  і  $DBC$  рівні як такі, що мають по рівному куту, вміщеному між відповідно рівними сторонами. Справді, кути при точці  $D$  рівні як вертикальні;  $AD = DC$  і  $BD =$

$DE$  за побудовою. Отже, зовнішній кут  $B'AC$  більший внутрішнього кута  $C$ , що й треба було довести.

**Теорема.** У всякому трикутнику проти більшої сторони лежить і більший кут.

**Доведення:**

Нехай у трикутнику  $ABC$  (мал. 5)  $AB > AC$ .



Мал. 5

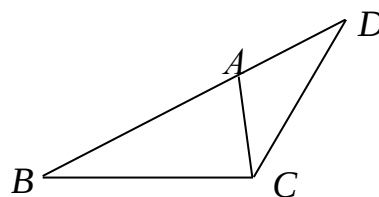
Доведемо, що  $\angle C > \angle B$ . Для цього ми відкладемо на  $AB$  відрізок  $AD = AC$ . За припущенням відрізок  $DC$  розміщений всередині початкового кута  $C$ , отже, кут  $ACD$  менший кута  $C$ . Але в рівнобедреному трикутнику  $ADC$  кут  $ACD$  дорівнює куту  $ADC$ , який більший кута  $B$ , як це виходить з попередньої теореми, застосованої до трикутника  $DCB$ . Теорема, таким чином, доведена.

**Теорема.** У всякому трикутнику будь-яка сторона менша суми двох інших сторін.

**Доведення:**

В трикутнику  $ABC$  продовжимо  $AB$  на довжину  $AD = AC$  (мал. 6). Треба довести, що  $BC < BD$ . Провівши  $CD$ , ми бачимо, що кут  $D$  дорівнює куту  $ACD$  і, отже, менший кута  $BCD$ .

Шукана нерівність випливає, таким чином, з попередньої теореми, застосованої до трикутника  $BCD$ .



Мал. 6

**Наслідки: I.** У всякому трикутнику будь-яка сторона більша різниці двох інших.

Справді, нерівність  $BC < AB + AC$  дає після віднімання  $AC$  від обох частин:

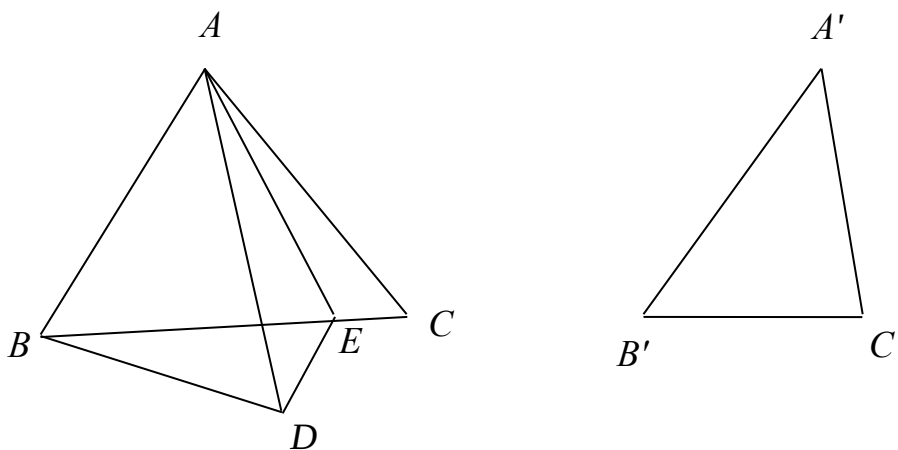
$$BC - AC < AB.$$

**II.** Якби не були три точки  $A, B, C$ , кожна з віддалей  $BC, CA, AB$  дорівнює найбільшій сумі двох інших і найменшій їх різниці, причому рівність матиме місце тільки тоді, коли три точки розміщені на одній прямій.

**Теорема.** Якщо два трикутники мають по нерівному куту, що лежить між відповідно рівними сторонами, то треті сторони нерівні і проти більшого кута лежить і більша сторона.

**Доведення:**

Нехай дано трикутники  $ABC$  і  $A'B'C'$ , в яких  $\angle A = \angle A'$ ;  $AB = A'B'$ ;  $AC = A'C'$  (мал. 7). Доведемо, що  $BC > B'C'$ .



Мал. 7

Накладемо трикутник  $A'B'C'$  на трикутник  $ABC$  так, щоб дві рівні їх сторони  $A'B'$  і  $AB$  сумістились. Через те, що кут  $A'$  менший кута  $A$ , то сторона  $A'C'$  займе положення  $AD$  всередині кута  $BAC$ . Проведемо бісектрису  $AE$  кута  $DAC$ ; ця пряма так само лежить всередині кута  $BAC$ .

Отже, точки  $B$  і  $C$  лежать по різні сторони від неї, і пряма  $AE$  повинна перетяти сторону  $BC$  в якійсь точці  $E$ , розміщеній між  $B$  і  $C$ . Якщо ми проведемо  $DE$ , то побачимо, що два трикутники  $ACE$  і  $ADE$  рівні як такі, що мають по рівному куту (кути при  $A$ ), вміщеному між двома відповідно рівними сторонами ( $AE$  – спільна,  $AC = A'C' = AD$ ). Звідси виходить рівність сторін  $DE$  і  $EC$ . Далі нерівність  $BD < BE + ED$ , що випливає з трикутника  $BDE$ , дає нам:

$$BD < BE + EC \text{ або } BD < BC.$$

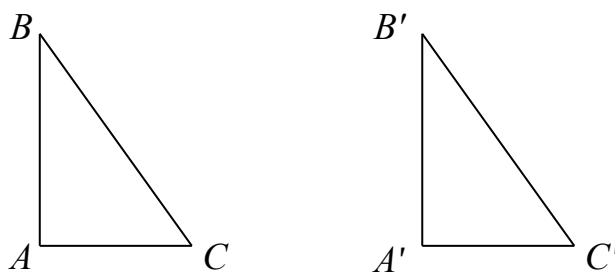
**Обернена теорема.** Якщо дві сторони одного трикутника відповідно рівні двом сторонам другого, а треті сторони нерівні між собою, то кути, протилежні цим сторонам, також нерівні і проти більшої сторони лежить і більший кут.

### Ознаки рівності прямокутних трикутників

**Перша ознака рівності.** Два прямокутні трикутники рівні, якщо вони мають рівні гіпотенузи і по одному рівному гострому куту.

**Доведення:**

Нехай дано два прямокутні трикутники  $ABC$  і  $A'B'C'$ , в яких  $BC = B'C'$ ,  $\angle B = \angle B'$  (мал. 8).



Мал. 8

Накладемо другий трикутник на перший так, щоб їх рівні кути  $B$  і  $B'$  сумістились. Тоді  $B'C'$  піде в напрямі  $BC$ , і оскільки ці два відрізки рівні, точка  $C'$  впаде в  $C$ . При цьому  $B'A'$  піде в напрямі  $BA$ , і, отже,  $C'A'$  повинна

піти в напрямі перпендикуляра, опущеного з точки  $C$  на  $BA$ , тобто в напрямі  $CA$ .

**Друга ознака рівності.** Два прямокутні трикутники рівні, якщо вони мають по рівній гіпотенузі і по одному катету.

**Доведення:**

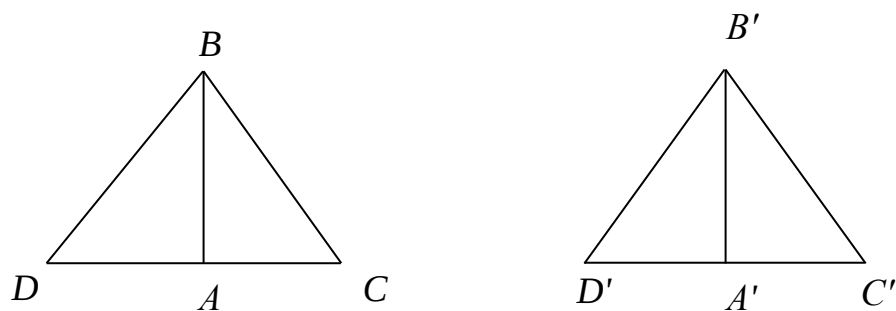
Нехай дано два прямокутні трикутники  $ABC$  і  $A'B'C'$ , в яких  $BC = B'C'$ ,  $AB = A'B'$ . Накладемо другий трикутник на перший так, щоб сумістились рівні сторони  $AB$  і  $A'B'$ .

Сторона  $A'C'$  піде в напрямі  $AC$ . Ми матимемо тепер дві похилі з точки  $B$  до прямої  $AC$ , а саме  $BC$  і нове положення сторони  $B'C'$ , які за умовою будуть рівні і, отже, однаково віддалені від основи перпендикуляра. Таким чином,  $A'C' = AC$ , звідки і виходить рівність двох трикутників.

**Теорема.** Якщо два прямокутні трикутники мають по рівній гіпотенузі і по нерівному гострому куту, то сторони, протилежні нерівним кутам, не рівні, і проти більшого кута лежить більша сторона.

**Доведення:**

Нехай дано трикутники  $ABC$  і  $A'B'C'$ , (мал. 9), в яких  $BC = B'C'$ ;  $\angle B > \angle B'$ . Припустимо, що  $AC > A'C'$ .



Мал. 9

Щоб у цьому переконатися, відкладемо на продовженні сторони  $AC$  рівний їй відрізок  $AD$ , і так само на продовженні сторони  $A'C'$  – рівний їй відрізок  $A'D'$ . Ми матимемо насамперед  $BD = BC = B'C' = B'D'$ . Крім того, в рівнобедреному трикутнику  $DBC$  медіана  $BA$  буде також бісектрисою, так що кут  $DBC$  буде в два рази більший початкового кута  $B$ . Так само кут



$D'B'C'$  буде в два рази більший початкового кута  $B'$ , отже, ми матимемо  $\angle DBC > \angle D'B'C'$ .

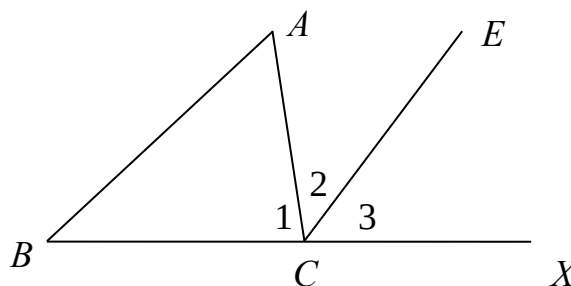
Два трикутники  $DBC$  і  $D'B'C'$  матимуть тоді по нерівному куту, що лежать між відповідно рівними сторонами, звідки виходить, що  $DC > D'C'$ , отже  $AC > A'C'$ .

## Паралельні прямі

**Теорема.** Сума кутів трикутника дорівнює двом прямим.

**Доведення:**

В трикутнику  $ABC$  (мал. 10) продовжимо  $BC$  в напрямі  $CX$  і проведемо  $CE$  паралельно  $AB$ .



Мал. 10

Ми утворимо при точці  $C$  три кути (на малюнку вони позначені 1, 2, 3), сума яких дорівнює двом прямим. Але ці три кути відповідно рівні трьом кутам трикутника. Через те, що  $\angle 1$  є кутом  $C$  трикутника;  $\angle 2$  дорівнює  $\angle A$  (як кути внутрішні різносторонні, утворені січною  $AC$  з паралельними прямими  $AB, CE$ );  $\angle 3$  дорівнює  $\angle B$  (як кути відповідні, утворені січною  $BC$  з тими самими паралельними прямими).

**Наслідки:** I. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі внутрішніх кутів, до нього не прилеглих.

II. Гострі кути прямокутного трикутника є кути доповняльні.

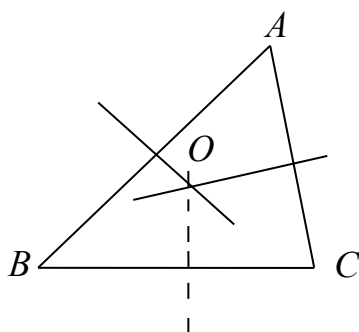
III. Якщо два трикутники мають по два відповідно рівні кути, то і треті їх кути рівні.

