

Міністерство освіти і науки України  
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка  
*Кафедра математики та економіки*

«До захисту допускаю»

завідувач кафедри математики та економіки,

кандидат педагогічних наук, доцент

\_\_\_\_\_ Т.І.Війчук «\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2024 р.

## **Задачі на побудову, як засіб формування графічних компетентностей учнів**

**Спеціальність 014 Середня освіта (математика)**

Магістерська робота

на здобуття кваліфікації – «Магістр середньої освіти.»

Професійна кваліфікація «Вчитель математики закладу загальної середньої  
освіти»

Автор роботи:

Чепа Анастасія Володимирівна \_\_\_\_\_

Науковий керівник:

кандидат педагогічних наук, доцент

Війчук Тарас Іванович \_\_\_\_\_

**Дрогобич, 2024**

## Захист магістерської роботи

### Задачі на побудову, як засіб формування графічних компетентностей учнів

Оцінка за стобальною шкалою: \_\_\_\_\_

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: \_\_\_\_\_

Коротка мотивація захисту:

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

дата

Голова ДЕК \_\_\_\_\_  
підпис прізвище, ім'я

Секретар ДЕК \_\_\_\_\_  
підпис прізвище, ім'я

### **Анотація:**

Чепа А. Задачі на побудову, як засіб формування графічних компетентностей учнів. – Рукопис

Магістерська робота зі спеціальності 014. Середня освіта (Математика). Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка. Дрогобич, 2024.

У роботі розглянуто особливості графічних компетентностей учнів у процесі розв’язування геометричних задач на уроках математики в закладах загальної середньої освіти. Значну увагу приділено методичним підходам навчання учнів розв’язування задач на побудову та відшукування геометричного місця точок, що задовільняють умовам. Цей тим задач має значний вплив на формування графічних компетентностей учнів.

### **Abstract**

Chepa A. Construction tasks as a means of forming graphic competences of students. - Manuscript

Master's thesis on specialty 014. Secondary education (Mathematics). Ivan Franko State Pedagogical University of Drohobysk. Drohobych, 2024.

The paper examines the peculiarities of students' graphic competences in the process of solving geometric problems in mathematics lessons in general secondary education institutions. Considerable attention is paid to methodical approaches to teaching students how to solve construction problems and finding the geometric location of points that satisfy the conditions. This topic has a significant impact on the formation of graphic competences of students.

## Зміст

|                                                                                                       |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Вступ.....                                                                                            | 5  |
| Розділ 1. Методичні особливості формування графічних компетентностей учнів на уроках математики ..... | 8  |
| 1.1. Графічні компетентності учнів .....                                                              | 8  |
| 1.2. Методологічні основи графічної діяльності учнів .....                                            | 11 |
| 1.3. Креслення вчить думати .....                                                                     | 16 |
| Розділ 2. Засоби формування графічних компетентностей учнів .....                                     | 20 |
| 2.1. Задачі на побудову .....                                                                         | 20 |
| 2.2. Етапи розв'язування задач на побудову .....                                                      | 23 |
| 2.2.1. Аналіз .....                                                                                   | 23 |
| 2.2.2. Побудова .....                                                                                 | 24 |
| 2.2.3. Доведення .....                                                                                | 26 |
| 2.2.4. Дослідження .....                                                                              | 28 |
| 2.3. Методи розв'язування задач на побудову .....                                                     | 31 |
| 2.3.1. Метод геометричних місць .....                                                                 | 32 |
| 2.3.2. Розв'язування задач на ГМТ в 7 класах .....                                                    | 37 |
| 2.3.3. Розв'язування задач на ГМТ у 8 класі .....                                                     | 40 |
| 2.3.4. Методи геометричних перетворень .....                                                          | 44 |
| Висновки .....                                                                                        | 55 |
| Список використаних джерел .....                                                                      | 57 |

## Вступ

Підвищення соціальної значущості особистості, гуманізація та демократизація суспільства, а також стрімкий розвиток техніки і технологій висувають нові вимоги до виховання та навчання національно свідомого і високоосвіченого покоління. Великий вплив на цей процес має рівень інформатизації навчання, розробка та впровадження нових педагогічних технологій у вивченні різних дисциплін. У сучасному виробництві зростає частка графічного подання інформації як найбільш економічного, наочного та змістовного. Графіки застосовуються в різних галузях візуальної комунікації для полегшення мислення, прискорення процесу уяви та розв'язання проблем. Малюнки, графіки та креслення є зжатым та інформативними засобами, які дозволяють передавати думки у вигляді графічних висловлювань.

Проблемі розвитку графічних навичок учнів у школі присвячені публікації українських науковців та педагогів В.М. Буринський, А.П. Верхола, О.М. Джеджула, М.М. Козяр, В.В. Моштук, Г.О. Райковська, та інших. Але більшість методичних доробок стосується розвитку графічних навичок учнів на уроках креслення та трудового навчання. Проблема формування графічних компетентностей учнів на уроках математики, на нашу думку, розкрита не достатньо.

Беззаперечно, здатність до графічної діяльності є одним із показників розумового розвитку людини. Рівень підготовки до розв'язування просторових задач графічними методами свідчить про ступінь загальної та політехнічної освіченості людини. Тому графічна підготовка повинна бути невід'ємною складовою загальної освіти.

Графічна підготовка учнів повинна здійснюватися як цілісний процес, який зорієнтований на формування системи знань, умінь і навичок (ЗУН), які є необхідними для якісної взаємодії з графічними засобами передачі інформації. Формування системи ЗНУ здійснюється на основі засвоєння взаємопов'язаного навчального матеріалу, у якому розкриваються усі підходи до відображення в

графічному документі просторово-геометричних властивостей зображуваного предмета.

Основними завдання розвитку графічних компетентностей учнів є формування в учнів: уміння здійснювати мислительний процес графічними образами, потребу в оволодінні графічними знаннями та вміннями, навичок до використання у спілкування засобів графічного представлення інформації, що є необхідним у процесі підготовки до дорослого життя та діяльності у технологічному суспільстві.

**Мета магістерської роботи** – вдосконалити методичні рекомендації формування графічних компетентностей учнів на уроках геометрії у процесі розв’язування задач.

**Об’єктом дослідження** є процес навчання геометрії у загальних закладах середньої освіти.

**Предмет дослідження** – формування графічних компетентностей учнів на уроках геометрії.

Реалізація поставленої мети передбачають розв’язання таких **завдань дослідження**:

1. Проаналізувати психолого-педагогічні закономірності формування графічних компетентностей учнів на уроках математики.

2. Визначити роль графічної діяльності у формуванні графічних компетентностей учнів.

3. Розкрити можливості системи задач на побудову шкільного курсу математики у формуванні графічних навичок учнів.

4. Розробити методичні рекомендації щодо навчання учнів розв’язування задач на побудову методом геометричного місця точок.

Під час виконання магістерської роботи були використані такі **методи дослідження**:

- аналіз методичної та психолого-педагогічної літератури;
- аналіз змісту програм та шкільних підручників з математики;
- вивчення та узагальнення досвіду вчителів;

- педагогічного спостереження, бесіда, анкетування;
- дослідницька робота під час педагогічної практики.

Результати дослідження обговорювались на науковій конференції студентів та викладачів факультету ФМЕІТ, а також на засіданні кафедри математики та економіки.

## **Розділ І. Методичні особливості формування графічних компетентностей учнів на уроках математики**

### **1.1. Графічні компетентності учнів**

Значна кількість досліджень змісту графічної діяльності школярів під час читання та виконання креслень свідчать про те, що цей процес супроводжується складними аналітико-синтетичними діями [4, 5]. Отже, розумовий розвиток школярів на уроках математики має відбуватися в такій діяльності, яка вимагає активних розумових дій. Однією з таких діяльностей є розв'язування графічних задач відповідного змісту.

Графічна діяльність під час вивчення математики вимагає не тільки правильного "читання" вихідного зображення, заданого умовою задачі, але й його перетворення. Це передбачає сприйняття зображення, його утримання в уяві та мислене видозмінення з урахуванням поставленої задачі.

Таким чином, графічна діяльність учнів під час вивчення математики включає розв'язування різноманітних задач, що, з одного боку, сприяють розвитку, а з іншого – вимагають активної мисленнєвої діяльності в образній формі. У процесі графічної діяльності учнів просторове мислення виступає як умова, так і засіб ефективного засвоєння знань та формування навичок [5].

Проблемі розвитку графічних компетентностей присвятили свої дослідження Б.Ф. Ломова, О.Д. Ботвіннікова, І.С. Якиманської, О.М. Колмогорова, О.К. Артемова та ін. Більшість із дослідників цієї проблеми сходяться на думці, що формування графічних компетентностей обумовлено їх роллю у розвитку мислення, просторових уявлень та просторової уяви, пізнавального інтересу учнів, виробленні у них практичних умінь і навичок.

Передумовами для формування графічних компетентностей учнів є розвиток у них просторових уявлень, а також ознайомлення їх з різноманітними методами спрощених і умовних зображень реальних об'єктів навколишньої дійсності, які присутні в різних галузях науки і техніки, та у виробництві.

Графічна компетентність, як складова всебічної підготовки, має розвиватися протягом усього періоду навчання в школі послідовно і цілеспрямовано. Кожен учень, який закінчив дев'ятий клас, у тій чи іншій формі продовжує свою освіту. Дев'ятирічна школа є проміжним етапом у системі математичної освіти кожного учня, тому на основі одержаних знань будується подальше навчання. Висуваючи вимоги до графічної підготовки учнів основної школи, необхідно брати до уваги характер і рівень використання цих знань у старших класах, під час здобуття професійної та вищої освіти.

Графічна компетентність – це вміння читати різноманітні графічні зображення (креслення, схеми, малюнки, графіки тощо), вміння їх будувати (виконувати) за допомогою різноманітних креслярських інструментів, а також від руки і на око, вміння акуратно, раціонально оформлювати записи, моделювати й конструювати графічні ситуації, оперувати графічними об'єктами на комп'ютері. [12]

Графічна компетентність охоплює сукупність взаємопов'язаних графічних якостей школяра, таких як знання, уміння, навички та методи графічної діяльності, які застосовуються до певного кола предметів і процесів. Ці якості потрібні для ефективної та продуктивної роботи у відповідних сферах. Розглядаючи поняття графічної школярів з позицій педагогічних наук, можна виділити дві сторони графічної компетентності: « ... об'єктивну, яка виражається у вигляді системи графічних знань, і суб'єктивну, що проявляється у графічній діяльності учнів». [12]

У навчально-методичній літературі під графічними знаннями розуміють вивчення учнями графічного методу, застосовуваного в шкільному курсі математики. Графічний метод можна охарактеризувати як сукупність способів умовного графічного зображення [1, 5, 8]. У навчанні графічний метод можна розглядати як сукупність способів оперування графічною моделлю, що включає методи дії в самій графічній моделі та способи встановлення зв'язків з іншими моделями того ж явища.

Суб'єктивна сторона графічної компетентності проявляється в графічній діяльності. Етапи графічної діяльності та передумови її формування у школярів представлені у роботах Б.Ф. Ломова, О.Д. Ботвинникова [5], І.С. Якиманської [19] та ін. У цих працях, автори, графічну діяльність безпосередньо пов'язують із виконанням і читанням креслення. Так, наприклад, І.С. Якиманська вважає, що « ... графічна діяльність здійснюється при оперуванні графічними моделями і є самостійним видом навчальної діяльності» [19].

Основою навчання учнів графічним знанням є концепція діяльнісного підходу до навчання, що передбачає активну діяльність учнів із засвоєння знань і методів їх отримання. У цьому підході засвоєння знань відбувається через формування різних видів діяльності, а не само собою.

Будь-який вид діяльності може реалізовуватися різними способами залежно від поставлених цілей і задач. Ці методи навчальної діяльності називаються прийомами навчальної роботи.

Приєм роботи включає набір операційних дій, що може містити інструкції, рекомендації, правила тощо. Враховуючи, що до складу прийому входять операційні та обґрунтовані знання (як умови виконання дій), послідовність операцій повинна відображати наявність необхідних знань для виконання завдання. Згідно з теорією поетапного формування розумових дій, виділяють чотири етапи формування навичок читання та побудови креслень:

- 1) підготовчий;
- 2) інформаційний;
- 3) засвоєння прийомів;
- 4) застосування.

Мета підготовчого етапу полягає у формуванні у учнів мотивації до оволодіння відповідними прийомами побудови і читання креслень. Цей етап відповідає мотиваційному етапу формування розумових дій.

Мета ознайомчого етапу полягає у виділенні орієнтовної основи дії для побудови і читання креслень. На цьому етапі учні засвоюють зміст дії, включаючи її операційний склад і правила виконання, а вчитель може

об'єктивно контролювати виконання кожної операції. Тут учні оволодівають заданою дією, засвоюючи її зміст.

Мета третього етапу полягає у засвоєнні учнями прийомів побудови та читання креслень. Цей етап зорієнтований на вдосконалення прийомів графічної діяльності у цілому: дія виконується у формі мисленого моделювання (проговорення про себе) і зазнає подальших змін у напрямку узагальнення та систематизації.

