

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Кафедра математики та економіки

“До захисту допускаю”

Завідувач кафедри математики та економіки

кандидат педагогічних наук, доцент

_____ Т.І. Війчук

(підпис)

«_____» _____ 2024

МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ДО НАВЧАННЯ УЧНІВ
РОЗВ’ЯЗУВАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ НА УРОКАХ
МАТЕМАТИКИ

Спеціальність 014 Середня освіта (математика)

Магістерська робота

на здобуття кваліфікації – «Магістр середньої освіти.»

Професійна кваліфікація «Вчитель математики закладу загальної середньої освіти»

Автор роботи: Сєрова Олена Олександрівна _____

Науковий керівник:

кандидат педагогічних наук, доцент

Війчук Тарас Іванович _____

Дрогобич, 2024

Захист магістерської роботи

Методичні підходи до навчання учнів розв'язування нерівностей на уроках математики

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

дата

Голова ДЕК _____

підпис

прізвище, ім'я

Секретар ДЕК _____

підпис

прізвище, ім'я

Зміст

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ	7
1.1. Історичні відомості виникнення та розвитку поняття «нерівності» ..	7
1.2. Види нерівностей, які вивчаються у шкільному курсі математики...	10
1.3. Логіко-дидактичний аналіз теми «Нерівності».....	14
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ ТА ЇХ СИСТЕМ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ	16
2.1. Логіко-математичний аналіз теми “ Нерівності”	16
2.2. Логіко-математичний аналіз теми “Квадратичні нерівності”	21
2.3. Ірраціональні нерівності.....	27
2.3.1. Найпростіші випадки розв’язування ірраціональних нерівностей ...	33
2.3.2. Зведення раціональних нерівностей до систем раціональних нерівностей.....	34
2.3.3. Формування алгоритмічних умінь і навичок при розв’язуванні нерівностей методом інтервалів	37
2.4. Логіко-математичний аналіз теми “Нерівності з модулем”	39
2.5. Методичні особливості розв’язку систем нерівностей	41
2.6. Методика вивчення основних класів нерівностей та їх систем.....	51
ВИСНОВКИ	57
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	57

ВСТУП

Актуальність теми. Тема «Нерівності» займає досить велику частину курсу алгебри та має важливе практичне значення. Це обумовлено тим, що нерівності широко застосовуються в різних галузях математики та у вирішенні прикладних задач. Ця тема насичена теоретичним матеріалом, різноманітними задачами та методами їх розв'язання. Крім того, задачі на тему «Нерівності» включені в програму Державної підсумкової атестації, Зовнішнього незалежного оцінювання та Національного мультипредметного тесту.

Проаналізувавши літературу, присвячену методиці вивчення теми «Нерівності» в школі, можна зробити висновок, що Українська математична школа має багату історію досліджень в області нерівностей, зокрема в галузях аналізу, алгебри, геометрії та теорії чисел. Розглянемо детальніше роботи деяких видатних українських математиків у цій темі. Михайло Кравчук видатний український математик, відомий своїми роботами в галузі теорії функцій, алгебри, а також математичних нерівностей. Він зробив значний внесок у розвиток теорії наближення функцій, де нерівності відіграють важливу роль. М. Кравчук досліджував різні види нерівностей, що використовуються для оцінки похибок наближених рішень. Його роботи включають дослідження нерівностей для поліномів та інших функцій.

Іван Шаригін відомий своїми роботами в галузі геометрії та теорії чисел, включаючи математичні нерівності. Його дослідження охоплюють широкий спектр тем, включаючи нерівності в трикутниках та багатокутниках. І.Шаригін розробив багато нерівностей для геометричних фігур, зокрема трикутників. Він досліджував нерівності, пов'язані з кутами, сторонами та іншими характеристиками трикутників.

Віктор Глушков основоположник української кібернетики, але його внесок у математичну науку також включає дослідження в галузі функціонального аналізу, де нерівності відіграють важливу роль. В.Глушков

досліджував нерівності типу Грунвалля та Гельдера, які є важливими у функціональному аналізі та теорії інтегралів.

Володимир Маз'я є видатним математиком українського походження, відомим своїми роботами в області теорії часткових диференціальних рівнянь та функціонального аналізу. В.Маз'я зробив значний внесок у дослідження нерівностей типу Соболева, які є фундаментальними в теорії функціональних просторів і мають численні застосування в аналізі та теорії диференціальних рівнянь.

Анатолій Самойленко є відомим українським математиком, чиї дослідження охоплюють широкий спектр тем, включаючи диференціальні рівняння та теорію динамічних систем. А.Самойленко досліджував різні види диференціальних нерівностей, які використовуються для оцінки розв'язків диференціальних рівнянь і дослідження їхньої стійкості.

Українські математики зробили значний внесок у розвиток теорії нерівностей, досліджуючи їх у різних контекстах і застосуваннях. Їхні роботи мають велике значення для розвитку сучасної математики і знаходять застосування в багатьох галузях науки і техніки.

Отже, можемо стверджувати, що окремим питанням методики навчання нерівностей та їх систем присвячено чимало досліджень.

Під час розв'язання нерівностей іноді виникають труднощі, пов'язані з такими особливостями:

- незнання послідовності розв'язання нерівностей та їх систем;
- учні при розв'язанні нерівностей здійснюють перетворення, які не є рівними вихідним нерівностям;
- при розв'язанні нерівностей шляхом введення нової змінної забувають повертатися до заміни.

Ці проблеми підкреслюють актуальність обраної теми та необхідність її вивчення для майбутньої педагогічної практики.

Мета дослідження: вдосконалити компоненти методичної системи

формування в учнів поняття «нерівності» та навчання їх розв'язування нерівностей та їх систем

Об'єкт дослідження: процес навчання математики у школі.

Предмет дослідження: методичні особливості формування в учнів вмінь розв'язувати нерівності та їх системи.

Відповідно до мети дослідження **завданнями** даної роботи:

1. Ознайомитись та проаналізувати методичну літературу та шкільні підручники, що стосується проблеми дослідження.
2. Проаналізувати теоретичні засади викладання теми "Нерівності" у курсі алгебри та початків аналізу загальноосвітньої школи.
3. Систематизувати різні підходи до формування поняття "нерівність" у курсі алгебри середньої школи.
5. Узагальнити та раціоналізувати методичні рекомендації щодо навчання учнів розв'язку нерівностей.
6. Провести дослідження з методичних основ реалізації повторення під час навчання розв'язуванню нерівностей.

Наукова гіпотеза припускає, що включення теми "Нерівності" в курс математики через інтерактивні методики може виявитися ефективнішим підходом, ніж традиційні методи. Інтерактивні методи, такі як групові вправи, візуалізація матеріалу та використання комп'ютерних програм, здатні зробити процес навчання більш доступним і зрозумілим для учнів різних рівнів підготовки.

Методи дослідження, застосовані для реалізації поставлених завдань:

-*теоретичні*: вивчення, аналіз та узагальнення педагогічної, навчальної та методичної літератури з даної теми;

-*практичні*: вивчення педагогічного досвіду вчителів, спостереження та порівняння.

Практичне значення магістерської роботи полягає в тому, що її матеріали можуть використовуватися вчителями та студентами для підготовки

уроків, а також учнями та студентами фізико-математичних напрямків.

Новизну цього дослідження забезпечують такі аспекти:

Інтерактивні методи навчання: Використання ігрових методик, віртуальних інструментів, групових проектів та інших інтерактивних засобів для активізації навчального процесу та залучення учнів до активної участі у вивченні матеріалу.

Диференційований підхід: при плануванні та проведенні уроків з теми "Нерівності" враховуються індивідуальні потреби і можливості кожного учня, що дозволяє оптимізувати навчальний процес і забезпечити успіх для всіх учнів.

Застосування реальних прикладів: використання задач з реального життя та ситуацій, які зацікавлюють учнів, демонструє практичне застосування теми "Нерівності".

Міжпредметні зв'язки: інтеграція математики з іншими предметами, такими як фізика, економіка, географія, підкреслює важливість та універсальність вивчення теми "Нерівності".

Апробації дослідження.

Результати дослідження обговорювались на науковій конференції студентів та викладачів факультету ФМЕІТ за результатами якої опубліковано тези за темою магістерської роботи, а також на засіданні кафедри математики та економіки.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, загального висновку, списку використаних джерел. У вступі підкреслена актуальність теми дослідження. Перший розділ присвячений розгляду особливостей вивчення алгебри, ролі змістової лінії «Нерівності» в шкільному курсі математики, складовим алгебраїчної культури учнів в даній темі. У другому розділі описана методика формування умінь і навичок.

РОЗДІЛ 1.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ ТА ЇХ СИСТЕМ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ

1.1 Історичні відомості виникнення та розвитку поняття «нерівності»

Через необхідність порівняння величин з'явилися поняття «більше» і «менше» разом із поняттям рівності. Так, відомо, що поняттями нерівності користувалися давні греки, а Архімед, займаючись обчисленням довжини кола, розглядав правильний косинець і з'ясував, що «периметр будь-якого кола дорівнює потрійному діаметру з надлишком, який менше сьомої частини діаметра, але більше десяти сімдесят перших». Цю оцінку Архімеда можна записати символами

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 1 \frac{1}{7}.$$

В головній праці давньогрецької математика Евкліда наводиться ряд нерівностей. У своєму трактаті він доводить, що «середнє геометричне двох позитивних чисел не більше їх середнього арифметичного», тобто правильна

нерівність [17, с.250]:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Також Евклід доводив, що у пропорції $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, де всі змінні позитивні числа, існує нерівність $a + d > b + c$.

Всі ці міркування доводились словесно, спираючись на здебільшого на геометричну термінологію, а вживання букв та різних інших математичних символів з'явилося в результаті довгого розвитку математики. Воно по-справжньому почалося лише в 15 столітті, до цього всі величини, математичні дії, умови та докази висловлювалися практично одними

словами. Алгебру тих часів, тому називають риторичною, тобто словесною [17]. Знак рівності « $\equiv$ » запропонував уельський лікар і математик Роберт Рекорд в 1557 році в книзі "The Whetstone of Witte", до цього математики пропонували різні позначення, але, зрештою, символ запропонований Рекордом закріпився в математиці. Сам автор пояснював цей символ, що немає у світі нічого більш рівного, ніж два паралельні відрізки однакової довжини. Спочатку поширенню знака заважало те, що так позначали паралельність прямих ліній. Знак рівності Рекордом став загальновживаним лише у 18 столітті, після того, як знаком стали користуватися Лейбніц та її послідовники.

Виходячи із знаку рівності інший англієць – Томас Герріот удосконалив символіку алгебри і ввів знак нерівності. Символи $>$ (більше) та $<$ (менше) з'явилися у книзі «Практика аналітичного мистецтва», 1631 року. Герріот обґрунтовував нововведення таким чином: якщо дві величини не рівні, то відрізки, що фігурують у знаку рівності, вже не паралельні, а перетинаються. Перетин може мати місце праворуч ($>$) або зліва ($<$). Томас Герріот був не лише математиком, а й астрономом, етнографом, картографом та перекладачем, котрий відвідав Північну Америку. Є припущення, що символи він придумав, побачивши популярне серед індіанців татуювання у вигляді знаків $>$ і $<$ накладених разом. Незважаючи на те, що знаки нерівності були запропоновані через 74 роки після запропонованого Рекордом знака рівності, вони увійшли у вжиток набагато раніше останнього. Одна з причин цього в тому, що друкарні застосовували на той час для знаків нерівності вже в них латинську букву V, тоді як набірного знака рівності ($=$) у них не було, а виготовляти його було нелегко [9, с.164]. Леонард Ейлер у своїх записах 1743 використовував перевернуті знаки радикала для позначення символів більше і менше, а німецький математик Авраам Готтгельф Кестнер використав знак зодіаку барана. Також іноді у пресі використовували 10 знак кута, незважаючи на той факт, що цей знак вже активно використовувався в геометрії [39]. Символи $\leq$ і $\geq$

не суворого порівняння запропонував Валліс у 1670 році. Спочатку риса була вищою за знак порівняння, а не під ним, як зараз. Загальне поширення ці символи набули у 1734 році, після підтримки французького математика П'єра Бугера, у якого вони придбали сучасний вигляд [9]. У цьому параграфі було розглянуто історію виникнення нерівностей та їх символіки.