## Прямі в трикутнику, що проходять через одну точку

**Теорема.** У всякому трикутнику перпендикуляри, поставлені в серединах сторін, перетинаються в одній точці.

**Доведення:**

Нехай дано трикутник  $ABC$  (мал. 11). Прямі, які перпендикулярні до сторін  $AB$  і  $AC$  трикутника і проходять через їх середини, не можуть бути паралельними (інакше  $AB$  і  $AC$  лежали б на одній прямій) і перетинаються в якійсь точці  $O$ . Треба довести, що ця точка лежить також і на перпендикулярі до сторони  $BC$ , що проходить через її середину.



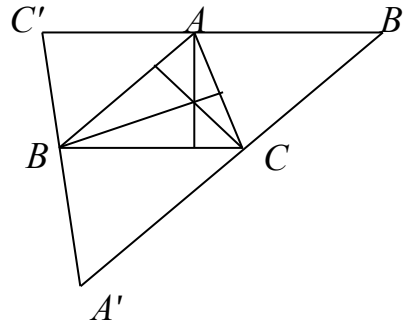
Мал. 11

Точка  $O$ , що лежить на прямій, яка перпендикулярна до сторони  $AB$  і проходить через її середину, однаково віддалена від точок  $A$  і  $B$ ; крім того, вона однаково віддалена від точок  $A$  і  $C$  як точка, що лежить на перпендикулярі, поставленому в середині сторони  $AC$ . Отже, вона однаково віддалена від точок  $B$  і  $C$  і тому лежить на перпендикулярі, поставленому в середині сторони  $BC$ .

**Теорема.** У всякому трикутнику три висоти перетинаються в одній точці.

**Доведення:**

Нехай дано трикутник  $ABC$  (мал. 12). Проведемо через точку  $A$  пряму, паралельну  $BC$ , через точку  $B$  — пряму, паралельну  $AC$ , і через точку  $C$  — пряму, паралельну  $AB$ .



Мал. 12

Ми дістанемо, таким чином, новий трикутник  $A'B'C'$ . Доведемо, що висоти трикутника  $ABC$  є перпендикулярами, поставленими в середині сторін нового трикутника, звідки випливатиме, що вони проходять через одну точку.

Паралелограм  $ABCB'$  дає нам  $BC = AB'$ ; так само паралелограм  $ACBC'$  дає  $BC = AC'$ , отже точка  $A$  є серединою  $B'C'$ .

Висота  $AD$  трикутника  $ABC$  пройде через середину  $B'C'$  і, крім того, буде перпендикулярна до  $B'C'$ , бо вона перпендикулярна до паралельної їй прямої  $BC$ .

Оскільки те саме міркування можна повторити для двох інших висот, то теорема доведена.

**Теорема.** У всякому трикутнику: 1) бісектриси трьох кутів перетинаються в одній точці;

2) бісектриса одного з кутів і бісектриси двох зовнішніх кутів, до нього не прилеглих, перетинаються в одній точці.

**Доведення:**

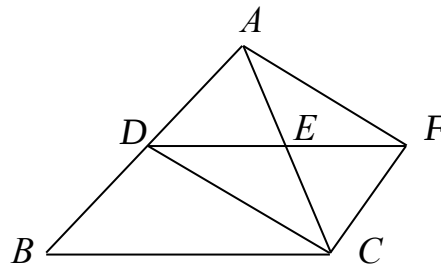
1<sup>0</sup>. Проведемо в трикутнику  $ABC$  бісектриси кутів  $B$  і  $C$ : вони перетинаються в точці  $O$ , що лежить всередині трикутника. Ця точка, як така, що належить бісектрисі кута  $B$ , однаково віддалена від прямих  $AB$  і  $BC$ . Належачи також бісектрисі кута  $C$ , ця точка однаково віддалена від  $AC$  і  $BC$ . Таким чином, вона однаково віддалена від  $AB$  і  $AC$ , і через те що вона лежить всередині кута  $A$ , то вона лежить на бісектрисі цього кута.

2<sup>0</sup>. Через те що сума двох зовнішніх кутів  $CBX, BCY$  менша чотирьох прямих, то сума їх половин менша, ніж два прямих. Отже, бісектриси цих кутів перетинаються в точці  $O'$ , що лежить всередині кута  $A$ . Ця точка  $O'$  буде, як і точка  $O$ , однаково віддалена від трьох сторін трикутника. Вона належатиме, таким чином, і бісектрисі кута  $A$ .

**Теорема.** Відрізок, що сполучає середини двох сторін трикутника, паралельний третій стороні і дорівнює її половині.

**Доведення:**

Нехай в трикутнику  $ABC$  (мал. 13)  $D$  – середина  $AB$ ,  $E$  – середина  $AC$ . Відкладемо на продовженні  $DE$  відрізок  $EF$ , рівний  $DE$ .



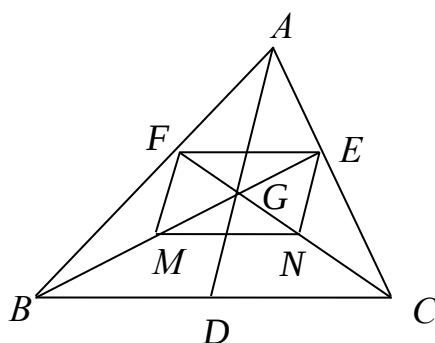
Мал. 13

Чотирикутник  $ADCF$  буде паралелограмом, і, отже,  $CF$  буде рівна і паралельна  $DA$  або, що те саме,  $BD$ . В такому випадку чотирикутник  $DBCF$  буде в свою чергу паралелограмом, а тому  $DE$  паралельна  $BC$  і, як половина  $DF$ , дорівнює половині  $BC$ .

**Теорема.** Три медіани трикутника перетинаються в одній точці, що лежить на одній третині довжини кожної з них, рахуючи від відповідної основи.

**Доведення:**

Нехай у трикутнику  $ABC$  проведені спочатку дві медіани  $BE, CF$  (мал.14). Припустимо, що їх точка перетину  $G$  лежить на одній третині кожної з них.



Мал. 14

Щоб це показати, позначимо через  $M$  і  $N$  середини  $BG$  і  $CG$ . Відрізок  $MN$ , що сполучає середини двох сторін у трикутнику  $BCG$ , паралельний  $BC$  і дорівнює її половині. Але  $EF$  також паралельний  $BC$  і дорівнює її половині. В такому випадку  $EFMN$  – паралелограм, в якому діагоналі діляться в точці перетину пополам. Таким чином, маємо  $EG = GM = MB$  і  $FG = GN = NC$ .

Отже, медіана  $BE$  проходить через точку, що лежить на третині віддалі  $CF$ . Але таким же міркуванням можна показати, що третя медіана  $AD$  також пройде через цю точку.

Як бачимо, майже всі розглянуті нами вище питання вивчаються в шкільному курсі геометрії. Проте, є й такі, що не включені в програму шкільного курсу. Це звичайно залежить від ступеня важкості матеріалу, від форми порядку викладання матеріалу в підручнику.

Однак, розглянутий нами матеріал, який не вивчається в школі, дав би змогу учням розширити та поглибити свої знання про трикутники, розв'язувати більшу кількість задач, застосовувати різні прийоми. А, отже, навчальний матеріал став би більш різноманітніший.

## **1.2. Аналіз методичної літератури по темі дослідження**

Перетворення, які зумовлені Новою українською школою, вимагають розробки нових підходів до подальшого розвитку системи освіти, і зокрема, нових технологій, що забезпечують досить високий рівень математичної підготовки школярів.

Сучасний науково-технічний прогрес потребує особливого стилю мислення, який характеризується точністю, визначеністю, обґрунтованістю, тобто тими якостями, які властиві математичній діяльності.

Вивчення математики, поряд з іншими дисциплінами, сприяє моральному, трудовому, естетичному, економічному, екологічному, правовому, патріотичному вихованню, утвердженню принципів загальнолюдської моралі.

Курс математики для середньої школи побудований за такими принципами:

- науковість, яка виявляється відповідно до змісту основ математичної науки та високо розвинутих технологій виробництва;
- доступність, яка означає відповідність змісту та обсягу курсу віковим особливостям розвитку учнів, раціональне поєднання логічної строгості й наочності та інтуїції, природодоцільність навчання;
- гуманізація навчально–виховного процесу та гуманітаризація змісту навчання;
- варіативність змісту навчання, що реалізується через різноманітність освітніх програм, розроблених на основі державного освітнього стандарту з математики, розширення і поглиблення змісту навчання із правом учителя та навчального закладу на вибір програм;
- індивідуалізація навчання;
- диференційована реалізованість, коли зміст матеріалу й вимоги до навчання мають забезпечувати на різних ступенях навчання рівневу та профільну диференціацію;

- діагностико-прогностична реалізованість, суть якої полягає у тому, що зміст матеріалу та система навчання повинна сприяти виявленню математичних і загально інтелектуальних здібностей учнів з метою їх обґрунтованої орієнтації щодо профілю навчання або вибору спеціальності;
- безперервність математичної освіти та її наступність між різними ступенями навчання [16].

Останнім часом у психологічній і педагогічній науках, у методиці навчання математики та в шкільній практиці інтенсивно розроблялися проблеми розвивального навчання, шляхи та засоби активізації пізнавальної діяльності учнів, розвитку їхнього продуктивного, творчого мислення. При цьому активна пізнавальна діяльність розглядалася не тільки як засіб оволодіння знаннями, навичками та вміннями, але й як важливе джерело розумового розвитку школярів.

Значну кількість статей, присвячених досліджуваній темі опубліковано на сторінках журналу “Математика в школі”.

Так, наприклад, Н. Мала у статті [17] формулює такі етапи уроків з математики, на яких ставить завдання активізувати пізнавальну діяльність учнів, виявити, як вони засвоїли попередній матеріал і чи сумлінно виконували домашнє завдання. Для перевірки домашнього завдання автор пропонує часто проводити математичні диктанти. Відповіді на проставлені завдання учні записуватимуть у робочий зошит, під листок якого підкладатимуть копіювальний папір і чистий аркуш. Після закінчення диктанту, діти здають на перевірку окремий листок з виконаним завданням, перебитим через копіювальний папір, а робочими зошитами обмінюються, щоб перевірку здійснив його товариш, який ставить йому оцінку. Тоді вчитель вказує, які були їх відповіді і вказує на помилки. Після цього перевіряє всі виконані завдання і виставляє оцінки. Доводить результати до відома учнів і пояснює розбіжність своєї оцінки з оцінкою, поставленою товаришем. Це підвищує віру учнів в себе, вчить робити самоаналіз, узагальнювати і глибше засвоювати вивчений матеріал. Також Н. Мала

рекомендує активізувати пізнавальну діяльність учнів дидактичною грою як елементом уроку, що зацікавить і допоможе їм швидше сприйняти новий матеріал.

Т. Яцкова у своїй статті [26] говорить, що одним із важливих моментів удосконалення методів навчання повинно стати формування в учнів творчого, евристичного мислення. Вчитель має не тільки дати деякий комплект математичних фактів, які б супроводжувалися дедуктивними міркуваннями, а й розвинути їхню математичну індукцію, прищепити навички самостійного пошуку нових закономірностей, ознайомити з достатньо загальними, єдиними прийомами самостійного цілеспрямованого пошуку розв'язків задач або доведення теорем. І хоча методів, які б гарантували розв'язування взагалі всіх задач, не існує, учень повинен одержати в школі уявлення про ті загальні прийоми, які особливо часто полегшують пошук розв'язків.

У навчанні математики психологічні особливості мають враховуватися через реалізацію індивідуального підходу до навчання – одного з провідних психолого-педагогічних принципів. Так вважають автори статті В. Бевз та В. Кузьменко [6]. На їхню думку, індивідуальний підхід у навчанні математики з позиції вчителя можна розглядати як формування у кожного учня відповідного ціле покладання, здійснення спеціального структурування навчального матеріалу, вибір особливих та різноманітних форм, засобів, методів і прийомів навчально-пізнавальної діяльності учнів та її активізації. За допомогою індивідуального підходу до навчання стає можливим урахування індивідуальних особливостей кожного учня та розвиток його індивідуальності.

Також у статті [6] зазначено, що у процесі навчання математики розвитку індивідуальності учнів сприяє індивідуальне навчання. Його можна організовувати в урочний і позаурочний час, у школі та за її межами. Учень може працювати самостійно з книжкою чи комп'ютером, або разом з учителем, батьками чи однокласником.