Мета четвертого етапу полягає у досягненні такого рівня засвоєння, коли прийоми можуть застосовуватися у всіх відповідних ситуаціях. Цей етап відповідає етапу формування дії як внутрішньої, розумової діяльності.

## **1.2 Методологічні основи графічної діяльності учнів**

Графічна діяльність учнів на уроках математики має значний потенціал для їх інтелектуального розвитку. Дослідження механізмів навчально-пізнавальної діяльності на уроках математики показують, що "будь-яка графічна дія спочатку здійснюється подумки, на основі чого в учня створюється певний графічний образ, а потім він втілюється у реальних графічних побудовах" [11]. Розумова діяльність не має зовнішніх проявів і є результатом тісної взаємодії мислительних операцій, різних форм образного мислення (конкретно-образного, абстрактного та ін.) і пам'яті. В результаті цього "утворюється графічний образ предмета, який фіксує в уяві учня його властивості, що умовно відображені на кресленні, або ще підлягають відображенню шляхом побудови необхідних зображень" [10].

У магістерській роботі ми розглядаємо графічну діяльність як цілісний, багатогранний процес, що представляє взаємодію розумових операцій та практичної діяльності, які сприяють формуванню уявлень про просторові властивості об'єктів та їх схематичне представлення на площині чи генерування їх властивостей в уяві на основі існуючих умовних зображень.

Розумові операції в ході графічної діяльності на уроках математики є основою для створення образів, які відображають просторові властивості об'єктів та відношення предметів. Адже "лише на основі створеного образу з'являється уявлення про предмет або виконується його зображення" [9]. Повнота та досконалість створеного образу в уяві, а також інформаційна наповненість і виразність виконаного на його основі рисунка, безпосередньо впливають на усвідомлення властивостей зображеного об'єкта.

На основі аналізу структури образного мислення, яке реалізується на уроках математики можна зробити висновок, що процеси створення образів є психологічною основою формування графічної компетентності, яка, у значній мірі, пов'язана з читанням та виконанням рисунків. В основі будь якої графічної діяльності лежать ряд послідовно взаємопов'язаних психологічних процесів: сприйняття об'єкту (зір, дотик, слух)  $\Rightarrow$  відчуття  $\Rightarrow$  уява  $\Rightarrow$  мислительні операції, образне мислення, пам'ять  $\Rightarrow$  образ  $\Rightarrow$  практичні дії, спрямовані на відображення образу у вигляді конкретного зображення [16]. Така послідовність етапів створення графічного образу дає підстави стверджувати, що графічна діяльність учнів на уроках математики призводить не тільки до розвитку просторових уявлень та уяви, а й до розвитку інших структурних компонентів розумової діяльності.

Педагогічні спостереження за змістом графічної діяльності учнів під час виконання рисунків та креслень дають підстави стверджувати, що вона здійснюється на основі складних аналітико-синтетичних міркувань [15, 19]. Тому виконання графічних завдань на уроках математики доцільно організовувати так, що діяльність учнів, передбачала необхідність здійснювати активні розумові дії.

У нашій роботі, під графічним завданням ми розуміємо "навчальну проблему, яка передбачає умовне відображення просторових властивостей предмета за допомогою розумових і практичних дій, заснованих на знаннях про правила виконання та оформлення рисунків і вміння застосовувати їх на практиці" [18].

Порівняльний аналіз та співставлення типових графічних завдань з курсу математики, залежно від їх можливостей для розумового розвитку учнів, дозволив розділити їх на дві групи, кожна з яких має свої специфічні особливості.

Аналіз психологічних основ розумової діяльності школярів на уроках математики дає підстави стверджувати, що процес розв'язання графічних завдань являє собою складну взаємодію:

- 1) мислительних операцій.
- 2) образного мислення.
- 3) пам'яті.
- 4) практичних дій, спрямованих на формування просторових уявлень, властивості просторових тіл та їх умовне відображення на площині.

Здатність учнів розв'язувати графічні завдання базується на знаннях теоретичного матеріалу, правил і нормативних положень з курсу математики, а також на навичках виконання графічних побудов. Це включає активне оперування просторовим образом і мислительними операціями, необхідними для розв'язання завдання. Вченими, на основі всебічного вивчення діяльності учнів у процесі розв'язування графічних завдань, була розроблена узагальнена структура процесу розв'язання таких завдання. У цих чотирьох структурних етапах визначено зміст мислительних операцій під час розв'язування відповідних графічних завдань, та певний операційний склад умінь, яким повинен володіти учень [15]:

1. Аналіз умови графічного завдання:
  - сприйняття і усвідомлення завдання, яке міститься в умові задачі;
  - аналіз даних, наведених в умові задачі;
  - визначення повноти даних умови завдання: достатність, недостатність, надмірність;
  - визначення типу задачі;
  - створення просторових уявлень про дані, наведені в умові завдання.
2. Визначення послідовності розв'язування графічного завдання:

- визначення графічних дій, необхідних для розв'язання завдання;
- встановлення раціональної послідовності здійснення графічних дій;
- відтворення теоретичних знань, правил і нормативних положень, необхідних для розв'язання задачі;
- встановлення аналогій з раніше розв'язаними завданнями;
- передбачення (створення образу) кінцевого результату розв'язання завдання та співвіднесення його з умовою.

### 3. Реалізація плану розв'язування графічного завдання:

- уявна видозміна і перетворення початкових образів, створених на основі даних умови завдання;
- залучення теоретичних знань, правил і нормативних положень для здійснення графічних дій відповідно до умови завдання;
- багаторазове перекодування просторових образів у плоскі зображення;
- практичне здійснення графічних дій у вигляді конкретних геометричних побудов контурів зображень та їх елементів;
- доповнення утворених зображень знаково-символічними умовними позначеннями, узгодженими з умовою завдання.

### 4. Контроль і корекція отриманого результату:

- співвіднесення і узгодження отриманого результату з вихідними даними умови завдання;
- аналіз причин невідповідностей кінцевого результату умові завдання (при їх наявності);
- доповнення та уточнення кінцевого результату розв'язання завдання.

У розробленій структурі кожен етап розв'язування графічного завдання включає певні розумові дії, що базуються на здійсненні мислительних операцій. Можливості для цілеспрямованого розумового розвитку школярів на уроках математики забезпечуються знанням кожного вчителя про потенціал графічних завдань, структуру узагальненого уміння розв'язувати графічні завдання і підкріплюються його готовністю до здійснення цієї діяльності.

У процесі науково-методичних досліджень вченими доведено, що

результативність розумового розвитку школярів значною мірою залежить від систематичності залучення їх до графічної діяльності. Тому важливо, щоб ця діяльність відбувалась послідовно і систематично на кожному уроці математики.

Вчені визначили дидактичні функції уроків математики у формуванні графічних умінь учнів:

1. Забезпечення належних умов для міцного засвоєння учнями основних теоретичних положень з основ графічної діяльності і креслення.
2. Формування умінь і навичок розв'язувати типові графічні вправи та завдання.
3. Активізація розумової діяльності учнів у процесі виконання графічних завдань.
4. Виключення непродуктивної графічної діяльності, пов'язаної з переписуванням чи перекреслюванням умови графічного завдання.
5. Прищеплення охайності та культури поводження з креслярськими інструментами і техніки виконання графічних побудов.
6. Створення умов для вдосконалення початкової методики креслення та виконання практичних побудов. [18]

Всебічний аналіз літературних джерел щодо психологічних умов графічної діяльності показав, що основну увагу дослідники приділяють формуванню процесів уяви та просторового мислення. Ефективність розв'язування графічних завдань забезпечується систематичністю в організації діяльності школярів, яка ґрунтується на чіткій системі завдань, та відсутністю елементів непродуктивної роботи учнів у процесі розв'язування завдань.

Узагальнені графічні уміння включають велику кількість конкретних навичок:

1. Застосування набутих знань для виконання та читання елементарних креслень і графічних рисунків.
2. Вибір раціональних прийомів, необхідних для виконання та читання зображень.

3. Вибір та здійснення розумових дій, на яких ґрунтується виконання графічних дій.
4. Пояснення та обґрунтування послідовності виконання графічних дій і передбачення їх результату.
5. Вибір основного зображення.
6. Вибір оптимальної кількості зображень.

Ці навички є критично важливими для успішного виконання графічних завдань і сприяють розвитку просторового мислення та уяви у школярів.

### **1.3. Креслення вчить думати**

У шкільному курсі геометрії виділяють три види креслень:

- креслення, що ілюструють зміст поняття, що вводиться;
- креслення, як унаочнення умови задачі;
- креслення, що ілюструють перетворення геометричних фігур.

Навчаючи учнів працювати з кресленнями, важливо пам'ятати, що обмеження стандартними зразками призведе до формування у них чіткої асоціації поняття лише з певними типами та розташуванням фігур. "Стандартні" креслення спричиняють у школярів хибні уявлення, що призводить до заповнення змісту поняття зайвими, несуттєвими ознаками, характерними лише для продемонстрованих фігур.

Ефективність засвоєння учнями понять, які можна уявити візуально, значною мірою залежить від того, яким було перше знайомство з ними, тобто яким виявився перший зоровий образ, який надалі став носієм даного поняття. Тому на початку вивчення поняття слід демонструвати якомога більше креслень, де варіюються несуттєві його ознаки.

Учні зазвичай схильні співвідносити будь-яку фігуру з одним поняттям, не вміючи переосмислити її в контексті іншого. Для розвитку їхнього мислення необхідно докласти багато зусиль, щоб сформувати у них вміння виокремлювати з елементів нові фігури, не згадані в тексті завдання. Як зазначає

В. І. Занков: «Щоб усунути труднощі при виконанні операції переосмислення, слід звертати увагу учнів на випадок відповідності фігур двом і більше поняттями».

Креслення та малюнки слугують дієвим інструментом для розвитку в учнів здатності виявляти закономірності на основі спостережень, розрахунків, перетворень та порівнянь. У своїх працях відомий математик Д. Пойа зазначав, що: «Результат творчої роботи математики – доказове міркування, доведення, але доведення відкривають за допомогою правдоподібних міркувань, за допомогою здогадки ... Учитель повинен показувати, що здогади в області математики можуть бути розумними, серйозними, відповідальними ... Давайте вчити здогадуватися!».

Під час навчання розв'язування геометричних задач важливо, щоб формулювання завдання спонукало учнів до створення креслення. Тексти завдань та теорем у шкільних підручниках не завжди написані доступною та зрозумілою мовою. Як показує практика, учням найскладніше сприймати тексти, де стислість досягається за рахунок нагромадження додаткових умов.

Особливу роль у розвитку мислення відіграє навчання порівнянню, зокрема порівнянню факту, вираженого словесно, з його візуальним відображенням на кресленні. Креслення може слугувати спростуванням деякого загального твердження. Навчаючись спростовувати неправдиві твердження, учні поступово звикають до доведень. Розглянемо три завдання, які фактично спрямовують учнів на пошук контрприкладів.

1. Чи є твердження правильним: "Будь-який чотирикутник, у якого діагоналі взаємно перпендикулярні, є ромбом"?

2. Чи є твердження правильним: "Будь-який чотирикутник, у якого два протилежні кути прямі, є прямокутником"?

3. Зобразіть на кресленні випадок, для якого неправильним є твердження: "Якщо прямі лежать в одній площині і не мають спільних точок, то вони паралельні". (Не вказано, що мова йде про дві прямі.)

З перших уроків геометрії важливо виховувати у школярів потребу у доведенні сформульованих висновків. Доцільно показувати учням, що у людей немає іншого способу переконатися в істинності судження, як тільки довести його логічним шляхом.. «Найкращі ретельні вимірювання – може сказати вчитель, – все-таки залишають привід для сумнівів, оскільки в них неминучі більші чи менші помилки. Довірятися очевидності також не можна, так, як широко відомо, що зір людини дає неточну, а іноді і зовсім помилкову інформацію» [18].

Отже, різноманітна робота з кресленнями не лише сприяє загальному інтелектуальному розвитку школярів, але й стимулює їх логічне мислення, забезпечуючи легший перехід від дослідно-індуктивного викладання пропедевтичного курсу геометрії до дедуктивного основного курсу.

З метою підвищення ефективності розвиваючого навчання геометрії перед учнями слід систематично ставити завдання, які поряд з конкретними навчальними функціями несли б у собі (також в ролі провідних) функції, спрямовані на формування у них елементів творчого математичного мислення.

