

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»
завідувач кафедри математики та економіки,
кандидат педагогічних наук, доцент
_____ Тарас ВІЙЧУК
« ____ » _____ 2024 р.

**Асимптотичні оцінки для інтегралів типу Лапласа за
обмежень на міру і швидкість зростання функції.**

Спеціальність: 014 «Середня освіта (Математика)»

Магістерська робота

*на здобуття професійної кваліфікації – вчитель математики закладу загальної
середньої освіти*

Автор роботи: Гамазіна Надія Андріївна

_____ *підпис*

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук,
доцент

Галь Юрій Михайлович

_____ *підпис*

Дрогобич, 2024

Завдання
на підготовку магістерської роботи

1. Тема: Асимптотичні оцінки для інтегралів типу Лапласа за обмежень на міру і швидкість зростання функції.

2. Перелік питань, що підлягають висвітленню у кваліфікаційній роботі:

3. Список рекомендованої літератури:

4. Етапи підготовки роботи:

№	Назва етапу	Термін виконання	Термін звіту перед керівником, кафедрою
1.	Вивчення й аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури; визначення вихідних положень дослідження (об'єкт, предмет, методи); формування мети; постановка завдань.		
2.	Підготовка 1-го розділу роботи		
3.	Підготовка 2-го розділу роботи.		
4.	Формування висновків. Оформлення роботи.		
5.	Перевірка роботи на плагіат		
6.	Попередній захист роботи і рецензування.		

5. Дата видачі завдання – _____ 2022 р.

6. Термін подачі роботи керівнику – _____ 2024 р.

7. З вимогами до виконання роботи і завданням ознайомлений _____
(підпис студента)

8. Керівник _____.

Асимптотичні оцінки для інтегралів типу Лапласа за обмежень на міру і швидкість зростання функції (тема роботи)

Коротка мотивація захисту:

[illegible]

Дата	Голова ЕК	
	підпис	прізвище, ім'я
	Секретар ЕК	
	підпис	прізвище, ім'я

Анотація

У даній роботі за обмежень вивчено властивості інтегралів типу Лапласа та встановлено оцінки зверху лише за обмежень на міру і швидкість зростання підінтегральної функції.

Annotation

The properties of integrals of the Laplas' type are studied in this work. The estimates from above only with restriction on the measure and rate of growth of the subintegral function are established.

Зміст

1. Вступ.
2. Асимптотичні співвідношення на міру (базовий результат).
3. Доведення основних результатів.
4. Висновки.
5. Список використаних джерел.

Вступ

Спочатку надамо список умовних позначень, які ми використовували при написанні даної роботи:

- $z^n = z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots z_p^{n_p}$, $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$, $n = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p$.

- $\|a\| = a_1 + a_2 + \dots + a_p$ - висота вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$.

- $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_p y_p$ - скалярний добуток векторів

$x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{C}^p$.

- $\lambda = \{\lambda_n : n \in \mathbb{Z}_+^p\}$ - фіксована послідовність $\lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \dots, \lambda_{n_p}^{(p)})$, $p \geq 1$.

- $S^p(\lambda)$ - клас цілих функцій $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^p$, зображуваних абсолютно збіжними для всіх $z \in \mathbb{C}^p$ кратними рядами Діріхле

$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} F_n e^{\langle z, \lambda_n \rangle}.$$

- $S^1(\lambda)$ - клас цілих рядів Діріхле від однієї змінної з невід'ємною зростаючою послідовністю показників $\lambda = \{\lambda_k^{(1)} : k \in \mathbb{Z}_+\}$.

Для $\sigma \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$ і $F \in S^p(\lambda)$:

- $M(\sigma, F) = \sup \{|F(\sigma + iT)| : T \in \mathbb{R}^p\}$.

- $\mu(\sigma, F) = \max \{|F_n| e^{\langle \sigma, \lambda_n \rangle} : n \in \mathbb{Z}_+^p\}$.

- $m(\sigma, F) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} |F_n| e^{\langle \sigma, \lambda_n \rangle}$.

Для послідовності $\lambda = \{\lambda_n : n \in \mathbb{Z}_+^p\}$, $p \geq 1$:

- $n_j(t) = \sum_{\lambda_k^{(j)} \leq t} 1$ - лічильна функція послідовності j -их компонент.

- $n_\lambda(a, b] = \sum_{a < \|\lambda_n\| \leq b, F_n \neq 0} 1$,

- $n_\lambda(a, b] = \sum_{a < \lambda_n^{(1)} \leq b, F_n \neq 0} 1 = n_1(b) - n_1(a)$ при $p = 1$.

Для міри ν на $\mathbb{R}_+^p$:

- $\nu(E)$ - ν -міра ν -вимірної множини $E \subset \mathbb{R}^p$, тобто $\nu(E) = \int_{\mathbb{R}_+^p \cap E} \nu(dx)$

- $\nu(a, b] = \nu(\{x \in \mathbb{R}_+^p : a < \|x\| \leq b\})$.

- $\text{supp } \nu$ - носій міри ν ,

- $\text{meas}_p(E)$ - Лебегова міра в $\mathbb{R}^p$ вимірної за Лебегом множини $E \subset \mathbb{R}^p$.

Для $\sigma \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$ і функції $F(\sigma) = \int_{\mathbb{R}_+^p} f(x) e^{\langle \sigma, x \rangle} v(dx)$, $f(x) \geq 0$:

- $\mu(\sigma, F) = \sup\{f(x) e^{\langle \sigma, x \rangle} : x \in \mathbb{R}_+^p\}$.

- L -клас додатних неперервних на $[0, +\infty)$ функцій $\psi(t)$ таких, що $\psi(t) \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow +\infty$).

- L^+ підклас L , в який входять зростаючі на $[0, +\infty)$ функції.

- L_1 - клас функцій $\psi \in L$ таких, що $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\Psi(t)} < +\infty$.

- $L_1^+ = L_1 \cap L^+$: L_2 - клас диференційовних вгнутих функцій $\omega \in L^+$ таких, що $\frac{1}{t} = O(\omega'(t))$ ($t \rightarrow +\infty$).

- L_2^0 - клас функцій $\omega \in L_2$ таких, що для кожної функції $\xi(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$) $\omega'(t) \searrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$) і $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega'((1 - \xi(t))t) / \omega'(t) = 1$.

- $L_1(\Phi)$ - клас функцій $\psi \in L$ таких, що $\int_0^{\Phi(t)} \frac{du}{\Psi(u)} = O(t)$ ($t \rightarrow +\infty$).

$\Phi \in L^+$ - фіксована функція.

- $\gamma(\mu) \equiv \{\sigma \in \mathbb{R}^p : \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \mu(t\sigma, F) = +\infty\}$.

- $C(r)$ - прямий необмежений циліндр з віссю $\{\sigma \in \mathbb{R}^p : \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_p\}$, в основі якого $(p - 1)$ -вимірний куля радіуса r з центром у початку координат.

- $h_v(0) = \sup\{\langle x, \sigma \rangle : x \in \text{supp } v\}$, $\sigma \in \mathbb{R}^p$ - опорна функція множини $\text{supp } v$.

Для додатної функції $\delta: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$:

- $\gamma(\delta) = \{\sigma \in \mathbb{R}^p : \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\delta(t\sigma)}{t} = +\infty\}$.

- $\gamma(F) = \gamma(m_1(\cdot, F)) \equiv \gamma(m_1)$ для $F \in S^p(\lambda)$.

- $\nabla u(\sigma) = (\frac{\partial}{\partial \sigma_1}, \frac{\partial}{\partial \sigma_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \sigma_p}) u(\sigma)$.

- $C'(R) = \{x = (x_1, \dots, x_p) : x_1^2 + \dots + x_p^2 \leq R^2\}$.

- $C(r)$ - прямий необмежений циліндр з віссю $\{\sigma \in \mathbb{R}^p : \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_p\}$, в основі якого $(p - 1)$ -вимірний куля радіуса $r > 0$ з центром у початку координат, тобто образ циліндра $C'(R)$ при повороті системи координат, при

якому додатна піввісь Ox_1 переходить у промінь $\{\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) : \sigma_1 = \dots = \sigma_p > 0\}$.

- $C'(r, R)$ - "обмежений праворуч" циліндр $\{x = (x_1, \dots, x_p) : x_1 \leq r, x_1^2 + \dots + x_p^2 \leq R^2\}$.

- $C(r, R)$ - образ циліндра $C'(r, R)$ при повороті системи координат, при якому додатна піввісь Ox_1 переходить у промінь

$\{\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) : \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_p > 0\}$, де $0 < r, R < +\infty$.

- $f(z) = \sum_{|n|=0}^{+\infty} f_n z^n$ - ціла функція, $z \in \mathbb{C}^p$, $p \geq 1$.

- $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z_1| = r_1, \dots, |z_p| = r_p\}$, $r = (r_1, \dots, r_p)$.

- $\mu(r) = \max\{|f_n| r^n : n \in \mathbb{Z}_+^p\}$, $r = (r_1, \dots, r_p)$ - максимальний член функції $f(z)$.

Нехай $S^p(x)$ - клас цілих функцій $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^p$, зображених абсолютно збіжними для всіх $z \in \mathbb{C}^p$ кратними рядами Діріхле

$$F(z) = \sum_{|n|=0}^{+\infty} F_n e^{<z, \lambda_n>} \quad (1.1)$$

У випадку $p=1$ $S^{(1)}(\lambda)$ - клас цілих рядів Діріхле від однієї змінної з невід'ємною зростаючою послідовністю показників $\lambda = \{\lambda_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$.