1.2. Види нерівностей, які вивчаються у шкільному курсі математики.

Нерівності в шкільному курсі, що містять невідомі величини, поділяються на:

- алгебраїчні;
- трансцендентні;

У курсі алгебри основної школи перша група отримує достатньо розгортання матеріалу, що сприяє формуванню міцних навичок розв'язання задач. У другій групі цей курс тільки починається, причому розглядаються повністю всі класи, а остаточне вивчення відбувається в курсі алгебри і початку аналізу. Важливішим є врахування особливостей, пов'язаних з розгортанням матеріалу другої групи. У порівнянні з першою групою, рівняння та нерівності другої групи в процесі вивчення виявляють значно складніші зв'язки з іншими аспектами курсу, такими як числові, функціональні, тотожні перетворення тощо.. [7, с. 48]

Раціональні нерівності вивчаються протягом 9 класу: 1. "Алгебра, 9", автори Мерзляк О. Г., Полонський В. Б., Якір М. Ц [31, 32].

Основна ціль:

Формування поняття про числові нерівності, нерівностей з однією змінною, модулем дійсного числа;

Формування умінь дослідження функції на монотонність, застосування наближених обчислень;

Оволодіння вмінням побудови графіка функції модуль, опис її властивостей;

Оволодіння навичками розв'язання лінійних, квадратних нерівностей, розв'язання нерівностей, що містять змінну величину під знаком модуль.

2. Алгебра. 9 клас. Підручник Істер О.С.

Перший розділ підручника присвячено темі «Нерівності».

Тема розглядається в наступному порядку:

- Числові нерівності
- Властивості числових нерівностей
- Додавання і множення нерівностей
- Розв'язування нерівностей з однією змінною та їх систем
- Розв'язування нерівностей з однією змінною
- Розв'язування систем нерівностей з однією змінною
- Розв'язування нерівностей з однією змінною під знаком модуля

Існує два способи підходу до вивчення теми нерівностей:

1) Починаємо з вивчення матеріалу рівнянь та їх систем, які передували нерівностям. Окремо вивчається теорія квадратичних тричленів. Подальше вивчення у старших класах позбавлене цього контрасту. Логарифмічні, показникові, тригонометричні рівняння і нерівності вивчаються в тісному зв'язку;

2) Основні класи нерівностей вивчаються одразу після вивчення відповідних класів рівнянь. Існують також проміжні шляхи, в яких рівняння і нерівності тісно пов'язані в часі, а в інших - ні. Необхідно враховувати два протилежні процеси, які супроводжують навчання.

1. Поступове збільшення кількості класів рівнянь, нерівностей та методів їх розв'язування, різноманітних перетворень під час розв'язування.

2. Встановлення різноманітних зв'язків між різними класами рівнянь, виділення все більш загальних класів, закріплення все більш загальних типів

перетворень, спрощення описів та обґрунтування розв'язків. Вивчення нерівностей та їх систем поділяється на чотири основні етапи.

1. Вивчення основних типів нерівностей та систем нерівностей. Основними типами є лінійні нерівності з одним невідомим, квадратні нерівності, прості ірраціональні нерівності та трансцендентні нерівності. Кожен з основних класів нерівностей та їх систем потребує дослідження залежності результату від коефіцієнтів.

2. Вивчення нерівностей та систем, які можна звести до основних класів. Кожен з основних класів нерівностей та їх систем має чіткий, стандартизований запис.

Система нерівностей стандартного типу: Класифікація «другорядних» класів нерівностей та їх систем ширша, ніж класифікація основних класів. Вона включає, наприклад, нерівності першого степеня, біквадратичні нерівності, алгебраїчні нерівності та ірраціональні нерівності. Введення цих класів і встановлення відповідностей між ними та базовими класами призводить до співвідношень, які використовуються для спрощення процесу розв'язування.

3. Узагальнення матеріалу нерівностей.

1.3 Різні способи обґрунтування розв'язків нерівностей

Загалом, вивчення нерівностей на шкільних уроках математики організовано так само, як і вивчення рівнянь. Зокрема, вони проходять ті самі етапи вивчення. Особливості вивчення нерівностей:

1) Усі нерівності вивчаються за відповідним класом рівнянь, за винятком лінійних нерівностей.

2) Як правило, навички розв'язування нерівностей, за винятком лінійних і квадратних нерівностей, відпрацьовуються на більш низькому рівні, ніж рівнянь відповідних класів. Ця властивість має об'єктивний характер: теорія нерівностей складніша за теорію рівнянь.

3) Більшість методів розв'язування нерівностей полягають у переході від заданої нерівності $a < b$ до рівняння $a = b$ і подальшому переході від

знайдених коренів рівняння до множини розв'язків вихідної нерівності. За винятком лінійних нерівностей. Цю властивість необхідно постійно підкреслювати, щоб перехід до рівнянь і зворотний перехід став основним методом розв'язування нерівностей; у старших класах він формалізується як «метод інтервалів».

4) Важливу роль у вивченні нерівностей відіграють наочні та графічні посібники [7, с. 82]. Не всі вміють розв'язувати нерівності, які за своєю структурою мають схожість і відмінність від рівнянь. Розв'язувати системи нерівностей набагато складніше, ніж просто нерівності. Давайте розглянемо розв'язування нерівностей на конкретних прикладах. Перш ніж розв'язувати квадратні нерівності (системи) або інші системи нерівностей, необхідно розв'язати кожену нерівність окремо, а потім порівняти їх. Розв'язком системи нерівностей буде або позитивна, або негативна відповідь (чи має система розв'язок, чи ні).

Розв'язування нерівностей з модулем. Цей приклад показує, як розв'язувати нерівності з модулем. Отже, у нас є означення: Нам потрібно розв'язати нерівність: $|x+1|>1$ Перш ніж розв'язати таку нерівність, ми повинні позбутися модуля (знака) [10, с. 84] Ця нерівність еквівалентна сукупності нерівностей. Якщо відрізати два проміжки, то отримаємо $x \in (-4; 5)$ Відповідь: $x \in (-4; 5)$ Розв'язування квадратних нерівностей

Розглянемо приклад розв'язування квадратних нерівностей за допомогою числової прямої. Маємо нерівність: $x^2-60x+500 \leq 0$. Ми знаємо, що графіком квадратного тричлена є парабола. Ми також знаємо, що при $a>0$ ноги параболи спрямовані вгору. Використовуючи теорему Вієта, знаходимо корені $x_1 = 50$; $x_2 = 10$. Коріння рівняння ділять числову пряму на проміжки. Покажемо їх на числовій прямій: Отже, ми з'ясували, що значення квадратного тричлена на проміжку від 10 до 50 менші за 0. Відповідь: $x \in [10; 50]$.

У багатьох виникають питання при розв'язуванні подвійних нерівностей типу $g(x)>f(x)>q(x)$. Перш ніж розв'язувати подвійні нерівності,

потрібно розкласти їх на прості нерівності і розв'язати кожну з них окремо. Наприклад, якщо ми розкладемо наш приклад, то отримаємо систему нерівностей $g(x) > f(x)$ і $f(x) > q(x)$, яку потрібно розв'язати. Існують різні методи розв'язування нерівностей, тому для розв'язування складних нерівностей можна використовувати графічний метод.

Розв'язування дробових нерівностей

З дробовими нерівностями потрібно бути трохи обережнішим. Це пов'язано з тим, що знак деяких дробових нерівностей може змінюватися при їх розв'язуванні. Перед тим, як розв'язувати дробові нерівності, потрібно знати, що для їх розв'язування використовується метод інтервалів. Дробову нерівність потрібно представити так, щоб одна сторона знака виглядала як дробовий раціональний вираз.

Розв'язування нерівностей методом інтервалів

В основі методу інтервалів лежить метод повної індукції, тобто, щоб знайти рішення нерівності, потрібно перебрати всі можливі варіанти. Для учнів 9 класу цей метод може бути не потрібен, оскільки вони повинні знати, як розв'язувати нерівності 9 класу, які є найпростішими задачами. Однак для старшокласників цей метод є важливим, оскільки він допомагає розв'язувати нерівності з дробами. Розв'язування нерівностей цим методом також ґрунтується на властивості неперервної функції, а саме на збереженні знаку між значеннями, при яких вона перетворюється на 0.

1.3. Логіко-дидактичний аналіз теми «Нерівності»

Програма сучасної шкільної математики поділена на десять змістових ліній, серед яких є лінія рівнянь і нерівностей.

Починаючи з 5 класу, учні мають справу з числовими нерівностями при порівнянні дробів (звичайних і десяткових), використовують знаки $>$, $<$ при порівнянні раціональних чисел у 6 класі та значення виразів у 7 класі. Відомі множини чисел розширюються, коли у 8 класі вводиться поняття ірраціональних чисел та множини дійсних чисел. У курсі алгебри основної

школи учні вдосконалюють арифметичні навички розв'язування нерівностей та обчислення значень виразів [44, с. 87].

На протязі дев'ятого класу вивчення нерівностей починається більш глибоко: вивчаються властивості нерівностей, лінійні нерівності з однією змінною та квадратні нерівності. Учні вивчають, як розв'язувати системи двох лінійних нерівностей з однією змінною.

Лінія рівнянь і нерівностей розвивається в рамках вивчення ірраціональних і тригонометричних нерівностей у 10 класі та показникових і логарифмічних нерівностей та їх систем в 11 класі.

Розглянемо, як вивчаються нерівності в різних підручниках з алгебри, рекомендованих Міністерством освіти України. За основу візьмемо такі підручники: «Алгебра» для 9 класу (авт. А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір), 2017 р.; «Алгебра і початки аналізу», 10 клас, профільний рівень; «Алгебра» для 11 класу, академічний і профільний рівні (авт. А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір), 2011 р. Якір), 2011 р. [36, 37, 38]; «Алгебра», 9 клас, «Алгебра і початки аналізу» для 10 класу, профільний рівень (авт. Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владимірова) 2017 р. [2, 3]; «Алгебра», 9 клас (авт. О.С. Істер) 2017 р., «Алгебра і початки аналізу» для 10 класу профільного рівня (авт. О.С. Істер, О.В. Єргіна), 2018 р. [22, 23].

Результати аналізу чинних підручників з теми «Нерівності» наведено в таблиці (Додаток А).

На нашу думку, тема «Нерівності» ширше і доступніше розкрита в підручниках «Алгебри» 9 клас та «Алгебра і початки аналізу» для 10 класу профільного рівня (автори А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір), оскільки вони є найбільш наочними для учнів.

I. Методика викладання. Автор викладає матеріал за допомогою абстрактно-індуктивного методу викладання. Доречно використовуються ілюстративні приклади.

II. Структура підручника. Підручник складається з 5 розділів (38 параграфів). Усі 5 розділів містять алгебраїчний матеріал. Основний

теоретичний зміст розділів виділено кольором, шрифтом тощо. Кожна теорема супроводжується детальним доведенням. Наприкінці майже кожного розділу наведено вправи для повторення раніше вивченого матеріалу. Особливо корисним є додаток «Відомості з алгебри для 7-9 класів» наприкінці підручника, в якому подано основний теоретичний матеріал курсу алгебри основної школи у вигляді довідкового огляду. Також є вправи для самоперевірки та предметний покажчик.

III Система завдань. Система завдань до кожного розділу диференційована, містить завдання на відпрацювання основних умінь і навичок, складність завдань у підручнику визначається кількістю зірочок над номером вправи. Завдання охоплюють теоретичний матеріал у повному обсязі та дають можливість закріпити його шляхом розв'язування вправ.

Таким чином, підручники відповідають навчальній програмі з математики для середньої школи. Вони можуть використовуватися в класах з різною математичною підготовкою, що дає змогу вчителю реалізувати диференційований підхід до навчання кожного учня в класі. Застосуванню знань у практичній діяльності сприяє низка практичних завдань у кінці кожного розділу під рубрикою «Перевірка компетентності». Велика кількість практичних завдань у підручниках сприяє практичному розумінню матеріалу та формуванню чітких уявлень про нерівності, їх види та способи розв'язування.

