

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»
завідувач кафедри математики та економіки,
кандидат педагогічних наук, доцент
_____ Тарас ВІЙЧУК
«_____» _____ 2024 р.

Асимптотичні оцінки для інтегралів типу Лапласа за обмежень на міру.

Спеціальність: 014 «Середня освіта (Математика)»

Магістерська робота

*на здобуття професійної кваліфікації – вчитель математики закладу
загальної середньої освіти*

Автор роботи: Кукуян Анастасія Сергіївна

підпис

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук,
доцент
Галь Юрій Михайлович

підпис

Дрогобич, 2024

Завдання

на підготовку магістерської роботи

- 1. Тема:** Асимптотичні оцінки для інтегралів типу Лапласа за обмежень на міру.
- 2. Перелік питань, що підлягають висвітленню у кваліфікаційній роботі:**

3. Список рекомендованої літератури:

4. Етапи підготовки роботи:

№	Назва етапу	Термін виконання	Термін звіту перед керівником, кафедрою
1.	Вивчення й аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури; визначення вихідних положень дослідження (об'єкт, предмет, методи); формування мети; постановка завдань.		
2.	Підготовка 1-го розділу роботи		
3.	Підготовка 2-го розділу роботи.		
4.	Формування висновків. Оформлення роботи.		
5.	Перевірка роботи на плагіат		
6.	Попередній захист роботи і рецензування.		

5. Дата видачі завдання – _____ 2022 р.

6. Термін подачі роботи керівнику – _____ 2024 р.

7. З вимогами до виконання роботи і завданням ознайомлений _____
(підпис студента)

8. Керівник _____.

Захист магістерської роботи

Асимптотичні оцінки для інтегралів типу Лапласа за обмежень на міру (тема роботи)

Оцінка за стобальною шкалою: _____
Оцінка _____ за _____ національною _____ чотирибальною
шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

_____	Голова ЕК _____	_____
Дата	підпис	прізвище, ім'я
	Секретар ЕК _____	_____
	підпис	прізвище, ім'я

Анотація

Отримані асимптотичні оцінки для інтегралів типу Лапласа через максимум підінтегральної функції за обмежень, що накладаються лише на міру. Отримані наслідки для цілих кратних рядів Діріхле.

Annotation

Asymptotic estimates are obtained for Laplas-type integrals due to the maximum of the subintegral function under constraints imposed only the measure. Obtained consequences for integer multiples of Dirichlet series.

Зміст

1. Вступ
2. Асимптотичні співвідношення за обмежень на міру (базовий результат)
3. Аналоги для цілих функцій, зображених степеневими рядами та рядами Діріхле
4. Висновки
5. Список використаних джерел

1. Вступ

У даній роботі ми вживатимемо наступні позначення:

$\|a\| = a_1 + a_2 + \dots + a_p$ для вектора $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p$ для векторів $x = (x_1, \dots, x_p), y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{C}^p$

Нехай $p \geq 1$ і $\lambda = \{ \lambda_n : n \in \mathbb{Z}_+^p \}$ – фіксована послідовність $\lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \dots, \lambda_{n_p}^{(p)})$, $n = (n_1, \dots, n_p)$ така, що $0 \leq \lambda_k^{(j)} \uparrow +\infty$ ($k \rightarrow \infty$), $j = 1, 2, \dots, p$.

Через $S^p(\lambda)$ позначатимемо клас цілих функцій $F(Z)$, $Z \in \mathbb{C}^p$ зображених абсолютно збіжними для всіх $Z \in \mathbb{C}^p$ кратними рядами Діріхле

$$F(Z) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} F_n e^{\langle Z, \lambda_n \rangle}, \quad (1.1)$$

У випадку $p = 1 - S^{(1)}(\lambda)$ клас цілих рядів Діріхле від однієї змінної з невід'ємною зростаючою послідовністю показників $\lambda = \{ \lambda_k^{(1)} : k \in \mathbb{Z}_+ \}$.

Для $\sigma \in \mathbb{R}^p$ і функції $F \in S^p(\lambda)$ позначимо:

$$M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + i\tau)| : \tau \in \mathbb{R}^p\},$$

$$\mu(\sigma, F) = \max\{|f_n| e^{\sigma \cdot \lambda_n} : n \in \mathbb{Z}_+^p\},$$

$$\mathfrak{M}(\sigma, F) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} |F_n| e^{\langle \sigma, \lambda_n \rangle},$$

а також визначимо конус

$$\gamma(\mu) = \{ \sigma \in \mathbb{R}^p : \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \mu(t\sigma, F) = +\infty \},$$

$$\gamma(F) = \gamma(\mathfrak{M}) = \{ \sigma \in \mathbb{R}^p : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathfrak{M}(t\sigma, F) = +\infty \}.$$

