

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Факультет фізики, математики, економіки та інноваційних технологій
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

завідувач кафедри математики та економіки

кандидат педагогічних наук, доцент

_____ Т.І.Війчук «__»_____ 2024 р .

**Методика вивчення геометричних тіл,
об'ємів та площ поверхонь
в курсі математики 11 класу на рівні стандарту**

Спеціальність: 014 «Середня освіта (Математика)»

**Магістерська робота
на здобуття кваліфікації – вчитель математики**

Автор роботи Крижалко Оксана Миколаївна _____
підпис

**Науковий керівник кандидат педагогічних наук,
доцент Гордієнко Ірина Валеріївна** _____

підпис

Дрогобич, 2024

Захист магістерської роботи

Методика вивчення геометричних тіл, об'ємів та площ поверхонь в курсі математики 11 класу на рівні стандарту

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

дата

Голова ДЕК _____

підпис

прізвище, ім'я

Секретар ДЕК _____

підпис

прізвище, ім'я

**Анотація. Крижалко Оксана. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ
ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ, ОБ'ЄМІВ ТА ПЛОЩ ПОВЕРХОНЬ В КУРСІ
МАТЕМАТИКИ 11 КЛАСУ НА РІВНІ СТАНДАРТУ**

У даній роботі проаналізовано дидактичну, психологічну та методичну літературу по темі дослідження. З'ясовано, в якій мірі методична література, підручники та посібники задовольняють умови використання такої методики. Розроблено методику вивчення геометричних тіл, об'ємів та площ поверхонь в курсі математики 11 класу на рівні стандарту. Експериментально перевірено ефективність використання розробленої методики.

**Annotation. Kryzhalko Oksana. METHODS OF STUDYING GEOMETRIC
BODIES, VOLUMES AND SURFACE AREAS IN THE 11TH CLASS
MATHEMATICS COURSE AT THE STANDARD LEVEL**

Didactic, psychological and methodical literature on the topic of the study was analyzed in this work. It was found out to what extent methodical literature, textbooks and manuals satisfy the conditions for using this method. The methodology for the study of geometric bodies, volumes and surface areas in the 11th grade mathematics course at the standard level has been developed. The effectiveness of the use of the developed methodology was experimentally verified.

ЗМІСТ

Вступ.....	5
РОЗДІЛ I. Аналіз літератури по темі дослідження	8
1.1. Дидактична суть рівня стандарту змісту освіти	8
1.2. Аналіз психологічної, дидактичної, методичної літератури по темі	13
1.3. Аналіз викладу даного матеріалу в діючих підручниках.....	15
РОЗДІЛ II. Методика вивчення теми «Геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь тіл»	24
2.1. Методика вивчення теми «Циліндр і призма».....	25
2.2. Методика вивчення теми «Конус і піраміда»	32
2.3. Методика вивчення теми «Куля, сфера. Площина, дотична до сфери»	44
2.4. Експериментальна перевірка розробленої методики	52
Висновки	57
Список використаних джерел.....	59

Вступ

Упровадження рівневого навчання у старшу школу дійсно є важливим етапом реформування освітнього процесу. Це передбачає оновлення змісту навчальних програм, розробку нових підручників і навчально-методичних посібників, а також впровадження сучасних технологій і методів навчання.

Планування освіти є одним із найважливіших її рівнів. Системний підхід до планування навчання з предмета передбачає ієрархію планувань: загальне, тематичне, модульне, блочне, поурочне планування тощо. Важливо при цьому забезпечити наступність навсїх етапах планування.

Навчання математики, як і інших навчальних дисциплїн, виконує дві основні функції: загальноосвітню і професійно-орієнтуючу. Ці функції гармонійно поєднуються в контексті гуманістичної парадигми освіти, що ставить на меті становлення особистості, її розвиток, соціалізацію та професійне самовизначення. Впровадження диференціації навчання є ключовим засобом узгодження загальноосвітньої і професійно-орієнтуючої функцій. Це дозволяє забезпечити індивідуальний підхід до кожного учня, сприяти його всебічному розвитку і підготувати до майбутньої професійної діяльності. Таким чином, основним завданням навчання є гармонійне поєднання цих функцій для досягнення стратегічних цілей освіти.

Розвиток просторового мислення учнів є важливим аспектом їхнього загального інтелектуального розвитку, особливо у контексті навчання математики, зокрема геометрії. Просторове мислення допомагає учням уявляти, аналізувати та опрацьовувати об'єкти в тривимірному просторі, що є необхідним для свідомого засвоєння стереометрії та інших розділів математики.

Навчання математики в середніх загальноосвітніх закладах ґрунтується на чотирьох рівнях складності: стандартному, академічному, профільному та поглибленому. Учні, які ще не визначилися з майбутньою спеціалізацією, вивчають математику на академічному рівні.

Для кожного з чотирьох рівнів навчання математики розроблена окрема

навчальна програма та підібрані відповідні підручники. Викладачі математики в старших класах використовують підручники, затверджені Міністерством освіти і науки України, але для ефективного викладання предмета на кожному рівні також необхідна відповідна методологія та система методичних розробок.

Це зумовило вибір теми нашого дослідження **„Методика вивчення геометричних тіл, об’ємів та площ поверхонь в курсі математики 11 класу на рівні стандарту”**. В підручниках міститься теоретичний матеріал курсу, а також задачі для його закріплення. Методичні ж матеріали не в повній мірі дозволяють реалізувати високу продуктивність викладу матеріалу. Методика старіє, отже виникає потреба її оновлювати.

У шкільному курсі геометрії вивчення геометричних тіл має ключове значення для розвитку просторового мислення учнів. Ця тема дозволяє учням наочно уявляти тривимірні об’єкти, встановлювати кількісні відношення між ними та застосовувати отримані знання в реальному житті. Вивчення геометричних тіл допомагає інтегрувати знання з планіметрії та стереометрії, підсумовуючи раніше вивчені теми.

Цей тісний взаємозв’язок з минулим має особливе значення у методичному відношенні.

Аналіз психолого-педагогічної літератури свідчить про те, що диференціація навчання, як загальна педагогічна задача, не є новою ні для вітчизняної, ні для зарубіжної школи. Важливо зазначити, що проблеми рівневої диференціації навчання висвітлювалися багатьма відомими дидактиками та методистами: Ананченко К.О., Голік Л., Горбач І., Гусєв В.А., Ісак Н.К., Ковчин Н.А., Купріянович В.В., Левша М.М., Логачевська С.П., Оганесян В.А., Рабунський Е.С., Рибніков К.А., Сікорський П.І., Сісецький П.П., Слєпкань З.І., Яценко С. Н. та інші.

Проте не дивлячись на велику кількість робіт про диференціацію навчання, ця актуальна проблема залишається мало розробленою.

Об’єктом дослідження є процес навчання стереометрії в 11 класі на рівні стандарту.

Предметом дослідження є геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь тіл..

Мета дослідження полягає в тому, щоб розробити методику вивчення теми «Геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь тіл» у загальноосвітніх школах, де вивчають математику на рівні стандарту, розробити систему вправ та дидактичних матеріалів.

Для досягнення мети дослідження були виконані наступні завдання:

- Обґрунтовано значення досліджуваної теми в курсі стереометрії.
- Проаналізовано ступінь відповідності психолого-методичної, дидактичної літератури, а також підручників з математики потребам чотирьохрівневого навчання з досліджуваної теми.
- Розроблено методику вивчення теми «Геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь тіл».
- Експериментально доведено ефективність розробленої методики.

Експериментальна перевірка розробленої методики проводилась у Новоставській гімназії Жовтанецької сільської ради Львівського району. Результати дослідження доповідалися на міжнародній науково-практичній студентсько-викладацькій конференції «Актуальні проблеми сучасної науки» у Дрогобицькому державному педагогічному університеті імені Івана Франка.

РОЗДІЛ I. Аналіз літератури по темі дослідження

1.1. Дидактична суть рівня стандарту змісту освіти

Для успішної участі в сучасному суспільному житті особистість повинна володіти певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосування до розв'язання практичних задач. Це є важливою складовою освіти, оскільки математична підготовка потрібна не тільки для вивчення багатьох предметів у загальноосвітній школі, але й для задоволення вимог сучасного ринку праці та подальшої професійної освіти. Тому одним з головних завдань курсу математики є забезпечення умов для досягнення кожним учнем практичної компетентності.

Практична компетентність передбачає, що випускник загальноосвітнього навчального закладу [2]:

- вміє будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, задач, пов'язаних з ними, за допомогою математичних об'єктів, відповідних математичних задач;
- вміє оволодівати необхідною оперативною інформацією для розуміння постановки математичної задачі, її характеру й особливостей; уточнювати вихідні дані, мету задачі, знаходити необхідну додаткову інформацію, засоби розв'язання задачі; переформулювати задачу; розчленовувати задачі на складові, встановлювати зв'язки між ними, складати план розв'язання задачі; вибирати засоби розв'язання задачі, їх порівнювати і застосовувати оптимальні; перевіряти правильність розв'язання задачі; аналізувати та інтерпретувати отриманий результат, оцінювати його придатність із різних позицій; узагальнювати задачу, всебічно її розглядати; приймати рішення за результатами розв'язання задачі;
- володіє технікою обчислень, раціонально поєднуючи усні, письмові, інструментальні обчислення, зокрема наближені;
- вміє проектувати і здійснювати алгоритмічну та евристичну діяльність на математичному матеріалі;
- вміє працювати з формулами (розуміти змістове значення кожного

елемента формули, знаходити їх числові значення при заданих значеннях змінних, виражати одну змінну через інші і т. п.);

- вміє читати і будувати графіки функціональних залежностей, досліджувати їх властивості;
- вміє класифікувати і конструювати геометричні фігури на площині й у просторі, встановлювати їх властивості, зображати просторові фігури та їх елементи, виконувати побудови на зображеннях;
- вміє вимірювати геометричні величини на площині й у просторі, які характеризують розміщення геометричних фігур (відстані, кути), знаходити кількісні характеристики фігур (площі та об'єми);
- вміє оцінювати шанси настання тих чи інших подій, міру ризику при прийнятті того чи іншого рішення, вибирати оптимальне рішення.

Практична компетентність є важливим показником якості математичної освіти та природничої підготовки молоді. Вона свідчить про готовність молоді до повсякденного життя, суспільної діяльності та оволодіння професійною освітою. Формування навичок застосування математики є однією з головних цілей викладання цього предмета, вміння використовувати математичні знання для вирішення практичних задач у повсякденному житті, таких як фінансове планування, вимірювання та оцінка ситуацій. Математика розвиває вміння аналізувати інформацію, робити висновки та приймати обґрунтовані рішення. Математична підготовка є основою для успішного навчання в багатьох галузях, особливо в науці, техніці, інженерії та математиці (STEM).

Забезпечення прикладної спрямованості викладання математики є ключовим для формування стійких мотивів до навчання взагалі і до навчання математики зокрема. Використання методу математичного моделювання, систематичне застосування практичних задач і проєктів, а також адекватна система контролю сприяють розвитку практичної компетентності учнів. Це допомагає підготувати їх до реальних викликів у житті та професійній діяльності, забезпечуючи тим самим високий рівень математичної освіти.

Встановлення міжпредметних зв'язків між математикою та іншими

предметами, особливо природничими науками та інформатикою, є важливим для забезпечення прикладної спрямованості навчання. Використання комп'ютерів у навчанні математики дозволяє проводити математичні експерименти, практичні заняття, забезпечувати інформаційну підтримку, візуалізувати математичні процеси та здійснювати дослідження. Це сприяє формуванню стійких мотивів до навчання, розвитку математичних навичок та підготовці молоді до життя в інформаційному суспільстві.

Програма навчання математики в старшій школі передбачає два підходи: сумісне та роздільне вивчення геометрії і алгебри з початками аналізу. Обидва підходи до вивчення математики в старшій школі мають свої переваги. Вибір підходу залежить від мети навчання, особливостей контингенту учнів та умов навчального процесу. Сумісне вивчення сприяє цілісності знань та інтеграції предметів, що важливо для загальнокультурної освіти. Роздільне вивчення дозволяє уникнути перерв у навчанні та зосередитись на глибокому вивченні окремих розділів, що є корисним для спеціалізованої підготовки. Оптимальним може бути комбінований підхід, який враховує переваги обох методів і адаптується до конкретних умов навчання та потреб учнів.

Тема “Геометричні тіла. Об’єми і площі поверхонь геометричних тіл” є центральною у стереометричній підготовці учнів, оскільки охоплює основні види геометричних тіл та їхні властивості. Формування навичок конструювання та класифікації тіл і їх поверхонь є важливим аспектом цієї теми. Використання конструктивних означень дозволяє встановити спільність між різними типами геометричних тіл, що сприяє глибшому розумінню їхніх властивостей. Практичні заняття, моделювання та розв'язання задач допомагають закріпити знання та розвинути просторове мислення, що є необхідним для подальшого навчання та використання математичних знань у реальному житті.

Вивчення теми про об’єми і площі поверхонь геометричних тіл включає розгляд різних методів обчислення, які мають практичне значення. Один із таких методів - метод розбиття, що є ефективним і зручним для обчислення об’ємів і площ поверхонь складних тіл. Використання методу розбиття та

аналогій з плоскими фігурами, а також ідеї розгортки, сприяє засвоєнню матеріалу учнями та допомагає їм краще розуміти та обчислювати об'єми і площі поверхонь геометричних тіл. Ці підходи забезпечують практичність та зрозумілість вивчення теми і відображають її практичне значення.