Прикладами таких завдань можуть бути задачі, у формулювання яких чи під час розв'язання учні:

- пояснюють необхідність вивчення нового матеріалу, значущість розуміння визначень геометричних понять, корисність вивчення різних теорем;
- заохочуються до самостійного відкриття певного геометричного факту, обґрунтування конкретного положення, встановлення можливості використання вже засвоєних знань у новій для них ситуації;
- підводяться до самостійного відкриття методів доведення теорем, загальних прийомів розв'язування завдань, встановлення нових зв'язків між відомими їм геометричними поняттями;
- формують вміння використовувати основні методи наукового пізнання (досвід, спостереження, порівняння, аналіз, узагальнення тощо) як методи самостійного вивчення геометрії, розуміння ролі та місця індукції, аналогії та дедукції в процесі пізнання;

- виявляють взаємозв'язок геометрії та алгебри з іншими предметами, встановлюють змістовні та структурні зв'язки між різними питаннями самого курсу геометрії, отримують можливість застосувати математичні знання для вирішення нематематичних завдань;
- долучаються до самостійних пошукових досліджень (шляхом вивчення результатів вирішення завдань, зміни умови задачі, можливих узагальнень задачі, відшукування інших способів її розв'язання і відбору того, який найбільш повно задовольняє заданим умовам тощо).
- розвивають розумові здібності, властиві науковому мисленню (активність, гнучкість, глибина, критичність, доказовість і т. п.), вміння висловлювати свою думку чітко і лаконічно і т.д.

## Розділ II. Засоби формування графічних компетентностей учнів

### 2.1. Задачі на побудову

*Задачами на побудову* називається завдання, яке ставить вимогу перед учнями, на основі яких даних та використовуючи які інструменти потрібно побудувати (накреслити на площині) геометричну фігуру так, щоб ця фігура задовольняла певним умовам.

Основна ціль задач на побудову полягає в необхідності створити наперед зазначеними інструментами певну фігуру, за умови що задана інша фігура і визначені співвідношення між елементами шуканої фігури та елементами заданої фігури.

*Розв'язати задачу на побудову за допомогою циркуля та лінійки* – це означає створити алгоритм з елементарних побудов, які заздалегідь вважаються визначеними. До основних елементарних побудов відносять:

1. Якщо побудовано дві точки  $A$  і  $B$ , то побудована пряма  $AB$ , що їх з'єднує, а також відрізок  $AB$  і будь-який з променів  $AB$  і  $BA$ .

2. Якщо побудовано точку  $O$  і відрізок  $AB$ , то побудована коло з центром в точці  $O$  і радіусом  $AB$ , а також будь-яка з дуг цього кола.

3. Якщо побудовані дві прямі, то побудована точка їх перетину (якщо вона існує).

4. Якщо побудована пряма і коло, то побудована будь-яка з точок їх перетину (якщо вона існує).

5. Якщо побудовані два кола, то побудована будь-яка з точок їх перетину (якщо вона існує).

*Розв'язком* завдання на побудову вважається фігура, яка задовольняє умові,.

*Знайти розв'язок задачі на побудову* означає звести її до обмеженої кількості елементарних побудов, тобто вказати скінченну послідовність

основних кроків, після виконання яких, шукану фігуру можна буде вважати побудованою.

Під час розв'язування з учнями задач на побудову виникають значні методичні труднощі. Справа в тому, що при цьому зазвичай переслідують дві мети:

- розв'язати це завдання і разом з тим навчити учнів розв'язувати задачі на побудову взагалі, тобто ознайомити їх із загальними підходами до розв'язування завдань;

- показати, як шляхом аналізу шуканої фігури, міркувань, припущень відшуковується розв'язок задачі.

Ця друга мета значно складніша, ніж перша, і її реалізація вимагає від вчителя цілеспрямованої та систематичної роботи, оскільки розв'язування задач на побудову є абсолютно новим видом діяльності для учнів основної школи. У більшості випадків знаходження способу розв'язання нового завдання стає для учнів своєрідним відкриттям і водночас дослідженням.

Складність завдання збільшується ще й тим, що часто процес знаходження розв'язку завдання є досить складним і вимагає від учнів значної уваги. Для того щоб ця робота протікала успішно, необхідно, щоб учні зацікавились розв'язком завдань, щоб вони зрозуміли, наскільки цікава ця робота. Тому завжди слід заохочувати прояв учнями винахідливості, ініціативи, самостійності у відшукуванні розв'язків.

Готуючи учнів до самостійного розв'язування завдань на побудову доцільно спочатку пропонувати їм завдання підготовчого характеру. Ці завдання можуть охоплювати різні види діяльності: побудову, обчислення та доведення.

Наприклад:

1. *Через вершину даного кута провести пряму, що утворить з його сторонами рівні кути.*

2. Кут  $\angle ABC$  дорівнює  $62^\circ$ . Через вершину кута проведено пряму  $MN$ , перпендикулярну до його бісектриси. Обчислити кути, які утворює ця пряма зі сторонами кута.

3. Через точку  $P$ , яка міститься в середині кута  $ABC$ , провести пряму, що відсікає від сторін кута рівні відрізки.

4. Сторони кута перетинаються прямою, перпендикулярною до його бісектриси. Довести, що відрізки сторін кута, що відсікаються цієї прямої, рівні.

5. Дві точки  $A$  і  $B$  знаходяться з одного боку прямої  $L$ . На прямій  $L$  знайти таку точку  $C$ , щоб сума відстаней  $AC$  і  $BC$  була найменшою.

6. Відрізок  $AC$  перпендикулярний до прямої  $L$  і ділиться у точці перетину з цієї прямою навпіл. Точка  $B$  знаходиться на прямій  $L$ . Довести, що точка  $B$  знаходиться на однаковій відстані від точок  $A$  і  $C$ .

Така підготовча робота важлива на початку навчання розв'язування завдань тому, що в учнів VII-VIII класів ще дуже слабкі зв'язки між різними фактами, що вивчаються в геометрії.

Іноді корисно від розв'язування практичного завдання перейти до задачі на побудову. Тут деяка сюжетна задача (а отже, більш зрозуміла) буде зведена до математичної.

У деяких випадках до однієї і тієї ж задачі корисно звертатися декілька разів, для того щоб показати учням різні способи її розв'язування.

У ряді випадків різні за змістом практичні задачі зводяться до однієї і тієї ж математичної. Так, розв'язування наступних зводиться до розв'язування першого завдання попереднього прикладу.

1. У якому місці слід побудувати міст через річку, щоб відстань від пункту  $A$  і  $B$  до цього моста була найменшою (рис. 2.1). Шириною річки в даному випадку нехтуємо.



Рис. 2.1.

2. Промінь із джерела світла  $A$  відбивається від екрану  $E$  так, що проходить через точку  $B$ . Знайти точку екрану, в якій відбився промінь світла (рис. 2.1).

3. Дві точки  $A$  і  $B$  розташовані з одного боку прямої  $MN$ . На цій прямій знайти таку точку  $C$ , щоб  $\angle ACM = \angle BCN$ .

4. В яку точку потрібно направити промінь світла з точки  $A$ , щоб він, відбившись від непрозорого екрану  $a$ , потрапив в точку  $B$  (рис. 2.1)?

5. В яку точку потрібно направити пружну кулю  $A$ , щоб вона, відбившись від пружної стінки, пройшла через точку  $B$  (рис. 2.1)?

Часто проста математична задача стає складнішою, якщо вкласти у неї практичний зміст. Тому корисно в VII-VIII класах розглядати з учнями приклади того, як різні практичні завдання зводяться до однієї і тієї ж математичної задачі.

## **2.2. Етапи розв'язування задач на побудову**

Основними труднощами на етапі навчання розв'язуванню задач на побудову є введення та вивчення етапів розв'язання таких завдань. Ще в IV ст. до н.е. давньогрецькі геометри розробили загальну схему розв'язування задач на побудову, якою ми користуємося і тепер. Процес розбивають на 4 етапи: аналіз, побудова, доведення і дослідження. Розглянемо кожен етап детальніше.

### **2.2.1 Аналіз**

Аналіз є важливим етапом у розв'язанні задачі, який сприяє пошуку методів розв'язування задачі на побудову. На цьому етапі необхідно виявити такі співвідношення між даними фігурами та шуканою фігурою, які дозволять у подальшому побудувати цю шукану фігуру (якщо ми вже знаємо, як будувати шукану фігуру, то аналіз більше не потрібен).

Аналіз – підготовчий, попередній етап розв'язання задачі на побудову. Щоб полегшити встановлення взаємозв'язків між шуканою і даними фігурами,

зазвичай будують допоміжне креслення, на якому представлені дані і шукані фігури у тому співвідношенні, яке задано в умові задачі. Креслення можна виконувати від руки, схематично, оскільки це ескіз креслення, яке потрібно отримати, коли завдання буде розв'язано.

На допоміжному кресленні слід виділити задані елементи і найважливіші шукані елементи. Часто зручніше починати побудову допоміжного креслення не з даної фігури, а з кінцевого зображення вихідної фігури, пристроюючи до неї дані так, щоб вони співвідносились так, як вказано в умові завдання.

Якщо за допомогою допоміжного креслення важко виділити спосіб побудови шуканої фігури, то знаходять деяку частину шуканої фігури або взагалі іншу фігуру, яка доволі просто можна побудувати, і на основі якої можна буде виділити спосіб побудови основної фігури.

Також треба враховувати наступні моменти:

1) якщо на допоміжному кресленні не вдається безпосередньо помітити необхідні для розв'язання зв'язки між даними і шуканими фігурами, то доцільно використати креслення допоміжні об'єкту: з'єднати вже наявні точки прямими, виділити точки перетину побудованих ліній, продовжити деякі відрізки і т. д. Часто, доцільно проводити паралельні чи перпендикулярні прямі до вже побудованих прямих;

2) якщо за умовою задачі дано суму або різницю відрізків, або кутів, то ці елементи доцільно зобразити на кресленні-ескізі;

3) у ході аналізу доцільно опиратись на теореми і задачі, які були раніше розв'язані і у яких присутні взаємозв'язки між елементами, про які йдеться в умові заданої задачі.

### **2.2.2 Побудова**

Другий етап розв'язання задач на побудову складається з двох частин:

1) виділити по порядку всі елементарні побудови, які потрібно виконати, згідно з аналізом, для розв'язання завдання;

2) безпосереднє виконання цих побудов на кресленні за допомогою креслярських інструментів.

Справді, розв'язати задачу за допомогою визначених інструментів означає вказати кінцеву сукупність елементарних побудов, які можна виконати за допомогою цих інструментів і виконання яких у чітко визначеній послідовності дозволить отримати відповідь на питання завдання.

Цей етап реалізується у процесі розв'язування найпершої задачі на побудову, зазвичай це задача про побудову відрізка, рівного даному, на даному промені від його початку. У розмові, яка супроводжує введення цього етапу, необхідно пояснити, в чому полягає розв'язання будь-якої задачі на побудову, і підкреслити, що реалізація цього етапу полягає у визначенні скінченної кількості операцій необхідних для побудови шуканої фігури.



Розглянемо розв'язання задачі: "Побудувати квадрат за його діагоналлю".

*Аналіз.* Провівши діагональ  $A_1C_1$  (рис. 2.2), можна зробити висновок, що для побудови квадрата необхідно описати побудову рівнобедреного прямокутного трикутника  $A_1B_1C_1$  за його гіпотенузою  $A_1C_1$ , який потім легко доповнити до квадрата.

*Побудова.* Трикутник  $A_1B_1C_1$  можна будувати різними способами. Наприклад:

1) Будуємо кут  $\angle B_1A_1C_1 = 45^\circ$ , і на одній його стороні відкладаємо відрізок  $A_1C_1$ , що дорівнює даній діагоналі. Провівши  $C_1B_1 \perp A_1B_1$ , отримаємо трикутник  $\Delta A_1B_1C_1$ , який доповнюємо до квадрата  $A_1B_1C_1D_1$ , що можна зробити різними способами.

2) Проведемо через середину  $A_1C_1$  перпендикуляр  $B_1O_1 \perp A_1C_1$  і відкладемо  $B_1O_1 = A_1O_1$  і з'єднаємо  $B_1$  з  $A_1$  і  $C_1$ ; отримаємо трикутник  $\Delta A_1B_1C_1$ .

3) На  $A_1C_1$ , як на діаметрі, будуємо коло і з точки  $O_1$ , опустивши перпендикуляр  $O_1B_1 \perp A_1C_1$  до перетину з колом в точці  $B_1$ . З'єднавши  $B_1$  з  $A_1$  і  $C_1$ , отримаємо трикутник  $A_1B_1C_1$ . Провівши  $B_1D_1 \perp A_1C_1$ , ми відразу можемо отримати точки  $B_1$  і  $D_1$ , як і в попередньому випадку.

Очевидно, що побудова трикутника  $A_1B_1C_1$  можлива і іншими способами.

Розв'язання однієї і тієї ж задачі декількома способами посилює інтерес учнів до завдань на побудову і свідоме ставлення до розв'язання таких завдань. Якщо розв'язувати завдання на побудову весь час за заздалегідь вказаним методом, то цим самим ми притуплюємо винахідливість та ініціативу учнів у знаходженні різних і оригінальних способів розв'язання і їм важко навчитися самостійно розв'язувати конструктивні завдання. Учні застосовують у першу чергу знання досліджуваного матеріалу і навички, отримані при розв'язуванні попередніх завдань. Якщо розв'язувались завдання, що вимагають застосування певного методу, то і для запропонованого завдання вони оберуть той же знайомий їм шлях розв'язку, навіть якщо він нераціональний. Вказівки вчителя на існування простішого способу не дає належного ефекту, оскільки запропонований вчителем розв'язок здається учням штучним, якого вони самі не змогли б його знайти.