З.І. Слєпкань у статті [22] розповідає про формування творчої особистості при вивченні математики. Вона вважає, що на початкових етапах навчально-творчої діяльності найефективнішими виявляються методи проблемного навчання як дидактичної системи. Проблемний виклад, який здійснює сам педагог, навчає учнів способам мислення при розв'язуванні поставлених проблем. Частково-пошуковий метод або евристична бесіда залучає учнів до самостійного відкриття способу доведення теореми або розв'язання задачі. Під час евристичної бесіди складніші питання доцільно пропонувати добре встигаючим учням, не позбавляючи можливості відповісти при бажанні будь-якого учня. Простіші питання слід пропонувати слабкішим учням, щоб залучати їх до процесу колективного пошуку доведення теореми чи розв'язання складнішої задачі.

У свою чергу, Т. Ненхо в статті [18] пропонує для розвитку творчого мислення вчити учнів прогнозувати (хоч інтуїтивно) результат, і вже після цього шукати шлях розв'язання. Учні при цьому поступово опановуватимуть не тільки прийоми розв'язання (тактику), а й стратегію мислення: для розв'язання задачі вони знаходитимуть кілька ідей, будуть порівнювати їх, інтуїтивно прогнозувати результат, виконувати потрібні розумові операції, аналізувати результат.

У статті [25] пропонуються нові підходи до складання текстів для тренувальних вправ і завдань з досліджуваної теми. Автором С.П. Цукренко розроблена нова методична технологія складання тексту однотипних багатоваріантних задач, яка дає змогу за допомогою умови однієї задачі збільшити кількість використаних однотипних задач у десятки разів; забезпечити кожного учня класу окремим варіантом під час написання самостійної роботи або контрольної роботи й прогнозувати відповіді до кожного варіанта, складати домашні контрольні роботи; залучати до перевірки правильності розв'язання однотипних задач учнів класу; економити час на перевірку завдань, а за описаним учителем алгоритмом виставлення оцінки за правильні відповіді надавати можливість учням

самостійно оцінювати свої навчальні досягнення під час проведення тематичного контролю.

У навчальному посібнику [4] сказано, що трикутник – одна з найважливіших геометричних фігур і дається таке означення: *трикутником називається фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які попарно сполучають ці точки* (ст. 285). Також тут розроблена методика вивчення ознак рівності та ознак подібності трикутників.

У посібнику [7] також деякою мірою розкрито методику вивчення трикутників. Спочатку автор означає трикутник, виходячи з означення багатокутника: “Трикутник – самий «економний» вид багатокутника. Для його задання досить вказати його вершини – три точки, які не лежать на одній прямій, або три прямі, які попарно перетинаються” (ст. 298). Далі наводить їх класифікацію: за кількістю пар рівних сторін, за кількістю осей симетрії, за кутами.

Аналіз методичної літератури по темі дослідження показав, що існуючі методичні системи недостатньо розроблені, також потребують розробки і рівневі завдання, оскільки школи перейшли на чотирьохрівневе навчання та нові підручники з математики.

Тому, з’являється потреба створити нові методики, які б максимально враховували індивідуальні інтереси і здібності учнів, сприяли їх всебічному розвитку, забезпечували технологію організації навчально-виховного процесу.

### 1.3. Аналіз підручників з геометрії для 7 класу щодо викладу даної теми

Зміст шкільного курсу математики подається в підручниках або навчальних посібниках. Ми розглядатимемо матеріал, пов'язаний з трикутниками, викладений в шкільних підручниках для 7 класу [5] та [10].

Розглянемо детальніше підручники [5] та [10] та зробимо їх порівняльний аналіз.

У підрунику [5] вивченню трикутників присвячено розділ III «Трикутники». Цей розділ поділяється на такі параграфи: «Трикутник і його елементи», «Сума кутів трикутника», «Про рівність геометричних фігур», «Ознаки рівності трикутників», «Рівнобедрений трикутник», «Третя ознака рівності трикутників», «Прямокутний трикутник», «Нерівності трикутників». Охарактеризуємо кожен із цих параграфів.

§9 «Трикутник і його елементи». Пояснення нового матеріалу розпочинається із формулювання означення трикутника і його елементів: трикутник – це замкнена ламана з трьох ланок, точки  $A, B, C$  – вершини, відрізки  $AB, BC, AC$  – сторони трикутника.

Далі повторюється означення периметра трикутника: суму довжин усіх сторін трикутника називають його периметром; вводиться поняття медіани, висоти та бісектриси трикутника: відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою його протилежної сторони, – медіана трикутника; відрізок бісектриси кута трикутника від його вершини до протилежної сторони – бісектриса трикутника; перпендикуляр, опущений з вершини трикутника на пряму, на якій лежить його протилежна сторона, – висота трикутника.

Дається означення кутів трикутника: кутами трикутника  $ABC$  називають кути  $BAC, ABC, ACB$ ; в залежності від градусної міри кутів розглядаються прямокутні, тупокутні та гострокутні трикутники: якщо трикутник має прямий або тупий кут, його називають відповідно прямокутним або тупокутним трикутником; трикутник, усі кути якого гострі, називається гострокутним.

Для закріплення теоретичного матеріалу задач початкового рівня доцільно, щоб було 40%, середнього рівня – 24%, достатнього рівня 20% і високого рівня – 16% від всієї кількості [27].

На закріплення теоретичного матеріалу розглядаються 34 задачі, з яких 27% – початкового рівня, 35% – середнього рівня, 32% – достатнього рівня і 6% – високого рівнів відповідно. Недостатньо задач початкового і високого рівнів, а середнього і достатнього рівнів – більше, ніж потрібно.

§10 «Сума кутів трикутника». Виклад матеріалу розпочинається із формулювання теореми про суму кутів трикутника та її доведення: теорема 8 «Сума кутів трикутника дорівнює  $180^\circ$ »; формулюється наслідок з неї: трикутник не може мати два прямих або тупих кутів, у кожному трикутнику принаймні два кути – гострі.

Дається означення зовнішнього кута трикутника: зовнішнім кутом трикутника називається кут, утворений стороною трикутника і продовженням його іншої сторони.

Формулюється і доводиться теорема про зовнішній кут трикутника: теорема 9 «Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним»; а також наслідок з неї: зовнішній кут трикутника більший кожного внутрішнього кута, не суміжного з ним.

На закріплення подано 28 задач, з яких 18% задач початкового рівня, 14% задач середнього рівня, 57% – достатнього рівня і 11% задач високого рівня. Недостатня кількість задач початкового, середнього і високого рівнів, а задач достатнього рівня більше, ніж потрібно.

§11 «Про рівність геометричних фігур». На прикладі пояснюється, які трикутники називаються рівними: якщо трикутники можна сумістити рухом, то вони рівні; і робиться узагальнення на усі інші фігури. Також на прикладі показується, яким знаком позначаються рівні фігури. Після цього формулюється властивість відношення рівності фігур: якщо кожна з двох фігур дорівнює третій, то перша і друга фігури також рівні; а також ознака рівності двох кіл: якщо радіуси двох кіл рівні, то рівні й самі кола.

На закріплення виділено 34 задачі, з них 21% задач початкового рівня, по 38% задач середнього і достатнього рівнів і 3% задач високого рівня. Недостатня кількість задач високого і початкового рівнів, а задач середнього і достатнього рівнів більша, ніж потрібно.

§12 «Ознаки рівності трикутників». У цьому параграфі формулюються і доводяться перша і друга ознаки рівності трикутників (за двома сторонами і кутом між ними та за стороною і прилеглими до неї кутами відповідно): теорема 10 «Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні»; теорема 11 «Якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні».

На закріплення нового матеріалу пропонується розв'язати 29 задач, з яких: 10% задач початкового рівня, 31% задач середнього рівня, 45% задач достатнього рівня і 14% задач високого рівня. Недостатньо задач початкового і високого рівнів, і більше, ніж потрібно задач середнього і достатнього рівнів.

§13 «Рівнобедрений трикутник». Спочатку дається означення рівнобедреного трикутника і його елементів: трикутник називається рівнобедреним, якщо в нього дві сторони рівні, рівні сторони трикутника називаються бічними сторонами, а третю його сторону – основою.

Далі даються означення різностороннього і рівностороннього трикутників: трикутник, який не є рівнобедреним, називають різностороннім; трикутник, у якого всі сторони рівні, називають рівностороннім. Після цього доводяться дві теореми: теорема 12 «У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні, а бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою»; теорема 13 «Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений», та формулюється наслідок з цих теорем: «У трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути, а проти рівних кутів – рівні сторони».

На закріплення теоретичного матеріалу подається 39 задач, з яких недостатня кількість задач початкового і середнього рівнів лише по 10% і 23% відповідно, а задач достатнього і високого рівнів 44% і 23% відповідно, це більше, ніж потрібно.

§14 «Третя ознака рівності трикутників». В цьому параграфі формулюється і доводиться третя ознака рівності трикутників (за трьома сторонами): теорема 14 «Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні».

На закріплення даного матеріалу подається 23 задачі, з них 9% задач початкового рівня, 17% задач середнього рівня, 52% задач достатнього рівня і 22% задач високого рівня. Задач початкового і середнього рівнів не вистачає, а задачі достатнього і високого рівнів перебувають у надлишку.

§15 «Прямокутний трикутник». Дається означення прямокутного трикутника і його елементів: трикутник називається прямокутним, якщо один з його кутів прямий, сторона прямокутного трикутника, що лежить проти прямого кута, – це гіпотенуза, дві інші його сторони – катети.

Також формулюються ознаки рівності трикутників без доведення: два прямокутні трикутники рівні, якщо: катети одного з них дорівнюють відповідно катетам другого; катет і прилеглий гострий кут одного трикутника дорівнює відповідно катету і прилеглому гострому куту другого трикутника; гіпотенуза і прилеглий кут одного трикутника дорівнює відповідно гіпотенузі і прилеглому куту другого.

Доводиться ознака рівності прямокутних трикутників: теорема 15 «Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гіпотенузі другого, то такі трикутники рівні».

На закріплення виділено 32 задачі, з них 15% задач початкового рівня, 25% – середнього рівня, 38% – достатнього рівня і 22% високого рівня. Недостатньо задач початкового рівня, задач інших трьох рівнів значно більша кількість, ніж потрібно.

§16 «Нерівності трикутника». Формулюються і доводяться дві теореми: теорема 16 «У кожному трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута – більша сторона»; теорема 17 «Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін», а також формулюються наслідки з цих теорем: у кожному прямокутному трикутнику гіпотенуза довша за кожний катет; перпендикуляр, проведений з будь-якої точки до прямої, коротший від будь-якої похилої, проведеної з тієї самої точки до тієї ж прямої; проекція похилої завжди менша від похилої.

На закріплення даного матеріалу пропонується розв'язати 23 задачі, з яких 22% задач початкового рівня, 13% – середнього рівня, 48% – достатнього рівня і 17% – високого рівня. Не вистачає задач початкового і середнього рівнів, достатнього і високого рівнів задач більша кількість, ніж потрібна.

При вивченні розділу IV «Коло і круг. Геометричні побудови», один параграф присвячено темі трикутників, а саме §19 «Коло і трикутник». У цьому параграфі дається означення кола, описаного навколо трикутника: коло називається описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини. Після означення доводиться теорема: теорема 18 «Навколо кожного трикутника можна описати лише одне коло. Його центром є точка перетину серединних перпендикулярів двох сторін трикутника».

Після доведення теореми формулюються наслідки з неї: серединні перпендикуляри усіх трьох сторін довільного трикутника проходять через одну й ту саму точку; через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести коло і лише одне. Далі дається спосіб побудови кола навколо трикутника:

1. Побудувати серединні перпендикуляри двох сторін даного трикутника.
2. Визначити точку  $O$ , в якій ці серединні перпендикуляри перетинаються.
3. З центра  $O$  провести коло радіусом  $OA$ .

Також у параграфі формулюється означення кола, вписаного у трикутник: коло називається вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх сторін трикутника. Далі доводиться теорема: теорема 19 «У кожний трикутник можна вписати лише одне коло. Його центром є точка перетину двох бісектрис трикутника», і формулюється наслідок з неї: у кожному трикутнику всі три бісектриси перетинаються в одній точці; після наслідку дається спосіб побудови кола, вписаного в трикутник:

1. Провести дві його бісектриси.
2. З точки їх перетину  $I$  опустити перпендикуляр  $IL$  на довільну сторону трикутника.
3. Із центра  $I$  радіусом  $IL$  описати коло.