РОЗДІЛ 2.

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ ТА ЇХ СИСТЕМ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ

2.1. Логіко-математичний аналіз теми “Лінійні нерівності”

Нерівності починають вивчати ще в початковій школі, де невідома величина є одним із компонентів чотирьох арифметичних дій. Як правило, задача може мати вигляд $x > 6$, $x + 3 < 7$. Або його можна сформулювати у формі запитання: «Які натуральні числа менші від 12?». Усі ці нерівності в початковій школі вирішуються шляхом підбору. Учні просто перераховують числа, які можуть бути розв’язком запропонованих нерівностей

У середній школі поняття «лінійні нерівності» вводиться в 9 класі. Вивчення лінійних нерівностей є логічним продовженням вивчення лінійних рівнянь. Щоб вивчити цю тему, учні повинні вміти визначати тип лінійного рівняння, вміти розв’язувати лінійне рівняння з однією змінною, числовими інтервалами (промінь, відкритий промінь, відрізок, інтервал, півінтервал) і всі властивості числових рівнянь, знати властивості нерівностей. Перш за все, потрібно згадати формулу лінійного рівняння, корінь лінійного рівняння, кількість коренів лінійного рівняння, властивості числової нерівності та спосіб застосування рівняння для розв’язування лінійних нерівностей. Далі ми можемо дати визначення лінійної нерівності з однією змінною.

Лінійні нерівності — це нерівності виду $ax + b > 0$ ($ax + b < 0$), де a , b — довільні числа, $a > 0$. У підручнику подано три правила розв’язування лінійних нерівностей:

- Будь-який член нерівності можна перенести з однієї частини нерівності в іншу знаком нерівності з протилежним знаком, не змінюючи знака нерівності.

- Обидві частини нерівності можна помножити або поділити одночасно на одне й те саме додатне число, не змінюючи знака нерівності.

-Обидві частини нерівності можна помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число, змінивши знак нерівності на протилежний. Розв'язати нерівність означає знайти кожен її розв'язок або довести, що нерівність не має розв'язків. Алгоритм розв'язування лінійної нерівності алгебраїчно (тобто з використанням правил і властивостей):

- спростити обидві частини нерівності (розкрити дужки, вилучити дробу);
- перемістити терміни, що містять змінні, ліворуч, а інші – праворуч.
- скоротити подібні доданки в кожній частині;
- обидві частини нерівності поділити на коефіцієнт при змінній;
- побудувати графік розв'язку нерівності;
- у відповіді вказати числовий проміжок, який є розв'язком нерівності.

Наступні приклади, хоч і дуже прості, створюють основу для подальшого дослідження теми:

1. Розглянемо приклади.

Приклад 1.

$$2c - \frac{c+1}{2} \leq \frac{c-1}{3}$$

Ми використовуємо правило множення обох сторін нерівності на спільний знаменник дробів, одержуємо: $12c - 3(c+1) \leq 2(c-1)$

Розкриємо дужки, отримаємо: $12c - 3c - 3 \leq 2c - 2$

Зводимо подібні доданки: $7c \leq 1$

$$c \leq 1/7$$

Зобразимо розв'язання нерівності графічно (Рис. 2).

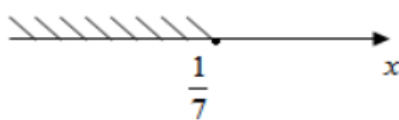


Рис. 2.

$$x \in (-\infty; \frac{1}{7}]$$

Відповідь:

Лінійні нерівності - це основа для розв'язку багатьох видів нерівностей. При розв'язанні нерівностей такого виду важливо відпрацювати основні правила та методи, щоб вивчення наступних тем було зрозумілішим.

Дуже важливо, щоб учні розуміли, як залежить знак нерівності від вигляду точки на координатній прямій та формі дужок для запису інтервалу у відповіді. (табл. 2.1).

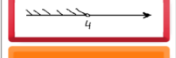
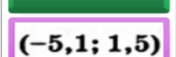
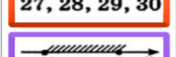
Табл.2.1

Види позначень в залежності від знаку нерівності

Знак нерівності	Вигляд точки на координатній прямій	Вигляд дужки в записі інтервалу
$>$ $<$	Виколота точка 	(,)
$\geq$ $\leq$	Зафарбована точка 	[,]

Доречно запропонувати учням вправу на знаходження відповідності в Інтернет-сервісі мультимедійних дидактичних вправ Wordwall (рис. 1.1).

Рис.1.1

		Який числовий проміжок відповідає нерівності: $-5,1 < x < 1,5$
		Розв'яжіть нерівність $4x - 3 < 2x + 7$
		Яка графічна модель відповідає нерівності $-18 \leq x \leq 6$
		Який з проміжків є розв'язком нерівності $6x \geq 48$
		Яка нерівність відповідає числовому проміжку $(-\infty; -150]$
		Які цілі числа належать проміжку: $[26, 5; 30, 6]$
		Перерізком проміжків $[1; 8)$ і $(5; 10]$ є проміжок
		$x - \frac{x+1}{3} - \frac{x-2}{6} < 2$ Розв'яжіть нерівність
		Яке число не належить проміжку $[-4; +\infty)$?
		Об'єднанням проміжків $(-4; 4)$ і $[-6; 3]$ є проміжок

Завдання 1.3. Встановіть відповідність.

Найважливіше навчити розв'язувати лінійні нерівності, відпрацю-

вуючи такі кроки:

1) Спрощення дробів (якщо вони присутні в даній нерівності) шляхом знаходження спільного знаменника та домноження на нього обох частин нерівності;

2) Якщо в нерівності присутні дужки, необхідно їх розкрити та перенести в протилежну сторону відомих величин з протилежним знаком, а невідомі величини перенести іншу частину ;

3) Звести подібні доданки шляхом їх додавання чи віднімання, а також обох частин нерівності на коефіцієнт біля x ($x \neq 0$)

2.2. Логіко-математичний аналіз теми «Квадратні нерівності»

Розглянувши підручник О.С. Істера, О.В. Єргіної «Алгебра» 9 клас, 2017р. слід відмітити, що на тему “Квадратні нерівності” відводиться 5 годин. В результаті вивчення теми учні повинні знати визначення квадратної нерівності, а також вміти розв'язувати квадратні нерівності графічним способом, а також методом інтервалів, оволодіти навичкою застосування алгоритмів до розв'язування відповідних задач.

Таблиця 1.2.

Вимоги до знань, навичок, умінь учнів за програмою 9 класу (за Державним стандартом 2017 року)

К-сть годин	Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
20	Тема 2. Квадратична функція	
	Учень/учениця: розв'язує квадратні нерівності	Квадратна нерівність

Таблиця 1.3.

Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу

	Поняття	Факти	Способи діяльності
Нові	Квадратна нерівність	—	Визначення проміжків для змінної x , що відповідають знаку нерівності
Базові	Квадратична функція, нерівність	Властивості числових нерівностей,	Побудова графіка квадратичної
	з однією змінною, числові проміжки, переріз і об'єднання числових проміжків	теореми про рівносильність нерівностей	функції, визначення напрямку віток параболи за знаком першого коефіцієнта, знаходження області визначення та області значень функції, відшукування коренів відповідного квадратного рівняння, застосування методу інтервалів

Таблиця 1.4

Логіко-математичний аналіз формулювань означень нових понять

Поняття	Формулювання означення	Вид означення. Характеристичні властивості.
Квадратна нерівність	Нерівності вигляду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, де x – змінна, a , b і c – деякі числа, причому $a \neq 0$, називають квадратними нерівностями (або нерівностями другого степеня з однією змінною).	Словесне означення, рід і видова відмінність.

Таблиця 1.5

Види вправ	Номери з підручника (Мерзляк 9 клас)
1. Вправи для створення мотивації та введення нового поняття	12.1, 12.2, 12.3, 12.4, 12.5,
2. Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та умінь	12.12, 12.7, 12.8
3. Вправи, спрямовані на виділення суттєвих властивостей та на побудову об'єктів, які мають ці властивості	12.10, 12.11, 12.12, 12.13, 12.14 12.15
4. Вправи, на базі яких відбувається ілюстрація поняття, що вводиться	12.16, 12.17, 12.19
5. Вправи для забезпечення розпізнавання об'єктів, що входять до обсягу нового поняття	12.23, 12.24, 12.26
6. Вправи, спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння тексту означення	12.1, 12.12, 12.28, 12.29

Таблиця 1. 5

Логіко-математичний аналіз системи вправ підручника,
призначених для формування способу діяльності

Основні способи діяльності	Відпрацювання операцій, які формують спосіб діяльності	Відпрацювання послідовності операцій, які входять у спосіб діяльності	Застосування способу діяльності
Визначення проміжків для змінної x, що відповідають знаку нерівності	12.4, 12.5, 12.7	12.10, 12.11, 12.12, 12.13	12.32, 12.8, 12.21, 12.24

Визначення напрямку віток параболи за знаком першого коефіцієнта	12.12.-12.25	—	12.44, 12.45
Знаходження області визначення та області значень функції	12.35, 12.36	12.31, 12.34-38,	12.42, 12.44, 12.45
Відшукування коренів відповідного квадратного рівняння	12.13, 12.17-12.22,	12.23, 12.55	12.18, 12.19, 12.20
Застосування методу інтервалів	12.74, 12.75	12.77, 12.77	12.48

• **Обов'язкові результати навчання :**

- Знати: визначення квадратної нерівності, алгоритми розв'язання квадратної нерівності за допомогою графіка квадратичної функції та методом інтервалів.

- Вміти: відрізняти квадратні нерівності від інших нерівностей, застосовувати алгоритми розв'язання квадратних нерівностей за допомогою квадратичної функції та методом інтервалів до розв'язання задач.

Аналіз понять.

У темі представлено 2 поняття, у тому числі лише одне визначено явно.

1. Формулювання визначення поняття: Якщо лівої частини нерівності стоїть квадратний тричлен, а правої – нуль, то таку нерівність називають квадратною.

2. Логічний аналіз структури визначення поняття «квадратна нерівність»:

- термін – квадратна нерівність;
- рід - нерівність;
- видові відмінності: у лівій частині нерівності стоїть квадратний тричлен, а правій – нуль;
- зв'язок між видовими відмінностями – з погляду логіки – імплікативне визначення;
- Вид визначення - через рід та видові відмінності;
- Опорні знання - поняття нерівності, поняття квадратного тричлена.
- Підведення під поняття (приклади конкретних квадратних нерівностей та контрприкладів):

- Наслідки з визначення поняття: розв'язання квадратної нерівності (графічним методом, аналітичним методом, методом інтервалів).

Можливі помилки у формулюванні визначення: учні замість двох суттєвих ознак називають лише одну; забувають вказати слово «нерівності».

Аналіз тверджень. Формулювання затвердження:

Якщо $D < 0$, то при всіх дійсних значеннях знак квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ збігається зі знаком числа a . Структура затвердження:

- Роз'яснювальна частина
- Будь-яка квадратична функція;
- Умова - $D < 0$; $y = ax^2 + bx + c$;
- висновок: при всіх дійсних значеннях знак квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ збігається зі знаком числа a .

1. Форма формулювання твердження – імплікативна.
2. Вигляд твердження – складне (дві умови, один висновок).
3. Метод доказу - алгебраїчний.
4. Достатня чи необхідна умова – достатня.
5. Опорні знання: поняття дискримінанта, поняття квадратного тричлена, поняття дійсного числа.

6. Можливі помилки та труднощі: у формулюванні твердження пропускають слово "дійсних".

Формулювання твердження:

Якщо $D=0$, то при всіх дійсних значеннях x , крім $x=-b/2a$, знак квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$ збігається зі знаком числа a ; при $x=-b/2a$ значення квадратичної функції дорівнює нулю.

Структура затвердження:

- Роз'яснювальна частина – будь-яка квадратична функція;
- Умова 1) $D = 0$; 2) $y=ax^2+bx+c$;
- висновок : за всіх дійсних значеннях x , крім $x=-b/2a$, знак квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$ збігається зі знаком числа a ; при $x=-b/2a$ значення квадратичної функції дорівнює нулю.