Звісно, якщо це робити до того, як у учнів сформуються міцні навички у знаходженні розв'язків різними методами, то результати будуть негативними. Увага учнів кожного разу буде розпорошуватися між усіма методами, і вони жоден з них не засвоять ґрунтовно, щоб застосовувати його усвідомлено.

Різними методами добре розв'язувати завдання наприкінці навчального року, при повторенні курсу геометрії, коли учні вже мають достатні навички у розв'язуванні задач на побудову. Завдання, що допускає різні методи розв'язання, краще давати додому, щоб вони не тільки розв'язали його, а й знайшли найпростіший спосіб розв'язку.

### **2.2.3 Доведення**

Після побудови фігури, потрібно переконатися, чи відповідає вона умовам завдання, тобто показати, що фігура, отримана з заданих елементів конкретною побудовою, задовольняє всім умовам завдання.

Отже, доведення істотно залежить від способу побудови. Одну й ту ж задачу можна розв'язувати різними способами, в залежності від складеного під

час аналізу плану побудови, а тому, і доведення у кожному випадку буде своє. Доведення є частиною у розв'язання задачі, своєрідний зворотний аналіз логічного змісту. Якщо в ході аналізу визначається, що будь-яка фігура, що задовольняє поставленим умовам, може бути знайдена таким-то шляхом, то в цій, третій, частині розв'язання доводиться зворотне твердження. Це зворотне твердження в загальному вигляді може бути сформульоване так: *якщо деяка фігура отримана з даних елементів у ході такої побудови, то вона дійсно задовольняє поставленим умовам.*

У ході розв'язання простих завдань, коли всі задані співвідношення відразу відображаються в плані побудови, немає потреби доводити, що фігура, отримана з даних елементів цією побудовою, є шуканою. Наприклад: «Побудувати трикутник за двома сторонами та кутом між ними». Тут доведення зводиться до простої перевірки, чи використано ті сторони, що дано, і чи буде побудований кут дорівнювати даному. У подібних завданнях доведення є зайвим, бо правильність розв'язання забезпечується відповідністю побудови аналізу і даними умови задачі.

Доведення не лише залежить від аналізу та побудови, між ними існує тісний взаємозв'язок і взаємозалежність. Побудова здійснюється за планом, розробленим під час аналізу. Можна вказати кілька таких планів. Побудова та доведення є своєрідним критерієм правильності та раціональності розробленого плану. Якщо план не реалізується за допомогою наявних інструментів або ж побудова виявляється нераціональною, ми змушені шукати новий план розв'язання. Аналогічно і доведення, і дослідження впливають на аналіз, зумовлюючи нерідко вибір плану розв'язання.

Хоча обґрунтування під час розв'язання задач на побудову подібне до доведення теорем з використанням аксіом, теорем і характеристик геометричних фігур, між ними все ж таки спостерігаються певні розбіжності. При доведенні теорем зазвичай без проблем можна окреслити умову та висновок. Натомість, під час розв'язання задач на побудову складніше визначити ті дані, на основі яких можна довести, що побудована фігура відповідає шуканій.

Тому в процесі розв'язання конструктивних завдань у класі іноді доцільно чітко окреслити, що дано, а що потрібно довести.

Наприклад, під час розв'язування завдання: "Побудувати ромб за двома його діагоналями" пропонуємо учневі записати, що дано (діагоналі взаємно перпендикулярні і, перетинаючись, діляться пополам) і що потрібно довести (сторони рівні). У свою чергу під час розв'язування завдань удома і в контрольних роботах можна не вимагати оформлення доведення з виділенням окремо умови і висновку. Немає потреби вимагати проведення особливого доведення в задачах, де правильність розв'язку очевидна.

#### **2.2.4 Дослідження**

При побудові зазвичай обмежуються відшукуванням одного розв'язку задачі, причому передбачається, що всі кроки побудови дійсно виконані.

Для повного розв'язання завдання необхідно ще з'ясувати такі питання:

##### **1. Існування розв'язку:**

*Чи завжди, незалежно від вибраних даних, можливо виконати побудову обраним способом?*

*Чи існують певні обмеження на дані, які роблять побудову неможливою?*

*Як визначити, чи можна побудувати шукану фігуру для даного набору даних?*

##### **2. Однозначність розв'язку:**

Скільки розв'язків має задача при даному наборі даних?

*Чи може існувати лише один розв'язок?*

*Чи може існувати нескінченна кількість розв'язків?*

*Як знайти всі можливі розв'язки задачі?*

##### **3. Аналіз способу побудови:**

*Чи є обраний спосіб побудови найпростішим або найефективнішим?*

*Чи існують інші способи побудови шуканої фігури?*

*Як порівняти різні способи побудови за складністю та ефективністю?*

##### **4. Додаткові умови:**

*Чи накладаються на задачу якісь додаткові умови, які впливають на існування або однозначність розв'язку?*

*Як врахувати ці додаткові умови при розв'язанні задачі?*

## 5. Висновки:

*Які висновки можна зробити з отриманих результатів?*

*Чи дають знайдені розв'язки нову інформацію про властивості геометричних фігур?*

*Чи можна застосувати отримані результати до розв'язання інших задач?*

Важливо зазначити, що відповіді на ці питання становить зміст дослідження.

Отже, дослідження має на меті встановити умови, при яких розв'язується завдання і визначити кількість розв'язків. Нерідко школярі і навіть вчителі проводять дослідження, довільно обираючи ті чи інші випадки, причому незрозуміло, чому розглядаються саме такі, а не інші випадки. Залишається незрозумілим також, чи всі можливі випадки розглянуто. Як правило в більшості випадків вдається досягти необхідної повноти дослідження, здійснюючи його під час побудови і такий підхід вважається найдоцільнішим. Суть цього методу полягає в тому, щоб виконуючи основні етапи побудови визначати, чи завжди він може бути реалізований, а якщо так, то скількома способами.

Часто виникає потреба з'ясувати, за яких умов шукана фігура задовольнятиме додатковим вимогам. Наприклад, можна поставити запитання учням: «Які повинні бути вимоги в задачі, щоб шуканий трикутник був прямокутним чи рівнобедреним?» або: «Які повинні бути вимоги в задачі, щоб шуканий чотирикутник буде паралелограмом або ромбом?»

Іноді учні проводять дослідження, вибираючи довільно ті чи інші випадки, не завжди зрозуміло, чому розглядаються саме ці випадки, а не інші. Також залишається незрозумілим, чи розглянуто всі можливі випадки. При дослідженні розв'язку складної задачі такий підхід може призвести до втрати деяких розв'язків або до того, що деякі випадки залишаться нерозглянутими.

Щоб забезпечити необхідну послідовність і повноту дослідження, доцільно проводити його "по ходу побудови". Суть цього методу полягає в тому, щоб послідовно перебирати всі кроки побудови та визначати на кожному етапі, чи завжди побудова здійснюється, а якщо здійснюється, то скількома способами. Для цього необхідно:

**1. Визначити можливість побудови фігур на кожному кроці:** З'ясувати, чи завжди існують точки, прямі, кола або інші фігури, побудова яких передбачається здійснити на кожному кроці наміченого розв'язання, або ж їх існування залежить від спеціального вибору положення або розмірів тих чи інших фігур. Наприклад, якщо передбачається побудувати точки перетину кола з прямою, то треба зауважити, що існування таких точок залежить від співвідношення між радіусом цього кола і відстанню до центра кола від прямої. Наступні дослідження потрібно проводити тільки для тих випадків, коли побудова можлива, тобто коли кожен крок дійсно приводить до побудови шуканих фігур.

**2. Визначити кількість можливих фігур на кожному кроці:** Для кожного випадку, коли розв'язок існує, визначити, скільки точок, прямих, кіл тощо дає кожен крок побудови. Наприклад, якщо будуються точки перетину кола і прямої, то треба врахувати, що таких точок буде дві, якщо радіус кола більший відстані від центру до прямої, і одна, якщо радіус кола дорівнює відстані від центру до прямої.

**3. Аналіз умов існування розв'язку:** Враховуючи результати дослідження кожного кроку, звернутися до задачі в цілому і встановити, за яких умов розташування даних фігур або за яких співвідношень їх розмірів завдання дійсно має розв'язок, а за яких його не існує.

**4. Визначення кількості можливих розв'язків:** Визначити кількість можливих розв'язків при кожному певному припущенні щодо даних, при якому ці розв'язки існують.

У результаті таких міркувань розв'язується питання про можливість побудови даним способом. Але залишається ще відкритим питання: чи не

виникнуть нові розв'язки, якщо змінити який-небудь спосіб побудови? Іноді вдається довести, що будь-який розв'язок даного завдання збігається з одним із вже отриманих розв'язків; в цьому випадку дослідження можна вважати завершеним. Якщо це не вдається, можна припустити, що завдання має інші розв'язки, які можуть бути знайдені іншими способами. У таких випадках корисно ще раз звернутися до аналізу і перевірити, чи не існують інші можливі випадки розміщення даних або шуканих фігур, які не були враховані в попередньому аналізі.

### **2.3. Методи розв'язування задач на побудову**

До основних методів розв'язування задач на побудову в середній школі, відносяться:

- 1) Метод геометричних місць.
- 2) Методи геометричних перетворень:
  - а) метод центральної симетрії;
  - б) метод осьової симетрії;
  - в) метод паралельного перенесення;
  - г) метод повороту.

Ці методи практичного застосування ґрунтуються на геометричних поняттях, які є основою кожного з них. Тому для успішного оволодіння цими методами учні повинні мати ґрунтовне розуміння цих понять. Але, з іншого боку, вчитель завжди може підібрати учням такі завдання на побудову і так організувати навчання, щоб поглиблювались уявлення і збільшувались знання учнів про дані понятті, розкриваючи його з різних сторін. Під час вивчення конкретного методу завдання повинні добиратися так, щоб у них найяскравіше проявлялася суть виучуваного методу, особливо на початковому етапі його вивчення. При цьому якщо завдання розв'язується декількома методами, то

досліджуваний метод повинен дозволяти розв'язати задачу швидше і наочніше. Розглянемо детально кожен метод.

### ***2.3.1 Метод геометричних місць***

Суть методу геометричних місць полягає у визначенні шуканої точки як точки перетину двох чітко окреслених геометричних місць (або, у деяких випадках, як точки перетину геометричного місця з даною прямою або колом). При цьому умови задачі, які визначають положення шуканої точки, подумки розбиваються на дві незалежні умови, і кожна з них дає деяке геометричне місце, побудова якого є можливою (іноді одне з цих геометричних місць замінюється безпосередньо даної прямої або колом)

Метод геометричних місць є одним з найважливіших прийомів розв'язування геометричних задач на побудову взагалі і повинен займати значне місце під час розв'язування задач на побудову, переважно у 8 класі.

Основа цього методу – поняття геометричного місця точок. Задачі на відшукування геометричного місця точок (ГМТ) є важливою ланкою у формуванні графічних компетентностей учнів. У середній школі, як правило, вивчають найбільш важливі, так звані основні задачі на ГМТ. Ці задачі розглядаються зазвичай у зв'язку з їх застосуванням до розв'язування задач на побудову, тобто як допоміжні. Задачі на побудову цінні, але й задачі на знаходження ГМТ самі по собі мають велике освітнє й виховне значення:

1. Задачі на ГМТ є важливим засобом формування графічних компетентностей, особливо тих учнів, що планують продовжувати навчання у ВНЗ. Вони широко використовується у вищій школі при вивченні аналітичної геометрії, математичного аналізу, механіки та інших дисциплін.

2. Задачі на ГМТ створюють передумови для вироблення умінь учнів самостійного доведення теорем курсу геометрії. Ці задачі можна розглядати паралельно з вивченням основних теорем на протязі всіх років вивчення геометрії в 7 – 11 класах, до того ж їх можна застосовувати до простіших задач на побудову та обчислення .

3. Задачі на знаходження ГМТ дають можливість на багатьох прикладах ілюструвати поняття сталих і змінних величин. Ряд задач на ГМТ є прекрасною ілюстрацією функціональної залежності між змінними величинами.

4. У задачах на ГМТ використовується ідея руху, бо різні положення точок геометрії можна розглядати як слід від переміщення точки на площині або лінії на поверхні. Використання ідеї механічного руху робить задачу більш конкретною і цікавою, бо необхідно встановити закономірність переміщення точки на площині за даних умов.

Задача знаходження ГМТ, які мають певну властивість викликають цікавість, бажання знайти ці точки. В багатьох таких задачах необхідно провести дослідження чи всі точки знайденої фігури належать заданому ГМТ. Часто шуканим ГМТ є не вся пряма, а лише її частина, або не одна пряма, а дві прямі; не все коло, а лише його частина, чи навпаки, не одне коло, а два і т.п. Отже, якщо систематично розв'язувати задачі на ГМТ, то можна зацікавити учнів до цілеспрямованого і наполегливого пошуку розв'язку, розвинути в них чітке логічне мислення, обережне відношення до всіх висновків.