Для $\sigma \in \mathbb{R}^p$ і функції $F \in S^p(x)$ справедлива теорема Коші $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$ і, очевидно, $M(\sigma, F) \leq m(\sigma, F)$. Тому замість будь-якого співвідношення між $\mu(\sigma, F)$ і $M(\sigma, F)$ можна розглядати подібне співвідношення між $\mu(\sigma, F)$ і $m(\sigma, F)$. Інакше, досить обмежитися розглядом рядів виду (1.1) з невід'ємними показниками

F_n ($n \in \mathbb{Z}_+^p$) і це не зменшить загальності.

У цьому випадку, якщо $f(x)$ - довільна неперервна функція на $\mathbb{R}_+^p$ така, що $f(\lambda_n) = F_n$, а $n_j(t) = \sum_{\lambda_k^{(j)} \leq t} 1$ - лічильна функція послідовності j -их компонент векторної послідовності λ , то ряд (1.1) записується при $\sigma \in \mathbb{R}^p$ у вигляді

$$F(\sigma) = \int_{\mathbb{R}_+^p} f(x) e^{<x, \sigma>} dn_1(x) \dots dn_p(x_p).$$

Тому природно розглядати замість рядів Діріхле функції $F(\sigma)$ визначені на $\mathbb{R}^p$ за допомогою збіжних для $\sigma \in \mathbb{R}^p$ інтегралів

$$F(\sigma) = \int_{\mathbb{R}_+^p} f(x) e^{\langle x, \sigma \rangle} \nu(dx), \quad (1.2)$$

де $f(x)$ - додатна неперервна на $\mathbb{R}_+^p$ функція, а ν -зліченно-адитивна на $\mathbb{R}_+^p$ локально обмежена міра з необмеженим носієм $\text{supp } \nu$. Через $\nu(E)$ позначимо ν -міру ν -вимірної множини $E \in \mathbb{R}_+^p$, тобто $\nu(E) = \int_{\mathbb{R}_+^p \cap E} \nu(dx)$, а через $\text{meas}_p(E)$ позначимо Лебегову міру в $\mathbb{R}^p$ локально вимірної за Лебегом множини $E \in \mathbb{R}^p$.

У кінці минулого століття у зв'язку з деякими узагальненнями теореми Пелі-Вінера виникла потреба у асимптотичних оцінках інтегралів типу Лапласа виду (1.2) без додаткових умов гладкості та рівномірних за підінтегральною функцією у нескінченно віддаленій точці.

Тому метою даної роботи є отримання за обмежень на міру, пов'язаних з додатною функцією, що визначає максимальну можливу швидкість інтегралу типу Лапласа, точних оцінок зверху таких інтегралів через максимум інтегральної функції.

Об'єктом дослідження є загальні класи цілих кратних рядів Діріхле та кратних інтегралів типу Лапласа, так і їх підкласи, що визначаються деяким фіксованим обмеженням на швидкість зростання таких функцій.

Предметом дослідження є властивості деяких характеристик цілих кратних рядів Діріхле і додатних інтегралів типу Лапласа.

Методами дослідження є методи математичного і функціонального аналізу та теорії цілих функцій.

2. Асимптотичні співвідношення на міру (базовий результат)

Нехай $v(a,b] = v(\{x \in \mathbb{R}^p_+ : a < \|x\| \leq b\})$. Спочатку доведемо наступну теорему [1]:

Теорема 2.1. Нехай F має вигляд (1.2). Якщо $\omega \in L_2$ і
 $(\exists \psi_1 \in L^+_1) (\exists \psi_2 \in L_1) : \overline{\lim} \omega'(\psi_1^{-1}(t)) \ln^+ v(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}) \leq d, t \rightarrow +\infty$
(2.1)

то

$$\omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \leq d + o(1) \quad (2.2)$$

при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$) для кожного конуса $K \subset \mathbb{R}^p$ з вершиною в точці $O = (0, \dots, 0)$ такого, що

$$\overline{K} \setminus \{O\} \subset \gamma(F) = \{\sigma \in \mathbb{R}^p : \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln F(t\sigma) = +\infty\};$$

множина $E \subset \mathbb{R}^p$ така, що

$$\text{meas}_p(E \cap C(R)) = O(R^{p-1}) \quad (R \rightarrow +\infty).$$

Доведення. Доведемо насамперед, що

$$\ln F(\sigma) \leq (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F) \quad (2.3)$$

при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$).

За умовою $\omega \in L_2$ маємо $\frac{1}{\omega'(t)} = O(t)$ ($t \rightarrow +\infty$), тому з (2.3) випливає

$$\ln^+ v(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}) = O(\psi_1^{-1}(t)) \quad (t \rightarrow +\infty) \quad (2.4)$$

Перевіримо, чи існує функція $\Psi_0 \in L^+_1$ така, що

$$\ln^+ v(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}) = O(\psi_0^{-1}(t)) \quad (0 \leq \psi_1(0) \leq t \rightarrow +\infty) \quad (2.5)$$

При цьому визначимо $\psi_0(x)$ і при $x < 0$ так, щоб $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\Psi(u)} < +\infty$. Враховуючи, що для кожного $A > 0$

$$\int_0^A \frac{du}{\psi(u)} = \int_{\psi(0)}^{\psi(A)} \frac{d\Psi^{-1}}{t} = \frac{A}{\psi(A)} + \int_{\psi(0)}^{\psi(A)} \frac{\Psi^{-1}(t)}{t^2} dt.$$

отримаємо, що $\psi \in L^+_{-1}$ є за умови $t = O(\psi(t))$ ($t \rightarrow +\infty$) тоді і тільки тоді, коли

$$\int_0^{+\infty} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt < +\infty$$

Проте, якщо $\Psi(t)$ - неспадна, то для $0 < B < A < +\infty$

$$\int_B^A \frac{dt}{\psi(t)} \geq \frac{A-B}{\psi(A)}. \quad \int_B^{+\infty} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt \geq \frac{\psi^{-1}(B)}{B}.$$

звідки, якщо $\psi \in L^+_{-1}$ або для ψ виконується (2.6), то $t = o(\psi(t))$

($t \rightarrow +\infty$). Отже, якщо $\psi_1 \in L^+_{-1}$, то для ψ_1 виконується умова (2.6) з

$\psi \equiv \psi_1$.

Залишається тепер покласти $l(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\Psi^{-1}(u)}{u^2} du$ і ψ_0 вибрати таку, що $\psi_0(x)$ при $x \geq 0$ дорівнює оберненій функції до функції $(l(t))^{-1/2} \psi_1^{-1}(t)$ при $t \geq \psi_1(0)$, і $\psi_0(x) = \psi_0(0)(1+x^2)$ при $x < 0$. Справді, $(l(t))^{-1/2} \uparrow +\infty$ ($t \rightarrow +\infty$), $\psi_0(0) = \psi_1(0) > 0$ і

$$\int_{\psi_1(0)}^{+\infty} \frac{\psi_0^{-1}(t)}{t^2} dt = - \int_{\psi_1(0)}^{+\infty} (l(t))^{1/2} dl(t) = 2(l(\psi_1(0)))^{1/2} < +\infty.$$

Тобто $\psi_0 \in L^+_{-1}$, а також

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\psi_0(x)} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\psi_0(x)} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi_0(x)} = \\ &= \frac{1}{\psi_0(0)} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi_0(x)} < +\infty\end{aligned}$$

Залишилось зауважити, що $\psi_1^{-1}(t) = o(\psi_0^{-1}(t))$ ($t \rightarrow +\infty$) із (2.4) негайно отримуємо (2.5).

Нехай тепер для $b \in \mathbb{R}^p$ і $e_0 = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^p$

$$E_1(b, \psi) = \{\sigma = b + te_0 : g''(t) \geq \psi(g'(t))\}, \quad E_1(\psi) = \bigcup_{||b||=0} E_1(b, \psi),$$

$$E_2(b, \psi) = \{\sigma = b + te_0 : g'(t) \geq \psi(g(t))\}, \quad E_2(\psi) = \bigcup_{||b||=0} E_2(b, \psi).$$

Нехай для $t \geq \psi_1(0) + 1$

$$\varepsilon(t) = \sup \left\{ \frac{1}{\psi_0^{-1}(u)} \ln^+ v(u - \sqrt{\psi_2(u)}; u + \sqrt{\psi_2(u)}) : u \geq t \right\}$$

та для $t < \psi_1(0) + 1$

$$\varepsilon(t) = \left\{ \frac{1}{\psi_0^{-1}(u)} \ln^+ v(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}) \right\}^v,$$

де a^v для функції $a(t)$ означає $a(t)^v = 0$ для $t < \psi_1(0) + 1$, і таких t , що $a(t)$ - не визначено і $a^v(t) = \max\{a(t); 0\}$ у протилежному випадку.

За умовою $\varepsilon(t) \searrow 0$. Зауважимо, що $\nabla \|\ln F(\sigma)\| = g'(t)$ при $\sigma = b + te_0$, де $\nabla u = (\frac{\partial}{\partial \sigma_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \sigma_p}) u$.