6. Форма формулювання затвердження – імплікативна.

7. Вигляд затвердження – складне (дві умови, два висновки).

8. Метод доказу - алгебраїчний.

9. Достатня чи необхідна умова – достатня.

10. Опорні знання: поняття дискримінанта, поняття квадратного тричлена, поняття дійсного числа.

11. Можливі помилки та труднощі: у формулюванні затвердження пропускають слово «дійсних».

Формулювання затвердження: Якщо $D>0$, то знак квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$ збігається зі знаком числа a всім x , лежачих поза відрізком $[x_1, x_2]$, тобто. при $x<x_1$ та при $x>x_2$, де $x_1<x_2$ – нулі функції; знак квадратичної функції протилежний знаку числа при $x_1<x<x_2$.

Структура затвердження:

- Роз'яснювальна частина – будь-яка квадратична функція;
- Умова - 1) $D>0$; 2) $y=ax^2+bx+c$;

- висновок : знак квадратичної функції $y=ax^2+bx+c$ збігається зі знаком числа a для всіх x , що лежать поза відрізком $[x_1, x_2]$; знак квадратичної функції протилежний знаку числа a при $x_1 < x < x_2$.

Форма формулювання твердження – імплікативна.

Вигляд твердження – складне (дві умови, два висновки).

Метод доказу - алгебраїчний.

Достатня чи необхідна умова – достатня.

Опорні знання: поняття дискримінанта, поняття квадратного тричлена, поняття дійсного числа.

Можливі помилки та складнощі: у формулюванні затвердження забувають вказувати значення x .

Аналіз алгоритмів (правил):

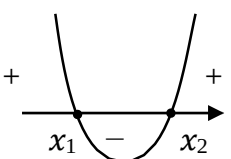
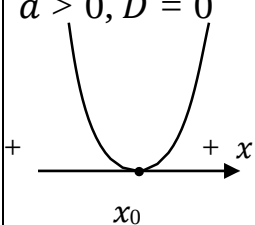
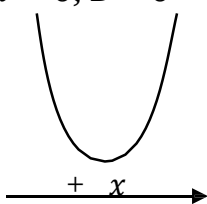
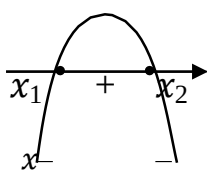
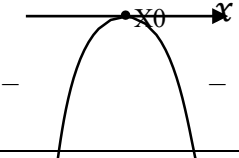
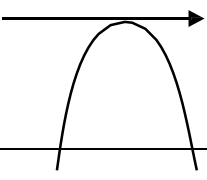
У цій темі містяться два алгоритми: алгоритм розв'язання квадратної нерівності за допомогою графіка квадратичної функції та алгоритм розв'язання квадратної нерівності методом інтервалів.

I. Алгоритм розв'язання квадратної нерівності за допомогою графіка квадратичної функції:

- 1) визначити напрямок гілок параболи за знаком першого коефіцієнта квадратичної функції;
- 2) знайти дійсний корінь відповідного квадратного рівняння або встановити, що його немає;
- 3) побудувати ескіз графіка квадратичної функції, використовуючи точки перетину (або дотику) з віссю Ox , якщо вони є;
- 4) за графіком визначити проміжки, у яких функція приймає необхідні значення.

Табл.2.3

Випадки розташування графіка квадратичної функції відносно осі Ox
та розв'язки відповідних квадратних нерівностей

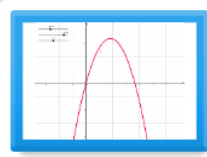
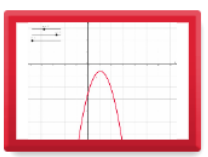
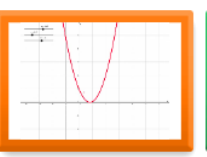
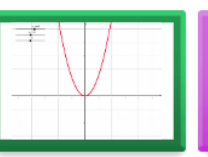
Схема	Квадратна нерівність			
	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$	$f(x) \geq 0$	$f(x) \leq 0$
$a > 0, D > 0$ 	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$[x_1; x_2]$
$a > 0, D = 0$ 	$(-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	x_0
$a > 0, D < 0$ 	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$
$a < 0, D > 0$ 	$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$[x_1; x_2]$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
$a < 0, D = 0$ 	$\emptyset$	$(-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	x_0	$(-\infty; +\infty)$
$a < 0, D < 0$ 	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$

Таким чином, за даними таблиці видно, що варіантів розташування параболу є чимало, але учням не потрібно завчати всі варіанти. Важливіше, щоб учні зрозуміли, як саме визначається розв'язок, як він замережить від напрямку гілок параболу та знаку самої нерівності.

За допомогою ігрових вправ на платформі Wordwall або Learningapps можна перевірити розуміння учнями залежності розв'язку квадратичної нерівності від графіку функції, знаку старшого коефіцієнта та значення дискримінанта. Завдання на знаходження пари передбачає з'єднання відповідних зображень та їх характеристик.

Рис.2.4

Вправа Wordwall для перевірки знань.

				
☐	$a > 0;$ $D = 0; c > 0;$	☐	$a < 0;$ $D > 0; c = 0;$	
☐	$a > 0; c = 0;$ $D = 0;$	☐	$a < 0;$ $D < 0; c < 0;$	
☐	$a > 0;$ $D > 0; c < 0;$			

2.1.3 Логіко-математичний аналіз теми «Ірраціональні нерівності»

На вивчення теми в 10 класі за підручником О.С. Істера, О.В. Єргіної «Алгебра і початки аналізу» 10 клас, профільний рівень, 2018р. відводиться 7 годин [32].

Таблиця 1.6.

Вимоги до знань, навичок, умінь учнів за програмою 10 класу (за
Державним стандартом 2018 року)

кількість істор годин	Очікувані результати навчально- пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
0	Тема 2. Степенева функція	
	Учень/учениця: розв'язує: ірраціональні нерівності, зокрема з параметрами застосовує: властивості функцій до розв'язування ірраціональних нерівностей	Ірраціональні нерівності Ірраціональні нерівності з параметрами

Таблиця 1.7.

Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу

	Поняття	Факти	Способи діяльності
Нові	Ірраціональна нерівність	—	Піднесення обох частин нерівності до степеня n
Базові	Степенева функція, арифметичний корінь, нерівність з однією змінною, рівносильні нерівності, числові проміжки, переріз і об'єднання числових проміжків	Властивості по членного множення і ділення нерівностей, в-сті числових нерівностей, в-сті арифметичного кореня, теореми про рівносильність нерівностей	Знаходження області допустимих значень нерівності, застосування методу інтервалів, розв'язування систем і сукупностей нерівностей

Таблиця 1.8

Логіко-математичний аналіз формулювань означень

Поняття	Формулювання означення	Вид означення. Характеристичні властивості.
Ірраціональна нерівність	Нерівність називається ірраціональною, якщо вона містить змінну під знаком кореня.	Словесне означення, через найближчий рід та істотні властивості.

Таблиця 1.9

Орієнтовна будова системи вправ для введення нового поняття

Види вправ	Номери з підручника
1. Вправи для створення мотивації та введення нового поняття	24.1, 24.2, 24.3, 24.4, 24.5, 25.1, 25.2
2. Вправи, що забезпечують актуалізацію та повторення базових знань та умінь	26.19, 26.20, 26.27, 26.28, 26.29, 26.30
3. Вправи, спрямовані на виділення суттєвих властивостей та на побудову об'єктів, які мають ці властивості	24.6, 24.7, 24.8, 24.9, 24.10, 24.11, 24.12, 24.13, 24.14, 24.15, 24.16, 25.3- 25.11
4. Вправи, на базі яких відбувається ілюстрація поняття, що вводиться	25.11, 25.12, 25.13, 25.14
5. Вправи для забезпечення розпізнавання об'єктів, що входять до обсягу нового поняття	25.7-25.11, 25.17- 25.21
6. Вправи, спрямовані на забезпечення розуміння і засвоєння тексту означення	26.3, 26.4, 26.21, 26.22, 26.23- 26.26

Таблиця 1. 10

Логіко-математичний аналіз системи вправ підручника,
призначених для формування способу діяльності

Основні способи діяльності	Відпрацювання операцій, які формують спосіб діяльності	Відпрацювання послідовності операцій, які входять у спосіб діяльності	Застосування способу діяльності
Піднесення обох частин нерівності до степеня n	24.1, 24.2, 24.3, 24.4, 24.5, 25.1, 25.2	24.6, 24.7, 24.8, 24.9, 24.10, 24.11, 24.12, 24.13, 24.14, 24.15, 24.16, 25.3-25.11	25.7-25.11, 25.17-25.21
Знаходження області допустимих значень нерівності	—	25.11, 25.12, 25.13, 25.14	26.19, 26.20, 26.27, 26.28, 26.29, 26.30
Застосування методу інтервалів	26.3, 26.4	577,562-574,633	576-588,598,602
Розв'язування систем і сукупностей нерівностей	26.1, 26.2, 26.5, 26.6	26.10, 26.11, 26.13-26.16	26.21, 26.22, 26.23-26.26

Тему «Ірраціональних нерівностей» не можна віднести до розряду легкозасвоюваних. Традиційне навчання орієнтоване на 9-11 класи, що дозволяє повніше врахувати вікові можливості учнів у формуванні комплексу навичок і вмінь, але приділяє мало часу на вивчення предмета.

Перш за все, слід зазначити, що у викладенні даної теми реалізовано багато загальних методологічних особливостей, характерних для всього дослідження. У всіх підручниках при вивченні квадратного кореня та його властивостей (8-9 класи) розв'язуються прості ірраціональні. Основні

методи розв'язування ірраціональних нерівностей висвітлено в підручниках для 10-11 класів (рівень стандарту і профільний рівні). [25] Ірраціональні нерівності в основному вивчаються в 10 класі. Підручники містять усі теоретичні та практичні матеріали, необхідні для здійснення навчання за трьома рівнями. Вміщено різноманітні додаткові матеріали: тести для перевірки готовності до навчання, таблиці очікуваних результатів навчання, дослідницькі та лабораторні роботи, довідковий матеріал.

Є контрольні завдання трьох рівнів складності, завдання на повторення, історичні відомості та інші матеріали. У шкільній практиці при розв'язуванні ірраціональних рівнянь найчастіше використовують два основні методи:

- піднесення обох частин рівняння до степеня;
- введення нових (допоміжних) змінних. Ці методи вважаються стандартними і зазвичай ними обмежуються на шкільних уроках математики, однак іноді доводиться розв'язувати ірраціональні рівняння, які вимагають використання нестандартних методів і прийомів.

Продовженням розвитку цієї змістово-методичної лінії є нерівності, а також системи рівнянь і нерівностей. Слід зазначити, що вміння учнів розв'язувати рівняння та нерівності є обов'язковою складовою підсумкової оцінки учнів. Тому вчитель має вимагати від учнів обґрунтування всіх дій, які вони виконують під час розв'язування тих чи інших рівнянь і нерівностей, і показувати учням раціональні способи і способи їх розв'язування. При вивченні даної теми виникають певні труднощі, пов'язані з особливостями самого матеріалу:

- у більшості випадків відсутній чіткий алгоритм розв'язування ірраціональних нерівностей;
- при розв'язуванні нерівностей такого типу необхідно проводити перетворення, в результаті яких виходять нерівності, що не узгоджуються з даними. Тому часто виникають помилки, які, як правило, пов'язані з втратою

або набуттям чужих коренів у процесі вирішення.

-однією з типових помилок є використання учнями без додаткових пояснень перетворень, які порушують еквівалентність, що призводить до втрати коренів або появи сторонніх коренів, а також те, що учні не враховують область допустимих значень. Тому необхідно навчити учнів спочатку визначати область допустимих значень, оскільки в деяких випадках вже з цього можна зробити висновок про рішення рівняння. [4] Отже, методика навчання розв'язування ірраціональних нерівностей повинна бути спрямована на розвиток загального підходу до розв'язування нерівностей.