Оскільки для кожної функції $F \in S^p(\lambda)$ і для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p$ за нерівністю Коші $\mu(\sigma, F) \leq \mathfrak{M}(\sigma, F)$, а також $\mathfrak{M}(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$, то замість будь-якого співвідношення між $\mu(\sigma, F)$ і $M(\sigma, F)$ можна розглядати подібне співвідношення між $\mu(\sigma, F)$ і $\mathfrak{M}(\sigma, F)$. Іншими словами, досить обмежитися розглядом рядів виду (1.1) з невід'ємними коефіцієнтами $F_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+^p$) і це не зменшить загальності. У цьому випадку, якщо $f(x)$ – довільна невід'ємна неперервна функція на R_+^p така, що $f(\lambda_n) = F_n$, а $n_j(t) = \sum_{\lambda_k} 1$ – лічильна

функція послідовності j -их компонент векторної послідовності λ , то ряд (1.1) можна записати для $\sigma \in \mathbb{R}^p$ у вигляді

$$F(\sigma) = \int_{\mathbb{R}_+^p} f(x) e^{<x, \sigma>} dn_1(x) \dots dn_p(x_p).$$

Тому природно розглядати замість рядів Діріхле функції $F(\sigma)$ визначені на $\mathbb{R}^p$ за допомогою збіжних для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p$ інтегралів

$$F(\sigma) = \int_{\mathbb{R}_+^p} f(x) e^{<\sigma, x>} v(dx), \quad (1.2)$$

де $f(x)$ – додатна неперервна на $\mathbb{R}_+^p$ функція, а v – злічено-адитивна на $\mathbb{R}_+^p$ локально обмежена міра з необмеженим носієм. Через $v(E)$ позначимо v -міру, v -вимірної множини $E \in \mathbb{R}_+^p$, тобто $v(E) = \int_{\mathbb{R}_+^p \cap E} v(dx)$, а через $\max_p(E)$ позначимо Лебегову міру в $\mathbb{R}^p$ локально вимірної за Лебегом множини $E \subset \mathbb{R}^p$.

Нехай ще:

L – клас додатних неперервних на $[0, +\infty)$ функцій $\psi(t)$ таких, що $\psi(t) \rightarrow +\infty (t \rightarrow +\infty)$

L^+ – підклас L , у який входять зростаючі на $[0, +\infty)$ функції

L_1 – клас функцій $\psi \in L$ таких, що $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty$

$L_1^+ = L_1 \cap L^+$, L_2 – клас диференційованих вгнутих функцій $\omega \in L^+$ таких, що $\frac{1}{t} = O(\omega'(t)) (t \rightarrow +\infty)$

L_2^0 – клас функцій $\omega \in L_2$ таких, що для кожної функції

$$\varepsilon(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow +\infty) \quad \omega'(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow +\infty) \quad i \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \omega'((1-\varepsilon(t))t) / \omega'(t) = 1$$

$L_1(\Phi)$ – клас функцій $\psi \in L$ таких, що $\int_0^{\Phi(t)} \frac{du}{\psi(u)} = o(1) (t \rightarrow +\infty)$

$C(r)$ – прямий необмежений циліндр з віссю $\{\sigma \in \mathbb{R}^p: \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_p\}$ в основі якого $(p-1)$ – вимірна куля радіуса r з центром у початку координат, $h_v(\sigma) = \sup\{<x, \sigma>: x \in \text{supp } v\}$, $\sigma \in \mathbb{R}^p$ – опорна функція множини $\text{supp } v$, $\nabla u(\sigma) = (\frac{\partial}{\partial \sigma_1}, \frac{\partial}{\partial \sigma_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \sigma_p})u(\sigma)$,

$f(Z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} f_n Z^n$ – ціла функція, $Z \in \mathbb{C}^p, p = 1$,

$$\mathfrak{M}_f(r) = \max\{|f(Z)|: |Z| = r_1, \dots, |Z_p| = r_p\}, r = (r_1, \dots, r_p),$$

$$\mathfrak{M}_f(r) = \max_n \{|f| r^n: n \in \mathbb{Z}_+^p\}, r = (r_1, \dots, r_p) \quad - \text{максимальний член}$$

функції $f(Z)$.

Метою даної роботи є отримання асимптотичних оцінок для інтегралів типу Лапласа (1.2) через максимум підінтегральної функції за обмежень, що накладаються лише на міру ν . При цьому основним нашим завданням є отримання наслідків для цілих кратних рядів Діріхле.

Об'єктом дослідження є класи цілих кратних рядів Діріхле та кратних інтегралів типу Лапласа.

Предметом дослідження є властивості деяких характеристик цілих кратних рядів Діріхле і функцій, зображених додатними інтегралами типу Лапласа.

Для розв'язування сформульованої задачі застосовуються методи математичного і функціонального аналізу та теорії аналітичних функцій.