Застосуємо тепер лему [2, с.359] з функціями $g_0(t) = g'(t)$.

$$g_b(t) \leq \frac{c}{c-1} \int_{||x||-g(t) < \sqrt{cg(t)}} e^{<b,x>+t||x||} f(x) \nu(dx)$$

для всіх $b \in \mathbb{R}^p$ і $t \in \mathbb{R}$, де $g(t) = \ln g_b t$, а $g_b(t) = F(b+tc_0)$

($C_0 = (1, 1, \dots, 1)$) і $g(t) = \ln g_b(t)$,

$$\psi(t) = \widetilde{\psi}_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{c} \psi_2(t), t \geq 0, \\ \psi_2(0)(\frac{1}{c} + t^2), t < 0 \end{cases}$$

Для всіх $\sigma \notin E_1(\widetilde{\psi}_2)$ маємо при $\sigma = b + te_0$

$$g''(t) \leq \widetilde{\psi}_2(g'(t)) = \widetilde{\Psi\psi}_2(\|\nabla \ln F(\sigma)\|).$$

і отже

$$\ln F(\sigma) \leq \ln \frac{c}{c-1} + \ln \mu(\sigma, F) + \xi(\|\nabla \ln F(\sigma)\|) \psi_0^{-1}(\|\nabla \ln F(\sigma)\|).$$

Застосовуючи лему [2, с.359] з функціями $g_0(t) = g(t)$ і $\psi(t) = \psi_0(t)$, при $\notin E_2(\psi_0)$ і $\sigma = b + te_0$ отримаємо $\psi_0^{-1}(\|\nabla \ln F(\sigma)\|) = \psi_0^{-1}(g'(t)) \leq g(t) = \ln F(\sigma)$, тобто

$$\ln F \leq \ln \frac{c}{c-1} + \ln \mu(\sigma, F) + \xi(\|\nabla \ln F(\sigma)\|) \ln F(\sigma). \quad (2.7)$$

Далі оскільки функція $\ln F(b + te_0)$ опукла при кожному фіксованому $b \in \mathbb{R}^p$. Тому для кожного фіксованого $\sigma \in \mathbb{R}^p$ і $\Delta t > 0$ маємо

$$\frac{\ln F(\sigma + \Delta te_0) - \ln F(\sigma)}{\Delta t |e_0|} \geq \frac{\ln F(\sigma + \Delta te_0) - \ln F(0)}{|\sigma + \Delta te_0|}.$$

Переходячи в останній нерівності до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, отримаємо для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p$

$$\|\nabla \ln F(\sigma)\| \geq \frac{\ln F(\sigma) - \ln F(0)}{|\sigma|} \quad (2.8)$$

Залишилось зауважити, що $\frac{1}{|\sigma|} \ln F(\sigma) \rightarrow +\infty$ ($|\sigma| \rightarrow +\infty$, $\sigma \in K$) і тому з (2.8) маємо, що $\|\nabla \ln F(\sigma)\| \rightarrow +\infty$ при $|\sigma| \rightarrow +\infty$, ($\sigma \in K$). Позаяк $\|\nabla \ln F(\sigma)\| \rightarrow +\infty$ ($|\sigma| \rightarrow +\infty$, $\sigma \in K$), із (2.7) при $|\sigma| \rightarrow +\infty$,

$\sigma \in K \setminus (E_1(\widetilde{\psi}_2) \cup E_2(\psi_0))$ отримаємо співвідношення (2.3). Із співвідношення (2.3) при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E_*$) отримаємо

$$\ln \mu(\sigma, F) \geq \frac{1}{2} \ln F(\sigma), \quad (2.9)$$

де $E_* = E_1(\widetilde{\psi}_2) \cup E_2(\psi_0)$.

Визначаємо для $t \geq \psi_1(0) + 1$

$$d(t) = \sup \{ \omega'(\psi_1^{-1}(u)) \ln^+ v(u - \sqrt{\psi_2'(u)}; u + \sqrt{\psi_2(u)}; u) : u \geq t \}.$$

Нехай $l_1(t) = (\int_t^{+\infty} \frac{du}{\psi_2(u)})$, $\psi_2^*(t) = \psi_2(t)(l_1(t))^{1/2}$. Зауважимо, що $\psi_2^*(t) < \psi_2(t)$ ($t \rightarrow +\infty$) і

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi_2^*(t)} = - \int_0^{+\infty} (l_1(t))^{-1/2} dl_1(t) = 2(l_1(0))^{1/2} < +\infty,$$

тобто $\psi_2^*(t) \in L_1$. Крім цього, $l_1(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$). Вибираємо $c = c(\sigma) = (l_1(\|\nabla \ln F(\sigma)\|))^{-1/2}$ і до нерівності Чебишова застосуємо лему [2, с.359] з функціями $g_0(t) = g'(t)$,

$$\psi(t) = \psi_3(t) = \begin{cases} l_1(t)^{1/2} \psi_2^*(t), & t \geq 0, \\ l_1(t)^{1/2} \psi_2^*(0), & (1+t^2) < 0. \end{cases}$$

Для всіх $\sigma \notin E_1(\psi_3)$ послідовно маємо при $\sigma = b + te_0$

$$g''(t) \leq \psi_3(g'(t)) = \psi_3(\|\nabla \ln F(\sigma)\|),$$

тобто, враховуючи, що згідно з (2.8) $\|\nabla \ln F(\sigma)\| \rightarrow +\infty$ ($|\sigma| \rightarrow +\infty$, $\sigma \in K$),

$$cg''(t) \leq \psi_2(\|\nabla \ln F(\sigma)\|)$$

і отже, при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E_1(\psi_3)$)

$$F(\sigma) \leq \frac{c}{c-1} \mu(\sigma, F) v(\bar{u} - \sqrt{\Psi \psi_2(\bar{u})}; \bar{u} + \sqrt{\psi_2(\bar{u})}),$$

де $\bar{u} = \|\nabla \ln F(\sigma)\|$. Звідси, за теоремою Лагранжа про скінченні прирости, скориставшись монотонністю $\omega'(t)$, при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E_1(\psi_3)$) маємо

$$\begin{aligned} & \omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \leq \\ & \leq \omega'(\ln \mu(\sigma, F)) \left\{ \ln \frac{c}{c-1} + \ln^+ v(\bar{u} - \sqrt{\psi_2(\bar{u})}; \bar{u} + \sqrt{\psi_2(\bar{u})}) \right\} = \\ & = o(1) + \omega'(\ln \mu(\sigma, F)) \ln^+ v(\bar{u} - \sqrt{\psi_2(\bar{u})}; \bar{u} + \sqrt{\psi_2(\bar{u})}). \quad (2.10) \end{aligned}$$

Залишається, як і вище, знову застосувати лему [2, с.359] цього разу з функціями $g_0(t) = g(t)$ і $\psi(t) = \psi_0(t/2)$. Тому при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E_1(\psi_3) \cup E_2(\psi_0(t/2)) \cup E_*$) послідовно за допомогою нерівності (2.9) для $\sigma = b + te_0$ маємо

$$\begin{aligned} \omega'(\ln \mu(\sigma, F)) & \leq \omega'(\tfrac{1}{2} \ln F(\sigma)) = \omega'(\tfrac{1}{2} g(t)) \leq \omega'(\psi_0^{-1}(g'(t))) = \\ & = \omega'(\psi_1^{-1}(\|\nabla \ln F(\sigma)\|)) = \omega'(\psi_1^{-1}(\bar{u})), \end{aligned}$$

позаяк $\bar{u} = \|\nabla \ln F(\sigma)\| \rightarrow +\infty$ ($|\sigma| \rightarrow +\infty$, $\sigma \in K$). Тому при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K$, $\sigma \notin E_1(\widetilde{\psi_2}) \cup E_2(\psi_0) \cup E_1(\psi_3) \cup E_2(\psi_0(t/2)) \equiv E$) із (2.10) отримуємо

$$\omega'(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \leq d(\bar{u}) + o(1).$$

Залишилось пригадати, що $\lim_{u \rightarrow +\infty} d(u) = d$

Доведемо тепер, що $meas_p(E \cap C(R)) = O(R^{p-1})$ ($R \rightarrow +\infty$), де $C(R)$ - необмежений циліндр в $\mathbb{R}^p$, описаний у вступі. Перевіримо, чи останнє співвідношення виконується для $E_1(\psi)$. Для решти множин, що утворюють E , перевірка здійснюється подібно. Справді, нехай

$E_1(b)$ та E_1 множини, у які перейдуть відповідно множини $E_1(b, \psi)$ і $E_1(\psi)$ при повороті системи координат, при якому промінь $\{x = (x_1, \dots, x_p) : x_1 = x_2 = \dots = x_p > 0\}$ переходить у додатну піввісь O_{x_1} . Тоді, циліндр $C(R)$ перейде у циліндр $C'(R) = \{x = (x_1, \dots, x_p) : x_2^2 + \dots + x_p^2 \leq R^2\}$ і для $K(R) = \{x = (x_2, \dots, x_p) : x_2^2 + \dots + x_p^2 \leq R^2\}$ маємо

$$meas_p (E_1(\psi) \cap C(R)) = meas_p (E_1 \cap C'(R)) = \int_{K(R)} \int_{E_1(b)} dx_1) dx_2 \dots dx_p.$$

Зауважимо, що насправді $E_1(b) = E_1(x_2, \dots, x_p)$. Враховуючи, що за лемою [2, с.359] $meas_1 E_1(b) = meas_1 E_1(b, \psi) = A < +\infty$, де $A = A(\psi)$ стала, що залежить лише від ψ і не залежить від $b \in \mathbb{R}^p$, звідси отримаємо, що

$$meas_p (E_1(\psi) \cap C(R)) \leq BA(\psi)R^{p-1}.$$

Тому

$$meas_p (E \cap C(R)) \leq B(A(\widetilde{\Psi}_2) + A(\psi_0) + A(\psi_3) + A(\psi_0(t/2)))R^{p-1}.$$

Остання нерівність завершує доведення теореми 2.1.

Відзначимо, що у процесі доведення теореми 2.1 доведено також наступне твердження, яке з іншого боку є прямим наслідком теореми 2.1.

3. Доведення основних результатів

Для $0 < r, R < +\infty$ нехай $C'(r, R)$ - "обмежений праворуч" циліндр $= \{x = (x_1, \dots, x_p) : x_1 \leq r, x_2^2 + \dots + x_p^2 \leq R^2\}$, а $C(r, R)$ - його образ при повороті системи координат, при якому додатня піввісь Ox_1 переходить у промінь $\{x = (x_1, \dots, x_p) : x_1 = x_2 = \dots = x_p > 0\}$.