На закріплення даного матеріалу пропонується 33 задачі: 19% задач початкового рівня, 27% – середнього рівня, 42% – достатнього рівня і 12% – високого рівня. Не вистачає задач початкового і високого рівнів, а задач середнього і достатнього рівнів більша кількість, ніж має бути.

Підручник [10] побудований аналогічно до підручника [5].

Як і в попередньому підручнику трикутники вивчаються в третьому розділі, який поділяється на 7 параграфів: «Трикутник і його елементи», «Властивості кутів трикутника», «Рівність геометричних фігур», «Перша і друга ознаки рівності трикутників», «Властивості й ознака рівнобедреного трикутника», «Третя ознака рівності трикутників», «Ознаки рівності прямокутних трикутників». На відміну від [5] тут не виділено параграф «Нерівності трикутника».

§10 «Трикутник і його елементи». Спочатку дається означення трикутника, його кутів. Далі наводиться твердження нерівності трикутника: будь-яка сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін; яке супроводжується відповідними тренувальними вправами.

Так само як і в [5] розглядаються види трикутників залежно від довжин їх сторін та від міри кутів; означено і показано на малюнку кожен вид



трикутників. Повторюється також означення периметра, а потім подано визначення медіани, висоти та бісектриси трикутника.

У даному параграфі на закріплення теоретичного матеріалу дано 52 задачі, що на 18 задач більше, ніж у [5], із них 21% задач початкового рівня, 35% задач середнього рівня, 31% задач достатнього і 13% задач високого рівнів. Відповідно як і в [5] недостатньою є кількість задач початкового і високого рівнів, а середнього і достатнього рівнів задач є надлишок.

§11 «Властивості кутів трикутника». Виклад і послідовність теоретичного матеріалу подано аналогічно до [5]. Формулюються і доводяться дві теореми: теорема про суму кутів трикутника, властивість зовнішнього кута трикутника; а також формулюються наслідки з цих теорем.

В порівнянні з [5] до параграфа подано набагато більше задач для розв'язування, загальна кількість яких становить 53, серед яких початкового рівня – 10%, середнього – 30%, достатнього – 43% і високого – 17%. Недостатньою є кількість задач початкового рівня, всіх інших рівнів задач є більше, ніж потрібно.

§12 «Рівність геометричних фігур». Цей параграф відрізняється викладом матеріалу від [5] тим, що тут спочатку на прикладі пояснюється, які дві фігури називаються рівними, а далі виходячи із загального означення рівності фігур, формулюють означення рівних трикутників, у [5] – навпаки: спочатку на прикладі пояснюється які трикутники називаються рівними, а тоді робиться узагальнення на усі інші фігури.

На закріплення теорії виділено менше задач, ніж в [5], а саме – 27 задач: 26% задач початкового рівня, 37% – середнього рівня, 30% – достатнього рівня та 7% – високого рівня. Недостатньо є задач початкового та високого рівнів, а перебільшено – середнього та достатнього рівнів.

§13 «Перша і друга ознаки рівності трикутників». Порівнюючи цей параграф в [5] і [10] можна сказати, що матеріал подано однаково. Формулюються теореми: ознака рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними та ознака рівності трикутників за стороною та прилеглими

до неї кутами; доведення цих теорем і в одному і в іншому підручнику проводиться накладанням трикутників один на одного.

Кількість задач для розв'язання значно відрізняється, у [5] їх всього 34, а в [10] – 52, з яких 12% задач початкового рівня, 31% задач середнього рівня, 38% задач достатнього рівня і 19% задач високого рівня. Недостатньої кількості задач тільки початкового рівня, інших рівнів задач більше потрібного.

§14 «Властивості й ознака рівнобедреного трикутника». У [10] на відміну від [5] не даються спочатку означення рівнобедреного, рівностороннього і різностороннього трикутників, а одразу дано теорему (властивості рівнобедреного трикутника) і її доведення, потім формулюються твердження про висоту і медіану рівнобедреного трикутника та дається розв'язана задача на їх закріплення. Далі формулюється і доводиться теорема (ознака рівнобедреного трикутника) та наслідок з неї.

У [10] задач до цього параграфу подано 53, це на 14 більше, ніж в [5]. З цих 53 задач – початкового рівня – 8%, середнього рівня – 36%, достатнього рівня – 41% та високого рівня – 15%. Зовсім мало задач початкового рівня та трішки не вистачає задач високого рівня, середнього та достатнього – перебільшено.

§15 «Третя ознака рівності трикутників». У [10] і в [5] виклад цього матеріалу співпадає. Формулюється третя ознака рівності трикутників і доводиться за допомогою прикладання трикутників один до одного.

Задачний матеріал після параграфу у [10] не набагато відрізняється від [5]. Для розв'язання в [5] пропонується 23 задачі, у [10] – 20 задач, серед яких 15% початкового рівня, 30% – середнього, 40% – достатнього, 15% – високого. Початкового і високого рівнів не вистачає, а середнього і достатнього є багато.

§16 «Ознаки рівності прямокутних трикутників». Теоретичний матеріал в [10] подано аналогічно як і в [5]. Спочатку сказано, які трикутники

називаються прямокутними, а далі формулюються три ознаки рівності прямокутних трикутників без доведення і четверта ознака доводиться.

На закріплення пропонується майже однакова кількість задач. В [10] – 39 задач, із них 8% задач початкового рівня, 31% – середнього рівня, 46% – достатнього рівня і 15% – високого рівня. В обох підручниках досить мало задач початкового рівня, навпаки, забагато задач є середнього і достатнього рівнів.

В підручнику [10] у IV розділі «Коло і круг. Геометричні побудови» на вивчення трикутників виділено §19 «Описані і вписані кола». Аналогічно до [5] подано теоретичний матеріал: формулюються означення описаного кола навколо трикутника та означення вписаного кола в трикутник. Потім формулюються і доводяться дві теореми: теорема про описане коло і теорема про вписане коло. Із теорем випливають наслідки. Відрізняється виклад матеріалу лиш тим, що в [10] на відміну від [5] не даються способи побудови кола навколо трикутника та побудови кола, вписаного в трикутник.

Для розв'язування, після параграфа, у [10] дано 37 задач, що на 4 більше, ніж в [5], із них, 11% – початкового рівня, 32% – середнього рівня, 32% – достатнього і 25% – високого рівнів відповідно. Недостатньо задач початкового рівня, інших рівнів задач є більше, ніж потрібно.

Порівнюючи підручники для 7 класу [5] і [10], можна сказати, що в обох книгах теоретичний матеріал подано в широкому розумінні. Подання матеріалу в обох підручниках майже співпадає, проте вони ніби доповнюють один одного – десь краще пояснення, десь кращі ілюстрації. Підручник [5] дещо краще оформлений, він легший для сприймання, бо в [10] досить багато малюнків, невдалий шрифт, а це відволікає учнів від навчання. Проте, задачний матеріал навпаки ж краще поданий в [10], оскільки тут він розділений на чотири рівні складності і до кожного параграфу наведено набагато більше задач, ніж в [5]. У свою чергу в [5] задачі і вправи поділено тільки на дві групи: групу А і групу Б; також виділено задачі для усного

розв'язування. Але і в одному і в другому підручнику дуже мала кількість задач початкового і високого рівнів.

Підручники розраховані на диференційоване навчання, вони містять задачі усіх чотирьох рівнів, проте їх кількості все одно недостатньо.

## РОЗДІЛ II. Методика вивчення трикутників у курсі планіметрії 7 класу

### 2.1. Методика пропедевтичного вивчення трикутників

Ті геометричні відомості, які даються учням перед вивченням систематичного курсу геометрії, називають геометричною пропедевтикою (підготовкою). На даний час трикутники починають вивчатися ще з початкової школи, тому розглянемо пропедевтику їх вивчення.

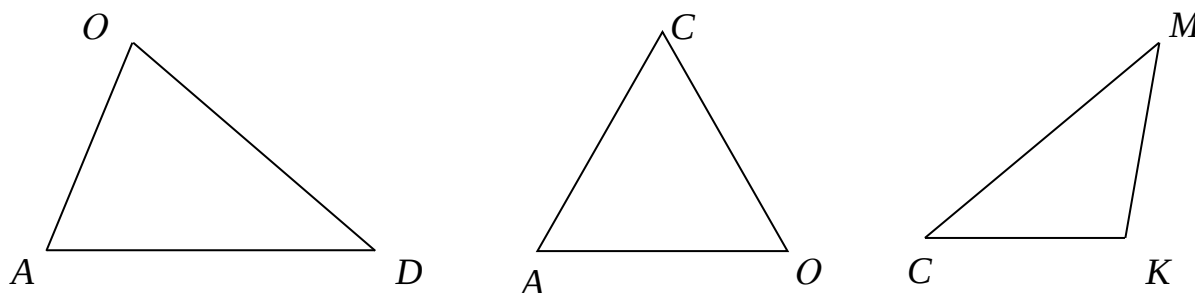
В першому класі учнів знайомлять із різними багатокутниками, серед яких є трикутники. Трикутники, як і інші фігури, використовують при лічбі предметів, також учнів вчать будувати трикутники у зошитах.

У другому класі дається означення периметра чотирикутника, а саме: сума довжин усіх сторін чотирикутника – це периметр чотирикутника. Далі, на основі цього означення учням пропонують виконати таке практичне завдання: виміряти сторони трикутника, зображеного у підручнику, та знайти його периметр самостійно. І такі завдання пропонуються виконувати досить часто. Також в другому класі вчитель говорить, що трикутник має три сторони, три вершини і три кути.

Ще у другому класі учні знайомляться із прямим кутом, і вчать його знаходити за допомогою косинця у різних багатокутників.

В третьому класі учні знайомляться із різними видами кутів – гострим і тупим. Їм даються такі означення: кут, менший від прямого, називається гострим; кут більший від прямого, називається тупим. На основі цих означень учні виконують практичне завдання:

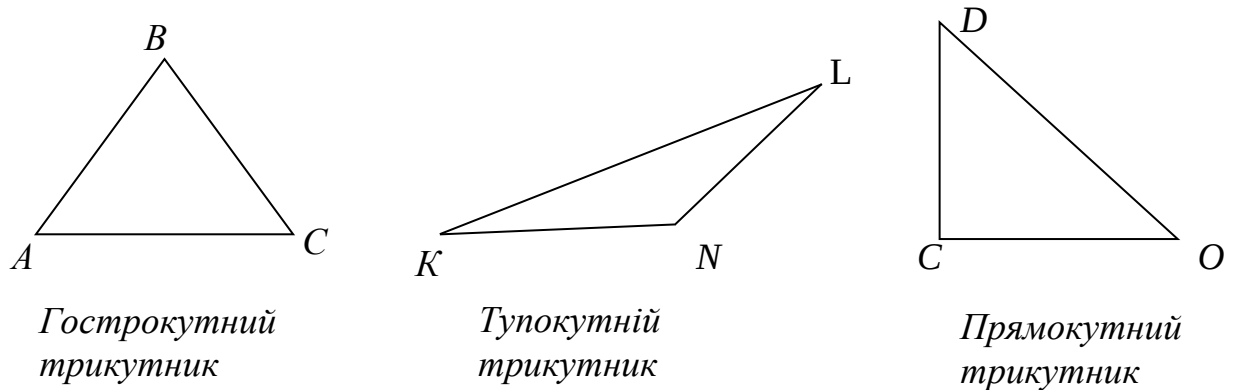
За допомогою кутника визнач, які кути в кожному трикутнику (мал. 15).



Мал. 15

Після того як учні визначили кути, їм пропонується інше завдання:

Розглянь і поясни назви трикутників (мал. 16).



Мал. 16

Таким чином, учні з допомогою вчителя знайомляться із різними видами трикутників в залежності від їх кутів.

У четвертому класі учням даються означення різних видів трикутників в залежності від кутів і довжин сторін:

1. Якщо всі кути трикутника гострі, то він називається гострокутним.
2. Якщо один з кутів трикутника тупий, то він називається тупокутним.
3. Трикутник, який має прямий кут, називається прямокутним.
4. Трикутник, у якого всі сторони за довжиною різні називається різностороннім.
5. Трикутник, у якого дві сторони рівні називається рівнобедреним.
6. Трикутник, у якого всі сторони рівні називається рівностороннім.