Так, послідовність тем у курсі "Математика" важлива не лише для відповідності Державному стандарту, але й для забезпечення розгляду всіх змістових аспектів навчального матеріалу. Рівнева диференціація навчання дозволяє кожному учневі отримати необхідний рівень підтримки та розвитку відповідно до його індивідуальних можливостей та потреб.

У старших класах ефективно використовувати лекційно-семінарську форму проведення занять, оскільки вона дозволяє поєднувати теоретичне навчання з практичними вправами та обговоренням матеріалу. При цьому важливо залучати учнів до самостійної роботи, що сприяє їхньому активному засвоєнню матеріалу та розвитку аналітичного мислення.

Практичні заняття можуть бути спрямовані на розвиток навичок розв'язання конкретного класу задач. Вони можуть включати колективні обговорення ідеї та алгоритму розв'язання, а потім індивідуальне виконання вправ учнями з підтримкою вчителя. Це дозволяє кожному учневі зрозуміти і застосувати матеріал під своїм рівнем розуміння та потребами.

Загалом, такий підхід сприяє ефективному навчанню, розвитку критичного мислення та підготовці учнів до подальшого успішного життя.

Так, система самостійної роботи учнів є важливою складовою ефективного навчання математики в старшій школі. Застосування різноманітних завдань, які спонукають учнів до самостійної діяльності, сприяє їхньому активному засвоєнню матеріалу та розвитку пізнавальних навичок.

Контрольні запитання, завдання та тести з прикладним характером стимулюють учнів до самостійного мислення та застосування знань у практичних ситуаціях. Вони дозволяють перевірити рівень засвоєння матеріалу і розуміння концепцій, а також розвивають критичне мислення та аналітичні навички.

Крім того, контрольні запитання спрямовані на розвиток не лише здатності учнів до відтворення знань, але й їх здатності аналізувати та узагальнювати інформацію, порівнювати різні поняття та застосовувати їх у різних контекстах. Це сприяє глибокому засвоєнню матеріалу та розвитку креативного мислення учнів. Постійна діагностика навчальних досягнень є важливою складовою ефективного навчання. Початок вивчення кожної теми з діагностичної роботи дозволяє вчителю зрозуміти рівень підготовки учнів та їхніх потреб, а також виявити проблемні аспекти, які потребують додаткової уваги та підтримки. На основі результатів діагностики вчителю стає зрозумілим, які аспекти матеріалу вже засвоєні учнями, а які вимагають додаткового пояснення та вправ. Це дозволяє індивідуалізувати навчальний процес, враховуючи потреби кожного учня.

Діагностика також стимулює учнів до самопізнання та відповідального ставлення до навчання, оскільки вони можуть бачити свій прогрес та розуміти, над чим ще потрібно попрацювати.

Отже, впровадження постійної діагностики навчальних досягнень учнів допомагає покращити якість навчання та забезпечити більш ефективний навчальний процес.

Запровадження індивідуальних завдань на завершальному етапі вивчення теми є надзвичайно важливим для забезпечення глибокого та усвідомленого засвоєння матеріалу. Такі завдання допомагають учням систематизувати знання, охопити всі аспекти теми і закріпити вивчений матеріал.

Варто планувати виконання індивідуальних завдань, які передбачають ознайомлення як з розвитком математики в історичному аспекті (наприклад, з теми “Скільки існує геометрій?”) так і змістовних (“Перспектива”, “Математика і соціологія”).

Модульне проектування навчального процесу є дійсно ефективним підходом до вдосконалення навчання, особливо в старшій школі. Воно забезпечує більш глибоке розуміння матеріалу та розвиток різних компетенцій у учнів.

1.2. Аналіз психологічної, дидактичної, методичної літератури

Досліджувана тема характерна тим, що в результаті її вивчення в учнів повинна бути добре розвинута просторова уява. Допомогти у її формуванні зможе застосування інтерактивних технологій під час пояснення нового матеріалу.

Серед робіт, присвячених питанням розвитку просторового мислення при навчанні математики, слід відзначити роботи В. А. Крутецкого, Д. Пойа, Л.М. Фрідмана, Є. М. Турецького Б.Г. Ананьева, П.Я. Гальперіна, А.В. Запорожець, А.Н. Леонтьева, Н.А. Менчинська та багатьох інших. Велику увагу проблемі розвитку просторового мислення учнів під час навчання математики та інших предметів приділялася в дослідженнях з методики математики 1950-70х років (Н.Ф. Четверухін, А.І. Фетисов, Г.Г. Маслова, А.М. Лопозрк, Х.Б. Абугова, Р.С. Черкасов та ін.) Ця проблема має значний вплив на викладання геометрії, особливо в аспекті розвитку просторового мислення учнів. Посилення логічної складової та прагнення побудови курсу на строго дедуктивній основі призвело до деяких негативних наслідків, серед яких найважливішим є зниження уваги до розвитку просторового мислення. Для ефективного навчання геометрії необхідно підтримувати баланс між розвитком логічного та просторового мислення. Підходи, які передбачають інтеграцію практичних завдань, використання сучасних технологій та індивідуалізацію навчання, допоможуть підвищити результати навчання та зробити курс геометрії більш цікавим і корисним для учнів. Реалізація цих пропозицій сприятиме формуванню всебічно розвинених математичних компетенцій, необхідних для успішного життя в сучасному суспільстві.

Теоретично обґрунтована і експериментально перевірена методична система диференційованого формування прийомів евристичної діяльності старшокласників на уроках стереометрії описана Ю.Л.Сморжевським [24]. Т. Дейниченко виявив деякі особливості диференціації навчального матеріалу по в умовах групової взаємодії школярів. Досліджувала використання багаторівневих завдань при організації диференційованого контролю

навчальних досягнень учнів І.П.Упанова. Диференційованому підходу до навчання комп'ютерних технологій у навчальних закладах присвячені роботи Шугайло Г.В. та Красюк О.М.

Незважаючи на значну кількість досліджень, присвячених диференціації навчання, ця актуальна проблема залишається недостатньо розробленою, особливо в контексті чотирьохрівневої системи навчання в старшій школі на прикладі теми «Геометричні тіла».

Розумова діяльність учнів при вивченні тем «Многогранники» та «Тіла обертання» має велике значення, оскільки саме ці теми сприяють розвитку просторової уяви, розумінню властивостей геометричних тіл та їх елементів. Вивчення цих тем надає учням можливість досягнути кількісні відношення між різними геометричними об'єктами.

Вивчення даної теми потребує розв'язанню цілої низки завдань та задач. У багатьох психологічних дослідженнях розглядаються питання структури, змісту задач, їх типології (Л.М.Фрідман, В.А.Крутецький). Вони пропонували розділити задачі по рівнях, при розв'язуванні перших задач з відповідних тем пропонувалося використовувати готові ілюстрації, надалі ж учні будували малюнки до задач самостійно.

Чимало психологів писали про розвиток просторової уяви у школярів і в результаті ми маємо цілу схему психологічних прийомів для розвитку просторового мислення. В основу цієї схеми покладена ідея розвитку просторової уяви в учнів шляхом розв'язання задач з геометрії, які провокували розширення просторових об'єктів, але перед побудовою цих об'єктів на дошці учні уявляють і усно описують з точністю до деталей.

Отже, аналіз психолого-дидактичної та методичної літератури показав, що проблема розвитку просторового мислення в учнів старших класів є актуальною та досліджуваною як вітчизняними, так і закордонними науковцями. Ідеї та концепції, запропоновані психологами та дидактами, можуть бути ефективно використані для навчання математики, але для цього їх потрібно адаптувати до умов нової чотирирівневої диференціації навчання. Це

вимагає розробки нової методики, яка враховуватиме специфіку різних рівнів підготовки учнів.

1.3. Аналіз викладу даного матеріалу в діючих підручниках

Геометрія в 11 класі повинна формувати у дітей просторову уяву, повинна навчати дітей сприймати світ оцінюючи просторові форми і відношення між ними.

Щороку Міністерство освіти і науки України затверджує перелік підручників для використання в навчальному процесі. У своїй роботі ми опиралися на підручник [3], якого немає у даному переліку, але на нашу думку він заслуговує уваги для повноти дослідження теми.

Підручник «Математика. 11 клас» є продовженням підручника «Математика. 10 клас» для старшої школи, де навчання математики здійснюється за програмою рівня стандарту. Зміст підручника і послідовність викладення матеріалу повністю відповідають цій програмі. Відповідно до кількості тем, що вивчаються в 11-му класі, підручник містить сім розділів, які поділено на параграфи, а деякі з них і на пункти.

Програма рівня стандарту з математики націлена на завершення формування уявлень учнів про математику як важливий елемент загальнолюдської культури. При цьому вона не передбачає, що випускники школи обов'язково будуть широко використовувати математику у своїй подальшій професійній діяльності. Проте, навчання математики на цьому рівні не є неповноцінним або урізаним. Воно має забезпечити повноцінний розвиток когнітивних і афективних сфер учнів, створити умови для формування математичної грамотності кожного учня.

На рівні стандарту головною функцією навчання математики є загальноосвітня. Це означає, що програма повинна сприяти становленню гуманітарної культури особистості, формуванню уявлень про математику як форму опису та метод пізнання дійсності, а також розумінню її ролі у прогресі суспільства. Важливим аспектом є використання можливостей образного

мислення учнів у процесі навчання.

Цей рівень навчання є прийнятним для різних профілів, зокрема суспільно-гуманітарного, філологічного, художньо-естетичного, спортивного напрямків, а також для деяких технологічних профілів. Таким чином, програма рівня стандарту забезпечує повноцінне і багатогранне навчання математики, яке сприяє загальному розвитку учнів і формуванню їхньої математичної грамотності, незалежно від їхньої подальшої професійної орієнтації.

Однак, у деяких підручниках простежується зниження складності задач, зменшення уваги до громіздких перетворень, нестандартних прийомів розв'язання рівнянь, нерівностей, їхніх систем, дослідження функцій, ускладнених геометричних конструкцій. Разом з тим, це передбачає вилучення якогось навчального матеріалу, передбаченого програмою (за винятком тих навчальних питань, які програмою зазначені як необов'язкові, наприклад, похідна складеної функції, розміщення, перестановки, комбінації тощо), переходу до рецептурного стилю викладення і навчання, створення та використання системи задач, в якій були б відсутні важливі для розвитку та навчання учнів типи завдань.

Відмінність полягає в тому, що, можливо, у деяких випадках зменшилося застосування формально-логічного рівня обґрунтувань. Підручник з математики, розрахований на програму рівня стандарту, має забезпечити загальнокультурне спрямування навчання. Це стосується усіх складових навчального матеріалу: означень, тверджень, засобів їх обґрунтування, системи задач, контрольних запитань тощо.

Збережено структурування кожного навчального модуля, яка відповідає психолого-педагогічним закономірностям засвоєння навчального матеріалу. Матеріал кожного навчального модуля розбито на дві частини, які позначені літерами. Ці позначення є смисловими, вони відображають складність навчального матеріалу, його значущість і етап проходження.

Перша частина (перша сходинка) навчального модуля знайомить учнів з фундаментальними теоретичними поняттями та твердженнями, що

супроводжуються ілюстраціями, поясненнями та прикладами, адаптованими до рівня їх підготовки. Ця частина слугує основою для подальшого вивчення матеріалу з урахуванням індивідуальних можливостей та потреб учнів. Таким чином, вона забезпечує перший етап засвоєння знань, закладаючи фундамент для розуміння та глибшого вивчення теми.

Друга частина (друга сходинка) навчального модуля поглиблює та розширює знання, здобуті на першому етапі, пропонуючи:

- Строгі доведення, наскільки це можливо на рівні стандарту, для обґрунтування тверджень, наведених у першій частині.
- Розширення змісту за рахунок додаткових понять, тверджень та задач, які сприяють глибшому розумінню теми.
- Розгляд складніших, порівняно з першою частиною, прикладів застосування теоретичних знань.

У вступі також зазначається, як матеріал цього розділу може бути застосований як у самій математиці, так і поза нею. Окрім цього, вступ містить перелік головних навчальних питань, які будуть розглянуті в розділі. Кожний параграф розпочинається зі стислого представлення його змісту. Це коротке введення допомагає учням зрозуміти основні ідеї та цілі параграфа перед тим, як перейти до детального вивчення матеріалу.

Така структура забезпечує учням ясне уявлення про те, що вони будуть вивчати і як це знання може бути застосоване, що сприяє більш ефективному і цілеспрямованому засвоєнню матеріалу.

Кожний розділ книги містить підрозділ «Готуємось до вивчення теми», який передбачає повторення матеріалу, що вивчався в попередніх класах і необхідний для вивчення нового матеріалу. Його наведено у вигляді таблиць. Наявність такого матеріалу пов'язана з тим, що учні, як правило, не мають підручників з попередніх класів. У цьому підрозділі є також тест для діагностики готовності до вивчення теми.

Кожен пункт (параграф) навчального модуля побудований за принципом поступового ускладнення матеріалу, починаючи з базових понять та

закінчуючи складнішими задачами та доведеннями. Структура кожного пункту (параграфу) сприяє активному та свідомому засвоєнню матеріалу учнями, а також розвитку їхніх аналітичних та критичних навичок. Використання контрольних запитань різних рівнів складності дозволяє диференціювати навчання та забезпечувати індивідуальний підхід до кожного учня.