*Геометричним місцем точок називають фігуру, що складається з усіх тих і тільки тих точок площини, що мають певну задану властивість.*

З означення випливає, що точки, які не мають цієї властивості не належать даній фігурі. ГМТ задається властивістю точок, яке називається характеристичною властивістю цього ГМТ (фігури).

У геометрії (особливо в аналітичній) багато фігур вводяться як ГМТ (коло, еліпс, парабола, гіпербола).

Кожне завдання, в якому потрібно знайти ГМТ за його характеристичними властивостями, передбачає вимогу описати це ГМТ через відомі елементарні фігури. Розв'язок задачі на відшукування ГМТ як правило приводить до доведення двох теорем:

- 1) прямої і оберненої до неї;
- 2) прямої, протилежної прямій або протилежної оберненій.

**1. Пряма теорема:** Точка  $M$  має певну властивість. Довести, що вона належить фігурі.

**Обернена теорема:** Якщо  $M$  довільна точка фігури  $F$ , то довести, що вона має дану властивість.

**2. Пряма теорема:** Точка  $M$  має певну властивість. Довести, що вона належить фігурі  $F$ .

**Протилежна теорема:** Точка  $N$  не має цієї властивості. Довести, що вона не належить фігурі  $F$ .

**Протилежна оберненій:** Точка  $N$  не належить фігурі  $F$ . Довести, що вона не має даної властивості.

Якщо хоч одне з цих тверджень невірне, то фігура  $F$  не є ГМТ. Для обґрунтування розв'язку задачі треба брати ту пару, яку легше довести.

Виходячи з цього, можна вказати загальний план розв'язування задачі на знаходження ГМТ:

1. Побудувати кілька точок шуканого ГМТ на основі умови.
2. Побудувати робочий малюнок.
3. Обґрунтувати розв'язок (встановити закономірність у розміщенні точок).
4. Визначити вид знайденої фігури.
5. Дослідити розв'язок задачі залежно від зміни даних.
6. Встановити простіший спосіб побудови знайденого ГМТ.

Очевидно, дотримуватися цих шести пунктів при розв'язуванні кожної задачі не обов'язково. Так, перший пункт варто брати до уваги тоді, коли умова задачі дає простий спосіб побудови окремих точок шуканого ГМТ, або коли важко скласти план розв'язку задачі. Цей малюнок корисний тоді, коли він подає ГМТ як слід від переміщення точки на площині.

Робочий малюнок необхідний для всіх задач. На ньому зазвичай робиться найменше число побудов для обґрунтування задачі. На ньому часто треба зробити багато додаткових побудов, а в цьому випадку малюнок першого пункту був би дуже громіздкий і незручний для доведення.

Пункт третій є центральний і обов'язковий для всіх задач. Тут треба встановити де розміщені точки ГМТ і відповідно обґрунтувати, довівши дві теореми: пряму і обернену, або пряму і протилежну.

В пункті чотири треба уточнити чи всі точки знайденої в пункті три фігури належать шуканому ГМТ. Він дуже відповідальний, бо в ньому встановлюється нарешті вигляд фігури, яка є шуканим ГМТ. Тут можуть бути різні відповіді.

У п'ятому пункті досліджуємо вплив даних в умові задачі на розміщення точки ГМТ. Виявляємо, при яких умовах задача має декілька розв'язків, один розв'язок, зовсім не має розв'язків.

У шостому пункті, після розв'язання задачі і її дослідження подається найкоротший спосіб побудови знайденої фігури. Отже, при розв'язанні задачі на знаходження ГМТ обов'язковими є пункт 1 або 2, пункт 3 і 6. Пункт чотири і п'ять застосовується у школі лише в тих задачах, в яких це необхідно і цікаво.

Набір досліджуваних ГМТ може бути найрізноманітнішим:

До традиційного набору ГМТ зазвичай входять:

1. **Множина точок, рівновіддалених від даної точки:** Цей ГМТ складається з усіх точок на площині, які знаходяться на однаковій відстані від заданої точки (центру). Він утворює коло з центром у заданій точці та радіусом, що дорівнює заданій відстані.
2. **Множина точок, рівновіддалених від двох даних точок:** Цей ГМТ включає всі точки на площині, які знаходяться на однаковій відстані від двох різних точок. Він утворює перпендикулярний бісектрису відрізка, що сполучає дві задані точки.
3. **Множина точок, рівновіддалених від даної прямої:** Цей ГМТ складається з усіх точок на площині, які знаходяться на однаковій відстані від заданої прямої. Він утворює дві паралельні прямі, рівновіддалені від вихідної прямої.
4. **Множина точок, рівновіддалених від двох даних прямих:** Цей ГМТ включає всі точки на площині, які знаходяться на однаковій відстані від

двох різних прямих. Результат залежить від взаємного розташування двох прямих:

- **Паралельні прямі:** Якщо прямі паралельні, ГМТ являє собою відрізок, перпендикулярний до обох прямих і розташований посередині паралельних прямих.
- **Прямі перетинаються:** Якщо прямі перетинаються, ГМТ являє собою перпендикулярний бісектрису кута, утвореного пересіченими прямими.
- **Мимобіжні прямі:** Якщо прямі мимобіжні (не паралельні, не перетинаються), не існує жодної точки, яка б задовольняла умові рівновіддаленості від обох прямих.

Окрім традиційного набору, існують й інші, більш складні ГМТ, які можна досліджувати:

1. **Множина точок, з яких даний відрізок видно під заданим кутом:** Цей ГМТ складається з усіх точок на площині, з яких даний відрізок здається мати заданий кут. Спеціальним випадком цього є множина всіх точок на площині, з яких даний відрізок здається під прямим кутом.
2. **Множина точок з постійною різницею квадратів відстаней:** Цей ГМТ включає всі точки на площині, для яких різниця квадратів відстаней до двох даних точок є постійною і дорівнює квадрату даного відрізка. Він утворює гіперболу з двома заданими точками як її фокусами.
3. **Множина точок із співвідношенням відстаней:** Цей ГМТ складається з усіх точок на площині, для яких співвідношення відстаней до двох даних точок є постійним. Він утворює еліпс з двома заданими точками як його фокусами.

Розглядати ці ГМТ доцільно тільки в класах з поглибленим вивченням математики, а також на позакласних заняттях з математики.

### 2.3.2. Розв'язування задач на ГМТ в 7 класах

У цьому класі розпочинається систематичний курс вивчення геометрії. Тут вперше учні знайомляться з поняттям ГМТ, яке досить важко засвоюється, особливо на початковій стадії. Тому важливо старанно продумати методику проведення таких уроків. Після ознайомлення з умовою задачі учень повинен побудувати ряд точок геометричних місць, користуючись креслярськими інструментами. Розглянемо основні задачі на ГМТ:

**Задача 1. Знайти на площині ГМТ рівновіддалених від даної точки  $O$  на відстань  $a$ .**

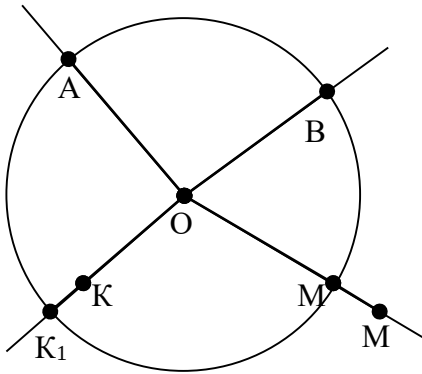


Рис.2.2

1) Проведемо кілька променів і відкладемо на них відрізки  $OA = OB = OC = a$ . Всі ці точки лежать на колі радіуса  $R = a$  з центром в точці  $O$ .

2) Якщо точки  $K$  і  $M$  не лежать на цьому колі, то з'єднаємо їх з центром і позначимо через  $K_1$  і  $M_1$  точки перетину променів  $OK$  і  $OM$  з колом.

3) З малюнка видно, що  $OK < OK_1$ , тобто  $OK < a$ ,  $OM > OM_1$ , тобто  $OM > a$ , а отже точки  $K$  і  $M$ , які не лежать на колі, не належать шуканому ГМТ.

Висновок: ГМТ на площині, рівновіддалених від даної точки на площині на віддаль  $a$  є коло з центром в точці  $O$  радіуса  $a$ .

Отже, тут ми знайомимо учнів з ГМТ, яке має форму кола.

Другим ГМТ, яке має форму прямої є множина всіх точок рівновіддалених від двох точок.

**Задача 2. Знайти на площині ГМТ рівновіддалених від двох даних точок  $A$  і  $B$ .**

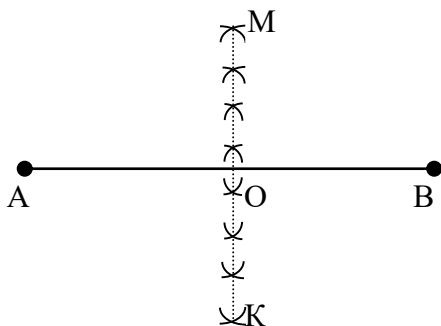


Рис.2.3

Побудова. Довільним радіусом з точок  $A$  і  $B$  проведемо дуги до взаємного їх перетину.

Якщо цю побудову повторити кілька раз, то одержимо ряд точок шуканого ГМТ. Для

впорядкування побудови почнемо з малих радіусів, поступово збільшуючи їх.

Так учні переконуються, що для радіусів менших половини віддалі  $AB$  дуги не перетинаються, а отже шуканого ГМТ немає. Для радіуса рівного  $AB/2$  є одна точка – середина  $AB$ , а радіусів більших  $AB/2$  маємо по дві точки, розміщені з різних сторони від  $AB$ . Якщо помало збільшувати радіус, то ці точки віддаляються від прямої  $AB$ , неначе точка «рухається», залишаючи за собою «слід», рухається по двох променях  $OM$  і  $OK$ , що виходять з середини відрізка  $AB$ . Ці промені утворюють одну пряму  $MK$  перпендикулярну до  $AB$ .

Тепер зробимо робочий малюнок.

Нехай  $t.M \in \text{ГМТ}$ ,  $O$  – середина відрізка, яка належить ГМТ. З'єднаємо  $M$  з  $A$ ,  $B$  і  $O$ .

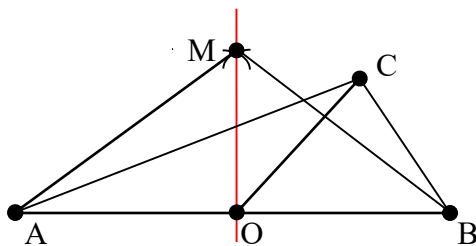


Рис. 2.4

#### Доведення.

1.  $AM = MB$ , за умовою, отже  $\triangle AMB$  – рівнобедрений,  $OM$  – медіана, а отже і висота цього трикутника, тому  $OM \perp AB/2$ .

2. Доведемо протилежну оберненій: Нехай точка  $C$  не належить прямій  $OM$ . З'єднаємо її з точками  $A$ ,  $B$  і  $O$ . Медіана  $OC$  трикутника  $\triangle ABC$  не є висотою, бо з т. $O$  не можна побудувати двох перпендикулярів  $OM$  і  $OC$  до прямої  $AB$ . Отже,  $AC \neq BC$ , тому якщо точка не належить перпендикуляру  $OM$ , то вона не належить шуканому ГМТ.

Висновок: ГМТ рівновіддалених від двох даних точок  $A$  і  $B$  є пряма, перпендикулярна до відрізка  $AB$ , що проходить через його середину  $O$ .

#### **Задача 3. Знайти ГМТ рівновіддалених від сторін $\angle AOB$ .**

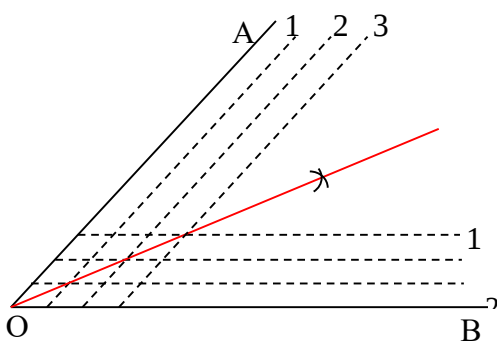


Рис. 2.5

Спочатку побудуємо ряд прямих паралельних до сторін кута на однакових віддаль між собою. Точки перетину відповідних прямих 1 – 1, 2 – 2, 3 – 3, належать шуканому ГМТ. Видно, що вони

розміщені на промені, що виходить з вершини кута, який є його бісектрисою.

Тепер побудуємо робочий малюнок.

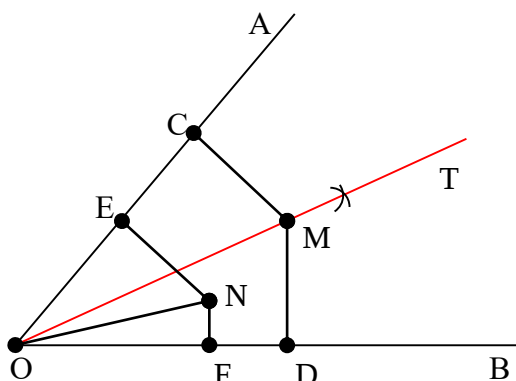


Рис. 2.6

Нехай  $M \in OT$  – бісектрисі  $\angle AOB$ .