2. Асимптотичні співвідношення за обмежень лише на міру (базовий результат)

Нехай $v(a, b] = v(\{x \in \mathbb{R}_+^p: a < \|x\| \leq b\})$. Спочатку доведемо наступну теорему [5]:

Теорема 2.1. нехай F – має вигляд (1.2). Якщо $\omega \in L_2$ і
 $(\exists \psi_1 \in L_1^+)(\exists \psi_2 \in L_1: \lim_{n \rightarrow \infty} \omega'(\psi_1^{-1}(t)) \ln^+ v(t - \sqrt{\psi_2(t)}: t + \sqrt{\psi_2(t)}) \leq d$ (2.1)

то

$$\omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \leq d + \sigma(1) \quad (2.2)$$

при $|\sigma| \rightarrow +\infty (\sigma \in K \setminus E)$ для кожного конуса $K \subset \mathbb{R}^p$ з вершиною в точці $O=(0, \dots, 0)$ такого, що

$$\bar{K} \setminus \{O\} \subset \gamma(F) = \{\sigma \in \mathbb{R}^p: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln F(t\sigma) = +\infty\};$$

множина $E \subset \mathbb{R}^p$ така, що

$$meas_p(E \cap C(R)) = O(r^{p-1}) \quad (R \rightarrow +\infty).$$

Доведення. Доведемо насамперед, що

$$\ln F(\sigma) \leq (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F) \quad (2.3)$$

при $|\sigma| \rightarrow +\infty (\sigma \in K \setminus E)$.

За умовою $\omega \in L_2$ маємо $\frac{1}{\omega'(t)} = O(t)(t \rightarrow +\infty)$, тому з (2.3) випливає

$$\ln^+ v(t - \sqrt{\psi_2(t)}) = O(\psi_1^{-1}(t))(t \rightarrow +\infty) \quad (2.4)$$

Перевіримо, чи існує функція $\psi_0 \in L_1^+$ така, що

$$\ln^+ v(t - \sqrt{\psi_2(t)}) = o(\psi_0^{-1}(t))(0 \leq \psi_1(0) \leq t \rightarrow +\infty) \quad (2.5)$$

При цьому визначимо $\psi(x)$ і при $x < 0$ так, щоб $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\psi_0(x)} < +\infty$.

Враховуючи, що для кожного $A > 0$

$$\int_0^A \frac{dt}{\psi(t)} = \int_{\psi(0)}^{\psi(A)} \frac{d\psi^{-1}(t)}{t} = \frac{A}{\psi(A)} + \int_{\psi(0)}^{\psi(A)} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt,$$

отримаємо, що $\psi \in L_1^+$ за умови $t = O(\psi(t))(t \rightarrow +\infty)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\int_0^{+\infty} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt < +\infty \quad (2.6)$$

Проте, якщо $\psi(t)$ – не спадна, то для $0 < B < A < +\infty$

$$\int_B^A \frac{dt}{\psi(t)} \geq \frac{A-B}{\psi(A)}, \quad \int_B^{+\infty} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt \geq \frac{\psi^{-1}(B)}{B},$$

звідки, якщо $\psi \in L_1^+$ або для ψ виконується (2.6), то $t = o(\psi(t))(t \rightarrow +\infty)$.

Отже, якщо $\psi_1 \in L_1^+$, то для ψ_1 виконується умова (2.6) з $\psi \equiv \psi_1$.

Залишається тепер покласти $\int_t^{+\infty} \frac{\psi_1^{-1}(u)}{u^2} du$ і ψ_0 вибрати таку, що $\psi_0(x)$ при $x \geq$

0 дорівнює оберненій функції до функції $(l(t))^{-\frac{1}{2}} \psi_1^{-1}(t)$ при $t \geq \psi_1(0)$,
 $\psi_0(x) = \psi_0(0)(1+x^2)$ при $x < 0$. Справді, $(l(t))^{-1/2} \uparrow +\infty (t \rightarrow +\infty)$, $\psi_0(0) > 0$ і

$$\int_{\psi_1(0)}^{+\infty} \frac{\psi_0^{-1}(t)}{t^2} dt = - \int_{\psi_1(0)}^{+\infty} (l(t))^{-\frac{1}{2}} dl(t) = 2(l(\psi_1(0)))^{-\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Тобто $\psi_0 \in L_1^+$, а також

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\psi_0(x)} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\psi_0(x)} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi_0(x)} = \frac{1}{\psi_0(0)} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi_0(x)} < +\infty.$$

Залишилось зауважити, що $\psi_1^{-1}(t) = o(\psi_0^{-1}(t))(t \rightarrow +\infty)$ і з (2.4) негайно

отримаємо (2.5)

Нехай тепер для $b \in \mathbb{R}^p$ і $e_0 = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^p$

$$E_1(b, \psi) = \{\sigma = b + te_0: g''(t) \geq \psi(g'(t))\}, E_1(\psi) = \bigcup_{\|b\|=0} E_1(b, \psi),$$

$$E_2(b, \psi) = \{\sigma = b + te_0: g'(t) \geq \psi(g(t))\}, E_2(\psi) = \bigcup_{\|b\|=0} E_2(b, \psi).$$

Нехай для $t \geq \psi_1(0) + 1$

$$\varepsilon(t) = \sup \left\{ \frac{1}{\psi_0^{-1}(u)} \ln^+ v(u - \sqrt{\psi_2(u)}; u + \sqrt{\psi_2(u)}) : u \geq t \right\}$$

та для $t < \psi_1(0) + 1$

$$\varepsilon(t) = \left\{ \frac{1}{\psi_0^{-1}(t)} \ln^+ v(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}) \right\}^v,$$

де a^v для функції $a(t)$ означає $a(t)^v = 0$ для $t < \psi_1(0) + 1$, і таких t , що $a(t)$ не визначено і $a^v(t) = \max\{a(t); 0\}$ у протилежному випадку.