Нехай $\Phi \in L^+$ і така, що $\Phi(t)/t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow +\infty$). Як і в [3], визначимо клас $L_1(\Phi)$ функцій $\psi \in L$ таких, що виконується умова

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\Phi(t)} \frac{du}{\psi(u)} = 0.$$

Із доведення теореми 2.1 випливає, що одним з основних його моментів є встановлення асимптотичної нерівності (2.3)

$$\ln F(\sigma) \leq (1+o(1)) \ln \mu(\sigma, E).$$

Тому зараз ми почнемо із встановлення умов достатніх для справедливості зовні виняткових множин нерівності (2.3).

Крім цього, якщо існує така множина $E \subset \mathbb{R}^p$, що для всіх $\sigma \in E$ деякої сталої $h > 0$

$$\ln F(\sigma) \geq (1+h) \ln \mu(\sigma, F), \quad (3.1)$$

то у випадку, коли $\omega \in L_2$ для $\sigma \in E$ маємо

$$\begin{aligned} \omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln (\sigma, F)) &\geq (\ln F(\sigma) - \ln \mu(\sigma, F)) \omega'(\ln F(\sigma)) \geq \\ &\geq (1 - \frac{1}{1+h}) \ln F(\sigma) \omega'(\ln F(\sigma)) \geq c \frac{h}{h+1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

де $c > 0$ - стала така, що $t\omega'(t) \geq c > 0$.

Тобто, якщо для всіх $\sigma \in E$ виконується (3.1), то для всіх $\sigma \in E$ виконується (3.2) і, отже якщо нерівність (2.3) не виконується для $\sigma \in E$, то нерівність (2.2) з $d < \frac{ch}{h+1}$ зокрема $d = 0$, не виконується для всіх $\sigma \in E$. Очевидно, якщо $\omega \in L_2$ і така, що

$t\omega'(t) \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow +\infty$), то у цьому випадку нерівність (2.2) з $d = 0$ не виконується для всіх $\sigma \in E \cap K$, де $K \subset Y(F)$.

Доведемо спочатку наступне твердження.

Твердження 3.1. Нехай $\Phi \in L^+$ і F має вигляд (1.2). Якщо

$$\ln F(\sigma) \leq \Phi(\|\sigma\|) \quad (\|\sigma\| \geq c_0 > 0) \quad (3.3)$$

і існують $\psi_1 \in L^+_1(\Phi)$, $\psi_2 \in L_1(\Phi)$ такі, що

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\psi_1^{-1}(t)} \ln^+ v(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}) = 0 \quad (3.4)$$

то співвідношення (2.3) виконується при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$) для кожного конуса $K \in \mathbb{R}^p$ з вершиною в точці O такого, що $\bar{K} \setminus \{O\} \subset Y(F)$; множина E така, що

$$meas_p(E \cap C(r, R)) = o(rR^{p-1}) \quad (3.5)$$

при $r \rightarrow +\infty$ рівномірно за $R > 0$; тут $(a, b] = v(\{x \in \mathbb{R}^p_+ : a < \|x\| \leq b\})$.

Зауваження. За умов твердження 3.1 зокрема,

$$meas_p(E \cap C(r, r)) = o(r^p) \quad (r \rightarrow +\infty)$$

при цьому

$$meas_p(C(r, r) \cap \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| \leq 0\}) = r^p \text{ const.}$$

Доведення твердження 3.1. Використовуємо позначення з доведення теореми (2.1). Позаяк $\frac{1}{|\sigma|} \ln F(\sigma) \rightarrow +\infty$ ($|\sigma| \rightarrow +\infty, \sigma \in K$), то за (2.8) $\|\nabla \ln F(\sigma)\| \rightarrow +\infty$ ($|\sigma| \rightarrow +\infty, \sigma \in K$). Застосовуючи спочатку лему [2, с.359] з функціями $g_0(t) = g'(t)$ і

$$\psi(t) = \widetilde{\psi}_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{c} \psi_2(t), t \geq 0, \\ \psi_2(0)(\frac{1}{c} + t^2), t < 0, \end{cases}$$

а потім з функціями $g_0(t) = g(t)$ і

$$\psi(t) = \widetilde{\psi}_1(t) = \begin{cases} \psi_1(t), t \geq 0, \\ \psi_1(0)(1 + t^2), t < 0, \end{cases}$$

Відповідно маємо при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K$) і $\sigma \notin E_1(\widetilde{\psi}_2)$, $\sigma = b + te_0$

$$g''(t) \leq \widetilde{\psi}_2(g'(t)) = \frac{1}{c} \psi_2(\|\nabla \ln F(\sigma)\|),$$

та при $\sigma \notin E_2(\widetilde{\psi}_1)$

$$\psi_1^{-1}(\|\nabla \ln F(\sigma)\|) = \psi_1^{-1}(g'(t)) \leq g(t) = \ln F(\sigma).$$

Тому з нерівності Чебишова при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E_1(\widetilde{\psi}_2) \cup E_2(\widetilde{\psi}_1)$) та $\sigma = b + te_0$

отримуємо з $\bar{u} = \|\nabla \ln F(\sigma)\|$

$$\begin{aligned} \ln F(\sigma) &\leq \ln \frac{c}{c-1} + \ln \mu(\sigma, F) + \ln v(\bar{u} - \sqrt{\psi_2(\bar{u})}; \bar{u} + \sqrt{\psi_2(\bar{u})}) = \\ &= \ln \frac{c}{c-1} + \ln \mu(\sigma, F) + o(\psi_1^{-1}(\bar{u})) = \ln \mu(\sigma, F) + o(\ln F(\sigma)), \end{aligned}$$

тобто асимптотичну нерівність (2.3). Залишається для множини $E = E_1(\widetilde{\psi}_2) \cup E_2(\widetilde{\psi}_1)$ отримати оцінку (3.5). Нехай E_1 і E_2 множини, у які перейдуть відповідно множини $E_1(\widetilde{\psi}_2)$ і $E_2(\widetilde{\psi}_1)$ при повороті системи координат, при якому промінь $\{\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) : \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_p > 0\}$ переходить у додатну піввісь Ox_1 . Нехай, крім

цього $E_1(b) = E_1(x_2, \dots, x_p)$ і $E_2(b) = E_2(x_2, \dots, x_p)$ образи відповідно множин $E_1(b, \widetilde{\Psi}_2)$ і $E_2(b, \widetilde{\Psi}_1)$ при описаному повороті системи координат. Тоді

$$\begin{aligned} meas_p(E_1(\widetilde{\Psi}_2) \cap C(r, R)) &= meas_p(E_1 \cap C'(r, R)) = \\ &= \int_{K(R)} \left(\int_{E_1(b) \cap (-\infty, r]} dx_1 \right) dx_2 \dots dx_p. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Позаяк при описаному перетворенні простору $\mathbb{R}^p$ множині $\{x = (x_1, \dots, x_p) : x_1 = 0\}$ відповідає множина $\{\sigma = b : \|b\| = 0\}$, то

$$\begin{aligned} &\sup \left\{ \int_{E_1(b) \cap (-\infty, r]} dx_1 : (x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^{p-1}, \|b\| = 0 \right\} \leq \\ &\leq \sup \{ meas_1(E_1(b, \widetilde{\Psi}_2) \cap (-\infty, r]) : \|b\| = 0 \} \leq \\ &\leq \sup \left\{ \int_{-\infty}^{In F(b + re_0)} \frac{dt}{\widetilde{\Psi}_2(t)} : \|b\| = 0 \right\} \leq \sup \left\{ \int_{-\infty}^{\Phi(\|b\| + pr)} \frac{dt}{\widetilde{\Psi}_2(t)} : \|b\| = 0 \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\widetilde{\Psi}_2(t)} = \frac{1}{\Psi_2(0)} \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{e^2 + 1/c} + c \int_{-\infty}^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\Psi_2(t)} = c \int_0^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\Psi_2(t)} + \tilde{c}, \end{aligned}$$

де $\tilde{c} = \frac{\pi\sqrt{c}}{2\Psi_2(0)}$. Звідси та з (3.6) отримаємо

$$\begin{aligned} meas_1(E_1(\widetilde{\Psi}_2) \cap C(r, R)) &\leq meas_{3-1}K(R) (\tilde{c} + c \int_0^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\Psi_2(t)} \leq \\ &\leq 1 c^* R^{p-1} \left(\int_0^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\Psi_2(t)} + 1 \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

де c^* - деяка абсолютна стала, залежна лише від p і $\Psi_2(0)$. Подібно отримуємо

$$\begin{aligned} &meas_p(E_2(\widetilde{\Psi}_1) \cap C(r, R)) = meas(E_2 \cap C'(r, R)) = \\ &= \left\{ \int_{K(R)} \left(\int_{E_2(b) \cap (-\infty, r]} dx_1 \right) dx_2, \dots, dx_p \leq \right. \\ &\leq meas_{p-1}K(R) \sup \left\{ \int_{E_2(b) \cap (-\infty, r]} dx_1 : (x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \right\} = \\ &= meas_{p-1}K(R) \sup \{ meas_1(E_2(b, \widetilde{\Psi}_1) \cap (-\infty, r]) : \|b\| = 0 \} \leq \\ &\leq meas_{p-1}K(R) \sup \left\{ \int_{-\infty}^{In F(b + re_0)} \frac{dt}{\widetilde{\Psi}_1(t)} : \|b\| = 0 \right\} = \\ &\leq meas_{p-1}K(R) \sup \left\{ \int_{-\infty}^{\Phi(\|b\| + pr)} \frac{dt}{\widetilde{\Psi}_1(t)} : \|b\| = 0 \right\} = \end{aligned}$$

$$= meas_{p-1} K(R) \int_{-\infty}^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\widetilde{\psi}_1(t)} \leq c^{**} R^{p-1} \left\{ \int_0^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\widetilde{\psi}_1(t)} + 1 \right\}, \quad (3.8)$$

де c^{**} - деяка стала, залежна лише від p і $\psi_1(0)$. Тобто з (3.7) і (3.8), використовуючи умову $\psi_1 \in L^+_1(\Phi)$, $\psi_2 \in L_1(\Phi)$, отримуємо

$$meas_p(E \cap C(r, R)) \leq R^{p-1} (c^* + c^{**} + c^* \int_0^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\psi_2(t)} + c^{**} \int_0^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\psi_1(t)}) = R^{p-1} r a_1(r), \quad (3.9)$$

де $a_1(r) = a(r, p, \psi_1, \psi_2, \Phi)$ - деяка функція, залежна лише від r, p, ψ_1, ψ_2 і Φ така, що $a_1(r) \rightarrow +0$ ($r \rightarrow +\infty$). Твердження 3.1 доведено.