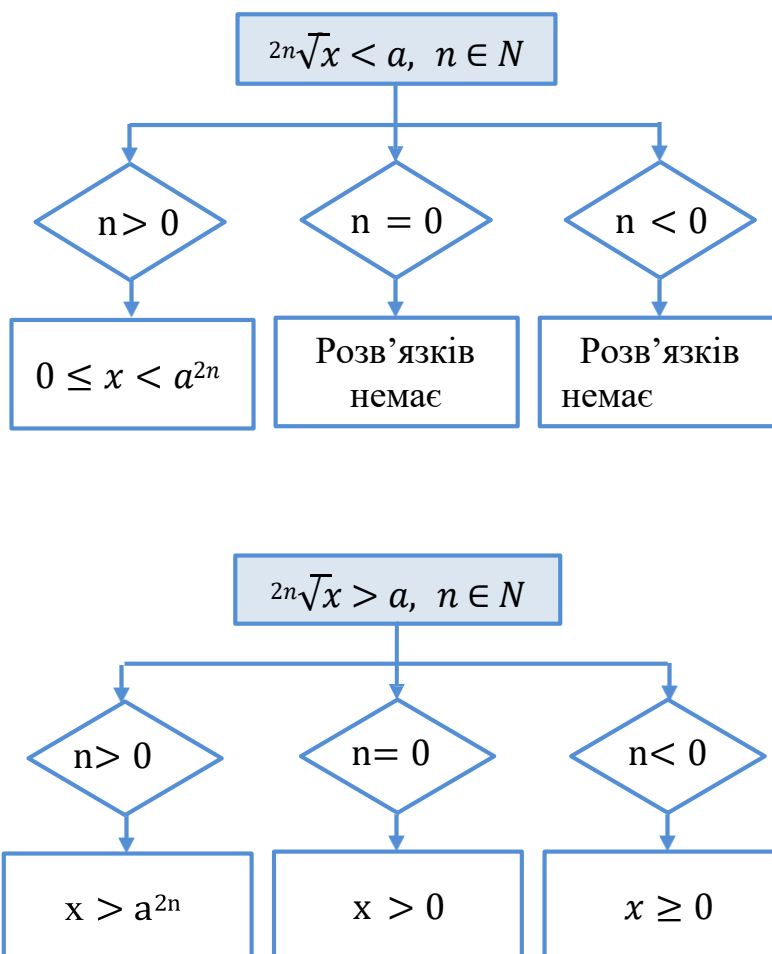
Етапи загального методу розв'язування нерівностей:

- визначення виду рівняння, нерівності;
- чи є вид стандартним чи ні;
- якщо стандартне, то рішення за відомими правилами та алгоритмами;
- якщо він не відповідає стандарту, то з'ясувати, які перетворення необхідно здійснити, щоб привести його до стандартного вигляду або перейти до використання штучних змінних;
- здійснення перетворень;
- проведення перевірки;
- запис відповіді

Основним методом розв'язування ірраціональних нерівностей є зведення вихідної нерівності до еквівалентної системи або системи раціональних нерівностей [49, с.294].

Найпростіші ірраціональні нерівності мають вигляд -Рис 2.17

Схеми розв'язування ірраціональних нерівностей

**2.3.1. Найпростіші випадки розв'язування ірраціональних нерівностей.**

Досліджуючи шкільну програму 11 класу, можна помітити, що на дану тему виділяється дуже мало часу, лише 2-3 уроки. Ми пропонуємо створити додатковий гурток для покращення знань учнів за даною темою та кращого рівня підготовки до ЗНО (програма курсу Додаток В). Серед завдань ЗНО трапляються завдання з ірраціональними нерівностями, наприклад такі:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 8} - \sqrt{x^2 - 7x + 10} < 1; \quad \sqrt{3x + \sqrt{9 - x^2}} < \sqrt{3x + 3}$$

Ірраціональними називаються нерівності, в яких змінна стоїть під знаком радикала, причому розглядаються лише арифметичні корені, якщо

корені парного степеня. У найпростіших випадках розв'язати ірраціональну нерівність неважко. [19]

Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$\sqrt[4]{x^2 + 5x + 6} + \sqrt{x + 8} \leq -3.$$

Розв'язання. ОДЗ нерівності визначається системою

$$\begin{cases} x^2 + 5x + 6 \geq 0, \\ x + 8 \geq 0. \end{cases}$$

При всіх x з ОДЗ ліва частина нерівності невід'ємна, а права - від'ємна. Тому нерівність задовольнити неможливо. Задача не має розв'язків.

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$\frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-10}(\sqrt{x+2})} \leq \frac{4-x^2}{(x-4)(x+5)}.$$

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ даної нерівності

$$\begin{cases} 5-x \geq 0, \\ x-10 > 0, \\ x \geq 0, \\ x \neq 4, \\ x \neq -5; \end{cases} \begin{cases} x \leq 5, \\ x > 10, \\ x \geq 0, \\ x \neq 4, \\ x \neq 5. \end{cases}$$

Ця система розв'язків не має, ОДЗ - порожня множина. Початкова нерівність розв'язків не має.

2.3.2. Зведення ірраціональної нерівності до системи раціональних нерівностей.

Розв'язування ірраціональних нерівностей зазвичай починається зі зведення нерівності до рівносильної системи раціональних нерівностей чи до сукупності таких систем.

Особливу увагу потрібно акцентувати на таких аспектах:

1) Якщо піднести обидві частини нерівності до непарного степеня, не змінюючи знак нерівності, то таке перетворення є рівносильним.

2) Якщо обидві частини нерівності додатні числа, тоді їх можна піднести до одного і того ж натурального степеня і при цьому отримуємо нерівність такого ж змісту.[4] Даний метод ґрунтується на наступних твердженнях:

1. Нерівність виду $\sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{q(x)}$, $n \in N$, рівносильною системою нерівностей $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ q(x) > 0 \end{cases}$
2. Нерівність виду $\sqrt[n+1]{f(x)} < \sqrt[n+1]{q(x)}$, є рівносильною нерівності $f(x) < q(x)$

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\sqrt{4-x} < x+2$.

Розв'язання. Замінімо нерівність рівносильною системою:

$$\begin{cases} 4-x \geq 0; \\ 2+x > 0; \\ 4-x < (x+2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 4; \\ x > -2; \\ x^2 + 5x > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} -2 < x \leq 4 \\ x(x+5) > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} -2 < x \leq 4; \\ \begin{cases} x < -5; \\ x > 0; \end{cases} \end{cases}$$

Відповідь. $0 < x \leq 4$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x$.

Розв'язання. Дана нерівність є рівносильною системою:

$$\begin{cases} x^2-3x-10 \geq 0, \\ 8-x > 0, \\ x^2-3x-10 < (8-x)^2 \end{cases}$$

Розв'язком першої нерівності є всі числа з проміжків $-\infty < x \leq -2$ і розв'язком другої – всі числа з проміжка $5 \leq x < +\infty$, і розв'язком третьої – всі числа з проміжка $-\infty < x < 74/13$. Таким чином, отримаємо, що розв'язком початкової нерівності є всі числа з проміжків

$$(-\infty; -2] \left[5; 74/13 \right).$$

2.3.3. Метод інтервалів

Метод інтервалів базується на властивості чергування знаків функції, щоразу при переході через нулі функції та ті точки, де функція не існує - функція змінює свій знак. А на проміжках, де область визначення розділена цими точками, знак функції не змінюється.

Щоб розв'язати нерівність за методом інтервалів $f(x) > 0$, треба:

- 1) спочатку знайти область допустимих значень нерівності;
- 2) розв'язати рівняння прирівнявши функцію до нуля $f(x) = 0$;
- 3) розділити за допомогою цих коренів та ОДЗ нерівності на проміжки;
- 4) після цього визначити, який знак має функція $f(x)$ на кожному проміжку: на тих проміжках, де $f(x) > 0$, там всі значення є розв'язками нерівності. Також можна використовувати це правило і для розв'язування нерівностей $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$. (але є деякі виключення) [4]

Приклад 12. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$.

Розв'язання. Позначимо $f(x) = \sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$, отже, потрібно розв'язати нерівність $f(x) > 0$.

$$1) \text{ Знайдемо ОДЗ нерівностей: } \begin{cases} x+6 \geq 0, \\ x+1 \geq 0, \\ 2x-5 \geq 0; \end{cases} \quad x \in [2,5; +\infty).$$

2) Розв'яжемо рівняння

$$x+6 - 2\sqrt{(x+6)(x+1)} + x+1 = 2x-5;$$

$$2\sqrt{x^2+7x+6} = 12; \sqrt{x^2+7x+6} = 6;$$

$$x^2+7x-30=0; x_1=3, x_2=-10.$$

Перевірка показує, що дійсно $x=3$ є коренем, а $x=-10$ сторонній корінь рівняння.

1) Точка 3 ділить ОДЗ $x \in [2,5; +\infty)$ на два проміжки: $[2,5; 3), (3; +\infty)$.

Сама точка 3 не входить у жодний з проміжків, тому що $f(3) = 0$.

2) Визначимо знаки функції $f(x)$ на кожному проміжку:

а) $x \in [2,5; 3)$

Оберемо деяку контрольну точку, наприклад, $x=2,5$

$$f(2,5) = \sqrt{8,5} - \sqrt{3,5} > 0. \Rightarrow f(x) > 0$$

б) $x \in (3; +\infty)$

$$\text{Оберемо } x=4 \quad f(4) = \sqrt{10} - \sqrt{5} - \sqrt{3} < 0, f(x) < 0$$

Відповідь $x \in [2,5; 3)$

За допомогою методу інтервалів розв'язують не тільки ірраціональні нерівності, але і раціональні, показникові, логарифмічні тощо, тому його називають загальним методом розв'язку нерівностей.

2.4. Логіко-математичний аналіз теми «Нерівності з модулем»

Розв'язок нерівностей, що містять знак модуля, є однією із складних тем шкільного курсу математики в основній школі. Відомо, що основні методи вирішення нерівностей багато в чому збігаються з шляхами розв'язання аналогічних рівнянь (метод послідовного розкриття модулів, графічний метод), але слід пам'ятати, що вони завжди оптимальні. Тому вчитель повинен познайомити школярів з іншими, раціональнішими способами, що призведе до швидкого отримання остаточного результату.

Приклад 4. Розв'яжіть нерівність $|x^2 - 4x - 8| \leq x - 2$

Розв'язок. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 8 \leq x - 2 \\ x^2 - 4x - 8 \geq -x + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leq 0 \\ x^2 - 3x - 10 \geq 0 \end{cases}$$

Коренями квадратичного трьохчлена $x^2 - 5x - 6$ є числа -1 і 6, старший коефіцієнт додатній. Тому множиною розв'язків першої нерівності системи є відрізок $[-1; 6]$. Коренями квадратного трьохчлена $x^2 - 3x - 10$ є числа -2 і 5, старший коефіцієнт додатній. Тому множиною розв'язків першої нерівності системи є об'єднання $(-\infty; 2] \cup [5; \infty)$. Звідси розв'язком системи буде проміжок: $[5; 6]$.

Приклад 5. Розв'яжіть нерівність $\left| x^2 + 3x + 2 \right| - 1 \geq 1$

Розв'язок. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} \left| x^2 + 3x + 2 \right| - 1 \geq 1 \\ \left| x^2 + 3x + 2 \right| - 1 \leq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \left| x^2 + 3x + 2 \right| \geq 2 \\ \left| x^2 + 3x + 2 \right| \leq 0 \end{cases}$$

Нерівність $\left| x^2 + 3x + 2 \right| \geq 2$ рівносильна сукупності:

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 2 \geq 2 \\ x^2 + 3x + 2 \leq -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 3x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 4 \leq 0 \end{cases}$$

Нерівність $x^2 + 3x \geq 0$ $\square$ приводиться до вигляду $x(x + 3) \geq 0$; множина його розв'язків $(-\infty; 3] \cup [0; +\infty)$. Нерівність $x^2 + 3x + 4 \leq 0$ розв'язків не має, оскільки дискримінант квадратичного тричлена від'ємний, а старший додатній. Отже, множиною розв'язків

сукупності
$$\begin{cases} x^2 + 3x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 4 \leq 0 \end{cases}$$

а значить, і нерівності $\left| x^2 + 3x + 2 \right| \geq 2$ $\square$ є $(-\infty; 3] \cup [0; +\infty)$.