За умовою $\varepsilon(t) \searrow 0 (t \rightarrow +\infty)$. Зауважимо, що $\|\nabla \ln F(\sigma)\| = g'(t)$ при $\sigma = b + te_0$, де $\nabla u = (\frac{\partial}{\partial \sigma_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \sigma_p}) u$.

Застосуємо тепер лему [1, с.359] з функціями $g_0(t) = g'(t)$,

$$\psi(t) = \psi_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{c} \psi_2(t), & t \geq 0 \\ \psi_2(0) (\frac{1}{c} + t^2), & t < 0 \end{cases}$$

Для всіх $\sigma \notin E_1(\psi_2)$ маємо при $\sigma = b + te_0$

$$g''(t) \leq \psi_2(g'(t)) = \psi_2(\|\nabla \ln F(\sigma)\|),$$

і отже

$$\ln F(\sigma) \leq \ln \frac{c}{c-1} + \ln \mu(\sigma, F) + \varepsilon(\|\nabla \ln F(\sigma)\|) \psi_0^{-1}(\|\nabla \ln F(\sigma)\|).$$

Застосовуючи лему [1, с.359] з функціями $g_0(t) = g(t)$ і $\psi(t) = \psi_0(t)$, при $\sigma \notin E_2(\psi_0)$ і $\sigma = b + te_0$ отримаємо $\psi_0^{-1}(\|\nabla \ln F(\sigma)\|) = \psi_0^{-1}(g'(t)) \leq g(t) = \ln F(\sigma)$, тобто

$$\ln F(\sigma) \leq \ln \frac{c}{c-1} + \ln \mu(\sigma, F) + \varepsilon(\|\nabla \ln F(\sigma)\|) \ln F(\sigma) \quad (2.7)$$

Далі, оскільки функція $\ln F(b + te_0)$ — опукла при кожному фіксованому $b \in \mathbb{R}^p$. Тому для кожного фіксованого $\sigma \in \mathbb{R}^p$ і $\Delta t > 0$ маємо

$$\frac{\ln F(\sigma + \Delta te_0) - \ln F(\sigma)}{\Delta t |e_0|} \geq \frac{\ln F(\sigma + \Delta te_0) - \ln F(0)}{|\sigma + \Delta te_0|}.$$

Переходячи в останній нерівності до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, отримаємо для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p$

$$\|\nabla \ln F(\sigma)\| \geq \frac{\ln F(\sigma) - \ln F(0)}{|\sigma|} \quad (2.8)$$

Залишилось зауважити, що $\frac{1}{|\sigma|} \ln F(\sigma) \rightarrow +\infty$ ($|\sigma| \rightarrow +\infty, \sigma \in K$ і тому з (2.8) маємо, що $\|\nabla \ln F(\sigma)\| \rightarrow +\infty$ при $|\sigma| \rightarrow +\infty (\sigma \in K)$). Позаяк $\|\nabla \ln F(\sigma)\| \rightarrow +\infty (|\sigma| \rightarrow +\infty, \sigma \in K)$, із (2.7) при $|\sigma| \rightarrow +\infty, \sigma \in K(E_1(\psi_2) \cup E_2(\psi_0))$

отримаємо співвідношення (2.3). Із співвідношення (2.3) при $|\sigma| \rightarrow +\infty (\sigma \in K \setminus E_*)$ отримуємо

$$\ln \mu(\sigma, F) \geq \frac{1}{2} \ln F(\sigma), \quad (2.9)$$

де $E_* E_1(\psi_2) \cup E_2(\psi_0)$.

Визначимо для $t \geq \psi_1(0) + 1$

$$d(t) = \sup \{ \omega'(\psi_1^{-1}(u)) \ln^{+v} (u - \sqrt{\psi_2(u)}; u + \sqrt{\psi_2(u)}) : u \geq t \}.$$

Нехай $l_1(t) = \left(\int_t^{+\infty} \frac{du}{\psi_2(u)} \right)$, $\psi_2^*(t) = \psi_2(t)(l_1(t))^{1/2}$. Зауважимо, що $\psi_2^*(t) < \psi_2(t)(t \rightarrow +\infty)$ і

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi_2^*(t)} = - \int_0^{+\infty} (l_1(t))^{-1/2} dl_1(t) = 2(l_1(0))^{1/2} < +\infty,$$

тобто $\psi_2^*(t) \in L_1$. Крім цього, $l_1(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow +\infty)$. Виберемо $c = c(\sigma) = (l_1(\|\nabla \ln F(\sigma)\|))^{-1/2}$ і до нерівності Чебишова застосуємо лему [1, с.359] функціями $g_0(t) = g'(t)$,

$$\psi(t) = \psi_3(t) = \begin{cases} (l_1(t))^{1/2} \psi_2^*(t), & t \geq 0 \\ (l_1(0))^{1/2} \psi_2^*(0)(1+t^2), & t < 0. \end{cases}$$