Наприкінці кожного параграфу наводяться задачі. Вони призначені як для роботи в класі (фронтальної та самостійної), так і для домашньої роботи. Система задач також має різні функції, а саме: відпрацьовування навчального матеріалу, його застосування, зокрема до розв'язання прикладних задач. Використання "сюжетних" задач у навчанні математики дозволяє зробити процес вивчення предмета більш цікавим та захоплюючим для учнів, а також сприяє розвитку їхньої самостійності та творчого мислення. "Сюжетні" задачі є ефективним інструментом для розвитку умінь учнів аналізувати інформацію, встановлювати зв'язки між поняттями та знаходити нестандартні рішення проблем. Включення "сюжетних" задач до системи навчання математики дає змогу покращити результати навчання учнів та підготувати їх до успішного вирішення задач у реальному житті. Задачі диференційовані за рівнем складності. Задачі базового рівня позначені кружечком °, задачі наступного рівня складності, який відповідає, в головному, достатньому рівню навчання, не позначені ніяким знаком, задачі підвищеного рівня позначені зірочкою *. Різноманітність задач у системі дозволяє охопити всі аспекти теми та забезпечити ґрунтовне засвоєння матеріалу учнями. Вправи для повторення допомагають закріпити знання та навички, отримані учнями під час вивчення теми, та підготувати їх до подальшого навчання. Графічні вправи у геометричній частині сприяють розвитку просторового мислення та навичок креслення учнів.

Кожен параграф завершується невеликим підсумком основних понять і тверджень, що розглядалися у цьому параграфі. Вони супроводжуються ілюстраціями, коментарями, наведенням можливих застосувань.

Завершується кожний розділ підрозділами «Готуємось до тематичного

оцінювання з теми», «Таблиці для систематизації матеріалу розділу», «Історичний коментар». Перший з них містить завдання для самоконтролю з відповідями до них, зразок тематичної контрольної роботи. Другий складається з таблиць, що містять головний матеріал, який вивчався у розділі. Їх можна використати для систематизації вивченого матеріалу. Вони не дублюють викладене у розділі, а дають змогу поглянути на вивчений матеріал з узагальненої точки зору. У «Історичних коментарях» зроблено спробу прослідкувати за розвитком математичних ідей, які розглядаються у відповідних розділах.

Підручник містить предметний покажчик, а у підрозділі «Відповіді і вказівки до задач» наведено відповіді майже до всіх завдань і численні вказівки до їх розв'язання.

Автори прагнули, щоб підручник сприяв реалізації прикладної спрямованості навчання, зокрема, оволодінню навичками математичного моделювання на загальнокультурному рівні. Тому математичне моделювання виступає одним із ключових методів розгляду навчального матеріалу як на теоретичному, так і на практичному рівнях.

Математичне моделювання є одним із головних прийомів розгляду навчального матеріалу як на теоретичному, так і на практичному рівнях. Використання моделювання допомагає учням краще зрозуміти і засвоїти нові поняття через створення їхніх математичних моделей. Воно полегшує пояснення і доведення математичних тверджень, роблячи їх більш зрозумілими і наочними. Значна частина задачного фонду підручника складається з прикладних задач, для яких застосування математичного моделювання є ключовим підходом.

Таким чином, підручник сприяє не лише засвоєнню теоретичних знань, але й розвитку навичок їхнього практичного застосування, що є важливим для загальнокультурного розвитку учнів і підготовки їх до вирішення реальних задач за допомогою математичних методів. У підручнику широко використовується стиль, характерний для прикладних досліджень. Звернення

до життєвого досвіду, інтуїції, здорового глузду, проведення експериментів, обґрунтування на рівні фізичних моделей тощо — це далеко не повна характеристика цього стилю.

Структура підручника дає вчителю свободу вибору методики викладання математики, що сприяє реалізації його творчого потенціалу. Використання різних підходів до вивчення математики може допомогти зробити уроки більш цікавими та різноманітними для учнів. Важливо, щоб обраний підхід відповідав цілям та завданням навчання математики, а також віковим особливостям учнів.

Сумісне вивчення геометрії та алгебри і початків аналізу дозволяє створити єдину картину математичних знань, де різні розділи математики інтегруються в одне ціле. Учні можуть зосередитися на невеликій кількості понять і фактів у певний період, що сприяє глибшому розумінню і засвоєнню матеріалу. Вчитель може ефективніше планувати час на вивчення окремих тем, враховуючи особливості учнів. Такий підхід сприяє кращому усвідомленню зв'язків між різними розділами математики та іншими предметами. Сумісне вивчення підкреслює значення математики як частини загальної культури, що важливо для формування загальноосвітньої бази учнів.

Роздільне вивчення геометрії та алгебри і початків аналізу запобігає довгим вимушеним перервам у вивченні окремих предметів, що може бути корисним для підтримки безперервного навчання. Учні можуть глибше зануритися в окремі курси, що може полегшити засвоєння складніших тем у кожному з них.

Вибір підходу залежить від цілей навчання, контингенту учнів та методичних пріоритетів. Перший підхід, що забезпечує цілісність і природні зв'язки, особливо важливий в умовах загальнокультурної спрямованості навчання математики, тоді як другий підхід зосереджений на більш детальному вивченні окремих розділів без тривалих перерв.

Розглянемо особливості викладення у підручнику окремих тем.

Розділ «Геометричні тіла і поверхні» є ключовим елементом стереометричної підготовки учнів, оскільки розглядає основні види

геометричних тіл та їхні властивості. У цьому розділі акцент робиться на формуванні навичок конструювання і класифікації геометричних тіл та їх поверхонь, що вимагає використання конструктивних означень. Ці означення дозволяють встановити спільність між різними типами тіл, такими як призми і циліндри, піраміди та конуси.

Встановлення спільних властивостей допомагає учням зрозуміти загальні принципи побудови і властивостей цих тіл. Аналогічний підхід дозволяє краще зрозуміти зв'язки і відмінності між цими видами тіл. Паралельний розгляд груп геометричних тіл (наприклад, призм і циліндрів, пірамід і конусів) полегшує вивчення їх властивостей та сприяє ефективному засвоєнню матеріалу. Це також допомагає при обчисленні об'ємів та площ поверхонь, надаючи учням можливість застосовувати загальні принципи до різних типів тіл.

Побудова зображень геометричних тіл відіграє центральну роль у розвитку просторового мислення учнів. Необхідні вміння з побудови зображень плоских тіл закладаються при вивченні тем «Паралельність прямих і площин у просторі» та «Перпендикулярність прямих і площин у просторі». У розділі «Геометричні тіла і поверхні» надаються конкретні пояснення щодо побудови зображень конкретних видів тіл, що допомагає учням візуалізувати та краще розуміти їх структуру.

Постійна увага до побудови зображень і виконання побудов на зображеннях сприяє розвитку просторового мислення, що є важливим для розуміння геометрії в цілому. Підхід, що базується на конструктивних означеннях та паралельному розгляді різних груп тіл, забезпечує цілісне і систематичне вивчення геометричних концепцій. Формування навичок конструювання і класифікації тіл та їх поверхонь має велике практичне значення, оскільки допомагає учням застосовувати теоретичні знання на практиці, розвиваючи їхні здібності до розв'язування прикладних задач.

Таким чином, розділ «Геометричні тіла і поверхні» не лише надає учням фундаментальні знання про геометричні тіла, але й сприяє розвитку їхнього просторового та геометричного мислення через активне використання

конструктивних підходів та побудову зображень.

У підручнику з математики рівня стандарту особлива увага приділяється побудові перерізів геометричних тіл. Це сприяє розвитку просторових уявлень учнів і допомагає їм краще засвоїти властивості різних тіл. Автори прагнуть, щоб учні набули досвіду використання загальних методів дослідження властивостей тіл, одним із яких є метод перерізів. Використання перерізів дозволяє вивчати внутрішню будову геометричних тіл, що надає глибше розуміння їх властивостей. Розгляд різних перерізів одного і того ж тіла дає учням багато корисної інформації про його структуру і властивості. Побудова перерізів часто дозволяє зводити розв'язання просторових задач до двовимірних (планіметричних), що спрощує їх розв'язання. При цьому побудова і аналіз перерізів розвиває у учнів навички візуалізації та просторового мислення. Використання перерізів як методичного прийому допомагає краще зрозуміти і засвоїти геометричні властивості тіл.

Симетрія є ключовим поняттям у геометрії, яке постійно використовується при вивченні геометричних тіл. Наявність симетрій у фігури значно спрощує процес вивчення її властивостей та розв'язання задач, пов'язаних з цією фігурою. Постійне звернення до поняття симетрії допомагає учням краще зрозуміти і застосовувати це важливе геометричне поняття в різних контекстах.

Таким чином, підручник сприяє розвитку в учнів не лише теоретичних знань, але й практичних навичок аналізу і побудови, що є важливими для глибокого розуміння і успішного засвоєння геометрії.

Введення нових просторових фігур у підручнику супроводжується розглядом достатньої кількості та якості фізичних об'єктів, які природно моделюються цими фігурами, пошуком таких об'єктів у навколишньому середовищі, «матеріальному» конструюванню цих фігур різними засобами.

Розділом «Об'єми і площі поверхонь геометричних тіл» завершується шкільний курс геометрії простору. У цьому розділі розглядаються різні методи обчислення об'ємів і площ поверхонь, зокрема метод розбиття, метод

вичерпування і застосування інтеграла. Важливою є також аналогія між вимірюваннями площ плоских фігур і об'ємів тіл, що полегшує засвоєння матеріалу. Розділ «Об'єми і площі поверхонь геометричних тіл» не лише завершує курс геометрії простору, але й забезпечує учням глибоке розуміння і практичні навички, необхідні для подальшого успіху в математиці і повсякденному житті.

РОЗДІЛ II. Методика вивчення теми «Геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь тіл»

При вивченні теми «Геометричні тіла. Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл» учні [2]:

- розпізнають основні геометричні тіла, їхні елементи;
- будують зображення основних видів геометричних тіл, їх елементів, перерізів;
- обчислюють основні елементи найпростіших геометричних тіл;
- встановлюють властивості геометричних фігур;
- застосовують геометричні тіла для моделювання геометричних тіл;
- обчислюють з необхідною точністю об'єми та площі поверхонь геометричних тіл, використовуючи: основні формули; розбиття тіл на найпростіші;
- вимірюють параметри реальних тіл та їх фізичних моделей.

Наведемо фрагмент календарного плану для геометрії 11 класу:

№	Тематика уроків	Год.	Дата проведення	Примітки
	ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ	30		
33	Повторний інструктаж з БЖД. Поняття об'єму. Об'єм призми.	1		
34-35	Розв'язування задач.	2		
36	Об'єм піраміди. Об'єм зрізаної піраміди.	1		
37-38	Розв'язування задач.	2		
39	Контрольна робота № 3	1		
40	Аналіз контрольної роботи. Розв'язування задач.	1		
41	Об'єм циліндра.	1		
42	Розв'язування задач.	1		
43	Об'єм конуса.	1		
44	Розв'язування задач.	1		
45	Об'єм кулі та її частин.	1		
46-	Розв'язування задач.	2		

47				
48	Контрольна робота № 4 (модуль 1).	1		
49-50	Площа бічної та повної поверхонь циліндра.	2		
51-52	Площа бічної та повної поверхонь конуса.	2		
53	Площа сфери.	1		
54-55	Розв'язування задач.	2		
56	Контрольна робота № 4 (модуль 2).	1		
57, 58	Многогранники та тіла обертання у їхніх комбінаціях в об'єктах навколишнього простору.	2		
59-61	Розв'язування задач.	3		
62	Самостійна робота.	1		

2.1. Методика вивчення теми «Циліндр і призма»

Мета уроку: узагальнити й систематизувати знання учнів про призму й циліндр та їхні елементи; формувати вміння знаходити елементи призми і циліндра; розвивати просторову уяву, пам'ять, увагу, уміння проводити аналогії, узагальнювати вивчений матеріал; виховувати графічну культуру, акуратність, працьовитість, наполегливість.

Очікувані результати: учні повинні розпізнавати призму, циліндр та їхні елементи; будувати зображення призми й циліндра; обчислювати основні елементи призми й циліндра.

Учитель повідомляє статистичні дані контрольної роботи та зупиняється на типових помилках, яких учні припустилися під час виконання контрольної роботи.

Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування затехнологією «Мікрофон»

Учитель демонструє кілька моделей різних геометричних тіл.

Серед запропонованих моделей знайдіть модель призми; модель циліндра.

До якого виду геометричних тіл належить призма; циліндр?

У який спосіб можна отримати розгортку призми; розгортку циліндра?

Наведіть із повсякденного життя приклади многогранників; циліндрів.

Вчитель: Геометрія оточує нас у повсякденному житті. Її можна побачити у формі кристалів кухонної солі, льоду, гірського кришталю та ісландського шпату.

Багато професій потребують знання геометричних фігур, про які ми сьогодні будемо говорити. Столяри, малярі, екскаваторники та мінералоги – це лише деякі з них, хто використовує у своїй роботі многогранники та циліндри.

Повторення й аналіз фактів; бесіда.

Користуючись рис. 1, назвіть вершини, основи, бічні ребра й грані призми $ABCDFA_1B_1C_1D_1F_1$.

Користуючись рис. 2, назвіть радіус і твірну циліндра.

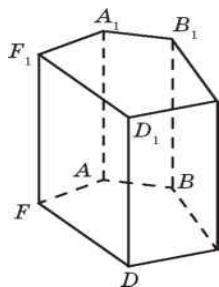


Рис. 1

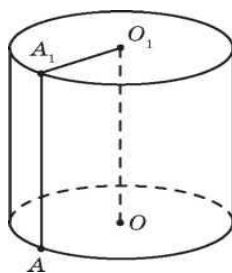


Рис. 2

Учні інтуїтивно називають те, що вони вважають правильним, розглядаючи рисунок і модель призми, циліндра.