Проведемо  $MC \perp OA$ ,  $MD \perp OB$ ,  $\triangle OMC = \triangle OMD$ , тому  $MC = MD$ ,  $ME$  належить шуканому ГМТ.

Якщо  $t.N \notin OT$ , то проведемо  $NE \perp OA$ ,  $NF \perp OB$ .

$\triangle ONE \neq \triangle ONF$ , бо  $\angle NOE \neq \angle NOF$ , отже  $NE \neq NF$ , тому  $t.N$  не належить шуканому ГМТ.

**Висновок:** ГМТ рівновіддалених від сторін кута є бісектриса цього кута.

Вивчення геометрії у сьомому класі закінчується розглядом властивостей кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною і сумою кутів трикутника. Тут треба розглянути ще одне головне ГМТ.

**Задача 4.** Знайти ГМТ віддалених від даної прямої на дану відстань  $a$ .

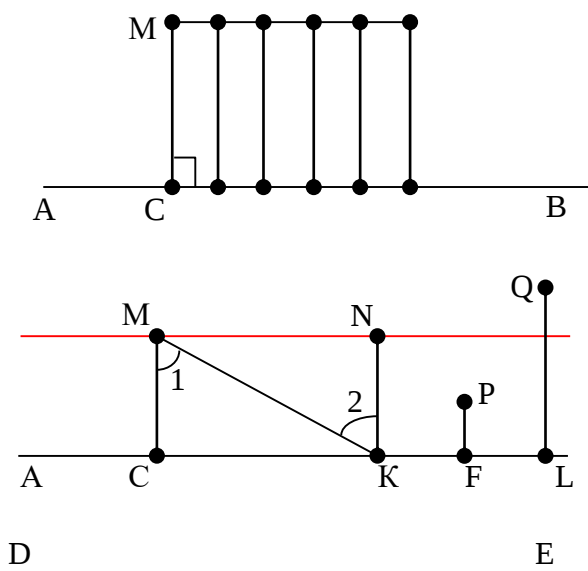


Рис.2.7

Нехай дана пряма  $AB$ . В довільній точці  $C$  побудуємо  $CM \perp AB$  і  $CM = a$ , тоді точка  $M$  належить шуканому ГМТ. Якщо пересувати відрізок  $CM$  паралельно до  $AB$ , то точка  $M$  опише неперервну лінію, яка на око виглядає неперервною до  $AB$ . Доведемо це, зробивши робочий малюнок.

1. У довільних точках  $C$  і  $K$  прямої  $AB$  побудуємо перпендикуляри  $CM$  і  $KN$  та з'єднаємо  $M$  з  $K$  і  $N$ .  $\angle 1 = \angle 2$ , як внутрішні різносторонні при паралельних прямих  $MC$  і  $NK$ , а  $\triangle MCK = \triangle KNM$  за першою ознакою. Тому,  $\angle N = \angle C$  і  $MN \parallel CK$  як два

перпендикуляри до  $NK$ . Отже, точки  $N$  і  $M$  належать прямій паралельній  $AB$ .

2. Якщо точки  $P$  і  $Q$  не належать прямій  $MN$ , то  $PF < a$ ,  $QL > a$  і точки  $P$ ,  $Q$  не належать шуканому ГМТ. Очевидно, відрізок  $CM$  можна відкласти і в другій півплощині. Тому маємо висновок.

**Висновок.** ГМТ віддалених від даної прямої на дану віддаль  $a$  є дві прямі, паралельні даній і розміщені по різні сторони від неї.

**Задача 5.** Знайти ГМТ рівновіддалених від двох даних паралельних прямих.

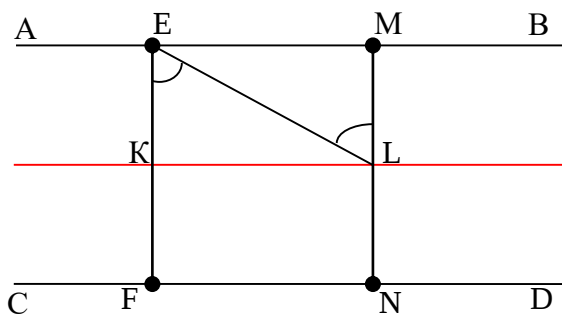


Рис.2.8

Нехай  $AB \parallel CD$ . Відстань між ними всюди однакова. З точок  $E$  і  $M$  прямої  $AB$  побудуємо  $EF$  і  $MN$  перпендикулярні до  $CD$ . Середини цих перпендикулярів  $K$  і  $L$  належать шуканому ГМТ.

Доведемо, що  $KL \parallel AB$ .

1.  $\triangle EKL = \triangle ELM$  за першою ознакою, тому  $\angle EKL = \angle EML = 90^\circ$  і  $KL \parallel EM$ , як два перпендикуляри до відрізка  $EK$ .
2. Точки, які не лежать на  $KL$  не належать шуканому ГМТ, бо відстані від них до  $AB$  і  $CD$  не рівні між собою.

Розглянувши ці п'ять основні ГМТ в 7 класі, можна розв'язувати ряд задач, які ґрунтуються на них.

### 2.3.3. Розв'язування задач на ГМТ у 8 класі

При вивченні геометрії у 8 класі нових важливих ГМТ не вводиться, тому тут треба в основному розглядати задачі на знаходження ГМТ, які ґрунтуються в основному на основних п'яти ГМТ, які розглянуто в 7 класі, хоча іноді останні два ГМТ переносяться у 8 клас, у зв'язку з тим, що тут розглядаються прямокутники та паралелограми.

Аналогічно до того, як кожній точці на площині відповідають дві координати, так кожній шуканій точці відповідають дві властивості або умови, які впливають з умови задачі. Суть методу ГМТ полягає ось в чому:

Якщо відкинути першу умову, то будемо мати не одну точку, а сукупність точок, що утворюють певне геометричне місце у вигляді однієї або кількох ліній (1 ГМТ). Якщо відкинути другу умову і обмежитись лише першою, то знову будемо мати деяке інше ГМТ – знов одну або кілька ліній. Кожна точка перетину цих двох геометричних місць (двох ліній) і буде відповідати вимогам задачі.

Ось кілька таких задач на побудову, які розв’язуються методом ГМТ.

**Задача 6. На даній прямій знайти точку, яка лежить на однаковій віддалі від двох даних точок, що лежать поза прямою.**

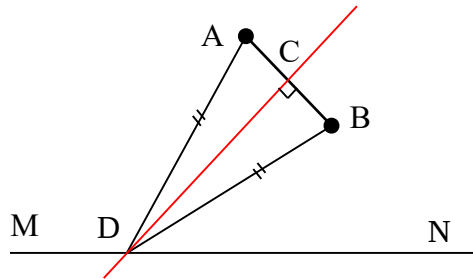


Рис.2.9

**Аналіз.** Припустимо, що задача розв’язана, тобто знайдена точка  $D$  на даній прямій  $MN$ , яка однаково віддалена від даних точок  $A$  і  $B$ . (малюнок робимо від руки схематично.)

Якщо точка рівновіддалена від точок  $A$  і  $B$ , то вона належить ГМТ рівновіддалених від цих точок, а це ГМТ є серединний перпендикуляр до відрізка  $AB$ , його побудувати вміємо. Але точка  $D$  повинна задовольняти і другу умову – лежати на прямій  $MN$ . Отже, вона повинна бути точкою перетину прямої  $MN$  з перпендикуляром  $CD$  проведеним через середину відрізка  $AB$ .

**Задача 7. Знайти точку, рівновіддалену від трьох вершин трикутника.**

**Аналіз.** Припустимо, що шуканою точкою є точка  $O$ , тоді вона повинна бути рівновіддалена від точки  $A$  і  $B$ . Отже, вона повинна лежати на ГМТ,

однаково віддалених від  $A$  і  $B$ .

Крім того, вона повинна лежати на ГМТ, однаково віддалених від  $B$  і  $C$ .

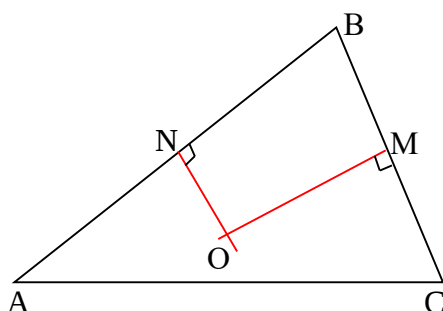
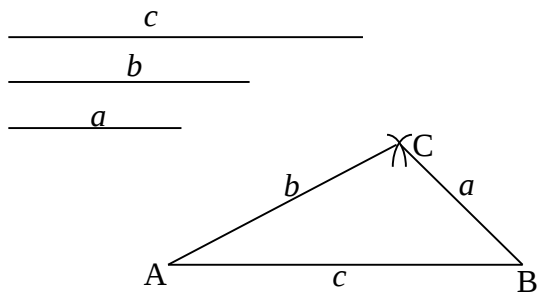


Рис. 2.10

точки перетину названих ГМТ повинні визначати шукану точку  $O$ .  
( $OM \cap NO = O$ )

### Задача 8. Побудувати трикутник за трьома сторонами $a, b, c$ .



**Рис. 2.11**

В розглянутих задачах було видно, що розв'язування зводилось до відшукування певної точки. Якщо цього немає, то потрібно:

- 1) ввести в побудову дані в умові задачі елементи (це може бути сума чи різниця відрізків, кутів);
- 2) уважно проаналізувати побудову, щоб виявити ті лінії та кути, які, хоч їх і не дано в умові задачі, але їх легко побудувати;
- 3) знайти таку частину фігури, яку можна побудувати за допомогою даних в умові задачі елементів і яка разом з тим стала б вихідною для побудови всієї шуканої фігури.

Найчастіше таким способом розв'язуються задачі, в яких треба побудувати трикутник за трьома якими-небудь його елементами.

### Задача 9. Побудувати трикутник за його основою $c$ , кутом при основі $\alpha$ і сумою двох сторін $a+b$ .

**Аналіз.** Припустимо, що задача розв'язана і  $\triangle ABC$  шуканий. Введемо в побудову всі дані в умові елементи; продовжимо сторону  $AC$  і відкладемо відрізок  $AD = a+b$ .

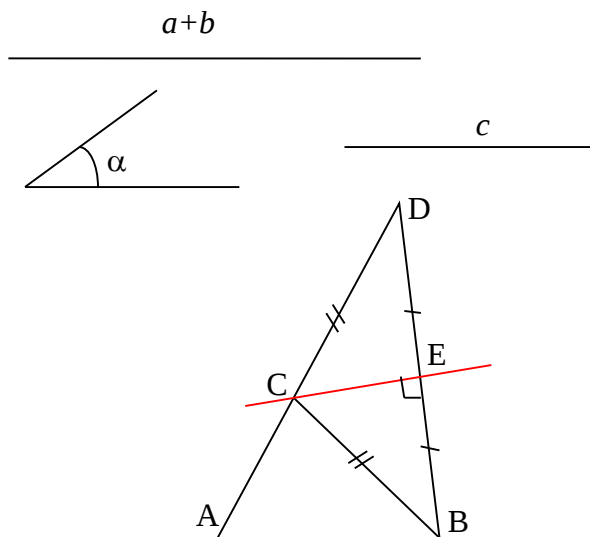


Рис. 2.12

**Задача 10. Побудувати рівнобедрений трикутник за даною основою і різницею між бічною стороною і висотою.**

**Аналіз.** Припустимо, що задача розв'язана і  $\triangle ABC$  шуканий. Відкладемо на висоті  $CD$  відрізок  $CE = CA$ , тобто введемо в малюнок

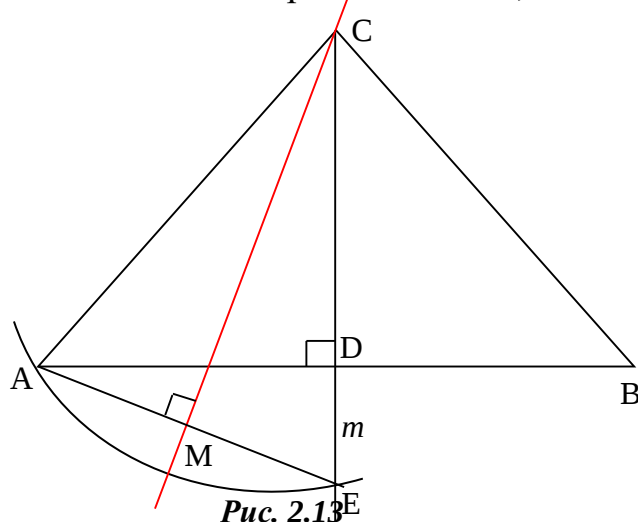


Рис. 2.13

**Задача 11. Провести коло, яке дотикається до двох паралельних прямих  $KK_1$  і  $LL_1$ , і проходить через дану точку  $A$ , що лежить між ними.**

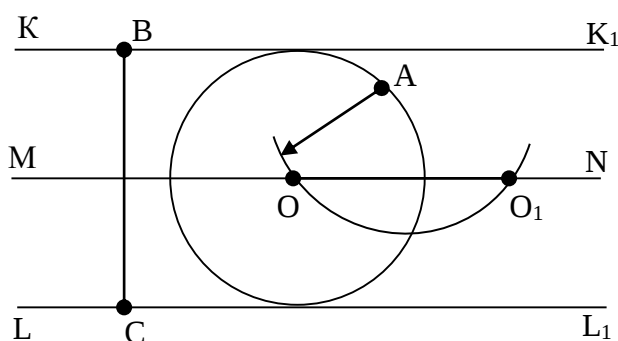


Рис. 2.14

Аналізуємо малюнок, виявляється, що вся важкість в знаходженні точки  $C$ . Але  $AC + CD = AD$ ,  $AC + CB = AD$ . Отже,  $CD = CB$ , точка  $C$  рівновіддалена від  $B$  і  $D$ , отже належить до  $BD/2$ . Точка перетину перпендикуляра  $EC$  зі стороною  $AD$  визначає вершину  $C$ .