Для всіх $\sigma \in E_1(\psi_3)$ послідовно маємо при $\sigma = b + te_0$

$$g''(t) \leq \psi_3(g'(t)) = \psi_3(\|\nabla \ln F(\sigma)\|),$$

тобто, враховуючи, що згідно з (2.8) $\|\nabla \ln F(\sigma)\| \rightarrow +\infty (|\sigma| \rightarrow +\infty, \sigma \in K)$,

$$cg''(t) \leq \psi_2(\|\nabla \ln F(\sigma)\|)$$

і отже, при $|\sigma| \rightarrow +\infty (\sigma \in K \setminus E_1(\psi_3))$

$$F(\sigma) \leq \frac{c}{c-1} \mu(\sigma, F) v(\bar{u} - \sqrt{\psi_2(\bar{u})}; \bar{u} + \sqrt{\psi_2(\bar{u})}),$$

де $\bar{u} = \|\nabla \ln F(\sigma)\|$. Звідси, за теоремою Лагранжа про скінченні прирости,

скориставшись монотонністю $\omega'(t)$ при $|\sigma| \rightarrow +\infty (\sigma \in K \setminus E_1(\psi_3))$ маємо

$$\begin{aligned} & \omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \leq \\ & \leq \omega'(\ln \mu(\sigma, F)) \left\{ \ln \frac{c}{c-1} + \ln^{+v}(\bar{u} - \sqrt{\psi_2(\bar{u})}; \bar{u} + \sqrt{\psi_2(\bar{u})}) \right\} = \\ & = o(1) + \omega'(\ln \mu(\sigma, F)) \ln^{+v}(\bar{u} - \sqrt{\psi_2(\bar{u})}; \bar{u} + \sqrt{\psi_2(\bar{u})}). \end{aligned}$$

Залишається, як і вище, знову застосувати лему [1,с.359] цього разу з функціями $g(t) = g(t)$ і $\psi(t) = \psi_0(\frac{t}{2})$. Тому при $|\sigma| \rightarrow +\infty (\sigma \in K(E(\psi) \cup E_2(\psi_0(\frac{t}{2})))$

$E_2(\psi_0(\frac{t}{2}) \cup E_*)$ послідовно за допомогою нерівності(2.9) для $\sigma = b + te_0$ маємо

$$\begin{aligned} \omega'(\ln \mu(\sigma, F)) &\leq \omega'(\frac{1}{2} \ln F(\sigma)) = \omega'(\frac{1}{2} g(t)) \leq \omega'(\psi^{-1}(g'(t))) \\ &= \omega'(\psi_1^{-1}(\|\nabla \ln F(\sigma)\|)) = \omega'(\psi_1^{-1}(\bar{u})), \end{aligned}$$

позаяк $\bar{u} = \|\nabla \ln F(\sigma)\| \rightarrow +\infty (|\sigma| \rightarrow +\infty, \sigma \in K)$. Тому при $|\sigma| \rightarrow +\infty (\sigma \in K, \sigma \notin E_1(\psi_2 \cup E_2(\psi_0) \cup E_1(\psi_3) \cup E_2(\psi_0(\frac{t}{2}))) = E)$ із (2.21) отримуємо

$$\omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \leq d(\bar{u}) + o(1).$$

Залишилось пригадати, що $\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} (u) = d$.

Доведемо тепер, що $meas_p(E \cap C(R)) = O(R^{p-1})(R \rightarrow +\infty)$, де $C(R)$ – необмежений циліндр в $\mathbb{R}^p$, описаний у вступі. Перевіримо, чи останнє співвідношення виконується для $E_1(\psi)$. Для решти множин, що утворюють E , перевірка здійснюється подібно. Справді, нехай $E_1(b)$ та E_1 – множини, у які перейдуть відповідно множини $E_1(b, \psi)$ $E_1(\psi)$ при повороті системи координат, при якому промінь $\{x = (x_1, \dots, x_p): x_1 = x_2 = \dots = x_p > 0\}$ переходить у додатну піввісь Ox_1 . Тоді, циліндр $C(R)$ перейде у циліндр $C'(R) = \{x = (x_1, \dots, x_p): x_2^2 + \dots + x_p^2 \leq R^2\}$ і для $K(R) = \{x = (x_2, \dots, x_p): x_2^2 + \dots + x_p^2 \leq R^2\}$ маємо

$$meas_p(E_1(\psi) \cap C(R)) = meas_p(E_1 \cap C'(R)) = \int_{K(R)} (\int_{E_1(b)} dx_1) dx_2 \dots dx_p.$$

Зауважимо, що насправді $E_1(b) = E_1(x_2, \dots, x_p)$. Враховуючи, що за лемою [1, с.359] $meas_1 E_1(b, \psi) = a < +\infty$ де $A = A(\psi)$ стала, що залежить лише від ψ і не залежить від $b \in \mathbb{R}^p$, звідси отримаємо, що

$$meas_p(E_1(\psi) \cap C(R)) \leq BA(\psi)R^{p-1}.$$

Тому

$$meas_p(E \cap C(R)) \leq B (A(\psi_2) + A(\psi_0) + A(\psi_3) + A(\psi_0(\frac{t}{2}))) R^{p-1}.$$

Остання нерівність завершує доведення теореми 2.1.