У п'ятому класі, перед тим як дати означення багатокутника, дається означення замкненої ламаної, а після того дається означення багатокутника, як замкненої ламаної, її ланки називаються сторонами багатокутника, а вершини – вершинами багатокутника. Якщо багатокутник має 3, 4, 5 чи взагалі  $n$  сторін, то його називають відповідно трикутником, чотирикутником, п'ятикутником,  $n$  – кутником. Кожний  $n$  – кутник має  $n$  вершин і  $n$  сторін. Після цього повторюються означення різностороннього, рівностороннього і рівнобедреного трикутників. Означення рівнобедреного трикутника дається в широкому розумінні, а саме: якщо у трикутнику дві

сторони рівні, то його називають рівнобедреним, рівні сторони рівнобедреного трикутника називають бічними сторонами, а третю його сторону – основою. Після цих означень дається означення периметра многокутника – це сума довжин всіх сторін многокутника, а пояснюється це означення на прикладі трикутника. Наприклад, якщо довжини сторін трикутника 3 см, 4 см і 5 см, то його периметр дорівнює 12 см, бо  $3\text{ см} + 4\text{ см} + 5\text{ см} = 12\text{ см}$ .

Далі дається означення рівних фігур: дві фігури називаються рівними, якщо їх можна сумістити накладанням. І знову дане означення пояснюється на прикладі трикутника: якщо трикутники  $ABC$  і  $KPT$  рівні, то рівні їх відповідні сторони  $AB = KP$ ,  $BC = PT$ ,  $AC = KT$  і відповідні кути  $\angle A = \angle K$ ,  $\angle B = \angle P$ ,  $\angle C = \angle T$ .

Ще в п'ятому класі зазначається, що сторони трикутника не можуть бути довільними відрізками, бо в кожному трикутнику навіть найбільша сторона є меншою від суми двох інших його сторін. Якщо сторони трикутника  $a, b$  і  $c$ , то  $a < b + c$ ,  $b < a + c$ ,  $c < a + b$ .

На закріплення теоретичного матеріалу, учні розв'язують різноманітні задачі. Наведемо приклад кількох із них:

**Задача.** Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 35 см, а основа – на 2 см більша за бічну сторону. Знайди довжини сторін трикутника.

**Задача.** Одна сторона трикутника вдвічі довша за другу і на 3 см коротша за третю. Знайди довжину найбільшої сторони трикутника, якщо довжина найменшої дорівнює 28 см.

Також в п'ятому класі повторюються означення прямокутного, тупокутного і гострокутного трикутників. І за допомогою досліду встановлюється, що сума кутів трикутника дорівнює  $180^\circ$ . Цей дослід полягає в наступному: з паперу вирізається довільний трикутник і його кути позначаються 1, 2, 3. Якщо кути 1 і 3 відірвати і прикласти до кута 2, то виявиться, що сума трьох кутів трикутника дорівнює розгорнутому куту.

Оскільки міра розгорнутого кута дорівнює  $180^\circ$ , то сума всіх кутів трикутника дорівнює  $180^\circ$ . Це справедливо для будь-якого трикутника.

На закріплення теоретичного матеріалу, учні розв'язують різноманітні задачі.

У шостому класі трикутникам приділяється мало уваги, розглядаються лише вправи, де згадуються трикутники, а нових знань про цю фігуру учні не отримують.

У попередніх класах учні отримують достатній багаж знань про трикутники, а тому подальше навчання спрямоване на поглиблення вже існуючих знань і відкриття нових.

## **2.2. Методика вивчення трикутників у курсі планіметрії 7 класу**

На вивчення розділу «Трикутники» в 7-му класі відводиться за програмою 25 годин. Весь матеріал, що вимагається програмою, викладений в діючому підручнику [5]. Для початку наведемо приклад календарного планування розділу «Трикутники. Ознаки рівності трикутників» для 7-го класу.

| <b>№ п/п</b> | <b>Тема уроку</b>                                         | <b>Кількість годин</b> |
|--------------|-----------------------------------------------------------|------------------------|
|              | Тема №1. Ознаки рівності трикутників                      |                        |
| 1            | Трикутник і його елементи.                                | 1                      |
| 2            | Рівність геометричних фігур. Ознаки рівності трикутників. | 1                      |
| 3-4          | Перша ознака рівності трикутників та її застосування.     | 2                      |
| 5-6          | Друга ознака рівності трикутників та її застосування.     | 2                      |
| 7            | Розв'язування задач.                                      | 1                      |
| 8            | Рівнобедрений трикутник, його властивості та ознаки.      | 1                      |
| 9            | Розв'язування задач.                                      | 1                      |
| 10           | Медіана, бісектриса і висота трикутника.                  | 1                      |



|       |                                                                                |   |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------|---|
| 11-12 | Третя ознака рівності трикутників та її застосування.                          | 2 |
| 13    | Контрольна робота №1.                                                          | 1 |
|       | Тема №2. Властивості кутів трикутника.                                         |   |
| 14-15 | Сума кутів трикутника.                                                         | 2 |
| 16-17 | Зовнішній кут трикутника та його властивості.                                  | 2 |
| 18-20 | Прямокутні трикутники. Властивості та ознаки рівності прямокутних трикутників. | 3 |
| 21    | Розв'язування задач.                                                           | 1 |
| 22-23 | Нерівність трикутника.                                                         | 2 |
| 24    | Розв'язування задач.                                                           | 1 |
| 25    | Контрольна робота №2.                                                          | 1 |

Розглянемо методику вивчення теми «Трикутник і його елементи» та методику вивчення ознак рівності трикутників, оскільки на цих темах базується значна частина курсу геометрії. Також розробимо діагностувальну рівневу роботу для перевірки навчальних досягнень учнів з теми «Трикутники».

При оцінюванні навчальних досягнень учнів будемо враховувати: правильність, цілісність, повноту, логічність, обґрунтованість відповіді; осмисленість, глибину, гнучкість, дієвість, міцність знань; сформованість практичних умінь і навичок; оволодіння розумовими операціями; розвиток творчих умінь; самостійність, старанність.

Діагностувальна робота має містити таку кількість завдань, щоб охоплювала весь матеріал теми, яка перевіряється.

Кількість завдань для тематичного оцінювання кожного рівня і критерії оцінювання навчальних досягнень учнів за їх розв'язування подано в наведеній нижче таблиці.

| Рівні навчальних досягнень учнів | Кількість завдань | Кількість вірно розв'язаних завдань | Бали           |
|----------------------------------|-------------------|-------------------------------------|----------------|
| I                                | 10                | 5-6<br>7-8<br>9-10                  | 1<br>2<br>3    |
| II                               | 6                 | 4<br>5<br>6                         | 4<br>5<br>6    |
| III                              | 5                 | 3<br>4<br>5                         | 7<br>8<br>9    |
| IV                               | 4                 | 2<br>3<br>4                         | 10<br>11<br>12 |

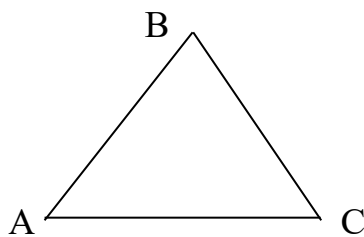
### Урок “Трикутник і його елементи”

Даний урок слід провести у вигляді бесіди, оскільки учні знайомі з поняттям трикутника з попередніх класів.

Вчитель пропонує учням накреслити трикутник  $ABC$  (мал. 17), назвати його сторони, вершини, кути і спробувати дати означення. При потребі вчитель допомагає.

**Означення 1.** Трикутник – це замкнена ламана з трьох ланок.

Кожний трикутник має три вершини, три сторони і три кути.



Мал. 17

Позначають:  $\Delta ABC$

$A, B, C$  – вершини,

$AB, BC, AC$  – сторони,

$\angle A, \angle B, \angle C$  – кути.

Вчитель: Багато різних моделей трикутників можна бачити в підйомних кранах, заводських конструкціях, в різних архітектурних спорудах.

Далі вчитель запитує в учнів якими бувають трикутники. Учні відповідають, якщо в них виникають труднощі, вчитель допомагає.

**Означення 2.** Якщо трикутник має прямий або тупий кут, його називають відповідно *прямокутним* або *тупокутним* трикутником. Трикутник, усі кути якого гострі, називається *гострокутним*.

Вчитель: Яку величину називають периметром трикутника?

Учні: Суму довжин усіх сторін трикутника називають його периметром.

Вчитель: Як це можна записати?

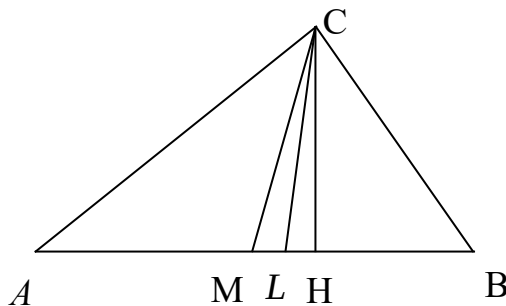
Учні:  $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC$ .

Вчитель: Зараз ми познайомимось з вами ще з такими елементами трикутника як: висота, медіана і бісектриса.

**Означення 3.** Відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою його протилежної сторони, – *медіана трикутника*.

Відрізок бісектриси кута від його вершини до протилежної сторони – *бісектриси трикутника*.

Перпендикуляр, опущений з вершини трикутника на пряму, на якій лежить протилежна його сторона, – *висота трикутника* (мал.18).



Мал. 18

CM – медіана,

CL – бісектриса,

CH – висота.

Вчитель: Кожний трикутник має три медіани, три бісектриси і три висоти.

Теоретичний матеріал слід закріпити на конкретних прикладах. Спочатку учні розв’язують задачу колективно з допомогою вчителя. При цьому, записи ведуть у зошитах, а вчитель на дошці.

**Задача.** Сторони трикутника 3,8 см, 4,5 см і 7,5 см. Знайдіть його периметр.

Наступну задачу учні розв’язують самостійно. Вчитель просить звірити відповіді. Потім викликає учня, який не правильно розв’язав задачу до дошки, щоб той розповів про хід своїх думок, та аналізує його помилки.

**Задача.** Периметр трикутника  $ABC$  дорівнює 26 см. Знайдіть його сторони, якщо  $AC = 10$  см і  $AB = BC$ .

Далі вчитель викликає одного учня до дошки, інші діти працюють на місцях.

**Задача.** Знайдіть периметр трикутника, якщо він більший від першої сторони на 7 м, від другої – на 8 м і від третьої – на 9 м.

Вчитель зачитує задачу, запитує декількох учнів, які в кого є думки щодо розв’язання даної задачі. А коли хід розв’язання знайдено, просить одного з учнів записати його на дошці. Інші учні працюють самостійно.

**Задача.** Знайдіть висоту  $BH$  трикутника  $ABC$ , якщо периметри трикутників  $ABC$ ,  $ABH$  і  $BHC$  дорівнюють відповідно 26 см, 14 см і 18 см.

На закріплення вивченого матеріалу вчитель задає такі питання:

1. Що таке трикутник?
2. Назвіть елементи трикутника.
3. Якими бувають трикутники? Сформулюйте їх означення.
4. Що таке бісектриса, медіана і висота трикутника?

## Урок “Перша ознака рівності трикутників”

На початку уроку вчитель пропонує учням розв’язати задачу, розв’язок якої приводить до першої ознаки рівності трикутників.

**Задача.** Побудувати трикутник  $ABC$ , у якому  $\angle A = 40^\circ$ ,  $AB = 4$  см і  $AC = 5$  см; і  $\Delta A_1B_1C_1$ , у якому  $\angle A_1 = 40^\circ$ ,  $A_1B_1 = 4$  см,  $A_1C_1 = 5$  см. Виміряйте решту кутів і сторін побудованих трикутників.

Вчитель: Що ви можете сказати про ці трикутники?

Учні: Вони рівні.

Вчитель: Узагальнює відповідь учнів у вигляді теореми.