Подібно до твердження 3.1 доводимо наступне твердження.

Твердження 3.2. Нехай $\Phi \in L^+$ і F має вигляд (1.2). Якщо існує послідовність $\sigma^{(j)} \in \mathbb{R}^p$ така, що $\|\sigma^{(j)}\| \rightarrow +\infty$ ($j \rightarrow +\infty$) і

$$\ln F(\sigma) \leq \Phi(\|\sigma\|) \quad (\sigma = \sigma^{(j)}), \quad (3.10)$$

а також існують функції $\psi_1 \in L^+_1(\Phi)$, $\psi_2 \in L_1(\Phi)$ такі, що виконуються умова (3.4), то співвідношення (2.3) виконується при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$) для кожного конуса $K \in \mathbb{R}^p$ з вершиною в точці O такого, що $\bar{K} \setminus \{0\} \subset (F)$; множина E така, що

$$meas_p(E \cap C(r, R)) = a_2(r) r R^{p-1} \quad (3.11)$$

де $a_2(r) = a_2(r, p, \psi_1, \psi_2, \Phi)$ деяка функція, залежна лише від $r, p, \psi_1, \psi_2, \Phi$ така, що

$$a_2(r) \rightarrow 0, \quad (r = \frac{1}{p} \|\sigma^{(j)}\| \rightarrow +\infty, j \rightarrow +\infty).$$

Доведення твердження 3.2. Слідуюмо за доведенням твердження 3.1, відзначаючи лише нові моменти у міркуваннях. Позаяк у доведенні твердження 3.1 умова (3.3) використовувалась лише при отриманні співвідношення (3.9), а доведення того, що асимптотична нерівність (2.3) виконується при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$, $E = E_1(\widetilde{\psi}_2) \cup E_2(\widetilde{\psi}_1)$) використовувало лише умови $\widetilde{\psi}_1 \in L^+_1$, $\widetilde{\psi}_2 \in L_1$, (2.9) та $\frac{1}{|\sigma|} \ln F(\sigma) \rightarrow +\infty$ ($|\sigma| \rightarrow +\infty$, $\sigma \in K \subset Y(F)$), то можна вважати (повторюючи міркування з доведення твердження 3.1), що і у випадку

твердження 3.2 співвідношення (2.3) виконується при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$, $E = E_1(\widetilde{\Psi}_2) \cup E_2(\widetilde{\Psi}_1)$), де $E_1(\widetilde{\Psi}_2)$ і $E_2(\widetilde{\Psi}_1)$, описані у доведенні твердження 3.1, при цьому, слідуючи за доведенням (3.7) і (3.8), отримуємо

$$meas_p(E \cap C(r, R)) \leq R^{p-1} \sup \left\{ \int_{-\infty}^{In F(b+re_0)} \frac{1}{\widetilde{\Psi}_1(t)} + \frac{1}{\widetilde{\Psi}_2(t)} dt : \|b\| = 0 \right\}.$$

Звідки, для $r = \frac{1}{p} \|\sigma^{(j)}\|$ за умовою (3.10) одержуємо

$$meas_p(E \cap C(r, R)) \leq R^{p-1} (c^* + c^{**} + c^* \int_0^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\Psi_2(t)} + c^{**} \int_0^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\Psi_1(t)}).$$

У випадку $r = \frac{1}{p} \|\sigma^{(j)}\| > 0$ та $meas_p(E \cap C(r, R)) \leq R^{p-1} (c^* + c^{**})$ випадку $r = \frac{1}{p} \|\sigma^{(j)}\| \leq 0$ зі сталими c^* і c^{**} тими ж, що і у доведенні твердження 3.1.

Звідси за умовами $\Psi_1 \in L^+_1(\Phi)$ і $\Psi_2 \in L_1(\Phi)$ отримуємо, що є правильною рівність (3.1) з функцією $a_2(r)$ такою, що $a_2(r) \rightarrow 0$ при $r = \frac{1}{p} \|\sigma^{(j)}\| \rightarrow +\infty$.

Твердження 3.2 доведено.

Із тверджень 3.1 і 3.2 у вигляді наслідків отримуємо наступні теореми.

Теорема 3.1. Якщо для $\Phi \in L^+$ і функції F - вигляду (1.2) виконуються умови (3.3) і

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \int_0^{2\Phi(r)} \frac{d \text{Inv}(0,t]}{t} = 0, \quad (3.12)$$

то співвідношення (2.3) є правильним при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$), де K і E , описані у твердженні 3.1, $v(0, t] = v(\{x : 0 < \|x\| \leq t\})$.

Теорема 3.2. Якщо для $\Phi \in L^+$ і функції F - вигляду (1.2) виконуються умови (3.1) і (3.2), то співвідношення (2.3) є правильним при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$), де K і E , описані у твердженні 3.2.

Доведення теорем 3.1 і 3.2 проведемо одночасно. Досить довести, що якщо умова (3.12) виконується, то для деяких функцій $\psi_1 \in L_1^+(\Phi)$ і $\psi_2 \in L_1(\Phi)$ виконується умова (3.4)

Нехай $v_0(t) = \ln v(0; t]$. В [3, с.13-14] доведено фактично наступне твердження.

Лема 3.1. Нехай $\Phi_1 \in L^+$. Якщо $v_0(t)$ - додатна неспадна на $[0, +\infty)$ функція така, що $\frac{1}{r} \int_0^{\Phi_1(r)} \frac{dv_0(t)}{t} \rightarrow 0$ ($r \rightarrow +\infty$), то існує функція $\psi_1 \in L_1^+(\Phi_1)$, для якої

$$v_0(t) = o(\psi_1^{-1}(t)) \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Нехай тепер $v_0(t) = \ln v(0, 2t]$, $\Phi_1(r) = 2\Phi(r)$. Тоді, за лемою 3.1 існує функція $\Psi_1 \in L_1^+(\Phi_1) \subset L_1^+(\Phi)$, така, що

$$\ln v(0; 2t] = o(\Psi_1^{-1}(t)) \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Залишається вибрати $\psi_2(t) = t^{3/2}$ і зауважити, що з $\psi_2 \in L_1^+(\Phi)$ і при $t \geq 1$

$$\ln v(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}) \leq \ln v(0; 2t] = o(\Psi_1^{-1}(t)) \quad (t \rightarrow +\infty),$$

тобто виконується умова (3.4) з функціями $\psi_1 \in L_1^+(\Phi)$ і $\psi_2 \in L_1(\Phi)$.

Завершує доведення теорем 3.1 і 3.2 застосування тверджень 3.1 і 3.2 відповідно.

За допомогою тверджень 3.1 і 3.2 отримуємо також наступні теореми.

Теорема 3.3 Нехай $\Phi \in L^+$, $\omega \in L_2^0$ і F має вигляд (1.2). Якщо виконується умова (3.3) і існують функції $\psi_1 \in L_1^+(\Phi)$ і $\psi_2 \in L_1(\Phi)$ такі, що виконується умова

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega'(\psi_1^{-1}(t)) \ln^+ v(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}) \leq d \quad (3.13)$$

то нерівність (2.2) справджується при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$) для кожного конуса $K \subset \mathbb{R}^p$ з вершиною в точці $O = (0, \dots, 0)$ такого, що $\bar{K} \setminus \{0\} \subset Y(F)$; множина $E \subset \mathbb{R}^p$ така, що

$$meas_p(E \cap C(r, R)) = o(rR^{p-1})$$

при $r \rightarrow +\infty$ рівномірно за $R > 0$.

Теорема 3.4. Нехай $\Phi \in L^+$, $\omega \in L_2^0$ і для F , що має вигляд (1.2), виконується умова (3.10) вздовж деякої послідовності $\sigma = \sigma^{(j)} \in \mathbb{R}^p$,

$\|\sigma^{(j)}\| \rightarrow +\infty$ ($j \rightarrow +\infty$). Якщо існують функції $\psi_1 \in L_1^+(\Phi)$ і $\psi_2 \in L_1(\Phi)$ такі, що виконується умова (3.13), то нерівність (2.2) справджується при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$) для кожного конуса $K \in \mathbb{R}^p$ з вершиною в точці $O = (0, \dots, 0)$ такого, що $\bar{K} \setminus \{0\} \subset Y(F)$; множина $E \subset \mathbb{R}^p$ така, що

$$meas_p(E \cap C(r, R)) = a_3(r) r R^{p-1}$$

для деякої функції $a_3(r) = a_3(r, p, \psi_1, \psi_2, \Phi)$ такої, що

$$a_3(r) \rightarrow 0 \quad (r = \frac{1}{2p} \|\sigma^{(j)}\| \rightarrow +\infty, j \rightarrow +\infty).$$

Доведення теореми 3.3 почнемо із зауваження, що із справедливості умови (3.13) для функцій $\psi \in L_1^+(\Phi)$, $\psi_2 \in L_1(\Phi)$ та умови

$\frac{1}{t} = O(\omega'(t))$ випливає, що для цих функцій Ψ_j - правильне співвідношення (2.4).