Відзначимо, що у процесі доведення теореми 2.1 доведено також наступне твердження, яке з іншого боку є прямим наслідком теореми 2.1.

Наслідок 2.1. Якщо F має вигляд (1.2) і виконується умова

$$\int_0^{+\infty} \frac{d \ln v(0; t]}{t} < +\infty,$$

то співвідношення (2.3) виконується при $|\sigma| \rightarrow +\infty (\sigma \in K \setminus E)$ для кожного конуса $K \subset \mathbb{R}^p$ з вершиною в точці $O = (0, \dots, 0)$ такого, що

$$\bar{K} \setminus \{O\} \subset \gamma(F);$$

локально вимірною множиною $E \subset \mathbb{R}^p$ така, що

$$meas_p(E \cap C(R)) = O(R^{p-1}) \quad (R \rightarrow +\infty).$$

Доведення. Доведемо наслідок безпосереднього на основі теореми 2.1.

Виберемо $\psi_2(t) = t^2 (t \geq 1), \psi_2(t) \equiv 1 (0 \leq t \leq 1)$. Враховуючи, що

$$\int_0^{+\infty} \frac{d \ln v(0; t]}{t} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} \ln v(0; t] dt,$$

то вибираючи $l(u) = \int_u^{+\infty} \frac{1}{t^2} \ln v(0; t] dt, C(u) = (l(u))^{-1/2}$, та функцію ψ таку,

що обернена до неї $\psi^{-1}(t) = C(t) \ln v(0, t]$, отримуємо $C(u) \searrow +\infty (u \rightarrow +\infty)$.

Зрозуміло, що можна вибирати $\psi_1 \in L^+$ таку, що $\psi^{-1} \leq \psi_1^{-1}(t)$ та $\int_0^{+\infty} \frac{\psi_1^{-1}(t)}{t^2} dt < +\infty$, тому

$$\int_0^{+\infty} \frac{\psi_1^{-1}(t)}{t^2} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{dl(t)}{(l(t))^{1/2}} = 2(l(0))^{1/2} < +\infty,$$

а також

$$\int_0^{+\infty} \frac{\psi_1^{-1}(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{d\psi^{-1}(t)}{t} = \int_{\psi_1^{-1}(0)}^{+\infty} \frac{dx}{\psi_1(x)}.$$

Отже, $\psi_1 \in L_1^+, \psi_2 \in L_2$ та

$$\ln v(0; 2t] = o(\psi_1^{-1}(t)),$$

тобто виконується умова (2.5). Звідси випливає справедливність при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$) співвідношення (2.3), де конус K і E – множини такі, як у формулюванні наслідку. Наслідок 2.1 доведено.

3. Аналоги для цілих функцій, зображуваних степеневими рядами і рядами

Діріхле

Наведемо деякі наслідки з доведеної теореми 2.1.

Наслідок 3.1. Нехай $F \in S^p(\lambda)$, $\omega \in L_2$ і $n_\lambda(a, b] = n(b) - n(a)$, $n(t) =$

$\sum_{\|\lambda_n\| \leq t, F_n \neq 0}$ 1. Якщо

$$(\exists \psi_1 \in L_1^+)(\exists \psi_2 \in L_1): \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega'(\psi_1^{-1}(t)) \ln^{+} n_\lambda(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}) = 0,$$

то

$$\omega(\ln M(\sigma, F)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) = o(1)$$

при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$), де K і E описані в теоремі 2.1.

Для доведення досить в теоремі 2.1 прийняти $d = 0$, а за міру $\nu(dx)$ – міру таку, що для кожної обмеженої множини $E \subset \mathbb{R}_+^p$:

$$\nu(E) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \delta_n(E),$$

де $\delta_n(E) = \begin{cases} 1, & \lambda_n \in E, F_n \neq 0 \\ 0, & \lambda_n \notin E \end{cases}$ – послідовність мір, зосереджених в точках

послідовності $\lambda = (\lambda_n)$. Тоді

$$\nu(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}) = n_\lambda(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}) \text{ для всіх } t \in \mathbb{R}_+.$$

Наступні наслідки можна отримати також з відповідної теореми з [2].

Наслідок 3.2. Нехай $F \in S^1(\lambda)$,

$$\mu_{1/2}(\sigma) \equiv \sup_{s=n}^{+\infty} \{ \sum |F_s| (\lambda_n^{(1)})^{1/2+n} e^{\sigma \lambda_n^{(1)}} : n \geq 0 \}, n > 0.$$

Тоді

$$M(\sigma, F) \leq (1 + o(1)) \sigma \mu_{1/2}(\sigma)$$

при $\sigma \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in [0, +\infty) \setminus E$, E – множина скінченної Лебегової міри).