Розв'яжемо нерівність $|x^2 + 3x + 2| \leq 0$. Ця нерівність виконується лише за умови $x^2 + 3x + 2 = 0$, звідси $x = -2$ или $x = -1$. Таким чином, множина $\{-2; -1\}$

Метод послідовного розкриття модулів є одним із найпростіших і найзручніших способів розв'язання нерівностей. Школярі, опанувавши цей метод на практиці під час розв'язування простих нерівностей, як виявляється, майже ніколи не помиляються, бо розв'язування зводиться до алгоритму дій, за якого складно припуститися помилки. Недоліками цього методу є громіздкість розв'язування, що тягне за собою значну втрату часу, який в умовах складання ЗНО та НМТ є особливо важливим фактором.

Спосіб 2 (стандартний) - графічний метод. Графічний метод - це стандартний спосіб розв'язування будь-яких нерівностей, незважаючи на те, що в шкільній навчальній програмі він посідає дуже скромне місце або взагалі не вивчається. Але його можна назвати найефективнішим і найраціональнішим через його наочність. Нагадаємо, що здатність будувати графіки як по точках, так і за допомогою геометричних перетворень є обов'язковою для будь-якого учня середньої школи.

2.5.Методичні особливості розв'язування систем нерівностей

При розв'язанні систем нерівностей, постає питання відшукування всіх спільних розв'язків нерівності з однією змінною. При розв'язуванні сукупностей нерівностей постає питання пошуку всіх значень змінних, при яких хоча б одна з нерівностей сукупності перетворюється на правильну. Важливою складовою алгебраїчної культури учнів є вміння розв'язувати нерівності, їх системи та їх сукупності. Особливої уваги потребує вміння розв'язування системи та сукупності. Ця важлива навчально-математична діяльність передбачає володіння учнем наступними знаннями та навичками:

- а) володіння та розуміння понять «система нерівностей» та

«сукупність нерівностей» та їх різниці;

б) опанування різних методів та прийомів розв'язку окремих категорій нерівностей;

в) знання про планування та про способи реалізації цих планів, пов'язаних з розв'язком систем нерівностей та сукупностей нерівностей;

г) володіння вміннями малювати числові множини, що є розв'язками деяких нерівностей та знаходити їх перерізи, об'єднання та формулювати відповідь.

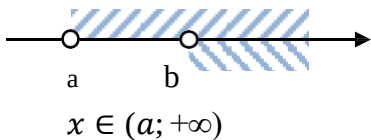
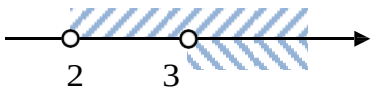
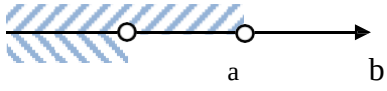
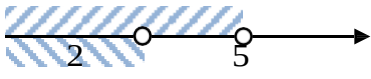
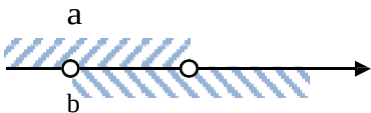
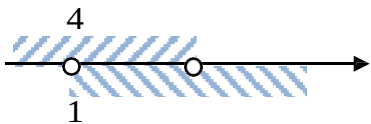
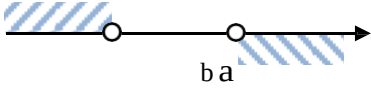
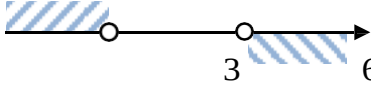
При вивченні теми «Системи лінійних нерівностей з однією змінною» в 9 класі, учні знайомляться з такими системами та сукупностями нерівностей. А далі вони починають розв'язувати системи квадратичних нерівностей.

Для того, щоб учні зрозуміли необхідність вивчення різних способів розв'язання систем та сукупностей нерівностей з однією змінною, можна їм запропонувати розв'язати конкретний приклад. Якщо на перших уроках вдалося скласти в учня правильне уявлення про такі поняття, як переріз та об'єднання числових проміжків, лінійна нерівність, квадратна нерівність, розв'язок нерівності з однією змінною, то при розв'язуванні систем та сукупностей цих нерівностей учні не відчують ніяких труднощів.

Табл.2.6

Можливі випадки розв'язків систем лінійних нерівностей

Системи лінійних нерівностей ($a > b$)	Розв'язок та його геометрична ілюстрація	Приклад
---	--	---------

$\begin{cases} x > a, \\ x > b \end{cases}$	 $x \in (b; +\infty)$	$\begin{cases} x > 3, \\ x > 2 \end{cases}$  $x \in (3; +\infty)$
$\begin{cases} x < a, \\ x < b \end{cases}$	 $x \in (-\infty; a)$	$\begin{cases} x < 5, \\ x < 2 \end{cases}$  $x \in (-\infty; 2)$
$\begin{cases} x < a, \\ x > b \end{cases}$	 $x \in (b; a)$	$\begin{cases} x < 4, \\ x > 1 \end{cases}$  $x \in (1; 4)$
$\begin{cases} x > a, \\ x < b \end{cases}$	 Розв'язків немає	$\begin{cases} x > 6, \\ x < 3 \end{cases}$  Розв'язків немає

Учні виконують певну кількість прикладів, щоб засвоїти послідовність розв'язку систем та сукупностей нерівностей з однією змінною. Після цього вчителю подати інформацію у вигляді таблиці, щоб учні записали послідовність кроків розв'язування систем і сукупностей нерівностей в свої зошити та записали конкретні приклади (табл.2.7).

Основні кроки розв'язування систем та сукупностей нерівностей

Основні кроки розв'язування системи нерівностей з однією змінною

1. Розв'язати кожну нерівність системи.
2. Зобразити множину розв'язків кожної нерівності на одній координатній прямій.

3. Знайти переріз числових проміжків, записати відповідь.

Приклад. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 3x + 4 < 6, \\ 2x + 7 \geq 4. \end{cases}$$

$$2x + 7 \geq 4.$$

Розв'язання

$$3x + 4 < 6,$$

$$3x < 6 - 4, \quad 3x < 2, \quad x < 2/3$$

$$\begin{cases} 2x + 7 \geq 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x \geq 4 - 7; \\ 2x \geq -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1,5 \end{cases}$$

див. рисунок)



Відповідь: $x \in [-1,5; 2/3)$.

Основні кроки розв'язування сукупності нерівностей з однією змінною

1. Розв'язати кожну нерівність сукупності.
2. Зобразити множину розв'язків кожної нерівності на одній координатній прямій.

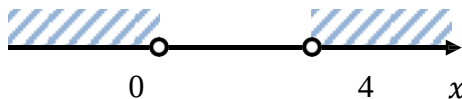
3. Знайти об'єднання числових проміжків, записати відповідь.

Приклад. Знайти розв'язок сукупності нерівностей $\begin{cases} 3x - 5 > 7, \\ 2x + 3 < 3. \end{cases}$

Розв'язання

$$\begin{cases} 3x - 5 > 7, \\ 3x > 7 + 5, \\ 3x > 12, \\ x > 4, \end{cases} \quad (\text{див. рисунок})$$

$$\begin{cases} 2x + 3 < 3; \\ 2x < 3 - 3; \\ 2x < 0; \\ x < 0. \end{cases}$$



Відповідь: $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

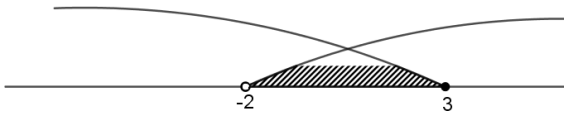
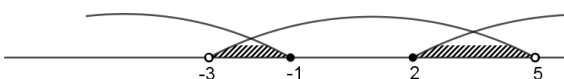
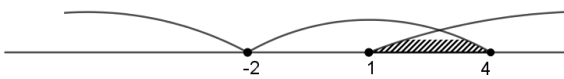
У процесі навчання розв'язування системи та сукупності нерівностей необхідно підбирати завдання таким чином, щоб розкрити якнайбільше різних варіантів та випадків їх розв'язання. Окремо також обговорити з учнями питання про використання систем нерівностей з однією змінною для розв'язування подвійних нерівностей.

Варто запропонувати учням велику кількість різних вправ різноманітної складності. Це дасть можливість виробити навички виконання таких завдань без помилок. Використання координатної прямої необхідно для зручності та наочності, та відіграє допоміжну роль. Учні повинні правильно відображати послідовність розташування чисел на координатній прямій. А після набуття певних навичок, учні можуть знаходити розв'язок і без рисунка.

Розробляючи перелік необхідних завдань з даної теми, варто охопити різні випадки співвідношення розв'язків окремих нерівностей, що складають дану систему. Шкільних підручники і збірники задач з алгебри містять цікаві набори систем та сукупностей раціональних нерівностей, але не завжди вони охоплюють всі можливі варіанти співвідношень між розв'язками різних нерівностей.

Варто використати методичний прийом при підборі повноцінної системи задач. Спочатку слід розглянути можливі випадки співвідношень між числовими проміжками, що зображатимуть розв'язки окремих нерівностей, а потім на основі запропонованих рисунків скласти відповідну систему двох елементарних нерівностей (табл.2.8).

Системи елементарних нерівностей, складені на основі рисунків

Випадки співвідношень між числовими проміжками	Відповідні системи елементарних нерівностей
 Рис.1	$\begin{cases} x > -2, \\ x \leq 3 \end{cases} \quad (1)$
 Рис.2	$\begin{cases} x \geq 0, \\ x > 5 \end{cases} \quad (2)$
 Рис.3	$\begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq 1 \end{cases} \quad (3)$
 Рис.4	$\begin{cases} (x+3)(x-5) < 0, \\ (x+1)(x-2) \geq 0 \end{cases} \quad (4)$
 Рис.5	$\begin{cases} (x+2)(x-1) \geq 0, \\ (x+2)(x-4) \leq 0 \end{cases} \quad (5)$

Ці системи вчитель може «ускладнити», використовуючи властивості числових нерівностей.

Приклад 1.10. Складання системи нерівностей на основі рис.1 (табл.2.8).

«Ускладнити» систему елементарних нерівностей, що відповідає рис.1, можна, помноживши першу нерівність на 3, а другу – на (-2) :

$$\begin{cases} 3x > -6, \\ -2x \geq -6 \end{cases}$$

В кожній нерівності перенесемо (-6) у ліву частину і одержимо:

$$\begin{cases} 3x + 6 > 0, \\ 6 - 2x \geq 0 \end{cases}$$

В першій нерівності винесемо 3 за дужки, а в другій (-2) .

Одержимо систему у вигляді:

$$\begin{cases} 3(x + 2) > 0, \\ -2(x - 3) \geq 0 \end{cases}$$

В результаті розв'язування учні одержують рисунок, аналогічний рис.1, знаходять спільну частину проміжків $(-2; +\infty)$ і $(-\infty; 3]$, тобто їх переріз. Таким чином розв'язком заданої системи нерівностей буде проміжок $(-2; 3]$.

Приклад 1.11. Складання системи нерівностей на основі рис.2 (табл.2.8).

«Ускладнимо» систему, що відповідає рис.2, таким чином: помножимо першу нерівність на 6, а до другої нерівності додамо вираз $x^2 - 9$ і зведемо подібні доданки у правій частині нерівності:

$$\begin{cases} 6x \geq 0, \\ x + x^2 - 9 > x^2 - 4 \end{cases}$$

До першої нерівності додамо вираз $x^2 + 9$ і переставимо доданки в зручному порядку; в другій нерівності скористаємось формулою скороченого множення «різниця квадратів»:

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 9 \geq x^2 + 9, \\ (x - 3)(x + 3) + x > (x - 2)(x + 2) \end{cases}$$

Представимо ліву частину першої нерівності у вигляді квадрата різниці і перенесемо всі доданки першої і другої нерівності у ліву частину:

$$\begin{cases} (x + 3)^2 - x^2 - 9 \leq 0, \\ (x - 3)(x + 3) + x - (x - 2)(x + 2) > 0 \end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему нерівностей, учень відмічає на координатній прямій проміжки, задані елементарними нерівностями із

системи (2) і знаходить їх переріз: $[0; +\infty) \cap (5; +\infty) = (5; +\infty]$. Отже, $x \in (5; +\infty]$.