Перевіримо існування функції в $\psi_0 \in L_1^+(\Phi)$ такої, що співвідношення (2.5) є правильним з функціями $\psi_2 \in L_1(\Phi)$ і $\psi_0(t)$. Для цього досить довести, що існує функція $\psi_0 \in L_1^+(\Phi)$ така, що $L^{-1}(t) = o(\psi_0^{-1}(t))$ ($t \rightarrow +\infty$). При доведенні сформульованого вище у лемі 3.1 твердження в [3.с.13-14] фактично доведено наступне твердження.

Лема 3.2. Нехай $\Phi_1(1)$, $v_0(t)$ - функції такі, як і в лемі 3.1. Тоді існує функція $\psi_0 \in L^+$ така, що

$$v_0(r) = o(\psi_0^{-1}(r)), \frac{1}{r} \int_0^{\psi_0^{-1}(\Phi_1(r))} \frac{dx}{\psi_0(x)} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow +\infty)$$

Виберемо тепер $v_0(t) = \psi_0^{-1}(t)$, $\Phi_1(r) = \psi_1(\Phi(r))$ і зауважимо, що для досить великих r маємо $\psi_0^{-1}(r) < \psi_1^{-1}(r)$, тобто $\psi_0(r) < \psi_1(r)$. Тому

$$\psi^{-1}_0(\Phi_1(r)) = \psi^{-1}_0(\psi_1(\Phi_1(r))) > \psi^{-1}_0(\psi_0(\Phi(r))) = \Phi(r),$$

Тобто

$$\frac{1}{r} \int^{\psi_0^1(\Phi_1(r))} \frac{dx}{\Psi_0(x)} \geq \int^{\Phi(r)} \frac{dx}{\psi_1(x)}.$$

Залишається зауважити, що

$$\frac{1}{r} \int^{\psi_1(\Phi_1(r))} \frac{d\psi_1^{-1}(t)}{t} = \frac{1}{r} \int_0^{\Phi(r)} \frac{dx}{\psi_1(x)} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow +\infty)$$

і, отже, застосування леми 3.2 є коректним. Тобто існує функція $\psi_0 \in L^+_1$ така, то співвідношення (2.5) є правильним.

Нехай, як і вище, для $t \geq \psi_1(0) + 1$

$$d(t) = \sup \{ \omega'(\psi_1^{-1}(u)) \ln^+ v(u - \sqrt{\psi_2(u)}; u + \sqrt{\psi_2(u)}) : u \geq t \}.$$

Зауважимо спочатку, що з умови $\psi \in L_1(\Phi)$ випливає

$$\frac{1}{r} \int^{\Phi(2pr)} \frac{dx}{\psi(x)} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty). \quad (3.14)$$

Справді, нехай $\phi(t)$ обернена функція до функції $\Phi(t)$. Тоді при

$$r = \frac{1}{2p} \varphi(R), \quad R = \Phi(t)$$

$$\frac{1}{r} \int_0^{\Phi(2pr)} \frac{dx}{\psi(x)} = \frac{2p}{\varphi(R)} \int_0^R \frac{dx}{\psi(x)} = \frac{2p}{t} \int_0^{\Phi(t)} \frac{dx}{\psi(x)}, \quad (3.15)$$

звідки отримуємо (3.14). Позаяк $g(t)$ опукла функція, то

$g'(t) \nearrow (t \rightarrow +\infty)$ і, отже, з умови $\ln F(\sigma) \leq \Phi(\|\sigma\|)$ при $\sigma = b + te$, $\|b\| = 0$ маємо для досить великих $t \geq 1$

$$g(2t) \geq \int_t^{2t} g'(x) dx \geq t g'(t), \quad (3.16)$$

$$g'(t) \leq \frac{g(2t)}{t} \leq g(2t) = \Phi(2t). \quad (3.17)$$

Отже, нехай в нерівності (2.1) $c(\sigma) \equiv c > 1$ - фіксоване. Тоді, застосовуючи нерівність Чебишова з функціями $g_0(t) = g'(t)$,

$$\psi(t) = \widetilde{\psi}_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{c} \psi_2(t), t \geq 0 \\ \psi_2(0) \left(\frac{1}{c} + t^2 \right), t < 0 \end{cases}$$

і враховуючи, що з (2.8) $\|\nabla \ln F(\sigma)\| \rightarrow +\infty$ ($|\sigma| \rightarrow +\infty$, $\sigma \in K$), при $\sigma = b + te_0$, $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E_1(\widetilde{\psi}_2)$) маємо

$$cg'' \leq c \widetilde{\psi}_2(g'(t)) = \psi_2(\|\nabla \ln F(\sigma)\|). \quad (3.18)$$

При цьому, як і вище, для $r, R > 0$ маємо

$$\begin{aligned} meas_p(E_1(\widetilde{\psi}_2) \cap C(r, R)) &= meas_p(E_1 \cap C'(r, R)) = \\ &= \int_{K(R)} \left(\int_{E_1(b) \cap (-\infty, r]} dx_1 \right) dx_2 \dots dx_p, \end{aligned}$$

а також, скориставшись нерівністю (3.17), отримуємо

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \int_{E_1(b) \cap (-\infty, r]} dx_1 : (x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^{p-1}, \|b\|=0 \right\} &\leq \\ &\leq \sup \left\{ meas_1(E_1(E_1, \widetilde{\psi}_2) \cap (-\infty, r]) : \|b\|=0 \right\} \leq \\ &\leq \sup \left\{ \int_{-\infty}^{g(r)} \frac{dt}{\widetilde{\psi}_2(t)} : \|b\|=0 \right\} \leq \int_{-\infty}^{\Phi(2gr)} \frac{dt}{\widetilde{\psi}_2(t)}. \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} meas_p(E_1(\widetilde{\psi}_2) \cap C(r; R)) &\leq \\ &\leq R^{p-1} \int_{-\infty}^{\Phi(2gr)} \frac{dt}{\widetilde{\psi}_2(t)} = R^{p-1} (\tilde{c} + c \int_{-\infty}^{\Phi(2gr)} \frac{dt}{\widetilde{\psi}_2(t)}), \end{aligned} \quad (3.19)$$

де $\tilde{c} = \frac{\square \sqrt{c}}{2 \psi_2(0)}$. Скориставшись (3.14), отримуємо, що

$$meas_p (E_1(\widetilde{\psi}_2) \cap C(r, R)) \leq R^{p-1} (\tilde{c} + cr\tilde{a}(r)), \quad (3.20)$$

де $\tilde{a}(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow +\infty$) функція, що залежить лише від p , Φ та ψ_2 . Застосовуючи теорему 3.1, а також нерівність Чебишова з функціями $g_0(t) = g(t)$,

$$\psi(t) = \widetilde{\psi}_1(t) = \begin{cases} \psi_1(t), t \geq 0 \\ \psi_1(0)(1 + t^2), t < 0 \end{cases}$$

при $\sigma = b + te_0$, $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus (E \cup E_2(\widetilde{\psi}_1))$) маємо

$$\begin{aligned} \omega'(\ln \mu(\sigma, F)) &\leq \omega'((1 - \xi_o(\sigma)) \ln F(\sigma)) \leq \omega'((1 - \xi_o(\sigma)) g(t)) \leq \\ &\leq \omega'((1 - \xi_o(\sigma)) \widetilde{\psi}_1^{-1} g'(t)) \omega'((1 - \xi_o(\sigma)) \psi_1^{-1} (\|\nabla \ln F(\sigma)\|)) \leq \\ &\leq (1 - o(1)) \omega'(\psi_1^{-1} (\|\nabla \ln F(\sigma)\|)), \end{aligned} \quad (3.21)$$

де $\varepsilon_o(\sigma) \rightarrow 0$ ($|\sigma| \rightarrow +\infty$).

При цьому, як і вище для множини $E_2(\widetilde{\psi}_1)$ маємо

$$\begin{aligned} &\sup \{ \int_{E_2(b)} dx_1 : (x_2, \dots, x_p), \|b\|=0 \} \leq \\ &\leq \sup \{ meas_1(E_2(b, \widetilde{\psi}_1) \cap (-\infty, r]) : \|b\|=0 \} \leq \\ &\leq \sup \{ \int_{-\infty}^{g(r)} \frac{dt}{\widetilde{\psi}_1(t)} : \|b\|=0 \} \leq \frac{\square}{2\psi_1(0)} \int_0^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\psi_1(t/2)}. \end{aligned}$$

Звідки,

$$\begin{aligned} meas_p(E_2(\widetilde{\psi}_1) \cap C(r, R)) &= \int_{K(R)} (\int_{E_1(b) \cap (-\infty, r]} dx_1) dx_2 \dots dx_p \leq \\ &\leq R^{p-1} \left(\frac{\square}{2\psi_1(0)} \int_0^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\psi_1(t)} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Звідси та з (3.14) отримуємо, що

$$meas_p(E_2(\widetilde{\psi}_1) \cap C(r, R)) = R^{p-1} (c^* + a^*(r)r), \quad (3.23)$$

де $c^* = \square / (2\psi_1(0))$, а $a^*(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow +\infty$) функція, залежна тільки від ρ , Φ , ψ_1 . Об'єднуючи оцінки (3.9), (3.20), (3.23), для міри множини $E_0 = E \cup E_2(\widetilde{\psi_1}) \cup E_1(\widetilde{\psi_2})$ отримаємо

$$meas_p(E_0 \cap C(r, R)) = o(R^{p-1}r)$$

при $r \rightarrow +\infty$ рівномірно по $R > 0$.