різницю  $DE = AC - CD = m$ .

$AD = AB/2 = c/2$  і  $\angle ADE = 90^\circ$ .  $\triangle ADE$  можна побудувати, а вершину  $C$  шуканого трикутника легко знайти як точку перетину серединного перпендикуляра до  $AE$  з продовженням  $ED$ .

**Аналіз** Центр шуканого кола повинен належати ГМТ, рівновіддалених від паралельних прямих і ГМТ, віддаль яких від даної точки рівна половині віддалі між цими прямими. Перше ГМТ є пряма

$MN$ , проведена на віддалі  $BC/2$  від них  
прямих їм паралельна,

а друге коло з центром в точці  $A$  радіуса  $BC/2$ . Перетин цих ГМТ визначає шуканий центр ГМТ рівновіддалених від двох паралельних прямих є пряма паралельна даним і така, що ділить пополам віддаль між ними.

В цих задачах ми провели лише аналіз, свідомо опустивши побудову, доведення і дослідження. Очевидно при розв'язуванні їх з учнями варто по можливості їх виконати.

### **2.3.4. Методи геометричних перетворень**

Методи геометричних перетворень становлять важливу групу в геометрії, пропонуючи потужний підхід до розв'язання задач на побудову геометричних фігур. Ці методи мають багато спільного і відіграють значну роль у закріпленні та поглибленні розуміння геометричних понять.

#### **Ключові характеристики методів геометричних перетворень:**

1. **Закріплення геометричних понять:** Застосування методів геометричних перетворень при розв'язанні задач на побудову сприяє закріпленню та поглибленню розуміння учнями геометричних понять, що лежать в основі цих методів.

2. **Візуалізація як основа:** Використання образу шуканої фігури як керівного принципу є фундаментальною основою цих методів. Візуалізуючи процес перетворення, учні можуть ефективно побудувати бажану фігуру.

3. **Перетворення як проміжний крок:** Коли пряме побудова бажаної фігури виявляється складною, застосовується проміжне перетворення в більш легко побудовану фігуру.

4. **Виділення характерних ознак:** Розпізнавання характерних ознак кожного методу є важливим для того, щоб у майбутньому, аналізуючи задачу, учні могли обирати відповідний метод.

#### **Роль геометричних перетворень у шкільній програмі:**

Хоча чинна програма з геометрії не передбачає використання ідеї геометричних перетворень як центральної ідеї курсу, їх застосування при розв'язанні задач на побудову має значну методичну цінність. Завдяки включенню геометричних перетворень у процес розв'язання задач, учні здобувають глибше розуміння геометричних співвідношень і розвивають більш універсальний підхід до задач на побудову.

### **Ефективна реалізація методів геометричних перетворень:**

Для ефективної реалізації методів геометричних перетворень у навчанні можна використовувати такі стратегії:

1. **Міцна основа в базових перетвореннях:** Переконайтеся, що учні мають ґрунтовне розуміння фундаментальних перетворень, таких як перенесення, поворот, відображення та гомотетія.

2. **Вправи з візуалізації:** Наголошуйте на вправах з візуалізації, які заохочують учнів уявно маніпулювати геометричними фігурами та простежувати їх перетворення.

3. **Поступове зростання складності:** Запропонуйте задачі зі зростаючим рівнем складності, дозволяючи учням здобути впевненість і навички розв'язання задач.

4. **Застосування в реальному світі:** Пов'язуйте геометричні перетворення з реальними сценаріями, такими як симетрія в архітектурі, візерунки в природі та перетворення у фізиці.

Завдяки впровадженню цих стратегій викладачі можуть ефективно вести учнів до оволодіння методами геометричних перетворень, сприяючи глибшому розумінню геометрії та її застосування.

### ***Метод осьової симетрії***

Осьова симетрія – це фундаментальний елемент геометрії, з яким учні знайомляться на початкових етапах вивчення предмета. Її вивчення не лише дає ґрунтовні знання, а й формує важливі конструктивні навички. Завдяки осьовій симетрії учні опановують методи перетворення одних геометричних фігур в інші, що робить геометрію більш динамічною та цікавою.

Сучасна програма з геометрії приділяє значну увагу геометричним перетворенням, адже вони є ключем до розуміння багатьох важливих понять. Рух, подібність фігур – все це різні види геометричних перетворень, які вивчаються в середній школі.

Вивчення руху дає найкращі результати, коли воно стає не просто окремою темою, а основою всього курсу геометрії. Завдяки цьому, рух стає потужним інструментом для доведення теорем та побудови геометричних фігур.

Впровадження осьової симетрії як бази для вивчення геометрії має низку переваг:

Полегшення розуміння: Кінематичний характер навчання, що ґрунтується на понятті руху, робить геометрію більш доступною та цікавою для учнів.

Логічність та чіткість: Осьова симетрія дозволяє чітко та лаконічно викласти багато тем, наприклад, три ознаки рівності трикутників, спеціальні випадки рівності прямокутних трикутників, та інші.

Універсальність: Застосування осьової симетрії не обмежується певною темою, а може використовуватися в різних розділах геометрії.

Осьова симетрія – це не просто математичний інструмент, а потужний метод навчання, який робить геометрію більш зрозумілою, логічною та цікавою. Її впровадження в шкільний курс може значно підвищити рівень засвоєння знань та зацікавити учнів геометрією.

Різні види рухів дають можливість розв'язувати практично важливі задачі на побудову, доведення і завдання на обчислення. Тому вивчення має супроводжуватися вправами, серед яких перевагу слід віддавати завданням на побудову і на доведення. Також потрібно розв'язувати завдання на обчислення, особливо з практичним змістом, але в більшості випадків під час розв'язування завдань такого змісту геометрична складова питання в значній мірі поглинається обчислювальними операціями.

Відомо, що усвідомлені знання здобуваються найкраще через активну та творчу діяльність. Це твердження особливо актуальне при вивченні осьової

симетрії, адже вона відкриває широкі можливості для самостійного формування поняття учнями.

Ось декілька ідей, як можна залучити учнів до дослідження осьової симетрії:

#### 1. Практичні дослідження:

Виготовлення симетричних фігур: Запропонуйте учням створити симетричні фігури з паперу, картону, або інших матеріалів. Це допоможе їм візуалізувати поняття симетрії та дослідити її властивості.

Симетрія в природі та мистецтві: Попросіть учнів знайти приклади симетрії в природі (метелики, квіти, листя) та мистецтві (архітектура, візерунки, орнаменти). Це допоможе їм зрозуміти, що симетрія – це не просто математичне поняття, а й поширене явище в навколишньому світі.

Експерименти з симетрією: Учні можуть проводити різні експерименти з симетрією, наприклад, досліджувати, як змінюється фігура при відображенні в дзеркалі, або створювати симетричні візерунки за допомогою калейдоскопа.

#### 2. Творчі завдання:

Придумати симетричні візерунки: Запропонуйте учням придумати та намалювати симетричні візерунки. Це допоможе їм розвинути просторову уяву та креативність.

Створити симетричні об'єкти: Учні можуть створювати симетричні об'єкти з пластиліну, глини, або інших матеріалів. Це допоможе їм краще зрозуміти тривимірну симетрію.

Написати історію про симетрію: Запропонуйте учням написати історію, в якій головним героєм буде симетрична фігура. Це допоможе їм по-новому поглянути на поняття симетрії та зробити його більш цікавим.

#### 3. Використання цифрових інструментів:

Інтерактивні онлайн-вправи: Існує багато онлайн-ресурсів, які пропонують інтерактивні вправи з симетрії. Це може бути цікавим та ефективним способом для учнів самостійно вивчити цю тему.

Програми для створення симетрії: Учні можуть використовувати програмне забезпечення для створення симетричних візерунків, фігур та об'єктів. Це допоможе їм дослідити різні аспекти симетрії та розвинути свої творчі здібності.

Важливо пам'ятати, що при вивченні осьової симетрії важливо не лише дати учням знання, але й заохотити їх до самостійного дослідження та творчості. Це допоможе їм зробити навчання більш цікавим та ефективним, а також здобути усвідомлені знання, які їм знадобляться в майбутньому.

У шкільній геометрії поняття "симетрія" має два значення: воно позначає як тип перетворення (руху), так і властивість фігури, що залишається незмінною при такому перетворенні. Цю подвійність важливо враховувати при викладанні, адже учням слід чітко розуміти різницю.

Одним із ключових завдань вчителя є допомогти учням сприймати симетрію як спосіб перетворення однієї фігури в іншу, а не як статичну властивість.

Для цього, після ознайомлення з визначенням симетричних щодо осі точок, рекомендується зосередити увагу учнів на практичних побудовах взаємно симетричних фігур.

Варіанти завдань:

1. Побудувати точку, симетричну даній, щодо даної прямої.
2. Побудувати відрізок (пряму), симетричний даному, щодо даної прямої.
3. Побудувати трикутник, симетричний даному, щодо даної прямої.
4. Побудувати коло, симетричне даному, щодо даної прямої.
5. Побудувати трикутник, симетричний даному прямокутному трикутнику, щодо:
  - його катета;
  - його гіпотенузи.

Під час розв'язування цих завдань одночасно встановлюється рівність взаємно симетричних відрізків, кутів та інших фігур.

Для наочності та кращого розуміння рекомендується перегинати креслення по осі симетрії.

Наприклад, при розв'язуванні задачі: «Дано дві прямі. Знайти на них точки, симетричні щодо третьої прямої», зручно нанести всі три прямі на кальку і перегнути креслення по третій прямій.

Цей метод робить розв'язання очевидним для всіх учнів.

Аналогічно розв'язуються завдання:

а) дано пряму і трикутник. Знайти на одній прямій і на контурі трикутника точки, симетричні одна одній щодо іншої прямої;

б) дано коло і трикутник. Знайти на колі і на контурі трикутника точки, симетричні одна одній щодо даної прямої.

Важливо підкреслити практичну значущість навичок побудови симетричних фігур.

Для цього можна провести розмітку виробу, який учні виготовлятимуть найближчим часом. Навчання має ґрунтуватися на зв'язку знань, адже нове розуміється через вже засвоєне. Тому важливо використовувати поняття та властивості осьової симетрії при вивченні нових геометричних образів і розв'язуванні доступних учням завдань.

Знання властивостей симетричних фігур дозволяє розглядати розв'язки основних задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки до вивчення ознак рівності трикутників і поняття геометричного місця точок.

Побудови є зрозумілими та природними для учнів. Ось приклади розв'язання деяких завдань: «Побудова точки, симетричної даній точці А щодо прямої.»

Потрібно побудувати два кола з центрами в довільних точках  $O_1$  і  $O_2$ , які належать прямій, що проходить через точку А. Друга спільна точка цих кіл  $A_1$  буде шуканою.

Аналогічно розв'язується і таке завдання: «Побудова осі симетрії двох даних точок А і В».

Побудувати два кола з центрами в точках А і В, що перетинаються в точках С і D. Пряма CD буде шуканою віссю симетрії.

Застосування осьової симетрії робить вивчення таких розділів теми "Коло", як властивості діаметрів, перпендикулярних хордам, та дуг, що лежать між паралельними хордами, значно простішим та доступнішим.

Без зайвих витрат часу можна детально розглянути надзвичайно важливе питання про взаємне розташування кіл. Для цього достатньо звернути увагу учнів на симетрію спільних точок двох кіл щодо їх лінії центрів. Це дасть їм змогу самостійно сформулювати необхідні та достатні умови дотику двох кіл, що є ключовими при вивченні відповідних геометричних місць центрів кіл, пов'язаних з даними фігурами.