Приклад 1.12. Складання системи нерівностей на основі рис.3

Система елементарних нерівностей, що відповідає рис.3, має вигляд:

$$\begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Помножимо першу нерівність на 6, а другу – на 7:

$$\begin{cases} 6x \leq -6, \\ 7x \geq 7 \end{cases}$$

У лівій частині першої нерівності $6x$ представимо у вигляді суми $4x + 2x$, а в правій розпишемо (-6) як $(-1-5)$. В другій нерівності до обох частин нерівності додамо $(x + 4)$:

$$\begin{cases} 4x + 2x \leq -1 - 5, \\ 7x + x + 4 \geq 7 + x + 4 \end{cases}$$

Перенесемо в першій нерівності з правої частини в ліву (-1) , розпишемо (-5) як $(-1-4)$ та додамо до обох частин нерівності $4x^2$. У другій нерівності зведемо подібні доданки:

$$\begin{cases} 4x^2 + 4x + 1 + 2x \leq 4x^2 - 1 - 4, \\ 8x + 4 \geq x + 11 \end{cases}$$

Помітимо, що в першій нерівності присутні формули скороченого множення, тому використаємо їх для «ускладнення» нерівності. В другій нерівності $x + 11$ представимо у вигляді $2x + 12 - x - 1$ та поділимо обидві частини нерівності на 8:

$$(2x + 1)^2 + 2x \leq (2x - 1)(2x + 1) - 4,$$

Першу нерівність залишаємо без змін, а в другій в правій частині нерівності можемо виконати почленне ділення і скоротити отримані дробки.

В результаті розв'язання учень отримує проміжки $(-\infty; -1]$ та $[1; +\infty)$, зображені на рисунку 3. Перерізом даних числових проміжків буде порожня множина $\emptyset$, а це означає, що система розв'язків не має.

Приклад 1.13. Складання системи нерівностей на основі рис.4 (табл.2.8).

Система елементарних нерівностей, що відповідає рис.4:

$$\begin{cases} (x+3)(x-5) < 0, \\ (x+1)(x-2) \geq 0 \end{cases}$$

Додамо до першої нерівності 3, а від другої віднімемо 4:

$$\begin{cases} (x+3)(x-5) + 3 < 3, \\ (x+1)(x-2) - 4 \geq -4 \end{cases}$$

Розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 12 < 3, \\ x^2 - x - 6 \geq -4 \end{cases}$$

Винесемо в першій нерівності за дужки x , а в другій перенесемо усі доданки в ліву частину і зведемо подібні:

$$\begin{cases} x(x-2) - 12 < 3, \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

Першу нерівність поділимо на (-3) , а в другій використаємо формулу скороченого множення різниці квадратів. Остаточна система нерівностей має вигляд:

$$\begin{cases} x(x-2) < 15 \\ (x-1)(x+1) - x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Прийшовши в результаті розв'язування до системи (4), учень відмічає на координатній прямій розв'язки першої нерівності $(-3; 5)$ та розв'язки другої нерівності $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$. Розв'язком цієї системи є переріз цих множин: $(-3; -1] \cup [2; 5)$.

Приклад 1.14. Складання системи нерівностей на основі рис.5 (табл.2.8). Відповідна рисунку 5 система елементарних нерівностей має вигляд:

$$\begin{cases} (x+2)(x-1) \geq 0, \\ (x+2)(x-4) \leq 0 \end{cases}$$

В першій і другій нерівності розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$\begin{cases} x + x - 2 \geq 0, \\ x^2 - 2x - 8 \leq 0 \end{cases}$$

Помножимо першу нерівність на (-4) , а другу на (-1) :

$$-4x^2 - 4x + 8 \leq 0,$$

$$\{ -x^2 + 2x + 8 \geq 0$$

В лівій частині першої нерівності винесемо за дужки $(-4x)$, а в другій нерівності виконаємо перестановку доданків:

$$\begin{cases} -4x(x + 1) + 8 \leq 0, \\ 8 + 2x - x^2 \geq 0 \end{cases}$$

Першу нерівність помножимо на 2, а другу поділимо на 2 і знову виконаємо перестановку доданків:

На останньому етапі розв'язування системи нерівностей учень зображає на координатній прямій проміжки, що є розв'язками першої нерівності $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$ та другої нерівності $[-2; 4]$. Розв'язком цієї системи є переріз цих проміжків: $[1; 4] \cup \{-2\}$.

Отже, $x \in [1; 4] \cup \{-2\}$.

Описаний методичний прийом може бути використаний вчителем при складанні доцільної системи задач з теми, а сконструйовані таким чином системи раціональних нерівностей сприяють глибокому та свідомому засвоєнню учнями елементів теорії множин та направлені на формування умінь, пов'язаних з розв'язанням систем раціональних нерівностей [6, с. 307].

2.6. Методика вивчення основних класів нерівностей та їх систем

Ці класи можна розбити на дві групи. Перша група раціональні нерівності та системи. Найважливішими класами відповідні класи нерівностей. Друга група - ірраціональні та трансцендентні нерівності та системи. До складу цієї групи входять ірраціональні, показові, логарифмічні та тригонометричні нерівності.

Перша група отримує достатнє розгортання, до формування міцних навичок рішення, вже у курсі алгебри неповної середньої школи. Друга група в цьому курсі тільки починає вивчатися, причому розглядаються далеко не всі класи, а остаточно вивчення відбувається в курсі алгебри і почав аналізу. При вивченні другої групи доводиться спиратися на загальні поняття та методи, що належать до лінії нерівностей. Зазначена відмінність, однак, не є єдиною, яка протиставляє ці дві групи. Суттєвішим є облік особливостей, пов'язаних з розгортанням матеріалу кожної з цих груп. Порівняно з першою групою нерівності, що входять до складу другої, у процесі їх вивчення виявляють значно складніші зв'язки з іншими лініями курсу математики - числової, функціональної, тотожних перетворень та ін.

Послідовність вивчення різних класів нерівностей та систем різна у різних підручниках. Однак кількість можливих варіантів для послідовності їх введення не надто велика - класи перебувають у певній логічній залежності один від одного, яка наказує порядок їх появи в курсі.

Наявність такого розмаїття підходів ускладнює методичний опис, оскільки прийняття тієї чи іншої шляху потребує різних прийомів вивчення матеріалу.

Зазначимо низку особливостей у вивченні нерівностей:

1) Як правило, навички розв'язання нерівностей, за винятком квадратних, формуються на нижчому рівні, ніж рівнянь відповідних класів. Ця особливість має об'єктивну природу: теорія нерівностей складніша за теорію рівнянь. Зазначена обставина частково пом'якшується іншими особливостями вивчення нерівностей, тому загалом вважатимуться, що змістовна сторона нерівностей, можливості їх додатків від цього страждають.

2) Більшість прийомів розв'язання нерівностей полягає в переході від даної нерівності $a > b$ до рівняння $a = b$ і подальшому переході від знайденого коріння рівняння до безлічі рішень вихідної нерівності. Мабуть, такого переходу не проводиться лише при розгляді лінійних нерівностей, де в ньому

немає потреби через простоту процесу вирішення таких нерівностей. Цю особливість необхідно постійно наголошувати, з тим? щоб перехід до рівнянь та зворотний перехід перетворилися на основний метод розв'язання нерівностей; у старших класах він формалізується як "методу інтервалів".

3) У вивченні нерівностей велику роль відіграють наочно-графічні засоби.

Зазначені особливості можуть бути використані для обґрунтування розташування матеріалу, що стосується нерівностей, кількості завдань, необхідних для засвоєння програмного мінімуму.

Наведемо приклади. Перша особливість може бути витлумачена так: при виконанні одного і того ж числа вправ техніка розв'язання нерівностей будь-якого класу буде нижчою, ніж рівнянь відповідного класу; отже, якщо є необхідність формування міцних навичок розв'язання нерівностей, то цього потрібно більше завдань. Друга особливість пояснює те, що теми, що стосуються нерівностей, розташовані після тих, що належать до відповідних класів рівнянь. Відповідно до третьої особливості вивчення нерівностей залежить від якості вивчення функціональної лінії шкільного курсу (побудова графіків та графічне дослідження функцій).

Перелічені особливості показують, вивчення попереднього матеріалу сильно впливає на вивчення нерівностей. Тому роль етапу синтезу вивчення нерівностей особливо зростає.

Проілюструємо зазначені особливості на матеріалі квадратних нерівностей. Вивчення цього розділу курсу слідує за вивченням квадратного рівняння та квадратного тричлена. На момент вивчення учні вміють будувати графіки квадратичної функції, причому ними відзначаються нулі функції, якщо вони існують. Тому перехід до розгляду квадратних нерівностей можна здійснити як перехід від нерівності $ax^2+bx+c>0$ до побудови та вивчення графіка функції $y=ax^2+bx+c$. Оскільки можливі різні випадки розташування графіка щодо осі абсцис, краще почати з розгляду конкретного завдання, для

якого відповідний квадратний тричлен має різне коріння. На цьому прикладі встановлюється відповідність між двома завданнями: "Вирішити нерівність $ax^2+bx+c>0$ "; "Знайти значення аргументу, котрим значення функції $y=ax^2+bx+c$ позитивні". З допомогою цього виробляється перехід до побудови графіка функції. Нулі цієї функції розбивають вісь абсцис на три проміжки, у кожному з яких вона зберігає знак, тому відповідь зчитується прямо з креслення. Інші випадки вирішення квадратних нерівностей (у квадратного тричлена ax^2+bx+c не більше одного кореня) вимагають додаткового розгляду, але спираються на ту саму відповідність.

У процесі подальшого вивчення встановлюється, що немає потреби в точно викресленому графіку квадратного тричлена, достатньо намітити лише положення коренів, якщо вони є, та врахувати на ескізі потрібні особливості графіка (напрямок гілок параболи).

У шкільному курсі математики обмежуються вивченням лише нерівностей основних класів; Завдання, які вимагають відомості до основних класів, трапляються порівняно рідко. Наприклад, не вивчаються біквадратні нерівності.

З-поміж типів завдань, у яких проявляється прикладна роль нерівностей в курсі алгебри, відзначимо знаходження області визначення функції та дослідження коренів рівнянь залежно від параметрів.

Ірраціональні та трансцендентні нерівності

Визначення різних класів ірраціональних та трансцендентних нерівностей, які наводяться у шкільних підручниках, зазвичай мають вигляд: "Нерівність називається ірраціональною (показниковою у т.д.), якщо вона містить невідоме під знаком кореня (у показнику ступеня тощо)". Незважаючи на формальну розпливчастість, визначення такого типу достатні для того, щоб вказати деяку область, рівняння або нерівності, з якої вирішуються способами, що вивчаються при проходженні відповідної теми. У кожному з таких класів можна вказати підкласи найпростіших рівнянь чи нерівностей, яких і

зводиться рішення складніших завдань.

Кожен найпростіший клас тісно пов'язаний із класом відповідних функцій; по суті, формули рішень та дослідження найпростіших нерівностей тут спираються на властивості функцій. На початку вивчення кожного найпростішого класу учням доводиться долати труднощі, пов'язані з освоєнням специфічної символіки, зокрема дізнаватися про нові форми запису чисел і числових областей, у яких має бути отримана відповідь до завдання. При вирішенні завдань часто використовуються поряд із відомими специфічні для відповідного класу функцій тотожності. Значно частіше, ніж у попередній частині курсу, у вирішенні нерівностей використовуються нерівносильні перетворення широко використовуються підстановки. Тому весь цей матеріал потребує достатньої логічної грамотності учнів.

Специфіка трансцендентних нерівностей. При розгляді різних класів трансцендентних нерівностей необхідно приділяти достатньо уваги формуванню навички застосування тотожностей для перетворення даних нерівностей. Особливо яскраво це проявляється в тригонометрії, тому при вивченні тригонометричних нерівностей велике значення набувають завдання та системи питань, пов'язані з розпізнаванням застосування тієї чи іншої тотожності, можливості приведення рівняння або нерівності до певного виду.