При $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E_0$), враховуючи, що $\bar{u} = \|\nabla \ln F(\sigma)\| \rightarrow +\infty$, а з нерівності (2.1) за допомогою нерівностей (3.18) і (3.21) послідовно, як і вище у доведенні теореми 2.1, отримаємо

$$\begin{aligned} & \omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \leq \\ & \leq \omega'(\ln \mu(\sigma, F)) \left\{ \ln \frac{c}{c-1} + \ln v(\bar{u} - \sqrt{\psi_2(\bar{u})}; \bar{u} + \sqrt{\psi_2(\bar{u})}) \right\} \leq \\ & \leq o(1) + \omega'(\ln \mu(\sigma, F)) d(\bar{u}) / \omega'(\psi_1^{-1}(\bar{u})) \leq d(\bar{u}) + o(1). \end{aligned}$$

Залишається пригадати, то $\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} d(u) = d$. Теорему 3.3 доведено.

Зауваження. Якщо умову $q = 1$, де $q = \overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \omega'((1 - \varepsilon(t))) / \omega'(t)$,

Замінити умовою $q < +\infty$, то, як впливає із доведення нерівності (3.21), у цьому випадку в рамках теореми 3.3 замість нерівності (2.2) отримаємо нерівність

$$\omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \leq dq + o(1).$$

Доведення теореми 3.4. Схема доведення теореми 3.4 залишається тією ж, що і у попередньому доведенні, за винятком оцінки величини виняткової множини, яка проводиться дещо інакше.

Відзначимо спочатку, що з теореми 3.2 випливає: нерівність (2.3) виконується при $|\sigma| \rightarrow +\infty$, ($\sigma \in K \setminus E$), де для міри множини E маємо оцінку (3.11) з функцією $a_2(r)$ такою, що

$$a_2(r) \rightarrow 0 \quad (r = \frac{1}{p} \|\sigma^{(j)}\| \rightarrow +\infty, j \rightarrow +\infty).$$

Обґрунтування коректності застосування теореми 3.2 є дослівно тим самим, що і обґрунтування коректності використання теореми 3.3, позаяк для цього досить лише довести, що існує функція $\psi_0(t) \in L^+_1(\Phi)$, для якої із умови (3.13) і $\omega \in L_2$ випливає, що правильне співвідношення (2.5). Далі, використовуючи нерівність (3.16) і умови (3.10), отримуємо, що при $\sigma = b + te_0$, $\|b\| = 0$, $t = \|\sigma^{(j)}\|/(2p)$

$$g'(t) \leq g(2t) = \Phi(\|\sigma^{(j)}\|),$$

а тому при отриманні оцінок міри множини $E_1(\widetilde{\Psi}_2)$, що виникає під час застосування нерівності Чебишова [2, с.356] з функціями $g_0(t) = g'(t)$, $\psi(t) = \widetilde{\Psi}_2(t)$, замість (3.19) і (3.20) отримаємо відповідно при $r = \|\sigma^{(j)}\| / (2p)$

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \int_{E_1(b) \cap (-\infty, r]} dx_1 : (x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^{p-1}, \|b\|=0 \right\} \leq \\ & \leq \sup \left\{ \text{meas}_1(E_1(b, \widetilde{\Psi}_2) \cap (-\infty, r]) : \|b\|=0 \right\} \leq \\ & \leq \sup \left\{ \int_{-\infty}^{g(r)} \frac{dt}{\widetilde{\Psi}_2(t)} : \|b\|=0 \right\} \leq \int_{-\infty}^{\Phi(\|\sigma^{(j)}\|)} \frac{dt}{\widetilde{\Psi}_2(t)}, \end{aligned}$$

та при $r = \|\sigma^{(j)}\| / (2p)$ і $R > 0$

$$\text{meas}_p(E_1(\widetilde{\Psi}_2) \cap C(r; R)) \leq R^{p-1} (\tilde{c} + c \int_0^{\Phi(\|\sigma^{(j)}\|)} \frac{dt}{\widetilde{\Psi}_2(t)}). \quad (3.24)$$

Подібно до нерівностей (3.22) і (3.23), для оцінки міри множини $E_2(\widetilde{\Psi}_1)$, що виникає при застосуванні леми [2, с.356] з функціями $g_0(t) = g(t)$ та $\psi(t) = \widetilde{\Psi}_1(t)$ маємо при $r = \|\sigma^{(j)}\| / p$ і $R > 0$

$$\begin{aligned}
& \sup \{ \int_{E_2(b)} dx_1 : (x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^{p-1}, \|b\| = 0 \} \leq \\
& \leq \sup \{ \text{meas}_1 (E_2(b, \widetilde{\psi}_1) \cap (-\infty, r]) : \|b\| = 0 \} \leq \\
& \leq \sup \{ \int_{-\infty}^g(r) \frac{dt}{\widetilde{\psi}_1(t)} : \|b\| = 0 \} \leq \int_{-\infty}^{\Phi(\|\sigma^{(j)}\|)} \frac{dt}{\widetilde{\psi}_1(t)},
\end{aligned}$$

та

$$\text{meas}_p (E_2(\widetilde{\psi}_1) \cap C(r; R)) \leq R^{p-1} (\tilde{c} + c \int_0^{\Phi(\|\sigma^{(j)}\|)} \frac{dt}{\widetilde{\psi}_1(t)}). \quad (3.25)$$

Залишається тепер зауважити, що для оцінки міри множини

$E_0 = E \cup E_1(\widetilde{\psi}_2) \cup E_2(\widetilde{\psi}_1)$ при $r = \frac{1}{2} \|\sigma^{(j)}\|$ і рівномірно за $R > 0$ отримуємо з нерівностей (3.11), (3.24) і (3.25)

$$\begin{aligned}
& \text{meas}_p (E_0 \cap C(r; R)) \leq \text{meas}_p (E \cap C(2r; R)) + \\
& + \text{meas}_p (E_1(\widetilde{\psi}_2) \cap C(2r; R)) + \text{meas}_p (E \cap C(2r; R)) \leq \\
& \leq R^{p-1} (2ra_2(2r) + \tilde{c} + c \int_0^{\Phi(\|\sigma^{(j)}\|)} \frac{dt}{\widetilde{\psi}_2(t)} + \tilde{c} + c \int_0^{\Phi(\|\sigma^{(j)}\|)} \frac{dt}{\widetilde{\psi}(t)}). \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Позаяк $\psi_1, \psi_2 \in L_1(\Phi)$, то маємо $\frac{1}{r} \int_0^{\Phi(\|\sigma^{(j)}\|)} \frac{dt}{\widetilde{\psi}_j(t)} \rightarrow 0$ ($j \rightarrow +\infty$). Тому з (3.26) отримуємо потрібну оцінку виняткової множини. З огляду на сказане вище, теорему 3.4 слід вважати доведеною.

Зауваження. У порівнянні з теоремою 2.1 у теоремах 3.3 і 3.4 на функцію $\omega \in L_2$ накладено дві додаткові умови $\omega'(t) \rightarrow 0$ та

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega'((1 - \xi(t))t) / \omega'(t) = 1.$$

Аналіз доведення теорем 3.3 і 3.4 показує, що від цих умов можна відмовитись, якщо означення класу $L_1(\Phi)$ змінити у наступний спосіб

$$\frac{1}{r} \int^{2\Phi(r)} \frac{dx}{\psi(t)} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow +\infty) \quad (3.27)$$

Отже, нехай $L_1^0(\Phi)$ клас функцій $\psi \in L_1^+(\Phi)$, для яких виконується умова (3.27). Якщо тепер у доведених теорем 3.3 і 3.4 при доведенні нерівності (3.21) застосувати лему [2, с.356] з функціями $g_0(t) = g(t)$ та $\psi(t) = \widetilde{\psi}_2(t/2)$, то зовні відповідних виняткових множин отримуємо

$$\begin{aligned} \omega'(\ln \mu(\sigma, F)) &\leq \omega'((1 - \xi_0(\sigma)) \ln F(\sigma)) \leq \omega'((1 - \xi_0(\sigma)) g(t)) \leq \\ &\leq \omega'((1 - \xi_0(\sigma)) \widetilde{\psi}_1^{-1} g'(t)) \omega'((1 - \xi_0(\sigma)) \psi^{-1}(c)), \end{aligned}$$

і позаяк, $\xi_0(\sigma) \rightarrow 0$, $|\sigma| \rightarrow +\infty$, то $\omega'(\ln \mu(\sigma, F)) \leq \omega'((\psi^{-1}(\|\nabla \ln F(\sigma)\|)))$. Звідси негайно отримаємо, що зовні відповідних виняткових множин $\bar{u} = \|\nabla \ln F(\sigma)\|$

$$\begin{aligned} \omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) &\leq \\ &\leq \omega'(\ln \mu(\sigma, F)) \left(\ln \frac{c}{c-1} + d(\bar{u}) / \omega'(\psi^{-1}(\bar{u})) \right) \leq \\ &\leq \omega'(\ln \mu(\sigma, F)) \ln \frac{c}{c-1} + d(\bar{u}). \end{aligned}$$

Звідки, вибираючи $c > 0$ досить великим, отримаємо, що для довільного $\xi > 0$ при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E_0$)

$$\omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) < d + \varepsilon. \quad (3.28)$$