Ось декілька прикладів, як осьова симетрія може допомогти у вивченні кіл:

1. Властивість діаметра, перпендикулярного до хорди:

Розглянемо коло з діаметром АВ та хорду CD, перпендикулярну АВ. Проведемо через центр О кола вісь симетрії, перпендикулярну АВ. Зауважимо, що точки С та D симетричні щодо цієї осі. З симетрії випливає, що  $OC = OD$ , тобто діаметр ділить хорду, перпендикулярну йому, навпіл.

2. Властивість дуг, що лежать між паралельними хордами:

Розглянемо коло з паралельними хордами АВ та CD. Проведемо через центр О кола вісь симетрії, перпендикулярну АВ та CD. Зауважимо, що дуги АС і ВD симетричні щодо цієї осі. З симетрії випливає, що дуги АС і ВD мають однакову міру.

3. Взаємне розташування кіл:

Розглянемо два кола з центрами  $O_1$  та  $O_2$  та радіусами  $r_1$  та  $r_2$ . Проведемо через центри кіл лінію  $O_1O_2$ . Зауважимо, що спільні точки кіл (якщо вони існують) симетричні щодо цієї лінії. Використовуючи симетрію, можна легко визначити, коли кола дотикаються, перетинаються або не мають спільних точок.

Підводячи підсумок, можна сказати, що осьова симетрія є потужним інструментом, який може значно покращити розуміння учнями геометрії кіл.

Важко вказати спільні ознаки завдань, що розв'язуються методом осьової симетрії. У більш складних завданнях метод осьової симетрії, нерідко вирівнює ламані лінії в прямі, і може бути використаний, якщо в умовах вказана сума або різниця частин деякої ламаної лінії. Можна наголосити, що метод осьової симетрії застосовується для задач, в умові яких вказана пряма, яка є віссю симетрії частини елементів фігури. Таку пряму легко визначити за властивостями фігур. Застосування осьової симетрії доцільно для завдань, які



легко розв'язуються, якщо частина даних розташована з одного боку деякої прямої, а решта – з другого.

Розглянемо задачу: «Побудувати ромб, що відповідає наступним умовам: одна з його діагоналей дорівнює даному відрізку  $R$  і лежить на даній прямій  $a$ . Дві інші вершини ромба лежать відповідно на даних прямих  $b$  і  $c$ .»

Рис. 2.15

#### **Аналіз.** 1. Побудова вершини $C$ :

Зауважимо, що задача зводиться до побудови однієї з вершин ромба, наприклад, вершини  $C$ . Згідно з властивостями ромба, точки  $B$  і  $C$  симетричні відносно прямої  $a$ . Використовуючи осьову симетрію щодо прямої  $a$ : точка  $B$  перетвориться в точку  $C$ . Пряма  $b$  перетвориться в деяку пряму  $b'$ , що проходить через точку  $C$ . Таким чином, точка  $C$  може бути побудована як точка перетину прямих  $c$  і  $b'$ , з яких: пряма  $c$  дана. Пряму  $b'$  можна легко побудувати, адже вона є образом прямої  $b$  при осьовій симетрії щодо  $a$ .

2. Побудова ромба: після знаходження точки  $C$ , побудувати іншу вершину ромба  $D$ , симетричну  $C$  щодо прямої  $a$ . З'єднати точки  $C$  і  $D$  відрізком. Побудувати другу діагональ ромба, перпендикулярну до першої, з центром у точці перетину діагоналей. З'єднати точки  $A$  і  $B$ , що є кінцями другої діагоналі, відрізками. Результат: шуканий ромб  $ABDC$ , де  $AD = R$ .

*Побудова.* Будуємо послідовно: пряму  $b'$ , симетричну прямій  $b$  відносно прямої  $a$ ; точку  $C$ , спільну для прямих  $c$  і  $b'$ ; пряму  $OC$ ; точку  $O$  НД  $a$ ; точки  $A$  і  $D$  на прямій  $a$ , віддалені від точки  $O$  на відстані  $d$ ;  $ABCD$  – шуканий ромб.

### **Метод центральної симетрії**

Симетрія відносно точки  $O$  (центральна симетрія) – це перетворення, яке: залишає точку  $O$  нерухомою, а будь-яку іншу точку  $M$  переводить у точку  $M_1$ , так що  $O$  стає серединою відрізка  $MM_1$ .

Цей метод можна використовувати для розв'язання задач, де в умовах чітко вказана точка, яка є центром симетрії шуканої або допоміжної фігури.

Розглянемо приклад:

Задача: «Через точку  $A$  провести пряму так, щоб її відрізок з кінцями на даній прямій  $l$  і колі  $k$  ділився точкою  $A$  навпіл».

*Розв'язування.* Побудуємо центр  $O$  кола  $k$ . Побудуємо точку  $A_1$ , симетричну точці  $A$  відносно точки  $O$ . Пряма  $AA_1$  буде шуканою.

*Пояснення:* Оскільки  $O$  є центром кола  $k$ , то відрізок  $AA_1$  проходить через центр кола. З симетрії  $A$  і  $A_1$  відносно  $O$  випливає, що  $AA_1$  ділиться  $O$  навпіл.

### **Метод подібності**

Метод подібності ґрунтується на тому, що спочатку будується допоміжна фігура, яка за формою подібна до шуканої, але не відповідає всім умовам задачі. Після цього цю допоміжну фігуру трансформують (збільшують або зменшують) у шукану фігуру, яка вже відповідає всім вимогам.

Цей метод можна застосовувати лише до задач, які:

1. Можна розділити на дві частини:
  - Перша частина визначає форму фігури з точністю до подібності.
  - Друга частина визначає розміри фігури.
2. Задовольняють дві умови:
  - Існує зв'язок між подібними фігурами (співвідношення їхніх сторін).
  - Відомі дані, які дозволяють визначити це співвідношення.

Під час розв'язання задач методом подібності важливо ставити учням правильні питання:

- Що (яка частина) в умові завдання визначає фігуру з точністю до подібності?
- Що визначає розміри шуканої фігури?

Відповіді на ці питання допоможуть учням:

1. Чітко зрозуміти суть методу.
2. Правильно виокремити ключові моменти задачі.
3. Обґрунтувати кожен крок розв'язання.

**Методичні рекомендації навчання учнів розв'язування задач методом подібності.**

При розробці методу подібності доцільно класифікувати задачі за способом задання розмірів шуканої фігури:

- 1) завдання, в яких розміри шуканої фігури визначаються заданням деякого відрізка;
- 2) завдання, в яких розміри шуканої фігури визначаються заданням суми або різниці деяких її відрізків;
- 3) завдання, в яких розміри шуканої фігури визначаються положенням її відносно даних фігур.

Така класифікація зручна тому, що для кожної з трьох груп завдань способи вибору центру подібності різні.

У завданнях з першої групи за центр подібності краще всього вибирати один з кінців відрізка допоміжної фігури, відповідної даному відрізку, через який проходить найбільша кількість прямолінійних відрізків шуканої фігури, так як при гомотетії тільки прямі, що проходять через центр подібності, перетворюються самі в себе. При такому виборі легко знаходити одну точку (другий кінець даного відрізка) шуканої фігури, що в більшості випадків значно полегшує виконання подальшої побудови.

І для завдань другої групи за центр подібності можна вибирати один з кінців побудованої суми або різниці відрізків, відповідних даним. Доцільно

розбивати подібне перетворення: окремо знайти один з відрізків, сума або різниця яких дано, а потім виконати побудову шуканої фігури.

Під час розв'язування завдань третьої групи центр подібності визначається однозначно, розташуванням фігури, подібної шуканій, щодо даних фігур.

## ВИСНОВКИ

1. У ході нашого дослідження виявлено особливості формування графічних компетенцій учнів у процесі графічної діяльності на уроках геометрії. Графічну діяльність ми розглядаємо як комплексний багатогранний процес, який включає взаємодію розумових і практичних дій, спрямованих на створення уявлень про просторові властивості предметів та їх умовне відображення на площині або відтворення цих просторових властивостей в уяві на основі існуючих умовних зображень..

2. Головним засобом розвитку графічних умінь учнів на уроках геометрії є задачі на побудову. Систематичне розв'язування таких завдань сприяє розвитку графічних навичок учнів, формує пошукові уміння розв'язування практичних задач, долучає учнів до посильних самостійних досліджень, сприяють виробленню конкретних геометричних уявлень.

3. Однією з основних проблем методики навчання розв'язуванню задач на побудову є методика введення та вивчення етапів розв'язання таких завдань. Доцільно навчати учнів не тільки виконанню аналізу і побудові шуканих фігур, але і доведенню, що отримана фігура задовольняє заданим умовам, а також дослідженню умов, при яких розв'язується завдання і визначенню кількості розв'язків. Тобто розв'язувати складніші задачі на побудову доцільно у чотири етапи: аналізу, побудові, доведенню і дослідженню.

4. Значне місце серед методів розв'язування задач на побудову у шкільному курсі математики посідає метод геометричного місця точок. Але доцільно знайомити учнів і з методами геометричних перетворень:

- а) метод центральної симетрії;
- б) метод осьової симетрії;
- в) метод паралельного перенесення;
- г) метод повороту.

Під час вивчення конкретного методу завдання повинні добиратися так, щоб у них найяскравіше проявлялася суть виучуваного методу, особливо на

початковому етапі його вивчення. При цьому якщо завдання розв'язується декількома методами, то досліджуваний метод повинен дозволяти розв'язати задачу швидше і наочніше.

5. Розв'язання однієї і тієї ж задачі декількома методами посилює інтерес учнів до завдань на побудову і формує свідоме ставлення до розв'язання таких завдань. Якщо розв'язувати завдання на побудову весь час за заздалегідь вказаним методом, то цим самим ми притуплюємо винахідливість та ініціативу учнів у знаходженні різних і оригінальних способів розв'язання і їм важко навчитися самостійно розв'язувати конструктивні завдання.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Боровльов А.П., Ленчук І.Г. Аналіз у розв'язуванні задач на побудову. – К.: Вища школа, 2002. – 191 с.
2. Бутко С. М. Формування графічної грамотності на уроках математики з метою забезпечення інтелектуального розвитку учнів, розвитку їх уваги, пам'яті, логіки, культури мислення та інтуїції. URL: <http://refs.in.ua/s-m-butko-tvorchya-robota-formuvannya-grafichnoyi-gramotnosti-u.html> (дата звернення 23.08.2018).
3. Бурда М.І. Розв'язування задач на побудову в 6-8 класах: Методичний посібник. - К.: Радянська школа, 1986. - 112 с.
4. Висоцька А.М. Перетин прямої і кола // Математика в школах України. - 2004. - № 5 (53). - С. 15-16.
5. Волчаста М. Вивчення геометричних фігур на уроках математики // Поч. школа. – 1998. – №6. – С. 19-23.
6. Дереза І. С. Деякі аспекти формування графічної культури майбутніх вчителів математики / І. С. Дереза // Матеріали Міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО-2017) (м. Черкаси, 26–28 жовтня 2017 року). – Черкаси, 2017. – С. 168-170. Код доступу: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/handle/0564/2021>
7. Калугіна О. Р. Шляхи формування предметної компетенції на уроках математики. "Освітянин", № 1, 2008
8. Король Я.А. Формування практичних умінь і навичок на уроках математики. – Тернопіль: Навч. книга – Богдан, 2000. – 136 с.
9. Король Я.А. Формування прийомів користування вимірювально-креслярськими інструментами // Поч. шк. – 1996. – №4. – С. 24-26.
10. Лоповок Л.М. Розв'язування геометричних задач у середній школі. - К.: Радянська школа, 2009. - 262 с.
11. Олефіренко Т. Графічна компетентність як складовий компонент всебічного розвитку особистості // Збірник наукових праць Уманського

державного педагогічного університету імені Павла Тичини / Гол. ред.: Мартинюк М.Т. – Умань: ПП Жовтий О.О., 2010. – Ч. 3. – 394 с.

12. Раков С. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія освіти // Математика в школі. – 2007. – № 5;

13. Савчук А.М. Вимірювання величин як методична проблема в загальноосвітній школі // Імідж сучасного педагога. – 2001. - №2. – С.18-20.

14. Сидоренко В.К., Щетина Н.П. Графічна підготовка школярів: реальний стан та перспективи // Наукові записки Тернопільського державного педагогічного університету. Серія: Педагогіка. – 1999. - №5. – С.29-33.

15. Сидоренко В.К., Щетина Н.П. Дидактичні умови графічного розвитку школярів // Наукові записки ТДПУ. Серія: Педагогіка. – 2001. - №3. – С.76-82.

16. Тесленко І.Ф. Особливості геометричних задач на побудову в планіметрії. - К.: Радянська школа, 2008. - 138 с.

17. Хом'як О.В. Формування графічної культури учнів на уроках математики засобами сучасних інформаційних технологій / О.В. Хом'як // Математика в школах України. – 2011. – №16–18(316–318). – С.12–15.

18. Чашечникова О.С. Розв'язування задач на побудову як один із шляхів залучення учнів різних груп до творчої діяльності з математики / О.С. Чашечникова // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія №3. Фізика і математика у вищій і середній школі: Зб. наукових праць – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – № 6. – С. 140 – 149.