Тут значні труднощі пов'язані з тим, що деякі тотожності, що використовуються у перетвореннях, призводять до зміни області визначення. До таких тотожностей відносяться, наприклад, такі:

$$\begin{aligned} \log_a bc &= \log_a b + \log_a c \\ \log_a \frac{b}{c} &= \log_a b - \log_a c \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \\ \cos \alpha &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

Використання цих тотожностей зліва направо може призвести до

втрати коренів, а праворуч наліво – до появи стороннього коріння. Розглянемо приклади.

Тут врахування обмежень при використанні тотожності для логарифму виконаний при другому переході, внаслідок чого нерівність перетворилася на систему нерівностей, з яких два останні дозволяють зберегти вихідну область визначення незмінною.

В результаті виконання аналогічних завдань можна зробити висновок: якщо доводиться користуватися перетвореннями, що розширюють область визначення, для збереження рівносильності необхідно додатково ввести обмеження, що зберігають вихідну область визначення незмінною.

Висновок

Модернізація національної школи України потребує підвищення активності учнів та їх самостійності, формування вмінь опрацьовувати та ефективно використовувати освітню інформацію, що підвищує роль інтелектуалізації навчальної роботи і значення оволодіння різноманітними прийомами розумової діяльності.

Однією з основних змістовно-методичних ліній курсу алгебри і початків аналізу середньої школи є тема нерівностей, яка має досить широкую систему зв'язків з іншими лініями курсу. Тому нерівності щороку пропонуються у завданнях державної атестації з математики, ЗНО та НМТ.

На жаль результати виконання таких завдань за останні роки дещо погіршилися, а це робить особливо актуальною проблему дослідження та удосконалення методики вивчення нерівностей у курсі алгебри і початків аналізу середньої школи.

Висновки дослідження:

1. Логіко-математичний аналіз - знання мети викладання змісту теми та очікувані результати; знання визначень та ключових понять, математичних тверджень в темі; способи розкриття даної теми в підручнику; знання геометричного та алгебраїчного матеріалу в посібнику та принципи використання даного матеріалу в даній темі, також вміння вирішувати типові проблеми теми; знання методів розв'язку, що використовуються в школі; знання вимог до оформлення завдань за шкільною програмою.

2. Методичне планування - це планування кожного окремого уроку. Воно здійснюється з метою знайти найкращі методи реалізації освітнього процесу. Уроки за розділами навчального плану. Успішність методологічного планування залежить в основному від того, наскільки чітко вчитель розуміє, що саме учні мають знати та до якого кінцевого результату мають прийти.

3. З аналізу підручників можна зробити висновок, що тема «Нерівність»

зазвичай розглядається у 9 класах. У різних підручниках різна послідовність вхідного матеріалу. Детальніше матеріал розглядається підручниками з поглибленим вивченням. Вивчення предмета за такими підручниками вимагає значно більшу кількість годин, які забезпечуються навчальним планом.

4. Досвід вчителів математики на тему «Нерівності»

Дослідження вчителів середньої школи показують, що деяких помилок на можна уникнути, потрібно виділяти головне і витратити більше часу на роботу на певних етапах та зробити акценти на можливих помилках. Вчителі, спираючись на педагогічний досвід своїх колег, вивчають засоби успішного вирішення даних проблем. За своїм досвідом можна виділити елементи новизни, креативність, оригінальність.

5. Методологічні особливості вивчення теми "Лінійна нерівність ". Головна проблема - змінити знак нерівності на протилежний при множенні або діленні обох частин нерівності на від'ємне число. Щоб його доопрацювати можна зробити більше усних прикладів, і математичні диктанти.

6. Методичні особливості вивчення теми нерівність "і" дробово-раціональна нерівність ". Інтервальний метод використовується для вирішення дробових раціональних нерівностей. Дуже важливо розглядати ОДЗ .Головна помилка - неможливість визначити знак функції на кожному проміжку, а також незнання випадків, коли розв'язком буде одна точка або множина дійсних чисел.

7. Методологічні особливості розв'язку ірраціональних нерівностей та нерівностей з модулем. Тут важливо враховувати ОДЗ для ірраціональних нерівностей, та знати знають умови, при яких можливий розв'язок, обов'язково вказати ці умови.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бантова М.А. Методика викладання математики / М.А. Бантова, Т.В. Бельтюкова. – К.: Генеза, 2008. – 335 с.
2. Бевз Г.П. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 9 кл. загальноосвітн. навч. закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2018. – 336 с.
3. Бевз Г.П. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвітн. навч. закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2017. – 272 с.
4. Березін С.О.. Деякі аспекти формування математичної грамотності учнів / С.О. Березін // Матеріали Всеук. наук.-метод. конф. «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання математики», 3–4 грудня 2009 р, м. Суми. – Суми: Вид-во СумДПУ імені АС. Макаренка. – 2009. – С. 103–105.
5. Бесхлібна О. С. Методичні особливості складання систем раціональних нерівностей / О.С. Бесхлібна, Л.О. Черних // Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики: матер. міжнар. наук.-практ. конф., Вінницький державний університет імені М. Коцюбинського, 30 травня –1 червня. – Вінниця, 2006. – С. 304 – 307.
6. Бесхлібна О.С. Теоретико-множинні аспекти розв’язування нерівностей та їх систем/О.С. Бесхлібна, Л.О. Черних // Вісник міжнародного дослідного центру: «Людина: мова, культура, пізнання»: наук. журн.: [за заг.ред. В.В. Корольського]. – Кривий Ріг: КДПУ, МДЦ «ЛМКП». – 2018. – С. 99–103.
7. Бібік Н.М. Компетентнісна освіта – від теорії до практики / І.Г. Єрмаков, О.В. Овчарук. – К.: Плеяда, 2005. – 120 с.
8. Білюнас А.В. Апробація та експериментальна перевірка основних результатів дисертаційного дослідження проблеми формування математичної культури / А.В. Білюнас // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології: наук. журн.. – Суми: СумДПУ. – 2014. – № 5 (39). – С. 208–215.
9. Богомолова В.Ф. Компетентнісно-орієнтований урок в умовах профільної

- школи / Валентина Федорівна Богомолова // Методичні студії: зб. наук.-метод. пр. – Донецьк, 2009. – Вип. 1. – С. 246–252.
10. Бухлова Н.В. Формування здатності особистості до самонавчання / Н.В. Бухлова // Педагогічна скарбниця. – 2002. – № 1. – С. 47–49.
 11. Горнштейн П.І. Задачі з параметрами / П.І. Горнштейн. – К.: РІА «Текст», 1992. – 290 с.
 12. Зимова І. В. Формування елементарної математичної компетентності / Л.І. Зайцева. – К.: МП «Око», 2005. – 215 с.
 13. Державний стандарт базової середньої освіти. Постанова КМУ № 898 від 30.09.2020 року
 14. Іванко Т. І. Систематизація методів розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей / Т.І. Іванко // Математика в школах України. – 2007. – № 7. – С. 16–21.
 15. Ісаєва О.В. Формування особистості та її життєвої та соціальної компетентності шляхом розвитку експериментальних умінь, дослідної проектної діяльності // Науково-метод журнал «Хімія». – 2007. – №3. – С. 6–8.
 16. Істер О.С. Алгебра і початки аналізу, 9 клас / О.С. Істер, О.В. Єргіна. – Х.: Вид. група «Основа», 2018. – 298 с.
 17. Істер О.С. Алгебра, 9 клас / О.С. Істер, О.В. Єргіна. – Х.: Вид. група «Основа», 2018. – 340 с.
 18. Евклід «Начала» переклад Михайло Ващенко-Захарченко.-К. 752с.
 19. Капіносов А. Алгебра: збірник задач і вправ для 9 класу / А. Капіносов. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 222 с.
 20. Капіносов А.М. Основи технології навчання. Проектуємо урок математики / А.М. Капіносов. – Х.: Вид. група «Основа», 2006. – 140 с.
 21. Карлащук А.Ю. Формування дослідницьких умінь школярів у процесі розв'язування математичних задач з параметрами / А.Ю. Карлащук. – К.: Вища школа, 2001. – 19 с.
 22. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп'ютером: посібник для вчителів і

- студентів [за ред. М. І. Жалдака] / Т.Г. Крамаренко. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. – 272 с.
- 23.Маркова І.С. Інтерактивні технології на уроках математики: навч.- метод. посібник / І.С. Маркова. – Х.: Вид. група «Основа», 2007. – 126 с.
 - 24.Маркова І.С. Урок математики в сучасних технологіях: теорія і практика: метод проектів. Комп'ютерні технології. Розвивальне навчання / І.С. Маркова. – Х.: Вид. група «Тріада», 2007. – 171 с.
 - 25.Маркова І.С. Урок математики в сучасних технологіях: теорія і практика: Розвиток критичного мислення: Навч. – метод. посібник / І.С. Маркова. – Х.: Вид. група «Основа», 2007. – 125 с.
 - 26.Математика. Навчальна програма. Рівень стандарту. Профільний рівень – Електронний ресурс. Режим доступу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
 27. Мерзликін О.В. Формування дослідницьких компетентностей старшокласників з фізики засобами хмарних технологій / О.В. Мерзликін // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики. – 2014– 93 с.
 - 28.Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2018. – 400 с.
 - 29.Мерзляк А.Г. Алгебра: академ. рівень, проф. рівень: підруч. для 11 кл. загальноосвітн. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011. – 431 с.
 - 30.Мерзляк А.Г. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвітн. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.П. Полонський, М.С. Якір. – Х: Гімназія, 2017. – 272 с.
 31. Повзло Н.М. Розв'язування логарифмічних нерівностей / Н.М. Повзло // Математика в школах України. – 2006. – № 11. – С. 7–17.
 - 32.Пометун О.І. Інтерактивні технології навчання: теорія, практика / О.І. Пометун, Л.В. Пироженко. – К.: Вид-во А.С.К., 2002. – 113 с.
 - 33.Пометун О.І. Компетентнісний підхід – найважливіший орієнтир розвитку

- сучасної освіти / О.І. Пометун // Рідна школа. – 2005. – № 1. – с. 65–69.
34. Прядко Н.О. Формування математичної грамотності учнів старшої школи / Н.О. Прядко // Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Педагогічні науки. – 2013. – Вип. 109. – С. 98–100.
 35. Раков С.А. Формування математичних компетентностей вчителя математики на основі дослідницького підходу з використанням інформаційних технологій / С.А. Раков. – К.: Плеяда, 2005. – 227 с.
 36. Родигіна І. Компетенція чи компетентність: що ми формуємо у школярів? / І. Родигіна // Початкове навчання. – 2007. – №9. – С. 54–57.
 37. Слєпкань З.І. Методика навчання математики / З.І. Слєпкань. – К.: «Зодіак-ЕКО», 2000. – 182 с.
 38. Соколенко Л.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри та початків аналізу / Л.О. Соколенко. – Чернігів: Сіверянська думка, 2002. – 128 с.
 39. Соколенко Л.О. Теоретико-множинні аспекти шкільного курсу математики / Л.О. Соколенко // Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО-2015), м. Черкаси, 4-5 червня. – Ч.: ЧНУ ім. Б. Хмельницького. – 2015. – С.211–212.
 40. Титаренко О.М. Алгоритмічна культура як складова математичної культури учня / О.М. Титаренко. – Х.: Торсінг Плюс, 2005. – 368 с.
 41. Третьяк М.В. До питання про математичну культуру / М.В. Третьяк. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2011. – 352 с.
 42. Ципкін О.Г. Довідник з математики для середніх навчальних закладів / О.Г. Ципкін. – К.: Вища школа, 1988. – 416 с.
 43. Шишов С. Поняття компетентності в контексті якості освіти / С. Шишов, І. Агапов // Дайджест педагогічних ідей і технологій. – 2002. – №3. – С. 20–21.
 44. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу для 10-11 класу / М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубінчук. – К.: Зодіак-ЕКО, 1995. – 318 с.