Вчитель: Сформулюйте властивості основ призми; основ циліндра.

Учень: Основи призми та циліндра паралельні й рівні.

Вчитель: Сформулюйте властивості бічних ребер призми.

Учень: Бічні ребра призми паралельні.

Вчитель: Сформулюйте властивості твірних циліндра.

Учень: Твірні циліндра паралельні, якщо циліндр прямий, то твірні перпендикулярні до основ.

Вчитель: Яка призма називається прямою?

Учень: Прямою називається призма, в якій твірні перпендикулярні до основи.

Вчитель: Із чого складається поверхня призми?

Учень: Поверхня призми складається із многокутників, які називаються гранями, їхні сторони – ребрами, а вершини – вершинами призми.

Сприйняття й усвідомлення нового матеріалу

Робота з підручником

Учні, ознайомившись із текстом підручника, називають нові поняття, які не були розглянуті в 9-му класі, та дають їм визначення.

Основні терміни й поняття

Висота призми — відстань між площинами основ.

Діагональ призми — відрізок, що сполучає дві вершини, які не лежать на одній грані.

Призма, яка не є прямою, називається похилою.

Бічні ребра прямої призми є її висотами. Бічні грані прямої призми — прямокутники. Бічні грані похилої призми — паралелограми.

Відстань між площинами основ називається висотою циліндра. У прямому циліндрі висота дорівнює його твірній.

Діагональний переріз призми — переріз призми площиною, що проходить через два бічних ребра, які не належать одній грані.

Діагональний переріз прямої призми — прямокутник.

Осьовий переріз циліндра — прямокутник.

Переріз циліндра площиною, паралельною площині основи — круг, який дорівнює основі циліндра.

Переріз циліндра площиною, паралельною осі циліндра — прямокутник.

Осмислення нового матеріалу

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя [6].

1. Для поливу висячих садів Семіраміди щодня тисячі рабів качали воду з глибоких колодязів на верхні тераси, а вже звідти по численних каналах вода

стікала на нижні тераси. Визначте якою була загальна глибина колодязів, якщо відомо, що радіус цих колодязів 1 м і щодня з них викачували 3 140 м³ води.

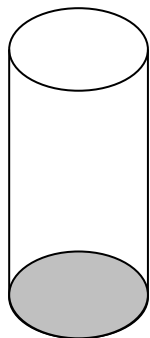


Рис. 3

Дано: циліндр, $R=1$ м, $V=3140$ м,

Знайти: h

Розв'язання:

$$V_{\text{цил.}} = \pi R^2 h$$

$$h = V_{\text{цил.}} / \pi R^2$$

$$h = 3140 / 3.14 \cdot 1^2 = 1000 \text{ (м)}$$

Відповідь: 1000м

2. Знайдіть площу круглої плями на поверхні моря, утвореної кубометром вилитої нафти, якщо товщина плівки 1 мм.



Рис.4

Дано: циліндр, $V=1$ м³,

$h=1$ мм=0,001 м

Знайти: $S_{\text{основи}}$

Розв'язання:

Утворена пляма - це циліндр висотою 0,001 м, що займає об'єм 1 м³.

$$V = \pi R^2 h$$

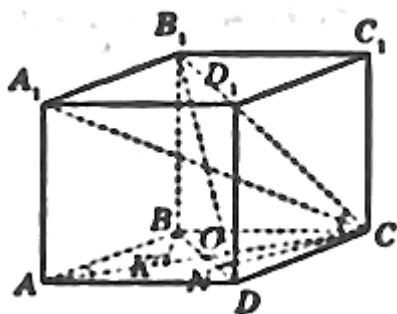
$$S_{\text{основи}} = \pi R^2 = V / h;$$

$$S_{\text{основи}} = 1 / 0,001 = 1000 \text{ (м}^2\text{)}$$

Відповідь: 1000 м².

3. ABCDA₁B₁C₁D₁— прямий паралелепіпед, ABCDA — паралелограм, AB=4 см, AD=6 см, $\angle BAD=30^\circ$, $\angle B_1CB=60^\circ$.

Рис. 5



Із

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD$$

$$BD^2 = 16 + 36 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos 30^\circ$$

$$BD^2 = 52 - 24\sqrt{3},$$

$$BD = \sqrt{4 \cdot (13 - 6\sqrt{3})} = 2\sqrt{13 - 6\sqrt{3}} \text{ (см);}$$

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ;$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 2AD \cdot DC \cos \angle ADC,$$

$$AC^2 = 36 + 16 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cos 150^\circ = 52 + 2 \cdot 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 52 + 24\sqrt{3};$$

$$AC = \sqrt{52 + 24\sqrt{3}} = 2\sqrt{13 + 6\sqrt{3}} \text{ (см)}$$

$$\triangle BB_1C (\angle BB_1C = 90^\circ) BB_1 = BC \operatorname{tg} \angle B_1CB, BB_1 = 6 \operatorname{tg} 60^\circ = 6\sqrt{3}(\text{см}).$$

4. В основі прямої призми лежить ромб із гострим кутом 60° і стороною 4 см. Знайдіть діагоналі призми, якщо її бічне ребро дорівнює 6 см. (Відповідь: $2\sqrt{13}$ см; $2\sqrt{21}$ см.)

5. В основі прямої призми лежить квадрат. Діагональ призми дорівнює 17 см, а висота — 15 см. Знайдіть довжину діагоналі бічної грані цієї призми. (Відповідь: $\sqrt{257}$ см.)

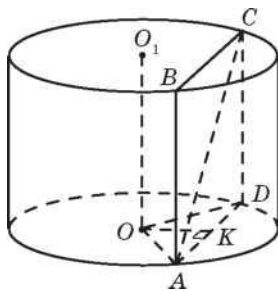


Рис. 6

6. На відстані 4 см від осі циліндра проведено переріз, паралельний цій осі. Висота циліндра дорівнює 5 см. Знайдіть радіус його основи, якщо діагональ перерізу дорівнює 13 см.

Розв'язання.

За умовою $OO_1 \parallel (ABC)$ (рис. 6). Оскільки $AB \perp (AOD)$ і $AB \subset (ABC)$, то за ознакою перпендикулярності площин $(ABC) \perp (AOD)$. AD — пряма перетину площин ABC і AOD , тож, провівши $OK \perp AD$, можемо стверджувати, що $OK \perp (ABC)$. А оскільки $OO_1 \parallel (ABC)$, то відрізок OK , що дорівнює 4 см, і є відстань від осі циліндра до площини ABC . У трикутнику $CDA (D = 90^\circ)$ маємо:

$$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{169 - 25} = 12(\text{см})$$

Трикутник AOD рівнобедрений ($AO = OD$ як радіуси). Отже, OK — висота і медіана. $AK = KD = 6$ см. Із трикутника $OKA (K = 90^\circ)$ отримаємо:

$$AO = \sqrt{OK^2 + AK^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}(\text{см})$$

Відповідь: $2\sqrt{13}$ см.

Робота в малих групах

Учні працюють у групах, після чого представник однієї з груп наводить доведення біля дошки (слід підкреслити, що доведені факти є опорними) [19].

Задача: Дано правильну трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$, сторона основякоїдорівнює 2, діагональ бічної грані $\sqrt{5}$. Знайти кут між площиною A_1BC і площиною основи призми.

Розв'язання: Позначимо середину ребра BC літерою H . Відрізки AH і A_1H перпендикулярні BC , оскільки трикутник ABC – рівносторонній, а A_1BC – рівнобедрений. Тому, кут A_1HA – лінійний кут двогранного кута з гранями BCA і BCA_1 .

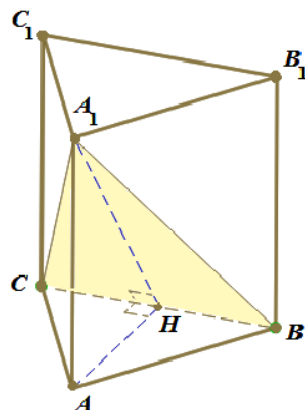


Рис. 7

Розглянемо трикутник A_1AB : за теоремою Піфагора знайдемо $AA_1=1$.

Розглянемо трикутник A_1HB : за теоремою Піфагора знайдемо $AH=\sqrt{3}$.

З трикутника HA_1A знаходимо:

$$\cos \angle A_1HA = \frac{AA_1}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Звідси знаходимо: кут $\angle A_1HA=30^\circ$.

Відповідь. 30° .

Підбиття підсумків уроку

Учитель просить назвати спільне і відмінне у прямій призмі й прямому циліндрі.

Бліцопитування

Вчитель: На рис. 8, позначте фігури, що є розгорткою призми. Визначте вид призми в кожному випадку.

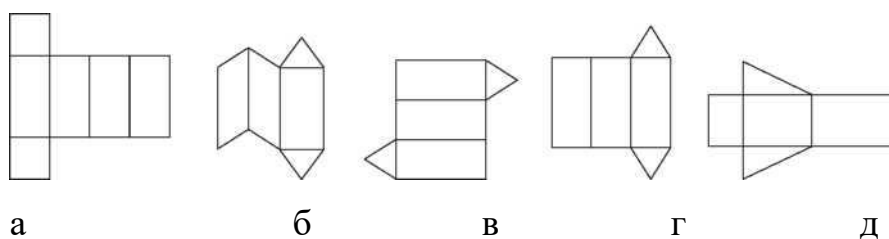


Рис. 8

Учень:

а) прямокутний паралелепіпед, основа — квадрат;

б) похила трикутна призма;

в), г) — правильна трикутна призма;

д) пряма трикутна призма, основа — рівнобедрений прямокутний трикутник.

Вчитель: Скільки діагоналей можна провести у чотирикутній призмі; п'ятикутній, n-кутній?

Учень: 4; 10; $n(n-3)$.

Вчитель: Призма має 20 граней. Який многокутник лежить у її основі?

Учень: Вісімнадцятикутник.

Вчитель: У якому випадку переріз циліндра площиною, паралельною його осі, є квадратом?

Учень: Якщо хорда дорівнює твірній.

Вчитель: Що являє собою переріз циліндра площиною, перпендикулярною до осі циліндра?

Учень: Круг.

Домашнє завдання

[3]: § 13, пп. 1, 2

[С] № 239 (3), 249 (1-3)

[D] № 239 (4, 7), 249 (4, 5)

[В] № 239 (9), 251 (4)

Індивідуальне завдання [15], [14].

1. Діагональ осевого перерізу циліндра дорівнює 8 см і утворює із площиною основи циліндра кут 30° . Знайти висоту циліндра і площу його основи. (Відповідь: 4 см; 48π см².)

2. Осевий переріз циліндра — квадрат зі стороною $2\sqrt{5}$ см. Паралельно осі циліндра проведено переріз, діагональ якого дорівнює 5 см. Знайти площу цього перерізу. (Відповідь: 10 см².)

Вивчення теми розраховано на 3 уроки. Задачі, які розв'язуються під час вивчення теми, поступово ускладнюються. Під час написання роботи було підібрано комплекс задач таких, щоб на першому уроці учні розв'язували задачі

початкового рівня, на другому – достатнього та середнього, на третьому – середнього та високого рівнів.

2.2. Методика вивчення теми «Конус і піраміда»

Мета уроку: узагальнити й систематизувати матеріал про конуси і піраміди, відомий учням із курсу 9-го класу; формувати навички розв'язування задач на знаходження основних елементів конуса і піраміди; розвивати просторову уяву, вміння проводити аналогії, узагальнювати; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні розпізнавати серед геометричних тіл конуси й піраміди; будувати їхні зображення; обчислювати основні елементи конуса і піраміди.

Основні поняття: піраміда, правильна піраміда, основа піраміди, вершина піраміди, бічні ребра, висота піраміди, конус, основа конуса, вершина конуса, твірна конуса, вісь конуса, осьовий переріз конуса.

Фронтальне опитування за технологією «Мікрофон»

Учням демонструються різноманітні моделі геометричних тіл. Серед поданих моделей потрібно визначити модель піраміди; модель конуса.

Вчитель: До якого виду геометричних тіл належить піраміда; конус?

Учень: Піраміди належать до многогранників, а конуси – тіл обертання.

Вчитель: Наведіть із повсякденного життя приклади предметів, які мають форму піраміди; форму конуса.

Вчитель: Єгипетські піраміди, оповиті легендами, вражають уяву людей з усього світу. Сьогодні, використовуючи вже відомі нам знання, ми розкриємо таємницю висоти піраміди Хеопса, побудованої на квадратному фундаменті зі стороною 230 метрів, а бічні ребра якої сягають 218 метрів.

Повторення й аналіз фактів

Фронтальна бесіда

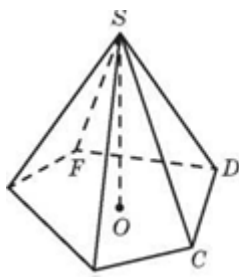


Рис.9

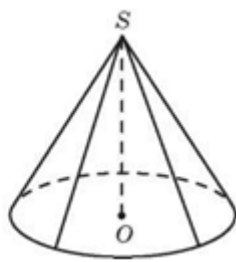


Рис. 10

Вчитель: Назвіть вершину, основу, бічні ребра, бічні грані й висоту піраміди (рис. 9).

Учень: Вершина – S , основа – $ABCD$, бічні ребра – AB , BC , CD , DA , висота – SO .