Доведення. Нехай $H_0(t) = \sum_{\lambda_n^{(1)} > t} |F_n|$. Тоді для $\sigma > 0$, інтегруючи частинами,

отримуємо

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}(\sigma, F) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |F_k| e^{\sigma \lambda_k^{(1)}} = - \int_0^{+\infty} e^{\sigma t} dH_0(t) + \\ |F|_0 &= \sigma \int_0^{+\infty} e^{\sigma t} H_0(t) dt + \mathfrak{M}(0, F),\end{aligned}\quad (3.1)$$

Зауважимо тепер, що для міри ν на $\mathbb{R}_+$ такої, що $\nu((a, b]) = \int_a^b \frac{dx}{(x)^{1/2+n}}$ для $0 \leq a < b$ та $\psi_2(t) \equiv t^{1+n}$ маємо

$$\begin{aligned}\nu(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}) &= \frac{2\sqrt{\psi_2(t)}}{t^{1/2+n}} (1 + o(1)) = \frac{(2 + o(1))}{t^{n/2}} = \\ &= o(1)(t \rightarrow +\infty).\end{aligned}$$

Застосуємо тепер теорему 2.1 з $\omega(t) \equiv t$. Тоді $\omega'(t) \equiv 1$ і, отже, умова (2.1) виконується з $d=0$, тому за теоремою 2.1 отримуємо, що

$$\ln \int_0^{+\infty} e^{\sigma t} H_0(t) dt - \ln \mu_{1/2}^*(\sigma) \leq o(1) \quad (3.2)$$

при $\sigma \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in [0, +\infty) \setminus E$ – скінченної міри), де $\mu_{1/2}^*(\sigma) = \sup\{e^{\sigma t} H_0(t) \sqrt{t} : t \geq 0\}$. Зауважимо, що для всіх $t \in [\lambda_k^{(1)}; \lambda_{k+1}^{(1)})$ і $\sigma > 0$

$$e^{\sigma t} H_0(t) t^{\frac{1}{2}+n} \leq e^{\sigma \lambda_{k+1}^{(1)}} \sum_{s=k+1}^{+\infty} |F_s| (\lambda_{k+1}^{(1)})^{\frac{1}{2}+n}.$$

Тому $\mu_{1/2}(\sigma) = \mu_{1/2}^*(\sigma)$. Отже, з (3.1) і (3.2) отримуємо послідовно при $\sigma \rightarrow +\infty$ ($\sigma \notin E$)

$$\int_0^{+\infty} e^{\sigma t} H_0(t) dt \leq (1 + o(1)) \mu_{1/2}^*(\sigma) = (1 + o(1)) \mu_{1/2}(\sigma),$$

тобто

$$\mathfrak{M}(\sigma, F) \leq \sigma(1 + o(1)) \mu_{1/2}(\sigma)$$

і наслідок 3.2 доведено.

Наслідок 3.3. Нехай функція ψ неперервна неспадна на $[0, +\infty)$ така, що $\ln \psi(t) = o(\psi^{-1}(t))$, $\ln \psi_0(t) = o(t)(t \rightarrow +\infty)$ для деякої функції $\psi_0 \in L_1^+$ та

$\frac{e^{\sigma t}}{\psi(t)} \nearrow$ для кожного $\sigma > 0$,

$$\mu_\psi(\sigma) \equiv \sup \left\{ \frac{\sum_{s=n}^{+\infty} |F_s| e^{\sigma \lambda_n^{(1)}}}{\psi(\lambda_n)} : n \geq 0 \right\}$$

для $F \in S^1(\lambda)$. Тоді

$$\ln M(\sigma, F) \leq (1 + o(1)) \ln \mu_\psi(\sigma)$$

при $\sigma \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in [0 + \infty) \setminus E$, E – множина скінченної міри).

Доведення. Для міри ψ на $\mathbb{R}_+$ такої, що $v((a, b]) = \int_a^b \psi(x) dx$ для $0 \leq a < b$,

та $\psi_2(t) = t^{3/2}$ при $t \rightarrow +\infty$ маємо

$$v(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}) = 2\psi((1 + o(1))t) t^{3/4}.$$

Звідки, при $\omega(t) = \ln t$, $\psi_1(t) \equiv 2\psi_0(t)$ (тобто $\psi_0^{-1}(t) = \psi_1^{-1}(1/2 t)$) маємо

$$\frac{1}{\psi_1^{-1}(t)} \ln v(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}) \leq \frac{3}{4} \frac{\ln t}{\psi_0^{-1}(2t)} + \frac{\ln \psi(2t)}{\psi_0^{-1}(2t)} + o(1) = o(1),$$

тобто виконується умова (2.1) теореми 2.1 при $d = 0$.

Враховуючи, що $\ln \sigma = o(\ln M(\sigma, F))$ ($\sigma \rightarrow +\infty$) за теоремою 2.1 отримуємо, що при $\sigma \rightarrow +\infty$ ($\sigma \notin E$ – скінченної міри)

$$\ln \ln \int_0^{+\infty} e^{t\sigma} H_0(t) dt - \ln \ln \mu_\psi(\sigma) \leq o(1),$$

звідки

$$\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \leq (1 + o(1)) \ln \mu_\psi^*(\sigma),$$

де $\mu_\psi^*(\sigma) = \sup\{H_0(t)e^{t\sigma}/\psi(t) : t > 0\}$.