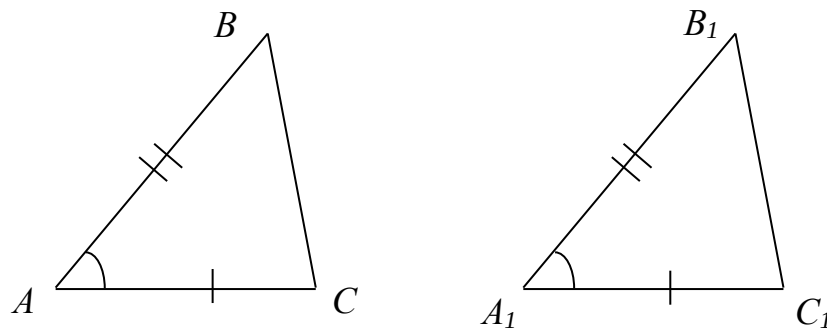
**Теорема 1:** (перша ознака рівності трикутників)

Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.

**Дано:**  $\Delta ABC$ ,  $\Delta A_1B_1C_1$ ,  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$ .

**Довести:**  $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ .

**Доведення:**



Мал. 19

Вчитель: нехай  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  – два трикутники, в яких  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$  (мал. 19).

Доведемо, що  $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ . Накладемо  $\Delta A_1B_1C_1$  на  $\Delta ABC$  так, щоб вершина  $A_1$  сумістилася з  $A$ , вершина  $B_1$  – з  $B$ , а сторона  $A_1C_1$  наклалася на промінь  $AC$ . Чи можна це зробити?

Учні: Це зробити можна, бо згідно з умовою  $AB = A_1B_1$  і  $\angle A = \angle A_1$ .

Вчитель: Оскільки  $A_1C_1 = AC$ , то при такому накладенні з якою точкою суміститься точка  $C_1$ ?

Учні: Точка  $C_1$  суміститься з  $C$ .

Вчитель: В результаті всі вершини  $\Delta A_1B_1C_1$  сумістяться з відповідними вершинами  $\Delta ABC$ . Отже, що ми можемо сказати про  $\Delta ABC$  і  $\Delta A_1B_1C_1$ ?

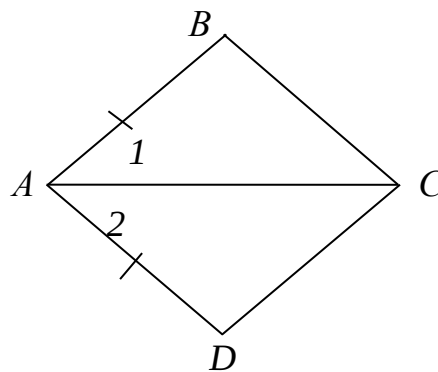
Учні:  $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ .

Після доведення теореми вчитель пропонує дати учням відповіді на такі запитання:

1. Як формулюється перша ознака рівності трикутників?
2. Що дано в теоремі?
3. Що потрібно довести?

Далі учні переходять до розв'язування задач. Вчитель виконує на дошці малюнок і просить учнів усно довести поставлене завдання.

**Задача.** Користуючись малюнком 20 доведіть, що якщо  $AB = AD$  і  $\angle 1 = \angle 2$ , то  $\Delta ABC = \Delta ADC$ .



Мал. 20

Після доведення учнями задачі, вчитель ставить інше завдання. Розв'язати задачу самостійно і для перевірки обмінятися зошитом з сусідом по парті. Учні аналізують, які на їх думку помилки допущені однокласником і чому.

**Задача.** Відрізки  $AB$  і  $CD$  в точці перетину  $O$  діляться пополам. Доведіть рівність трикутників  $AOC$  і  $BAD$ .

Далі один учень розв'язує задачу з коментуванням біля дошки, інші працюють на місцях.

**Задача.** Вершини  $C$  і  $D$  трикутників  $ABC$  і  $ABD$  лежать в одній півплощині відносно прямої  $AB$ , відомо, що  $\angle CAB = \angle DBA$ ,  $AC = DB$ . Доведіть рівність трикутників  $ABC$  і  $ABD$ .

На другу задачу вчитель викликає іншого учня.

**Задача.** Доведіть, що медіани трикутників, проведені до рівних сторін, рівні.

### ***Урок “Друга ознака рівності трикутників”***

На початку уроку слід провести математичний диктант по попередньому матеріалі.

1. У трикутниках  $KNO$  і  $PQT$   $KN = PQ$ ,  $\angle K = \angle P$ . Яка ще умова повинна виконуватися, щоб ці трикутники були рівні за першою ознакою рівності трикутників?

2. У трикутниках  $MPK$  і  $AOB$   $MP = AO$ ,  $MK = AB$ . Яка ще умова повинна виконуватися, щоб ці трикутники були рівними за першою ознакою рівності трикутників?

3 Закінчіть речення: “Перша ознака рівності трикутників – це ознака рівності за ...”

4. Як формулюється перша ознака рівності трикутників?

Після написання математичного диктанту вчитель пропонує учням розв'язати таку задачу.

**Задача.** Побудувати  $\triangle ABC$ , якщо  $AB = 5$  см,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 50^\circ$ ;  $\triangle A_1B_1C_1$ , якщо  $A_1B_1 = 5$  см,  $\angle A_1 = 60^\circ$ ,  $\angle B_1 = 50^\circ$ . Виміряйте решту сторін і кутів побудованих трикутників.

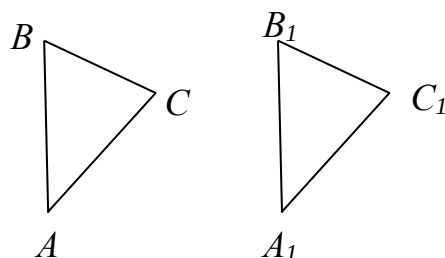
Вчитель: Що ви можете сказати про ці трикутники?

Учні: Вони рівні.

Вчитель узагальнює відповідь учнів у вигляді теореми.

**Теорема 2:** (друга ознака рівності трикутників)

Якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.



Мал. 21

**Дано:**  $\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1, AB = A_1B_1, \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1$ .

**Довести:**  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

**Доведення:**

Вчитель: Нехай  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  – два трикутники, в яких  $AB = A_1B_1, \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1$ . (мал. 21).

Доведемо, що  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

Накладемо  $\triangle A_1B_1C_1$  на  $\triangle ABC$  так, щоб вершина  $A_1$  сумістилася з вершиною  $A$ , а вершина  $B_1$  – з вершиною  $B$ , а сторона  $A_1C_1$  накладалася на  $AC$ . Чи можна це зробити?

Учні: Це зробити можна, бо  $AB = A_1B_1$  і  $\angle A = \angle A_1$ .

Вчитель: Оскільки  $\angle B = \angle B_1$ , то сторона  $B_1C_1$  накладеться на  $BC$ . Отже, при такому накладанні з яким променем суміститься  $A_1C_1$ , а з яким –  $B_1C_1$ ?

Учні: Промінь  $A_1C_1$  суміститься з  $AC$ , а промінь  $B_1C_1$  – з  $BC$ .

Вчитель: Точка  $C_1$ , в якій перетинаються промені  $A_1C_1$  і  $B_1C_1$ , суміститься з...

Учні: Точкою  $C$  перетину променів  $AC$  і  $BC$ .

Вчитель: Як бачимо,  $\triangle A_1B_1C_1$  можна сумістити з  $\triangle ABC$ , а що це означає?

Учні: Це означає, що  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

Для закріплення доведення теореми вчитель дає такі запитання:

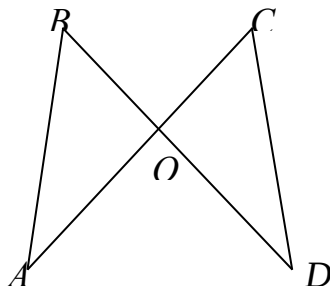


1. Як формулюється друга ознака рівності трикутників?
2. Що дано в теоремі?
3. Що потрібно довести?

Після відповідей на поставлені запитання учні переходять до розв'язування задач.

Спочатку усно з місця доводять поставлену вчителем задачу.

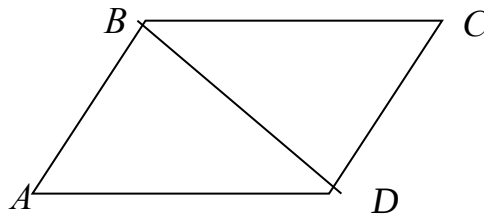
**Задача.** На малюнку 22  $\angle B = \angle C$ ,  $BO = CO$ . Доведіть рівність трикутників  $AOB$  і  $DOC$ .



Мал. 22

Другу задачу розв'язують самостійно, звіряють відповіді і пояснюють хід своїх роздумів. Вчитель аналізує допущені помилки.

**Задача.** В трикутниках  $ABD$  і  $CDB$   $\angle ABD = \angle CDB$ ,  $\angle ADB = \angle CBD$ ,  $AB = 3\text{см}$ ,  $AD = 5\text{см}$ . Знайдіть сторони  $BC$  і  $CD$  (мал. 23).



Мал. 23

Наступну задачу учні розв'язують розділивши на групи по рядах.

**Задача.** Вершини  $C$  і  $D$  трикутників  $ABC$  і  $ABD$  лежать в одній півплощині відносно прямої  $AB$ . Відомо, що  $\angle CAB = \angle DBA$ ,  $\angle DBA = \angle CBA$ . Доведіть, що  $\triangle ABC = \triangle BAD$ .

Далі вчитель викликає до дошки «сильнішого» з учнів для розв'язання такої задачі:

**Задача.** В трикутниках  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$   $AB = A_1B_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ , точка  $D$  – середина сторони  $AC$ , точка  $D_1$  – середина сторони  $A_1C_1$ . Доведіть, що  $\triangle DBC = \triangle D_1B_1C_1$ .

### ***Урок “Третя ознака рівності трикутників”***

Урок слід розпочати з актуалізації опорних знань. Закінчіть речення:

1. Перша ознака рівності трикутників – це ознака рівності за...;
2. Друга ознака рівності трикутників – це ознака рівності за...;
3. Рівнобедреним називається трикутник, у якого...;
4. Кути при основі рівнобедреного трикутника...;
5. Медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи... .

Після проведення актуалізації опорних знань вчитель пропонує учням виконати таке завдання:

Побудуйте  $\triangle ABC$ , у якого:  $AB = 5\text{см}$ ,  $BC = 4\text{см}$ ,  $AC = 3\text{см}$ ; і  $\triangle A_1B_1C_1$  у якого:  $A_1B_1 = 5\text{см}$ ,  $B_1C_1 = 4\text{см}$ ,  $A_1C_1 = 3\text{см}$ . Виміряйте транспортиром всі кути побудованих трикутників.

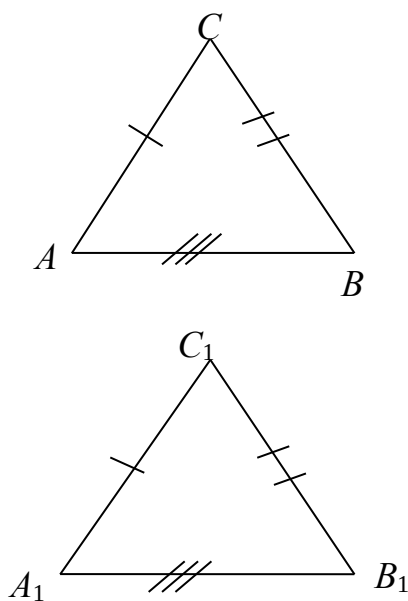
Вчитель: Що ви можете сказати про ці кути?

Учні: В обох трикутниках відповідні кути рівні.

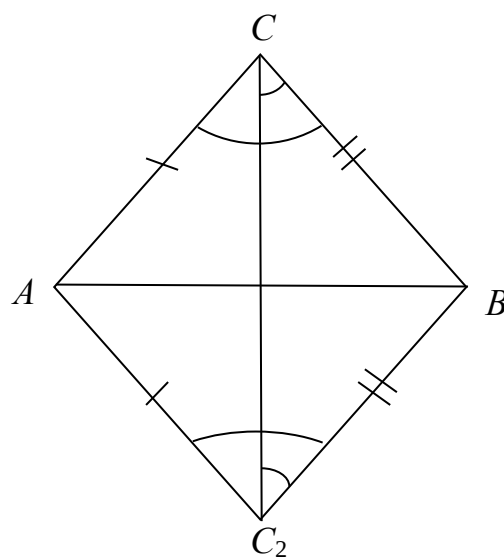
Після цього вчитель робить загальний висновок у вигляді наступної теореми.