Сприйняття й усвідомлення нового матеріалу

Робота з підручником

Учні самостійно читають текст підручника, знаходять у ньому поняття, які ще не були розглянуті в 9-му класі, і наводять визначення.

Основні поняття й терміни [6].

Висота піраміди — перпендикуляр, проведений із вершини піраміди до площини її основи.

Висота конуса — перпендикуляр, проведений із вершини конуса до площини основи.

Діагональний переріз піраміди — переріз піраміди площиною, яка проходить через два несусідніх бічних ребра.

Пряма, що проходить через центр основи й висоту конуса, називається його віссю.

Осьовий переріз конуса — переріз конуса площиною, що проходить через його вісь.

Правильна піраміда — піраміда, основа якої — правильний багатокутник, а основа висоти піраміди є центром цього багатокутника.

У правильної піраміди

а) усі бічні ребра рівні;

б) усі бічні ребра однаково нахилені до площини основи;

в) усі бічні ребра утворюють однакові кути з висотою піраміди;

г) усі бічні грані — рівні рівнобедрені трикутники.

Апофема правильної піраміди — висота бічної грані, проведеної з вершини піраміди.

Усі твірні конуса є рівними.

Усі твірні конуса однаково нахилені до площини його основи.

Усі твірні конуса утворюють однакові кути з його висотою.

Осьовий переріз конуса — рівнобедрений трикутник.

Діагональний переріз правильної піраміди — рівнобедрений трикутник.

Конус називають рівностороннім, якщо діаметр його основи дорівнює його твірній.

Переріз конуса площиною, що проходить через його вершину — рівнобедрений трикутник.

Переріз конуса площиною, паралельною його основі — круг.

Переріз піраміди площиною, паралельною її основі — багатокутник, подібний багатокутнику, що лежить в основі піраміди.

Осмислення нового матеріалу

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя [19].

1. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 7 см, а сторона основи — 8 см. Знайдіть бічне ребро піраміди. (Відповідь: 9 см.)

2. Знайдіть висоту й радіус основи конуса, якщо його твірна дорівнює 12 см, а осьовий переріз — правильний трикутник. (Відповідь: $6\sqrt{3}$ см; 6 см.)

3. В основі піраміди лежить паралелограм зі сторонами 2 см і 3 см і гострим кутом 60° . Бічне ребро, що проходить через вершину гострого кута, перпендикулярне до площини основи і дорівнює 12 см. Знайдіть більше бічне ребро піраміди. (Відповідь: $\sqrt{163}$ см.)

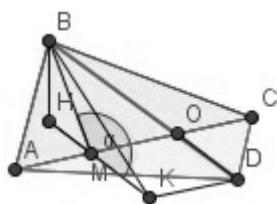


Рис. 11

4. Прямокутник ABCD з сторонами a і b перегнули по діагоналі AC так, що площини (ABC) і (ADC) утворюють між собою кут α . Знайти відстань між точками B і D.

Розв'язання

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2}$$

З точки D опустимо перпендикуляр DO на AC. З точки B опустимо перпендикуляр BM на AC.

$$BM = OD = \frac{AD \cdot DC}{AC} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$OC = AM = \sqrt{BA^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$MO = AC - 2AB = \sqrt{a^2 + b^2} - 2 \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Через точку D проведемо пряму с паралельну AC.

З точки M проведемо перпендикуляр до AC. В перетині з прямоюс отримаємо точку K.

Очевидно, що MKDO – прямокутник.

В площині (МКВ) проведемо ВН перпендикулярно до МК. AC перпендикулярна до площини (ВМК), отже, AC перпендикулярна до ВК. Очевидно, що ВН перпендикулярно до (ACD)

ВН – перпендикуляр, АК – похила, НК – проекція. Тоді за теоремою про три перпендикулярно: ВК перпендикулярно до DK.

$$BK = \sqrt{BM^2 + MK^2 - 2 \cdot BM \cdot MK \cdot \cos \alpha} = \sqrt{\frac{2a^2 b^2 (1 - a^2 b^2 \cos \alpha)}{a^2 + b^2}}$$

$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{BK^2 + KD^2} = \sqrt{\frac{2ab(1 + \cos \alpha)}{a^2 + b^2} + \frac{(b^2 - a^2)^2}{a^2 + b^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(b^2 - a^2)^2 + 2ab(1 + \cos \alpha)}{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Вчитель: Розв'язання стереометричних задач, як правило, починається з побудови рисунка. Для правильного зображення піраміди часто потрібний аналіз умови задачі та визначення її властивостей. Сьогодні ми вивчимо особливості положення висоти піраміди.

Шкільна лекція [15].

Якщо дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, то пряма їх перетину містить висоту піраміди. Цей факт випливає з теореми про дві площини, які перетинаються й перпендикулярні до третьої площини. На рис. 12 $(SBA) \perp (ABC)$, $(SBC) \perp (ABC)$, SB — висота піраміди.

Якщо одна із граней піраміди перпендикулярна до площини основи, то висота піраміди лежить у площині цієї грані і є перпендикуляром, проведеним із вершини піраміди до прямої перетину площин цієї грані й площини основи (рис. 13). Це твердження ґрунтується на факті, що перпендикуляр, проведений в одній із двох перпендикулярних площин до прямої перетину цих площин, є перпендикуляром до другої площини.

Учитель пропонує учням довести обернене твердження самостійно, спираючись на ознаки рівності прямокутних трикутників.

Якщо всі бічні ребра піраміди рівні, або однаково нахилені до площини основи піраміди, або утворюють однакові кути з висотою піраміди, то основою висоти піраміди є центр кола, описаного навколо основи піраміди (рис. 14).

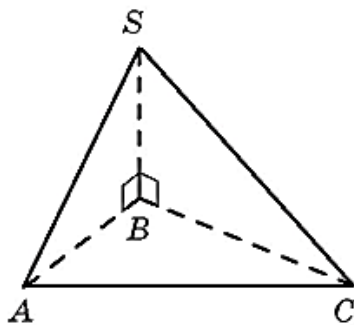


Рис. 12

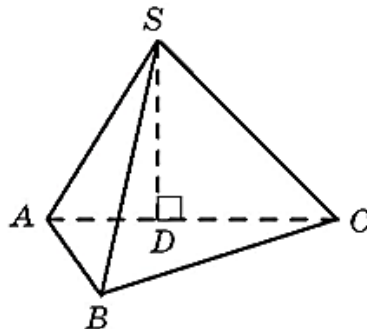


Рис. 13

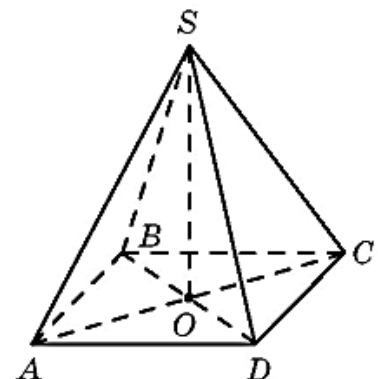


Рис. 14

Робота в малих групах

Учні, працюючи в групах, доводять твердження.

Якщо основа висоти піраміди є центром кола, описаного навколо основи піраміди, то в цій піраміді всі бічні ребра рівні, всі бічні ребра однаково нахилені до площини основи піраміди, всі бічні ребра утворюють із висотою піраміди однакові кути.

Учитель пропонує учням довести обернене твердження, спираючись на ознаки рівності прямокутних трикутників.

Якщо всі двогранні кути при основі піраміди рівні, або всі висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди, рівні, або всі висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди, утворюють однакові кути з висотою піраміди, або висота піраміди утворює із площинами всіх бічних граней однакові кути, то основою висоти піраміди є центр кола, вписаного в основу піраміди. Учитель відзначає, що сформульовані твердження широко застосовуються під час розв'язування задач.

Осмислення нового матеріалу:

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя [14].

4. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із гіпотенузою, яка дорівнює 24 см. Знайдіть висоту піраміди, якщо кожне її бічне ребро дорівнює 13 см. (Відповідь: 5 см)

5. Основа піраміди — ромб із меншою діагоналлю 4 см і гострим кутом 60° . Усі бічні грані утворюють з основою піраміди рівні кути по 45° . Знайдіть висоту піраміди. (Відповідь: $\sqrt{3}$ см)

6. Основа піраміди $SABC$ — рівнобедрений трикутник ABC . $AB = BC = 12$ см. Бічна грань SAC , що містить основу трикутника, перпендикулярна до площини ABC , а дві інші бічні грані нахилені до площини основи під кутом 60° , $SO = 4\pi/3$ см. Знайдіть площу основи піраміди. (Відповідь: 48 см^2 .)

Шкільна лекція [6].

Зрізана піраміда — многогранник, який відтинається внаслідок перетину піраміди площиною, паралельною її основі.

Основи зрізаної піраміди — дві її грані, які лежать у паралельних площинах і є подібними многокутниками.

Бічні грані зрізаної піраміди (інші грані) — трапеції (рис. 15).

Бічні ребра зрізаної піраміди — відрізки, що сполучають відповідні вершини основ.

Висота зрізаної піраміди — перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи до площини іншої основи (рис. 15), DO — висота зрізаної піраміди.

Зрізана піраміда називається правильною, якщо вона отримана внаслідок перетину правильної піраміди площиною, паралельною основі.

Апофема правильної зрізаної піраміди — висота її бічної грані (рівнобедреної трапеції).

Висота правильної зрізаної піраміди — відрізок, який сполучає центри її основ.

Зрізаний конус — частина конуса, що лежить між основою конуса і площиною, паралельною його основі.

Основи зрізаного конуса — круги із центрами в точках O і O_1 (рис. 16).

Пряма OO_1 — вісь зрізаного конуса, відрізок OO_1 — висота зрізаного конуса.

Осьовий переріз зрізаного конуса — рівнобедрена трапеція AA_1B_1B (рис. 16), AA_1 і BB_1 — твірні зрізаного конуса.

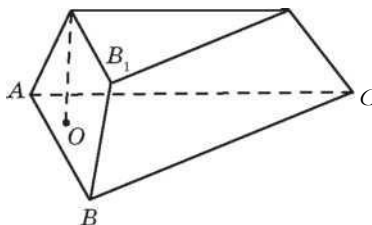


Рис. 15

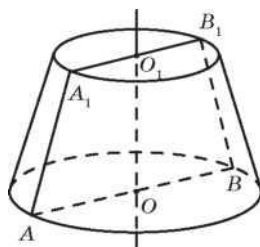


Рис. 16

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

8. Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює 7 см, сторони основ — 10 см і 2 см. Знайдіть бічне ребро піраміди.

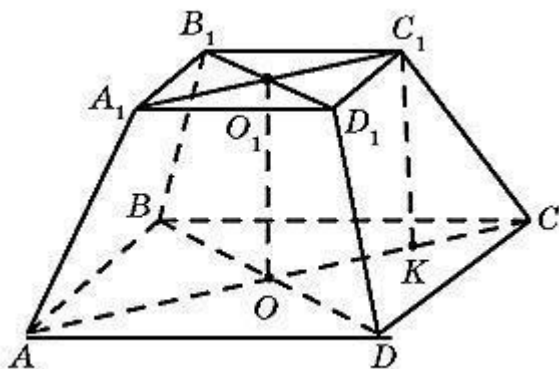


Рис. 16

Розв'язання.

Проведемо $C_1K \perp (ABC)$; $C_1K = OO_1$ (рис. 16). $K \in AC$, оскільки $C_1K \perp (ABC)$ і $OO_1 \perp (ABC)$, то $C_1K \parallel OO_1$, і вони лежать в одній площині, що перетинає

площину нижньої основи по прямій, де лежать всі спільні точки двох площин, оскільки піраміда правильна, то $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ – квадрати, $AC = 10\sqrt{2}$ см, $A_1C_1 = 2\sqrt{2}$ см і $OC = 5\sqrt{2}$ см; $O_1C_1 = \sqrt{2}$ см, а $KC = 4\sqrt{2}$ см. Із трикутника C_1KC ($\angle K = 90^\circ$) отримаємо: $CC_1 = \sqrt{C_1K^2 + KC^2} = \sqrt{49 + 32} = \sqrt{81} = 9$ (см)

Відповідь: 9 см.

9. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 11 см і 16 см, твірна 13 см. Знайдіть відстань від центра меншої основи до точки кола більшої основи.

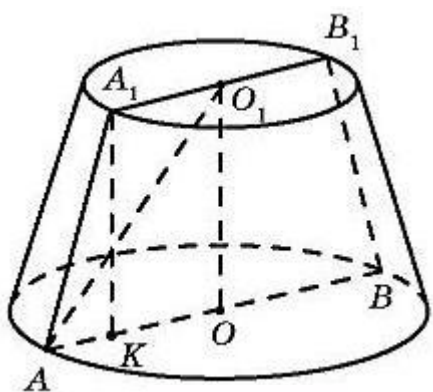


Рис. 17

Розв'язання. Нехай A — точка, що належить колу більшої основи зрізаного конуса (рис. 4) із висотою O_1O , де O і O_1 — центри його основ. Через точку A і висоту OO_1 конуса, проведемо площину, яка перетинає основи по діаметрах AB і A_1B_1 , а бічну поверхню — по твірних AA_1 і BB_1 . Знайдемо O_1A , у площині AA_1B_1 проведемо $A_1K \parallel OO_1$. $A_1O_1 \parallel AO$ за властивістю паралельних площин, тому KA_1O_1O — паралелограм. Отже, $OK = A_1O_1$ і $AK = AO - A_1O_1 = 16 - 11 = 5$ (см).