Залишилося зауважити, що при $t \in [\lambda_k^{(1)}, \lambda_{k+1}^{(1)})$

$$e^{\sigma t} \frac{H_0(t)}{\psi(t)} \leq \frac{e^{\sigma \lambda_{k+1}^{(1)}}}{\psi(\lambda_{k+1}^{(1)})} \sum_{s=k+1}^{+\infty} |F_s|,$$

тобто

$$\mu_\psi(\sigma) = \mu_\psi^*(\sigma).$$

Наслідок 3.3 доведено повністю.

При $\psi(x) \equiv 1$ отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 3.4. Нехай $F \in S^1(\lambda)$ і $\mu_0(\sigma) = \sup_n \{e^{\sigma \lambda_n^{(1)}} \sum_{s=n}^{+\infty} |F_s| : n \geq 0\}$.

Тоді

$$\ln M(\sigma, F) \leq (1 + o(1)) \ln \mu_0(\sigma) \quad (3.3)$$

$$\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln \mu_0(\sigma) \quad (3.4)$$

при $\sigma \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in [0, +\infty) \setminus E$, E – скінченної міри).

Для доведення досить зауважити, що у випадку $\psi(t) \equiv 1$ умови наслідку 3.3 виконуються з $\psi_0(t) = t^2$, а крім цього $\mu_\psi(\sigma) \equiv \mu_0(\sigma)$ та при $\sigma > 0$

$$\mathfrak{M}(\sigma, F) \geq e^{\sigma \lambda_n^{(1)}} \sum_{s=n}^{+\infty} |F_s|,$$

тобто

$$\mathfrak{M}(\sigma, F) \geq \mu_0(\sigma),$$

Відзначимо, що величину $\mu_0(\sigma)$ вперше введено в [3]. При цьому наступні елементарні нерівності

$$\mu_0(\sigma) \leq \mathfrak{M}(0, F) + \frac{\sigma}{\varepsilon} \mu_0(\sigma + \varepsilon).$$

де $\sigma \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, використовують для знаходження необхідних і достатніх умов для того, щоб існували додатні сталі A і B такі, що для функції $F \in S^1(\lambda)$

$$\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \leq A\Phi(\sigma + B)$$

для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$ і для деякої фіксованої функції $\Phi \in L^+$, такої, що похідна $\Phi'(x)$ – неперервна і зростаюча до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$.

З огляду на те, що співвідношення (3.4) виконується при $\sigma \rightarrow +\infty$ ($\sigma \notin E$ – скінченної міри) для кожного цілого ряду Діріхле $F \in \bigcup_{\lambda} S^1$, то наслідок 3.4 можна назвати інваріантною формою теореми Бореля. Добре відома теорема Бореля стверджує, що у випадку цілих функцій $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ і класичного максимального члена $\mu_f(r) = \max\{|a_k| r^k : k \geq 0\}$, $\ln M_f(r) = (1 + o(1)) \ln \mu_f(r)$ при $r \rightarrow +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри [4]. Зауважимо, що у цьому випадку за наслідком 3.4 $\ln G_f(r) = (1 + o(1)) \ln \mu_f^0(r)$ при $r \rightarrow +\infty$ зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри, де $G_f(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$, $\mu_f^0(r) = \sup\{(\sum_{k=n}^{+\infty} |a_k|) r^n : n \geq 0\}$. Звідси, зокрема впливає, що при $r \rightarrow +\infty$ зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри

$$\ln \mu_f(r) = (1 + o(1)) \ln \mu_f^0(r)$$

Ta

$$\ln M_f(r) = (1 + o(1)) \ln \mu_f^0(r).$$

4. Висновки

Таким чином, у даній магістерській роботі розглянуто властивості інтегралів типу Лапласа без додаткових умов гладкості та рівномірних за підінтегральною функцією. Отримано оцінки зверху інтегралів такого типу лише за обмежень на міру.

Основний результат на який ми опиралися сформульований у теоремі 2.1. Доведені нами наслідки цього результату для цілих функцій, зображених степеневими рядами і рядами Діріхле, наведені у наслідках 3.1-3.4.

5. Список використаних джерел

1. W. K. Hayman. Subharmonic functions V.2. – London etc.: Acad. Press, 1989.-XXI, 591p.
2. О. Б. Скасків. Про деякі співвідношення між максимумом модуля і максимальним членом цілого ряду Діріхле // Матем. замітки.-1999.-Т. 66.-N2.-с.282-292
3. М. М. Шеремета. Про зростання цілого ряду Діріхле // Укр. матем. журн.-1999.-Т.51, N8.-с.1149-1153
4. R. R. London. Note on a lemma Rosenbloom //Quart. j. math.-1970.V21, N.81.-р.67-69
5. О. Б. Скасків, О. М. Трокало. Асимптотичні оцінки інтегралів Лапласа // Мат. студії.-2002.-Т.18, N2.-с.125-146