Не складно при цьому переконатись, що оцінка виняткової множини $E_0 = E \cup E_1(\widetilde{\psi}_2) \cup E_2(\widetilde{\psi}_1(t/2))$ за умови $\psi_1 \in L_1^0(\Phi)$ не зміниться. Нехай тепер $E_0(\xi)$ виняткова множина, зовні якої виконується нерівність (3.28). Тоді, в рамках умов теореми 3.3 і $\psi_1 \in L_1^0(\Phi)$ отримаємо

$$meas_p(E_0(\xi) \cap C(r; R)) \leq a_4(r; \square) R^{p-1}r,$$

де $a_4(r; \square) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow +\infty$). Нехай $r_n \uparrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$) послідовність така, що для $r \geq r_n$ одночасно для $\sigma \in E_0(1/n)$ виконуються нерівності (3.28) і

$$a_4\left(r; \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Означимо тепер множину

$+\infty$

$$E^0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_0(\frac{1}{n}) \cap \{ \sigma \in \mathbb{R}^p : r_n \leq |\sigma| < r_{n+1} \})$$

і функцію

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{1}{n}, \quad r_n \leq |\sigma| < r_{n+1}.$$

Тоді для $\sigma \in \{ \sigma \in \mathbb{R}^p : r_n \leq |\sigma| < r_{n+1} \} \setminus E_0(\frac{1}{n})$

$$\omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) < d + \frac{1}{n} = d + \varepsilon(\sigma), \quad (3.29)$$

а також для $r \in [r_n, r_{n+1})$, $R > 0$

$$\begin{aligned} \text{meas}_p(E^0 \cap C(r; R)) \cap \{ \sigma \in \mathbb{R}^p : r_n \leq |\sigma| < r_{n+1} \}) = \\ = \text{meas}_p(E^0(\frac{1}{n}) \cap C(r; R)) \leq a_4(r, \frac{1}{n}) r_{n+1} R^{p-1}. \end{aligned}$$

Тоді для $r \in [r_n, r_{n+1})$ маємо

$$\begin{aligned} \text{meas}_p(E^0 \cap C(r; R)) = \sum_{k=1}^{n-1} (E_0(\frac{1}{k}) \cap (C(r_{n+1}, R) \setminus (C(r_{n+1}, R)))) + \\ + \text{meas}_p(E_0(\frac{1}{n}) \cap (C(r; R) \setminus (C(r_n, R)))) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} r_{k+1} R^{p-1} + \frac{1}{n^2} r R^{p-1}. \end{aligned}$$

Не складно тепер перевірити, що $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} r_{k+1} + \frac{r}{n^2} = o(r)$ при $r \in [r_n, r_{n+1})$ і $n \rightarrow +\infty$.

Тому можна означити функцію

$$a_5(r) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{k^2} + \frac{1}{n^2}, \quad r \in [r_n, r_{n+1}).$$

Отже, при $|\sigma| \rightarrow +\infty$, $\sigma \in K \setminus E^0$ виконується (3.29), а також

$$\text{meas}_p(E^0 \cap C(r; R)) \leq r R^{p-1} a_5(r),$$

де $a_5(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow +\infty$).

Звідси випливає, що ми довели наступну теорему.

Теорема 3.5. Нехай $\Phi \in L^+$, $\omega \in L_2$ і F - має вигляд (1.2). Якщо виконується умова (3.3) і існують функції $\psi_1 \in L_1^0(\Phi)$, $\psi_2 \in L_1(\Phi)$ такі, що виконується умова (3.13), то нерівність (2.2) справджується при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$) для

кожного конуса K з вершиною в точці $O = (0, \dots, 0)$ такого, що $\bar{K} \setminus \{O\} \subset \gamma(F)$; множина $E \subset \mathbb{R}^p$ така, що

$$meas_p(E \cap C(r; R)) = o(r R^{p-1})$$

при $r \rightarrow +\infty$ рівномірно за $R > 0$.

Легко зрозуміти, що абсолютно подібно, як і теорема 3.5, доводиться наступна теорема. При цьому доведення теореми 3.4 потрібно видозмінити майже дослівно вслід за видозміною доведення теореми 3.3, яка привела до теореми 3.5.

Теорема 3.6. Нехай $\Phi \in L^+$, $\omega \in L_2$ і для F , що має вигляд (1.2), виконується умова (3.10) вздовж деякої послідовності $\sigma = \sigma^{(j)} \in \mathbb{R}^p$, $\|\sigma^{(j)}\| \rightarrow +\infty$ ($j \rightarrow +\infty$). Якщо існують функції $\psi_1 \in L_1^0(\Phi)$ і $\psi_2 \in L_1(\Phi)$ такі, що виконується умова (3.13), то нерівність (2.2) справджується при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$) для кожного конуса з вершиною в точці $O = (0, \dots, 0)$ такого, що $\bar{K} \setminus \{O\} \subset \gamma(F)$; множина $E \subset \mathbb{R}^p$ така, що

$$meas_p(E \cap C(r; R)) = a_6(r) r R^{p-1}$$

для деякої функції $a_6(r) = a_6(r, p, \psi_1, \psi_2, \Phi)$ такої, що $\lim_{r \rightarrow +\infty} a_6(r) = 0$.

Доведення. Як відзначається вище (після формули (3.27), а також після (3.28)), з огляду на проведені там і у доведенні теореми 3.4 міркування, нерівність (3.28) виконується для кожного $\xi > 0$ при

$|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E_0$), при цьому для множини E_0 правильна оцінка

$$meas_p(E_0 \cap C(r; R)) \leq a_2(r) r R^{p-1}$$

з функцією $a_2(r) \rightarrow 0$ ($r = \frac{1}{2^p} \|\sigma^{(j)}\| \rightarrow +\infty, j \rightarrow +\infty$).

Нехай тепер $E_0(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ - множина, зовні якої виконується нерівність (3.28). Тоді,

$$meas_p (E_0 (\varepsilon) \cap C (r; R)) \leq a_3 (r, \varepsilon) R^{p-1} r,$$

де $a_3 (r, \varepsilon) \rightarrow 0$ ($r = \frac{1}{2^p} \|\sigma^{(j)}\| \rightarrow +\infty, j \rightarrow +\infty$).

Нехай послідовність $j_n \uparrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$) така, що $\|\sigma^{(j_n)}\| \uparrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$) і для $j \geq j_n$

$$a_3 (r, \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n^2}, \quad r = \frac{1}{2^p} \|\sigma^{(j)}\|$$

та для $\sigma \in K \setminus E_0 (\frac{1}{n})$ виконується нерівність (3.28). Означимо множину

$$E^0 \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(E_0 \left(\frac{1}{n} \right) \cap \{ \sigma \in \mathbb{R}^p : \|\sigma^{(j)}\| \leq |\sigma| < \|\sigma^{(j_{n+1})}\| \} \right)$$

і функцією $\varepsilon (\sigma) = \frac{1}{n}$, $\|\sigma^{(j_n)}\| \leq |\sigma| < \|\sigma^{(j_{n+1})}\|$. Тоді, для $\sigma \in \{ \sigma \in \mathbb{R}^p : \|\sigma^{(j_n)}\| \leq |\sigma| < \|\sigma^{(j_{n+1})}\| \} \setminus E_0 (\frac{1}{n})$

$$\omega (\ln F(\sigma)) - \omega (\ln \mu(\sigma, F)) \leq d + \frac{1}{n} = d + \varepsilon (\sigma),$$

а також при $k \geq 1$

$$\begin{aligned} meas_p (E_0 \cap C \left(\frac{1}{2^p} \|\sigma^{(j_{n+1})}\|, R \right) \cap \{ \sigma \in \mathbb{R}^p : \|\sigma^{(j_n)}\| \leq |\sigma| < \|\sigma^{(j_{n+1})}\| \}) &= \\ &= meas_p (E^0 \left(\frac{1}{k} \right) \cap C \left(\frac{1}{2^p} \|\sigma^{(j_k)}\|, R \right)) \leq \\ &\leq a_3 \left(\frac{1}{2^p} \|\sigma^{(j_k)}\|, \frac{1}{k} \right) \frac{1}{2^p} \|\sigma^{(j_k)}\| R^{p-1}. \end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned} meas_p (E^0 \cap C \left(\frac{1}{2^p} \|\sigma^{(j_n)}\|, R \right)) &= \\ &= \sum_{k=1}^n meas_p (E^0 \left(\frac{1}{k} \right) \cap C \left(\frac{1}{2^p} \|\sigma^{(j_k)}\|, R \right)) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \frac{1}{2^p} \|\sigma^{(j_k)}\| R^{p-1}. \end{aligned}$$

Залишилося зауважити, що

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \|\sigma^{(j_k)}\| = o(\|\sigma^{(j_n)}\|) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

і тому для $r = \frac{1}{2^p} \|\sigma^{(j_n)}\|$ і $a_6(r) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \|\sigma^{(j_k)}\|$ маємо

$$meas_p(E^0 \cap C(r; R)) \leq a_6(r) r R^{p-1},$$

а також

$$a_6(r) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Теорему 3.6 доведено.

Висновки

Таким чином, у даній магістерській роботі вивчено властивості інтегралів типу Лапласа та встановлено оцінки зверху лише за обмежень на міру і швидкість зростання підінтегральної функції.

Виходячи з базового результату теореми 2.1 доведені стіввідношення у вигляді тверджень 3.1 та 3.2 та їх наслідки у вигляді теорем 3.1 - 3.6.

Результати даної роботи підготовлені до друку.

Список використаних джерел

1. О. Б. Скасків, О. М. Тракало. Асимптотичні оцінки інтегралів Лапласа // Мат. студії.-2002 .-Т.18, N2,- с.125-146
Subharmonic functions V.2.- London e
2. W. K. Hayman. Subharmonic fuctions V.2.-London etc.: Acad. Press 1989.- XX1, 591 p.
3. О.Б. Скасків, О.М. Трусевич. Асимптотичні властивості регулярно збіжних функціональних рядів // Препринт N17-1.-Львів: ІППММ НАН України, 1999. – 18с.