Із трикутника AKA_1 ($\angle K = 90^\circ$) отримаємо: $A_1K = \sqrt{AA_1^2 - AK^2} = \sqrt{169 - 25} = 144$ см². Отже, $O_1O^2 = 144$ см².

Із трикутника AOO_1 ($\angle O = 90^\circ$) отримаємо: $O_1A = \sqrt{OO_1^2 + AO^2} = \sqrt{400} = 20$ (см).

Відповідь: 20 см.

Підбиття підсумків уроку

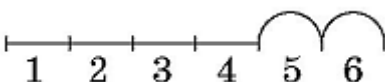
Графічний диктант

Учні записують у зошиті відповіді, користуючись символами «так», «ні», а потім здійснюють самоперевірку за ключем-відповіддю, запропонованим учителем [14].

1. Чи існує піраміда, що має 21 ребро?
2. Чи є правильним твердження, що коли всі бічні ребра піраміди рівні між собою, то піраміда правильна?

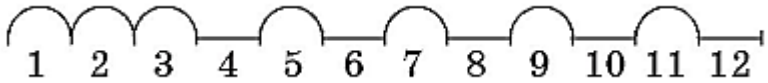
3. Чи є правильним твердження, що коли всі бічні ребра піраміди однаково нахилені до основи, то піраміда правильна?
4. Чи обов'язково висота піраміди лежить усередині піраміди?
5. Чи може висота піраміди збігатися з її бічним ребром?
6. Чи існує піраміда, усі грані якої є прямокутними трикутниками?

Ключ-відповідь:



1. Чи можна в перерізі конуса площиною отримати рівнобедрений трикутник, відмінний від осьового перерізу?
2. Чи може осьовим перерізом конуса бути прямокутний трикутник?
3. Чи може осьовим перерізом конуса бути рівносторонній трикутник?
4. Чи можуть бути будь-які відрізки a і b відповідно твірною й висотою конуса?
5. Чи можуть бути будь-які відрізки a і b відповідно висотою й радіусом конуса?
6. Бічні грані піраміди утворюють з основою рівні двогранні кути. Чи може основою піраміди бути прямокутник?
7. Бічні грані піраміди утворюють з основою рівні двогранні кути. Чи може основою піраміди бути ромб?
8. Бічне ребро піраміди перпендикулярне до однієї зі сторін основи. Чи можна прийняти це ребро за висоту піраміди?
9. Усі бічні ребра чотирикутної піраміди рівні. Чи може її основою бути прямокутник?
10. Усі бічні ребра чотирикутної піраміди утворюють рівні кути з висотою піраміди. Чи може її основою бути ромб?
11. Усі бічні ребра піраміди рівні. Чи може її одна бічна грань бути перпендикулярною до основи піраміди?
12. Чи може бути основою піраміди, у якій всі висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди, рівні, рівнобедрена трапеція зі стороною 9 см і основами 5 см і 11 см?

Ключ-відповіді:



Домашнє завдання

[3]: § 12

[C] № 226 (1, 2)

[D] № 226 (3)

[B] № 226 (4), 234

Індивідуально

1. Сторони основ зрізаної правильної трикутної піраміди дорівнюють 2 см і 6 см. Бічна грань утворює із більшою основою кут 60° . Знайти висоту зрізаної піраміди (*Відповідь: 2 см.*)

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2.

Мета уроку: перевірити рівень засвоєння учнями теми «Циліндри і призми. Конуси і піраміди»; розвивати логічне мислення, пам'ять, увагу, самостійність, уміння правильно розраховувати час, застосовувати отримані знання в стандартних і нестандартних ситуаціях; виховувати наполегливість, уміння організовувати роботу.

Очікувані результати: учні повинні продемонструвати вміння самостійно застосовувати отримані знання з теми «Циліндри і призми. Конуси і піраміди». Обладнання: роздавальний матеріал.

Тип уроку: контроль і корекція знань, умінь і навичок.

Хід уроку

Організаційний етап

Перевірка домашнього завдання

Учні здають зошити з домашнім завданням учителю на перевірку.

Формулювання теми, мети й завдань уроку; мотивація навчальної діяльності

Учитель налаштовує учнів на вдумливу самостійну роботу, звертає увагу на необхідність дати докладні пояснення до задач 7-9, до розв'язання задачі 8

застосувати властивість медіани прямокутного трикутника, а в задачі 9 виконати додаткову побудову.

Перевірка знань, умінь і навичок

На цьому етапі уроку можна провести контрольну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [14], КР 2.

Контрольна робота № 2

Варіант 1

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1-6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 1 см, 2 см і 2 см. Знайдіть його діагональ.

А) 5 см; Б) 3 см; В) 9 см; Г) 4 см.

2. Бічні ребра піраміди дорівнюють гіпотенузі прямокутного трикутника, який лежить у її основі, і дорівнюють 4 см. Знайдіть висоту піраміди.

А) $2\sqrt{3}$ см; Б) 2 см; В) 8 см; Г) $4\pi/3$ см.

3. Осьовий переріз циліндра — квадрат, діагональ якого $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть радіус основи циліндра.

А) 4 см; Б) 8 см; В) 2 см; Г) $2\sqrt{2}$ см.

4. Твірна конуса дорівнює 6 см і нахилена до площини основи конуса під кутом 60° . Знайдіть площу основи конуса.

А) 9π см²; Б) 27π см²; В) 27 см²; Г) 9 см².

5. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює 10 см і нахилене до площини основи під кутом 30° . Знайдіть висоту піраміди.

А) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см; Б) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ см; В) $5\sqrt{3}$ см; Г) 5 см.

6. Радіус основи і висота циліндра відповідно дорівнюють 6 см. і 5 см. Знайдіть кут нахилу діагоналі осьового перерізу до площини основи циліндра.

А) $\arctg \frac{12}{5}$; Б) $\arctg \frac{5}{12}$; В) $\arctg \frac{6}{5}$; Г) $\arctg \frac{5}{6}$.

Достатній рівень (3 бали)

7. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює $10\sqrt{3}$ см і нахилене до площини основи під кутом 30° . Знайдіть сторону основи піраміди.

8. Відстань від центра основи конуса до середини твірної дорівнює 5 см. Знайдіть висоту конуса, якщо його радіус дорівнює 8 см.

Високий рівень (3 бали)

9. Знайдіть площу осьового перерізу зрізаного конуса, у якому радіуси основ дорівнюють 3 см і 6 см, а твірна — 5 см.

Варіант 2

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1-6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см. Знайдіть його діагональ.

А) 7 см; Б) 11 см; В) 49 см; Г) 36 см.

2. Бічні ребра піраміди дорівнюють гіпотенузі прямокутного трикутника, що лежить у її основі, висота піраміди дорівнює 43 см. Знайдіть бічне ребро піраміди.

А) 4 см; Б) 8 см; В) 12 см; Г) $12\sqrt{3}$ см.

3. Радіус основи циліндра дорівнює 4 см, а осьовий переріз циліндра — квадрат. Знайдіть діагональ осьового перерізу циліндра.

А) $4\sqrt{2}$ см; Б) 8 см; В) $2\sqrt{2}$ см; Г) $8\sqrt{2}$ см.

4. Площа основи конуса дорівнює 9π см². Знайдіть твірну конуса, яка нахилена до площини основи конуса під кутом 60° .

А) 3 см; Б) 12 см; В) 6 см; Г) 9 см.

5. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює 8 см, а кут між бічним ребром і висотою становить 30° . Знайдіть радіус кола, описаного навколо основи піраміди.

А) 4 см; Б) $4\sqrt{3}$; В) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ см; Г) $4\sqrt{2}$.

6. Радіус основи і висота циліндра відповідно дорівнюють 4 см і 7 см. Знайдіть кут нахилу діагоналі осьового перерізу до площини основи циліндра.

А) $\arctg \frac{7}{4}$; Б) $\arctg \frac{4}{7}$; В) $\arctg \frac{7}{8}$; Г) $\arctg \frac{8}{7}$.

Достатній рівень (3 бали)

7. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює 10 см і нахилене до площини основи під кутом 60° . Знайдіть сторону основи піраміди.

8. Відстань від центра основи конуса до середини твірної дорівнює 5 см. Знайдіть радіус основи конуса, якщо його висота дорівнює 6 см.

Високий рівень (3 бали)

9. Знайдіть площу осьового перерізу зрізаного конуса, у якому радіуси основ дорівнюють 3 см і 7 см, а твірна — 5 см.

2.3. Методика вивчення теми «Куля, сфера. Площина, дотична до сфери»

Мета уроку: сформувати поняття кулі, сфери, радіуса кулі, діаметра кулі, діаметрально протилежних точок; розглянути переріз кулі площиною і поняття дотичної площини до сфери; розвивати просторову уяву, логічне мислення, пам'ять, уміння аналізувати й узагальнювати вивчений матеріал; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні розпізнавати кулю й сферу на моделях і рисунках; будувати зображення кулі та її елементів; знати поняття дотичної площини до сфери; уміти обчислювати основні елементи кулі та сфери.

Основні поняття: куля, сфера, діаметр кулі, радіус кулі, діаметрально протилежні точки, великий круг.

Фронтальне опитування.

Вчитель: Що називають колом?

Учень: Коло — це геометричне місце точок, відстань яких до точки, що називається центром кола, є постійною величиною і дорівнює радіусу кола.

Вчитель: Що таке діаметр кола?

Учень: Відрізок прямої, що сполучає дві точки кола називається хордою. Найдовша з хорд, діаметр, проходить через центр кола. Діаметр кола дорівнює двом радіусам.

Вчитель: За якою формулою можна обчислити довжину кола?

Учень: $l = 2\pi R$.

Вчитель: За якою формулою обчислюють площу круга?

Учень: $S = \pi R^2$.

Вчитель: Яке тіло є просторовим аналогом кола; круга?

Учень: Сфера та куля.

Формулювання теми, мети й завдань уроку; мотивація навчальної діяльності.

Вчитель: М'ячі, що нагадують про безтурботне дитинство, знайомі кожному. А чи знаєте ви, що вивчення географії, наприклад, тісно пов'язане з такою фігурою, як куля? Земну поверхню, яку в наближенні можна вважати кулею, перетинають уявні лінії – географічні паралелі. Вони паралельні до площини екватора. Сьогодні ми підсумуємо, систематизуємо та розширимо ваші знання про кулю та її поверхню.

Повторення й аналіз фактів [6].

Бліцопитування затехнологією «Мікрофон»

Вчитель: Яку фігуру називають кулею?

Учень: Куля з центром O і радіусом R є фігурою, яка складається з усіх точок простору, що лежать від центра кулі O на відстані, яка не перевищує R .

Вчитель: Що називають поверхнею кулі?

Учень: Поверхнею кулі є сфера.

Вчитель: Що називають радіусом кулі?

Учень: Радіусом кулі називають дану відстань R , а також відрізки, що мають цю довжину і відкладені від центра кулі O .

Сприйняття й усвідомлення нового матеріалу

Шкільна лекція

Хорда сфери — відрізок, який сполучає дві точки сфери.

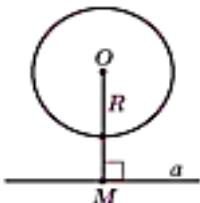
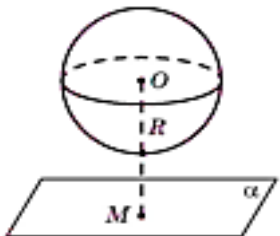
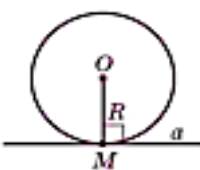
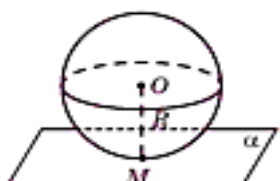
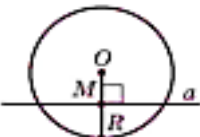
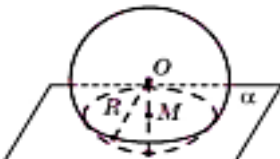
Діаметр сфери — хорда, яка проходить через центр сфери.

Кінці діаметра — діаметрально протилежні точки.

Розглянемо взаємне розміщення кулі та площини, провівши аналогії з розміщенням прямої та круга на площині, та заповнимо таблицю 1.

Взаємне розміщення прямої і круга, площини і кулі

Таблиця 1

№ з/п	Пряма і круг	Площина і куля
1	Не перетинаються $R < OM$ 	Не перетинаються $R < OM$ 
2	Дотикаються $R = OM$ 	Дотикаються $R = OM$ 
3	Перетинаються $R > OM$ 	Перетинаються $R > OM$ 

Отже, якщо відстань від центра кулі до площини менша за радіус кулі, то переріз цієї кулі площиною — коло. Центр цього кола — основа перпендикуляра, проведеного із центра кулі до січної площини.

Якщо січна площина проходить через центр кулі, цю площину називають діаметральною площиною. У цьому випадку радіус перерізу дорівнює радіусу кулі.

Переріз кулі діаметральною площиною називається великим кругом, а коло цього перерізу — великим колом.

Дотичною площиною до сфери (кулі) називається площина, що має з нею єдину спільну точку. Цю точку називають точкою дотику.

Дотична площина до сфери перпендикулярна до радіуса сфери, проведеного в точку дотику.

Якщо радіус сфери є перпендикуляром, проведеним із центра сфери до площини, що проходить через інший кінець радіуса, то ця площина є дотичною до сфери. Це твердження називають ознакою дотичної площини.