**Теорема 6. (третя ознака рівності трикутників)**

Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі три кути рівні.



Мал. 24. а)



Мал. 24. б)

Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A_1B_1C_1$ ,  $AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$ ,  $A_1C_1 = AC$ .

Довести:  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

Доведення:

Вчитель: Нехай у трикутників  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$   $AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$  і  $AC = A_1C_1$  (мал. 24.а)). Доведемо,  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

Прикладемо трикутник  $A_1B_1C_1$  до трикутника  $ABC$  так, щоб вершина  $A_1$  сумістилася з  $A$ ,  $B_1$  – з  $B$ , а  $C_1$  і  $C$  виявилися по різні боки від прямої  $AB$ . Тоді  $\triangle A_1B_1C_1$  займе положення  $\triangle ABC_2$  (мал. 24.б)). Провівши відрізок  $CC_2$ , одержимо  $\triangle ACC_2$  і  $\triangle BC_2C$ . Якими є ці трикутники?

Учні: Ці трикутники рівнобедрені, бо  $AC = AC_2$  і  $BC = BC_2$ .

Вчитель: У цих трикутників кути при основах рівні:  $\angle ACC_2 = \angle AC_2C$ ,  $\angle BCC_2 = \angle BC_2C$ . Отже, рівні також кути  $ACB$  і  $AC_2B$ , тому  $\triangle ABC = \triangle ABC_2$ . За якою ознакою рівні ці трикутники?

Учні: За двома сторонами і кутом між ними, тобто, за першою ознакою рівності трикутників.

Вчитель: За побудовою  $\triangle ABC_2 = \triangle A_1B_1C_1$ . Таким чином,  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ , що й треба було довести.

На закріплення теореми вчитель пропонує учням дати відповіді на такі запитання:

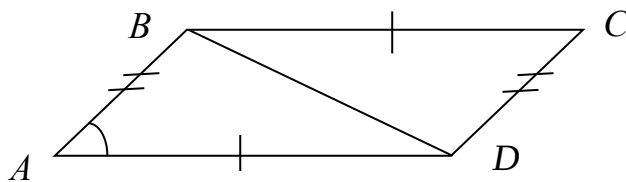
1. Як формулюється третя ознака рівності трикутників?
2. Що дано в теоремі?
3. Що потрібно знати?

Після чого переходять до розв'язування задач. Спочатку вчитель викликає до дошки «слабшого» учня, а далі пропонує розв'язувати задачі «сильнішим» учням. Один учень працює біля дошки, інші – за партами.

**Задача.**  $\triangle ABC = \triangle KPT$ . Знайдіть периметр трикутника  $KPT$ , якщо кожна сторона  $\triangle ABC$  дорівнює 5 см.

**Задача.** У трикутниках  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$   $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$ ,  $AC = A_1C_1 = 6$  см,  $BC = 2$  см,  $A_1B_1 = 7$  см. Доведіть рівність трикутників  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  і знайдіть периметр трикутника  $ABC$ .

**Задача.**  $AD = BC$ ,  $AB = CD$ ,  $\angle BAD = 30^\circ$ . Знайдіть  $\angle BCD$  (мал. 25).



Мал. 25

**Задача.** Доведіть рівність трикутників за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.

Наведемо зразок діагностувальної роботи для перевірки навчальних досягнень учнів 7 класу по темі «Трикутники»

#### Діагностувальна робота

|          |                   |        |       |       |
|----------|-------------------|--------|-------|-------|
| І рівень | Кількість завдань | 9 – 10 | 7 – 8 | 5 – 6 |
|          | Бали              | «3»    | «2»   | «1»   |

1. Яке з наведених тверджень є неправильним?
- а) у будь-якому трикутнику завжди можна провести три висоти;
  - б) у рівносторонньому трикутнику всі висоти рівні між собою;
  - в) у гострокутному трикутнику висота завжди є бісектрисою і медіаною;
  - г) висота трикутника є перпендикуляр, опущений з вершини трикутника на протилежну сторону.
2. При якій з наведених умов два трикутники є рівними?
- а) кут одного трикутника дорівнює куту другого трикутника;
  - б) два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого трикутника;
  - в) сторона і прилеглий до неї кут одного трикутника відповідно дорівнюють стороні і прилеглому до неї куту другого трикутника;
  - г) сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника відповідно дорівнюють стороні і двом прилеглим до неї кутам другого трикутника.
3. Яке з тверджень є неправильним?
- а) сума кутів трикутника  $180^\circ$ ;
  - б) з будь-якої точки, що не лежить на даній прямій, можна опустити на цю пряму перпендикуляр і тільки один;
  - в) зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів трикутника;
  - г) зовнішній кут трикутника більший від будь-якого внутрішнього, не суміжного з ним.
4. Якщо внутрішні кути трикутника пропорційні числам 2, 5, 8, то зовнішні його кути рівні:
- а)  $24^\circ$ ,  $60^\circ$  і  $96^\circ$ ;
  - б)  $84^\circ$ ,  $120^\circ$  і  $156^\circ$ ;
  - в)  $64^\circ$ ,  $110^\circ$  і  $146^\circ$ ;
  - г)  $95^\circ$ ,  $105^\circ$  і  $150^\circ$ .
5. Якщо у двох трикутниках  $ABC$  і  $KMP$  відомо, що  $KP = AC$ ,  $\angle K = \angle A$ ,  $\angle P = \angle C$ ,  $AB + BC = 19$  см, а периметр трикутника  $ABC$  – 24 см, то довжина сторони  $KP$  дорівнює:

а) 19 см;                      б) 6 см;                      в) 5 см;                      г) 12 см.

6. Знайдіть периметр трикутника  $KML$ , якщо  $\Delta KML = \Delta ABC$  і  $AB = 5$  м,  $BC = 3$  м,  $AC = 4$  м.

7. Зовнішній кут  $MAB$  при вершині  $A$  трикутника  $ABC$  дорівнює  $140^\circ$ . Чому дорівнює внутрішній кут при цій вершині?

8. Периметр трикутника  $ABC$  дорівнює 26 см. Знайдіть його сторони, якщо  $AC = 10$  см і  $BC = 3AB$ .

9. Один з кутів трикутника  $40^\circ$ , другий – на  $20^\circ$  більший. Знайдіть третій кут трикутника.

10. Кут між бісектрисою і висотою, проведеними з вершини найбільшого кута прямокутного трикутника, дорівнює  $14^\circ$ . Визначте гострі кути даного трикутника.

|           |                   |     |     |     |
|-----------|-------------------|-----|-----|-----|
| II рівень | Кількість завдань | 6   | 5   | 4   |
|           | Бали              | «6» | «5» | «4» |

1. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо його кут при вершині втричі більший від кута при основі.

2. У трикутнику  $ABC$  проведено медіану  $BD$ , причому  $\angle BDA = \angle BDC = 90^\circ$ . Чому дорівнює  $BC$ , якщо  $AB$  на 2 см менша від  $AC$ , а  $DC = 12$  см?

3. Зовнішні кути при двох вершинах трикутника відповідно дорівнюють  $110^\circ$  і  $130^\circ$ . Знайти градусну міру кута кожного із трьох внутрішніх кутів трикутника.

4. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 26 см. Знайти його сторони, якщо бічна сторона відноситься до основи як 5:3.

5. Прямокутні трикутники  $ABC$  і  $DBC$  з прямим кутом  $B$  мають рівні гіпотенузи завдовжки 10 см. Чому дорівнює  $AB$ , якщо  $\angle D = 60^\circ$ ?

6. У трикутнику  $ACD$  відрізок  $CK$  є його висотою і медіаною. Довести, що трикутник  $ACD$  – рівнобедрений з основою  $AD$ .

|            |                   |     |     |     |
|------------|-------------------|-----|-----|-----|
| III рівень | Кількість завдань | 5   | 4   | 3   |
|            | Бали              | «9» | «8» | «7» |

1. В рівнобедреному трикутнику  $MNK$  з основою  $MK$  зовнішній кут при вершині  $N$  дорівнює  $170^\circ$ . Знайдіть кути трикутника.

2. Доведіть, що два прямокутні трикутники рівні, якщо катети одного відповідно дорівнюють катетам другого.

3. Знайти довжини сторін рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 28 см і він більший від суми двох бічних сторін на 12 см.

4. У трикутнику  $ABC$  проведено бісектрису  $AL$ , причому  $\angle ALB = \angle ALC$ . Чому дорівнює  $\angle B$ , якщо  $\angle C$  на  $30^\circ$  менший від  $\angle A$ ?

5. Різниця двох зовнішніх кутів трикутника дорівнює  $36^\circ$ ; вони відносяться, як 9:7. Знайдіть кути трикутника.

|           |                   |      |      |      |
|-----------|-------------------|------|------|------|
| IV рівень | Кількість завдань | 4    | 3    | 2    |
|           | Бали              | «12» | «11» | «10» |

1. Бічна сторона рівнобедреного трикутника відноситься до основи як 9:4. Знайдіть периметр трикутника, якщо його основа менша від бічної сторони на 15 см.

2. Дві паралельні прямі перетинаються третьою прямою. Визначте величину кожного з утворених кутів, якщо зовнішні односторонні кути відносяться, як 4:5.

3. Знайти градусну міру кута трикутника, якщо він дорівнює півсумі градусних мір двох інших кутів.

4.  $BM$  і  $B_1M_1$  – відповідно медіани трикутників  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ .  
 $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$ ,  $BM = B_1M_1$ . Доведіть, що  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

Таким чином, використання розробленої нами методика при вивченні трикутників у 7 класі, відповідає чотирьохрівневому навчанню та сприяє кращому засвоєнню та запам'ятовуванню матеріалу. Дає можливість зацікавити учнів у навчанні, активізувати їх знання.

### 2.3. Експериментальна перевірка розробленої методики

Проаналізувавши різні методики щодо викладу даної теми та підручники з геометрії можна зробити висновок, що існуючі методичні системи недостатньо розроблені у зв'язку з переходом шкіл на чотирьохрівневе навчання та нові підручники для Нової української школи.

Тому нашою метою було провести дослідження в області впровадження нової методики вивчення трикутників у курсі планіметрії, та проаналізувати, як її впровадження впливає на навчальний процес.

Експериментальна перевірка розробленої методики проводилася в Присліпській гімназії Міжгірської селищної ради Хустського району Закарпатської області протягом проходження педагогічної практики 2023–2024 навчального року.

За експериментальну групу в сьомих класах було взято учнів 7–Б класу (вчитель – Форос Л.В.). Середній бал успішності в даному класі за минулий навчальний рік становив 5,4 бали.

За контрольну групу було взято учнів 7–А класу (вчитель – Форос Л.В.). Середній бал успішності складав 6,7 бали.

Вчителям було пояснено в чому полягає суть експерименту, які особливості навчання за розробленою методикою. Учні контрольного класу працювали за шкільною програмою та підручниками, а учні експериментального класу працювали за розробленою нами методикою. В кінці теми учням як експериментального класу, так і контрольного класу



було запропоновано діагностувальну роботу по темі «Трикутники» (див с. 51).