На рис. 18 площина α — дотична до сфери. OA — радіус сфери.

Дотичною прямою до сфери (кулі) називається пряма, що належить дотичній площині до цієї сфери (кулі) і проходить через точку дотику.

Усі прямі дотичної площини до сфери, які проходять через точку A , є дотичними прямими до сфери.

Пряма, що проходить через точку сфери перпендикулярно до радіуса сфери, проведеного в цю точку, є дотичною прямою до сфери.

На рис. 19 $OA \perp a$, $OA = R$ — радіус сфери.

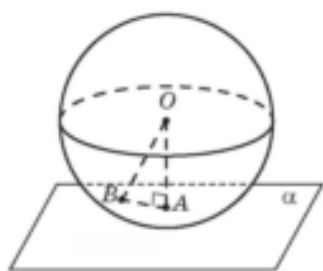


Рис. 18

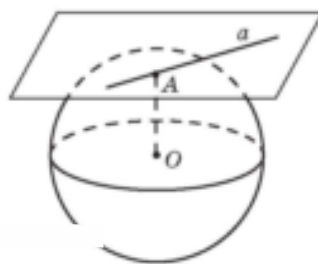
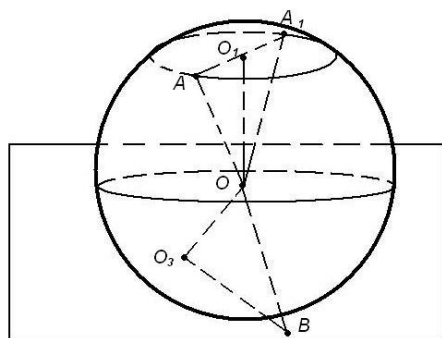


Рис.19

Осмислення нового матеріалу

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. На відстані 3 см від центра кулі проведено переріз. Радіус кулі дорівнює 5 см. Знайдіть площу перерізу.



Розв'язання

Нехай кулю перетнули площиною, яка проходить через точку A , відстань $OO_1 = 3$ (O_1 – центр перерізу). Із $\triangle OO_1A$ ($\angle OO_1A = 90^\circ$)

$$AO_1 = \sqrt{AO^2 - OO_1^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ (см)}.$$

$$S_{\text{пер.}} = \pi \cdot AO_1^2 = 16\pi \text{ (см}^2\text{)}$$

Відповідь: $16\pi \text{ см}^2$.

2. Радіус кулі дорівнює 5 см. Знайдіть відстань між центром кулі і точкою, що знаходиться на дотичній площині на відстані 2 см від точки дотику.

Розв'язання.

Розглянемо Рис. 20. Нехай O_3 – точка дотику кулі до площини, B – точка площини, відстань до якої $O_3B = 2$ см. $OO_3 \perp \alpha$, $OO_3 = OA = 5$.

$$\text{Із } \triangle OO_3B (\angle OO_3B = 90^\circ) OB = \sqrt{OO_3^2 + O_3B^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \text{ (см)}.$$

Відповідь: $\sqrt{29}$ см.

3. Пункт А розташований на 30° північної широти. Обчисліть шлях, який проходить цей пункт за 2 год внаслідок обертання Землі навколо своєї осі. Радіус земної кулі прийняти таким, що дорівнює 6000 км.

Вчитель: Чи помітили ви, що багато задач, пов'язаних із пошуком географічних координат, насправді є геометричними задачами, які стосуються сфери та кулі? Тому важливо вміти швидко й чітко розв'язувати задачі на знаходження елементів кулі. Це допоможе вам краще орієнтуватися в навколишньому світі.

Наприклад, вам необхідно знайти довжину паралелі, широта якої α , якщо радіус Землі дорівнює R . Оскільки Земля має форму кулі, то довжина паралелі — це довжина деякого кола кулі, що лежить у площині, паралельній екватору. α — кут нахилу радіуса кулі, проведеного паралельно площині екватора (рис. 21).



Рис.21

Тоді довжину паралелі можна знайти як довжину кола радіуса $OA = r$. Із трикутника OO_1A ($OO_1A = 90^\circ$) отримаємо:

$$r = R \sin(90^\circ - \alpha) = R \cos \alpha.$$

Тоді довжина l паралелі дорівнюватиме

$$l = 2\pi R \cos \alpha.$$

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя [3].

4. Куля дотикається до всіх сторін правильного трикутника. Знайдіть радіус кулі, якщо сторона трикутника дорівнює $24\sqrt{3}$ см, а відстань від центра кулі до площини трикутника становить 5 см.

5. Усі сторони квадрата, площа якого дорівнює 144 см^2 , дотикаються до сфери радіусом 10 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини квадрата.

6. Усі вершини прямокутного трикутника з гіпотенузою 16 см лежать на сфері, радіус якої дорівнює 17 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трикутника.

Підбиття підсумків уроку.

Фронтальне опитування

1. На дотичній до кулі площині α взято точку B і сполучено із центром кулі O (рис. 22). Відрізок OB перетинає кулю в точці C . Чому дорівнює довжина відрізка BC , якщо $AO = 6$, $AB = 8$ см?

2. Знайдіть відстань від центра кулі до січної площини (рис. 23), якщо радіус кулі дорівнює 5 см, а радіус перерізу — 4 см.

3. Два перерізи кулі площинами мають рівні площі. Чи є правильним твердження, що площини цих перерізів однаково віддалені від центра кулі?

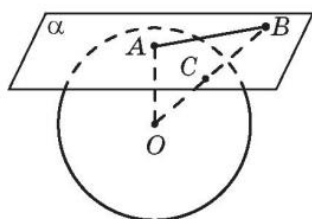


Рис.22

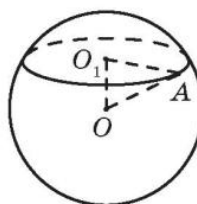


Рис.23

Тема. Контрольна робота № 3.

Мета уроку: перевірити рівень засвоєння учнями теми «Куля і сфера. Комбінації геометричних тіл»; розвивати логічне мислення, пам'ять, увагу, самостійність, уміння правильно розраховувати час, застосовувати отримані знання в стандартних і нестандартних ситуаціях; виховувати наполегливість, уміння організовувати роботу.

Очікувані результати: учні повинні продемонструвати вміння самостійно застосовувати отримані знання з теми «Куля і сфера. Комбінації геометричних тіл».

Контрольна робота № 3

Варіант 1

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1-6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Площа перерізу, проведеного через кулю радіусом 5 см на відстані 3 см від її центра, дорівнюватиме:

А) $9\pi \text{ см}^2$; Б) $2\pi \text{ см}^2$; В) 16 см^2 ; Г) $16\pi \text{ см}^2$.

2. Дві сфери радіусом 3 см і 5 см дотикаються зовнішньо. Знайдіть відстань між їхніми центрами.

А) 8 см; Б) 2 см; В) 6 см; Г) 10 см.

3. Якщо пряма призма описана навколо кулі, радіус якої становить 5 см, то бічне ребро дорівнює:

А) 5 см; Б) 2,5 см; В) 10 см; Г) 15 см.

4. Якщо в кулю радіусом 8 см вписано правильну піраміду, то відстань від центра кулі до вершини піраміди дорівнює:

А) 16 см; Б) 8 см; В) 4 см; Г) 12 см.

5. Точки А і В лежать на поверхні кулі радіусом 13 см. Якщо відрізок АВ дорівнює 24 см, то відстань від центра кулі до відрізка АВ дорівнює:

А) 12 см; Б) 5 см; В) 10 см; Г) 15 см.

6. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Знайдіть діаметр основи циліндра, описаного навколо цієї призми.

А) 12 см; Б) 10 см; В) 4 см; Г) 16 см.

Достатній рівень (3 бали)

7. Через середину радіуса сфери проведено площину, перпендикулярну до радіуса. Знайдіть відношення довжини великого кола до довжини перерізу.

8. Ребра прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 6 см, 4 см, 12 см. Знайдіть радіус описаної навколо нього кулі.

Високий рівень (3 бали)

9. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 15 см і 20 см. Знайдіть відстань від площини трикутника до центра кулі, яка дотикається до всіх сторін трикутника, якщо радіус кулі $\pi/34$ см.

Варіант 2

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1-6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Довжина лінії перерізу, проведеного через сферу радіусом 10 см на відстані 8 см від її центра, дорівнюватиме:

А) 12π см; Б) 12 см; В) 16π см; Г) 10π см.

2. Дві сфери радіусами 12 см і 15 см дотикаються зовнішньо. Знайдіть відстань між їхніми центрами.

А) 27 см; Б) 30 см; В) 3 см; Г) 24 см.

3. Якщо пряма призма, описана навколо кулі, має бічне ребро, що дорівнює 6 см, то радіус кулі дорівнює:

А) 6 см; Б) 3 см; В) 12 см; Г) 18 см.

4. Якщо в кулю вписано правильну піраміду й відстань від центра кулі до вершини піраміди дорівнює 10 см, то радіус кулі дорівнює:

А) 20 см; Б) 5 см; В) 10 см; Г) 15 см.

5. Відстань від центра кулі до відрізка АВ, кінці якого лежать на поверхні кулі, дорівнює 15 см. Якщо відрізок АВ дорівнює 16 см, то радіус кулі дорівнює:

А) 8 см; Б) 16 см; В) 17 см; Г) 30 см.

6. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із катетами 5 см і 12 см. Знайдіть діаметр основи циліндра, описаного навколо цієї призми.

А) 10 см; Б) 24 см; В) 6 см; Г) 13 см.

Достатній рівень (3 бали)

7. Через середину радіуса кулі проведено площину, перпендикулярну до радіуса. Знайдіть відношення площі великого круга до площі перерізу.

8. Ребра прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см. Знайдіть радіус описаної навколо нього кулі.

Високий рівень (3 бала)

1. Гіпотенуза й катет прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 10 см і 8 см. Відстань від площини трикутника до центра кулі, яка дотикається до всіх сторін трикутника, дорівнює 4 см. Знайдіть радіус кулі.

2.4. Експериментальна перевірка розробленої методики

Під час виконання роботи нами була розроблена методика вивчення теми «Геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь тіл», яка б покращила успішність учнів з вивчення цієї теми.

Експериментальна перевірка проводилася в Новоставській гімназії Жовтанецької сільської ради Львівського району.

За експериментальну групу було взято учнів 11-Б класу. Середній бал успішності в даному класі становив 5,8. За контрольну групу було взято учнів 11-А. Середній бал успішності складав 6,2.

Учні контрольної групи працювали просто за шкільною програмою з традиційним викладанням, а учні експериментальної групи працювали з використанням розробленої методики та добіркою вправ, наведених в нашій роботі.

Результатом використання розробленої методики стало різке зростання учнів інтересу до уроків математики, збільшилась їхня активність на уроках, потрібно було заставляти учнів відповідати, майже завжди були бажання, все було доказами ефективності використання проблемного методу навчання математики.

Задачі та вправи для експериментальної групи ми підібрали з урахуванням чотирьохрівневого навчання по темах «Циліндри і призми, конуси і піраміди» та «Куля і сфера. Комбінації геометричних тіл». В кінці кожної з тем учням як експериментального, так контрольного класів було запропоновано перевірочні роботи.

Наведемо результати однієї з таких робіт (Тематична контрольна бота з теми «Циліндри і призми, конуси і піраміди»).

При написанні перевірочної роботи з теми «Циліндри і призми, конуси і піраміди», учні даних класів держали такі оцінки :

Класи	Бали											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11-А	1	2	4	5	3	2	3	3	2	2	1	0
11-Б	0	1	1	2	4	4	3	5	4	2	2	0

А – кількість учнів, що одержали відповідні бали в контрольному класі

Б – кількість учнів, що одержали відповідні бали в експериментальному класі;

Результати цієї роботи зображено графічно.

Як видно з одержаних графіків, в експериментальній групі зберігається ріст вищих балів, причому кількість їх більша, ніж в контрольній групі. Це говорить про те, що розроблена методика є ефективною. Для того, щоб з'ясувати як впливає застосування даної методики даній темі на формування математичних знань, звернемось до статистики, застосуємо метод кореляції на прикладі даних класів. Для цього визначимо коефіцієнт кореляції, який є мірою щільності розглядуваного зв'язку. Чим ближчий коефіцієнт до одиниці, тим більша залежність між застосуванням різнорівневих завдань для перевірки і

підтвердженням відповідних рівнів знань. Якщо зв'язок між ознаками відсутній, то коефіцієнт кореляції буде рівний або близький до нуля.

Обчислимо коефіцієнт по даних контрольної роботи теми «Циліндри і призми, конуси і піраміди»

$$r = \frac{SP_{xy}}{\sqrt{SS_x SS_y}},$$

де SS_x – сума квадратів відхилень $SS_x = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}$,

SS_y – сума квадратів відхилень $SS_y = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{N}$,

SP_{xy} – сума скоректованих добутків $SP_{xy} = \sum xy - \frac{\sum x \sum y}{N}$,

де N – кількість учнів

Кількість учнів	Загальна кількість балів		Допоміжні розрахунки		
	В контрольному класі	В експериментальному класі	$\sum xy$	$\sum x^2$	$\sum y^2$
28	158	196	3483	2792	5274

1. Знаходимо суму квадратів відхилень:

$$SS_x = 2792 - \frac{158^2}{28} \approx 1900,42$$

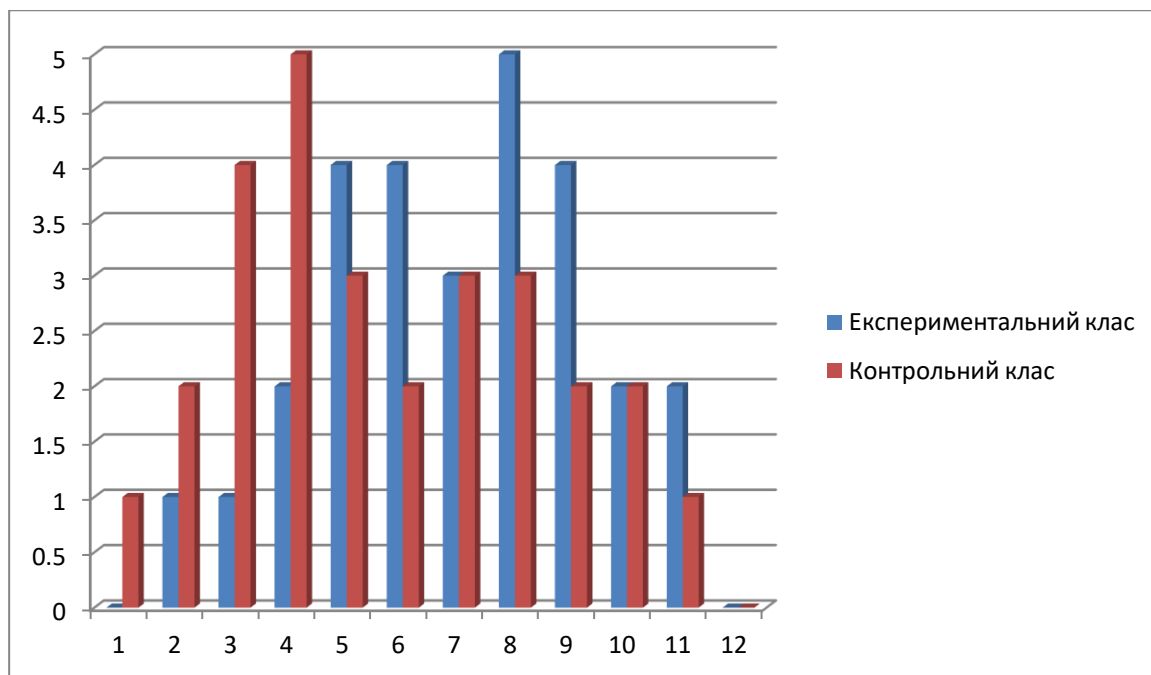
$$SS_y = 5274 - \frac{196^2}{28} = 3209$$

2. Сума скорельованих добутків

$$SP_{xy} = 3483 - \frac{158 * 196}{28} = 2377$$

3. Коефіцієнт

$$r = \frac{SP_{xy}}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \frac{2377}{\sqrt{1900,42 * 3209}} \approx 0,8729$$



Обчислимо коефіцієнт по даних контрольної роботи з теми «Куля і сфера. Комбінації геометричних тіл»

$$r = \frac{SP_{xy}}{\sqrt{SS_x SS_y}}$$

де SS_x – сума квадратів відхилень $SS_x = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}$,

SS_y – сума квадратів відхилень $SS_y = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{N}$,

SP_{xy} – сума скоректованих добутків $SP_{xy} = \sum xy - \frac{\sum x \sum y}{N}$,

де N – кількість учнів

Кількість учнів	Загальна кількість балів		Допоміжні розрахунки		
	В контрольному класі	В експериментальному класі	$\sum xy$	$\sum x^2$	$\sum y^2$
N					
28	144	146	3339	3318	3242

1. Знаходимо суму квадратів відхилень:

$$SS_x = 3318 - \frac{144^2}{19} \approx 2226,63$$

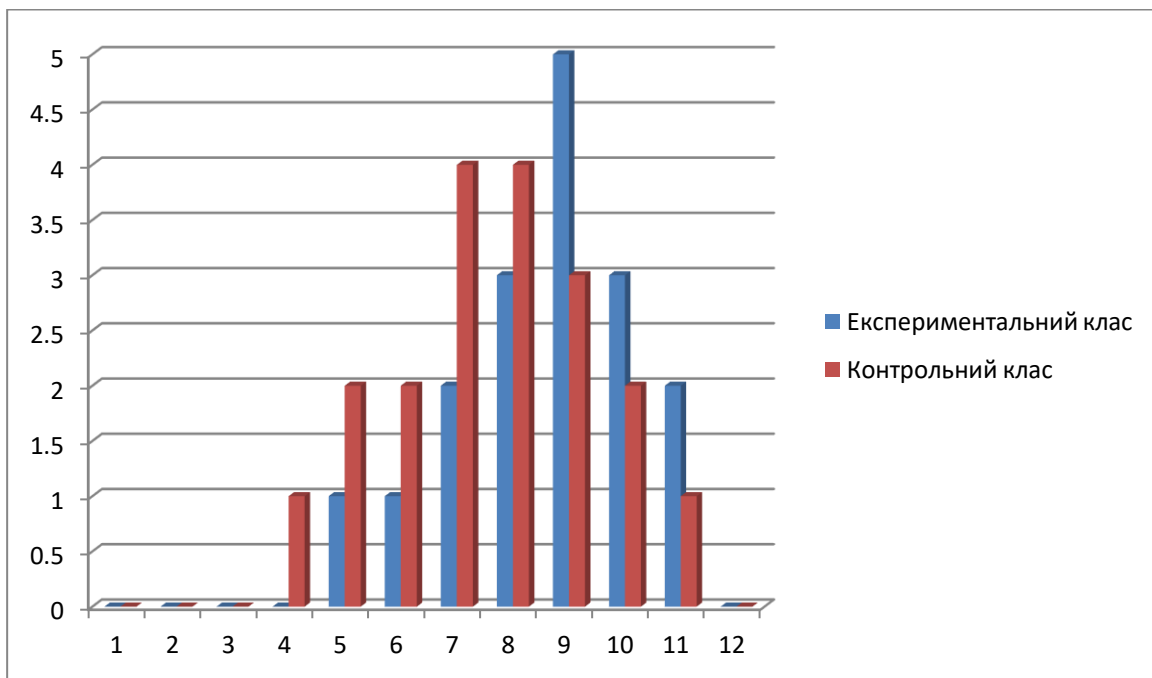
$$SS_y = 3242 - \frac{146^2}{17} = 2988,11$$

2. Сума скорельованих добутків

$$SS_{xy} = 3339 - \frac{144 * 146}{18} = 2171$$

3. Коефіцієнт

$$r = \frac{SP_{xy}}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \frac{2171}{\sqrt{2226,63 * 2988,11}} \approx 0,84166$$



З одержаних діаграм можна помітити, що в експериментальному класі більше вищих балів, ніж в контрольному. Це говорить про те, що розроблена методика є дійсно ефективною.

Висновки

Шкільні уроки – це головний майданчик для інтелектуального розвитку учнів, де вчитель має безпосередній вплив на своїх вихованців. Від його майстерності в організації пізнавальної діяльності залежить рівень зацікавленості учнів у навчанні, глибина їхніх знань та готовність до самоосвіти. Саме ці фактори, як свідчать сучасні психолого-педагогічні дослідження, визначають інтелектуальний розвиток особистості.

Так, вивчення математики, зокрема геометрії, дійсно впливає на світогляд учнів та сприяє їхньому всебічному розвитку. Особливо важливим є розвиток наукового стилю мислення та творчих здібностей учнів через вивчення геометрії. Вивчення геометрії вимагає аналітичного та логічного мислення для розв'язання задач та доведення тверджень. При цьому учні навчаються аналізувати та обґрунтовувати свої рішення, використовуючи логічні прийоми та аргументацію. Геометрія надає можливість учням створювати власні моделі та розв'язувати нетривіальні завдання, що сприяє розвитку творчого мислення.

Вивчення геометрії сприяє формуванню наукового стилю мислення, зокрема обґрунтованості, критичності та алгоритмічності. Учні навчаються систематично досліджувати та аналізувати математичні концепції та властивості геометричних об'єктів. У контексті реформування загальної середньої освіти, покращення підготовки учнів з геометрії може сприяти їхньому успіху в навчанні та подальшій професійній діяльності.

Таким чином, вивчення геометрії має великий потенціал для розвитку інтелектуальних здібностей учнів, формування їхнього наукового стилю мислення та підготовки до викликів сучасного світу.

Розроблена нами методика має добрий потенціал для досягнення визначених цілей і активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів. Надає можливості кожному учневі розвиватися власним темпом та здійснювати вибір шляху навчання, що відповідає його індивідуальним потребам і здібностям.

Збагачує навчальний процес за рахунок додаткових матеріалів, які допомагають краще зрозуміти та застосувати знання у різних контекстах.

Ця методика, загалом, створює сприятливе середовище для навчання, де кожен учень може розкрити свій потенціал та досягти успіху в математиці.

Під час написання магістерської роботи нами було опрацьовано значний обсяг методичної літератури, дидактичних матеріалів та наукових посібників. Ми впевнені, що запропонована методика стане цінним інструментом для вчителів, які прагнуть ефективно реалізувати процес навчання теми «Геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь тіл». Її застосування сприятиме розвитку у дітей просторової уяви, абстрактного мислення та інтуїтивного розуміння матеріалу, що призведе до самостійного формулювання правильних висновків. Такий підхід стимулює інтерес учнів до навчання, заохочуючи їх до поглибленого вивчення теми та самостійного дослідження.

Зрозумівши суть нової теми уроку та ознайомившись з основними властивостями нових просторових тіл, учні зможуть самостійно наводити приклади подібних геометричних фігур, з якими вони стикаються у повсякденному житті.

Головна перевага розробленої методики полягає в її адаптації до нових тенденцій у диференціації процесу навчання, зокрема до рівневого навчання математики. Ця методика дає вчителю можливість реалізовувати як індивідуальний підхід до навчання, так і принципи розвивального навчання на різних етапах уроку.

Список використаних джерел

- 1.Алексюк А. М. Методи навчання і методи учіння. К. : Знання, 1980. 48 с.
2. Програма з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. <https://osvita.ua/school/program/program-10-11/58878/>
3. Афанасьєва О.М. Математика (рівень стандарту) О.М. Афанасьєва, Я.С. Бродський, О.Л.Павлов, А.К. Сліпенко. Навчальна книга. Богдан 2011. 480 с.
4. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник. 3–тє вид., перероб. і допов. К.: Вища шк., 1989. 367 с.
5. Бевз Г. П. Урок математики в школі. К.: Рад. шк., 1977. 112 с.
6. Бевз Г.П. Математика (рівень стандарту). Генеза , 2011. 380 с.
7. Бех І. Д. Виховання особистості. Кн.1: Особистісно орієнтований підхід: теоретико-технологічні засади: наук, видання. К.: Либідь, 2003. 280 с.
8. Бех І. Д. Особистісно зорієнтоване виховання: науково–метод. посібник. К.: ІЗМН, 1999.179 с.
9. Блох О.Я. Методика викладання математики в середній школі Х.: Основа, 1992. 303 с.
10. Бурда М.І. Рівні навчальної діяльності // *Зміст і технології шкільної освіти: Матеріали звітної наукової конференції Інституту педагогіки АПН України*. 26 – 28 березня 2002 року. ЧЛ. К.: Пед. думка, 2002. С.4–5.
11. Грамбовська Л. В. Особистісно орієнтоване навчання геометрії в основній школі: Дис. канд. наук: 13.00.02. 2009. 250 с.
12. Дендеренко О. О., Шарко В. Д. Проблемне навчання як освітня технологія. *Відкритий урок*. 2002. № 2. С. 13 –14.
13. Дичаківська І. М. Інноваційні педагогічні технології: Навчальний посібник. К.: Академвидав, 2004. 352 с.
14. Жовнір Я.М. П'ятсот задач з методики викладання математики. Х.: Основа, 1997, 390 с.
15. Зінченко О. Г. Математика. 11 клас. Рівень стандарту: Комплексний зошит для контролю знань (Алгебра і початки аналізу). Х.: Вид–во

«Ранок» 2011.

16. Карпенчук С. Г. Теорія і методика виховання. К.: Вища школа, 1997. 304с.

17. Касьяненко М.Д. Підвищення ефективності навчання математики. К., 1980. 230 с.

18. Конет І. М. Теорія ймовірностей і математичної статистики. Кам'янець–Подільський: Кам'янець–Подільський Державний педагогічний університет, інформаційно–видавничий відділ, 1999. 214 с.

19. Роганін О. М. Математика. 11 клас. Рівень стандарту: Комплексний зошит для контролю знань (Геометрія). Х.: Вид–во «Ранок», 2011.

20. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: [підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів]. К. : Зодіак–ЕКО, 2000. 512 с.

21. Сікорський П.І. Теоретико–методологічні основи диференційованого навчання. Львів, 1998. 110 с.

22. Смалько О. А. Розвиток творчого мислення старшокласників на уроках математики з використанням інформаційних технологій навчання: дис. ... кандидата пед. наук : 13.00.02. К., 2003. 252 с.

23. Сморжевський Ю. Л. Прийоми евристичної діяльності учнів при вивченні геометрії. Диференційовані завдання. Кам'янець-Подільський: Абетка, 2004. 100 с.

24. Сморжевський Ю. Л. Диференційоване формування прийомів евристичної діяльності старшокласників на уроках стереометрії: дис. ... кандидата пед. наук: 13.00.02 / Сморжевський Юрій Людвігович К., 2009. 238 с.

25. Тарасенкова Н. А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики. Черкаси : Відлуння-Плюс, 2002. 400 с.