Учні цих класів отримали такі результати:

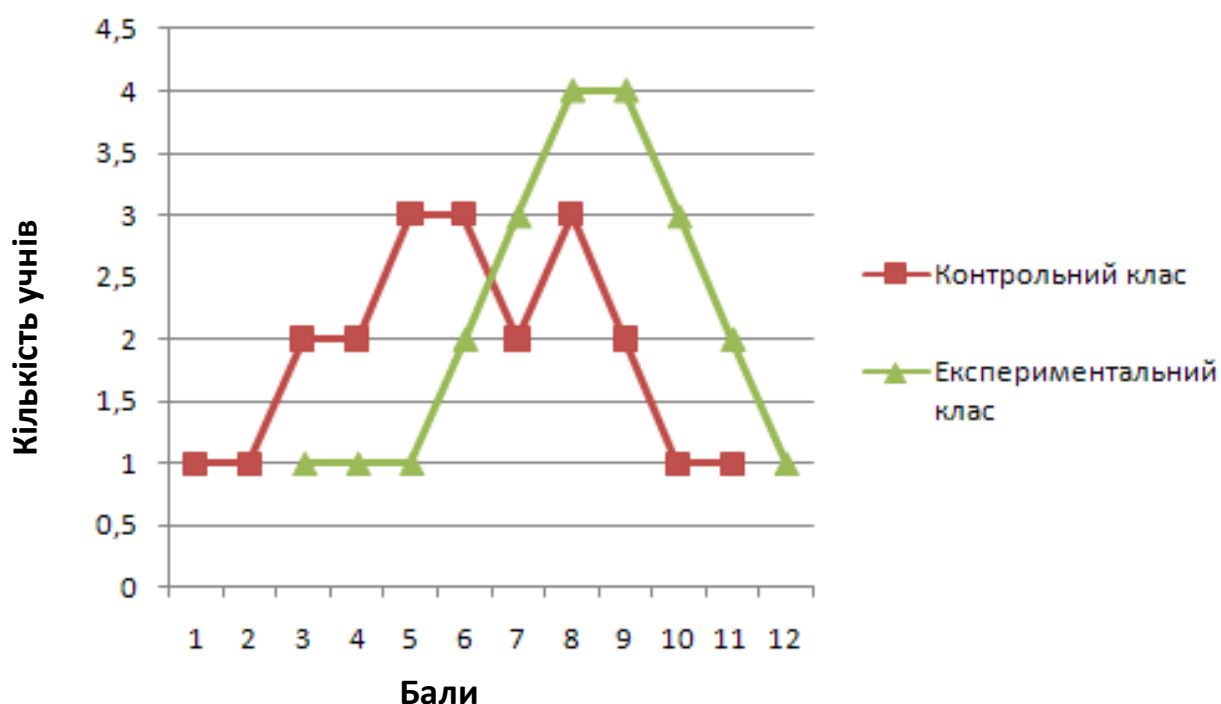
| Бали | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| А    | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1  | 1  |    |
| Б    |   |   | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 3  | 2  | 1  |

А – кількість учнів, що держали відповідні бали (в контрольному класі);

Б – кількість учнів, що одержали відповідні бали (в експериментальному класі).

Результати роботи зображено графічно:

### Контрольна робота по темі “Трикутники”



З одержаних графіку випливає, що дана методика є ефективною, адже, в експериментальному класі зросла кількість вищих балів в порівнянні з контрольним класом.

Для того, щоб з'ясувати точно, як впливає застосування даної методики у викладанні геометрії на формування математичних знань, застосуємо метод кореляції на прикладі даних класів.

Для цього визначимо коефіцієнт кореляції, який є мірою цілісності розглянутого зв'язку. Чим ближчий коефіцієнт до 1, тим ближча залежність між застосуванням розробленої методики та підтвердженням відповідних рівнів знань. Якщо зв'язок між ознаками відсутній, то коефіцієнт кореляції буде рівний або близький до 0.

Обчислимо коефіцієнт кореляції за результатами діагностувальної роботи на тему «Трикутники».

Коефіцієнт визначається за формулою  $r = \frac{SP_{xy}}{\sqrt{SS_x \cdot SS_y}}$ ;

де  $SS_x$  – сума квадратів відхилень  $SS_x = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}$ ;

$SS_y$  – сума квадратів відхилень  $SS_y = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{N}$ ;

$SP_{xy}$  – сума скоректованих добутків  $SP_{xy} = \sum xy - \frac{\sum x \cdot \sum y}{N}$ ;

де  $N$  – кількість учнів.

Створимо допоміжну таблицю для розрахунків:

| $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ | $x_i y_i$ |
|-------|-------|---------|---------|-----------|
| 1     | –     | 1       | –       | 1         |
| 2     | –     | 4       | –       | 2         |
| 6     | 3     | 36      | 9       | 18        |
| 8     | 4     | 64      | 16      | 32        |
| 15    | 5     | 225     | 25      | 75        |
| 18    | 12    | 324     | 144     | 216       |
| 14    | 21    | 196     | 441     | 294       |
| 24    | 32    | 576     | 1024    | 768       |
| 18    | 36    | 324     | 1296    | 648       |
| 10    | 30    | 100     | 900     | 300       |
| 11    | 22    | 121     | 484     | 242       |
| –     | 12    | –       | 144     | 12        |

|                            | Кількість учнів, $N$ | Загальна кількість балів | Допоміжні розрахунки |            |            |
|----------------------------|----------------------|--------------------------|----------------------|------------|------------|
|                            |                      |                          | $\sum xy$            | $\sum x^2$ | $\sum y^2$ |
| В контрольному класі       | 21                   | 127                      | 2608                 | 1971       | –          |
| В експериментальному класі | 22                   | 177                      |                      | –          | 4483       |

Знаходимо суму квадратів відхилень:  $SS_x = 1203$ ;  $SS_y = 3059$ .

Сума скоректованих добутків  $SP_{xy} = 2085$ .

Коефіцієнт  $r = 0,97$ .

Визначивши коефіцієнт кореляції, бачимо, що він близький до одиниці. А це свідчить про те, що існує тісний взаємозв'язок між застосуванням розробленої методики вивчення трикутників та досягненням учнями відповідних рівнів знань. Тому, з впевненістю можна говорити про те, що впровадження даної методики у шкільний курс геометрії досить доцільне. Адже це підвищило в учнів інтерес до математики та успішного засвоєння навчального матеріалу.

## ВИСНОВКИ

Розв'язання завдань загальної освіти значною мірою залежить від створення і використання нових методичних систем, які б максимально враховували індивідуальні інтереси і здібності учнів, сприяли їх всебічному розвитку.

Першим кроком у створенні таких систем навчання математики стали обов'язкові результати навчання. Об'єктивною реальністю, яка зумовила цю необхідність, є різний ступінь готовності учнів до вивчення математики. Відмінності виявляються, насамперед, у різному темпі оволодіння навчальним матеріалом, тобто у різній кількості сприймань нової математичної інформації, необхідної для засвоєння, або кількості вправ, необхідних для вироблення вмінь розв'язувати певну задачу.

Варто зазначити, що найкращі результати у засвоєнні геометрії досягаються при умові одночасного використання в процесі навчання дидактичних матеріалів і діагностувальних рівневих робіт:

- учень, розв'язуючи запропоновані задачі, отримує інформацію про рівень складності кожного завдання. Він сам стежить за тенденцією зміни свого розвитку, визначає досягнутий ним рівень. Якщо учень не може розв'язати задачі бажаного рівня – це сигнал для нього про необхідність додаткових занять, консультацій;

- звичайна робота змушує учня розв'язати цілу низку завдань, частина з яких є елементарними. Однокрокові задачі не дають можливості проявити високий рівень знань, однак вимагають значних затрат часу. Запропоновані нами рівневі контрольні роботи дозволяють раціонально використати час і об'єктивно оцінити навчальні досягнення кожного учня.

Працюючи над даною магістерською роботою, ми вивчали та аналізували різну методичну літературу з питань, що конкретно стосуються теми «Методика вивчення трикутників в курсі геометрії 7 класу».

В курсі математики провідна роль належить не тільки поясненню теоретичного матеріалу, а й перевірці знань учнів, тому існує необхідність

створення не тільки методики розробки даних тем, а й рівневої перевірки знань учнів.

В результаті проведення дослідження ми встановили, що:

- 1) в методичній літературі не достатньо розроблена методика вивчення трикутників у курсі планіметрії 7 класу;
- 2) навчальні підручники не повністю відповідають рівневому навчанню школярів;
- 3) не розроблені рівневі завдання.

Для усунення цих недоліків, ми розробили методику, яка максимально враховує індивідуальні інтереси і здібності учнів, сприяє їх всебічному розвитку, забезпечує технологію організації навчально-виховного процесу, а також відповідні завдання, які відповідають чотирьохрівневому навчанню.

Запропонована методика дозволить вчителю здійснювати навчання учнів геометрії у 7 класах, допоможе знайти той спосіб організації навчального процесу, який буде оптимальним для учнів даного класу, школи, а логічно обґрунтований вибір кількості задач зможе ліквідувати “задачний дефіцит”.

Для перевірки розробленої методики був проведений експеримент, який свідчить про існування тісного зв'язку між застосованою методикою до пояснення теоретичного матеріалу та досягненнями учнями відповідного рівня знань.

Результати експериментального дослідження показали, що використання даної методики в школі забезпечує більш високий рівень засвоєння учнями навчального матеріалу, сприяє розвитку в учнів стійкого інтересу до вивчення математики, розвиває логічне мислення, прагнення до пошуку, виховує потребу в самовдосконаленні, прагненні до самопізнання. Тому можна говорити про доцільність впровадження такої методичної системи в навчальний процес.

## Список використаних джерел

1. Адамар Ж. Елементарна геометрія. Планіметрія. Посібник для учителів середньої школи. Київ. Радянська школа. 1953. 574 с.
2. Бевз Г.П. Методика викладання математики. Київ. Вища школа. 1989. 368 с.
3. Бевз Г.П. Моя методика математики. Тернопіль. Навчальна книга. Богдан, 2021. 584 с.
4. Бевз Г.П. Геометрія чотирикутника. Харків. Основа. 2003. 80 с.
5. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Васильєва Д.В., Владімірова Н.Г. Геометрія. Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Київ. Видавничий дім «Освіта». 2024. 192 с.
6. Бевз В., Кузьменко В. Розвиток індивідуальності дитини через індивідуальне навчання математики. *Математика в школі*. 2009. №3. – С. 16 – 19.
7. Бурда М.І. Вивчення геометрії у 7 класі. Методичний посібник. Київ. Радянська школа. 1984. 112 с.
8. Бурда М.І. Теорія шкільного підручника з математики як предмет методичного дослідження. *Математика в школі*. 1999. №2. С. 4 – 7.
9. Бурда М. І., Волошена В. В., Тарасенкова Н. А. Практикум з геометрії для 7–9 класів [електрон. вид.] : збірник практико-орієнтованих задач. Київ: УОВЦ «Оріон», 2024. 152 с.
10. Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. Геометрія. Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Київ. Видавничий дім «Оріон». 2024. 208 с.
11. Галайко Р.П. Ознаки рівності трикутників. *Математика*. 2003. №1. С. 6 – 10.
12. Забранський В. Організація письмових контрольних та самостійних робіт при диференційованому навчанні математики. *Математика в школі*. 2000. №5. С. 30 – 33.

13. Коротка Н.І. Думки з приводу оцінювання / Н.І. Коротка // Математика. – 2003. – №13. – С. 1 – 2.
14. Кушнір І.А. Трикутник у задачах. Київ. Либідь. 1994. 104 с.
15. Мала Н. Розвиток мислення учнів на уроках математики. *Математика в школі*. 2002. №5. С. 26 – 27.
16. Модельні навчальні програми «Геометрія. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти. <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/heometriia/>
17. Методика компетентісно орієнтованого навчання математики в ліцеї на рівні стандарту : методичний посібник. [Електронне видання] / Васильєва Д. В., Вашуленко О. П., Волошена В. В. Київ : КОНВІ ПРІНТ, 2021. 175 с.
18. Ненхо Т. Вивчення шкільної геометрії як засіб розвитку різних видів мислення учнів. *Математика в школі*. 2003. №2. С. 34 –35.
19. Омел'яненко В.О. Сума кутів трикутника. *Математика*. 2003. №11. С.14 – 16.
20. Паньков В.Г. Методи розв'язування задач на побудову (методичний посібник). Кам'янець-Подільський. 1996. 64 с.
21. Самостійні та тематичні контрольні роботи з алгебри та геометрії. 7 клас : навч. посібн. Вид. 3-є, перероб. / О.С. Істер. Тернопіль: Навчальна книга. Богдан, 2018. 112 с.
22. Слєпкань З. Формування творчої особистості учня в процесі навчання математики. *Математика в школі*. 2003. №3. С. 7 –13.
23. Сморжевський Л.О. Липницька І.В. Геометрія 7 – 9. Дидактичні матеріали та тематичні перевірочні роботи для рівневого навчання. Кам'янець-Подільський. Абетка-Нова. 2002. 104 с.
24. Таранська С.І. Сума кутів трикутника. *Математика в школі*. 2003. №1. С.13 – 15.
25. Цукренко С. Дидактичні матеріали. *Математика в школі*. 2002. №2. С. 4 – 8.

26. Яцкова Т. Про розвиток евристичного мислення у школярів.  
*Математика в школі.* 2001. №4. С. 14 – 18.