

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

завідувач кафедри математики та економіки,

кандидат педагогічних наук, доцент

_____ Т.І.Війчук «____» _____ 2024 р.

ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ ШКІЛЬНОГО КУРСУ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)»

Магістерська робота

на здобуття професійної кваліфікації:

*«Вчитель математики, викладач закладу фахової передвищої, вищої освіти,
вчитель інформатики»*

Автор роботи:

Калапунь Павло Любомирович _____

Науковий керівник:

кандидат педагогічних наук, доцент

Війчук Тарас Іванович _____

Дрогобич, 2024

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

[illegible]

Секретар ЕК _____ підпис _____ прізвище, ім'я _____

Анотація

Калапунь П.Л. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії. – Рукопис

Магістерська робота зі спеціальності 014 Середня освіта (Математика). Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка. Дрогобич, 2024.

Магістерська робота присвячена визначенню шляхів реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії та вдосконаленню змісту навчального матеріалу, спрямованого на формування стереометричних уявлень учнів. У роботі проаналізовано процес вивчення стереометрії у загальноосвітніх навчальних закладах, а також розглянуто способи використання прикладних задач на уроках математики. Дослідження містить узагальнення прикладної інформації основних тем курсу та добір задач, що сприятимуть розвитку у школярів стереометричних навичок через практичне застосування знань.

Abstract

Svitlana Gut. Applied Orientation of the School Course in Stereometry – Manuscript.

Master's thesis in the specialty 014. Secondary Education (Mathematics). Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, Drohobych, 2024.

The master's thesis is dedicated to defining the ways of implementing the applied orientation of the school course in stereometry and improving the content of the educational material aimed at forming students' stereometric representations. The study analyzes the process of learning stereometry in general education schools and examines ways of using applied problems in mathematics lessons. The research includes a generalization of applied information from the main topics of the stereometry course and the selection of problems that will promote the development of stereometric skills in students through the practical application of knowledge..

Зміст

Вступ.....	5
Розділ I. Теоретичні аспекти використання прикладних задач в шкільному курсі математики	7
1.1. Поняття, зміст та функції прикладних задач	7
1.2. Основні етапи розв’язування прикладних задач	11
1.3. Прикладна спрямованість стереометрії.....	15
Розділ II. Шляхи реалізації прикладної спрямованості курсу стереометрії у ЗЗСО	21
2.1. Прикладна спрямованість початків стереометрії	21
2.2. Задачі на многогранники, тілами обертання та їх комбінації	26
2.3. Задачі пов’язані з опрацюванням окремих теоретичних положень	28
2.4. Многогранники в контексті прикладної спрямованості	32
2.5. Тіла обертання в контексті прикладної спрямованості	36
2.6. Прикладний характер виникнення основних понять геометрії 10 класу	45
2.7. Прикладний характер виникнення основних понять геометрії 11 класу	49
Висновки	68
Список використаних джерел	70

Вступ

Актуальність роботи. Математика завжди була невід'ємною складовою розвитку людства; вона є основним інструментом для розуміння навколишнього світу. В рамках концепції шкільної математичної освіти одним із ключових завдань є посилення її практичного спрямування.

Особливо слід зазначити, що у дослідженнях з методики навчання математики найменше уваги приділяється прикладному аспекту геометрії, а зокрема – стереометрії. Прикладні завдання в межах шкільної програми використовуються недостатньо і не в повному обсязі. Результати наших спостережень показують, що рівень досягнень та сформованості практичних умінь в учнів зі стереометрії залишається низьким. Під час вступних іспитів до вищих навчальних закладів багато абітурієнтів не можуть розв'язати стереометричні задачі або роблять значні помилки під час їх розв'язання. Однак вивчення цього розділу є важливим для інтелектуального розвитку людини, а недоліки у знаннях учнів висвітлює проблеми геометричної освіти у шкільній практиці. Знання та навички зі стереометрії сприяють розвитку логічного мислення, а розв'язання практичних задач дає змогу вирішувати широкий спектр математичних, фізичних, астрономічних та технічних проблем.

Дослідження науковців та відгуки вчителів математики дають підстави стверджувати, що найбільші труднощі для учнів викликають математизація прикладної задачі та побудова математичної моделі.

Часто в школярів виникає думка, що в житті потрібні лише прикладні задачі, а всі інші – ні. Щоб спростувати такі помилкові уявлення, слід наочно демонструвати учням, що майже кожна абстрактна задача може бути математичною моделлю деякої прикладної задачі.

Таким чином, коло тих питань і проблем зумовили вибір теми магістерського дослідження “Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії”.

Мета роботи полягає у визначенні шляхів реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії, вдосконаленні змісту навчального матеріалу, який використовується у процесі формування стереометричних уявлень учнів.

Об'єктом дослідження процес вивчення стереометрії у школі.

Предмет дослідження шляхи реалізації прикладної спрямованості навчання стереометрії у закладах загальної середньої освіти.

Для досягнення поставленої мети, потрібно розв'язати такі **завдання**:

- визначити основні етапи розв'язування прикладних задач, які доцільно використовувати на уроках математики;
- проаналізувати шляхи реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії;
- узагальнити прикладну інформацію основних тем шкільного курсу стереометрії;
- дібрати задачі прикладного змісту, які сприятимуть формуванню стереометричних уявлень учнів.

Для розв'язання завдань, поставлених у роботі, використано такі **методи дослідження**:

- аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури з даної проблеми;
- аналіз програм, навчальних посібників, підручників з математики;
- вивчення досвіду вчителів математики;
- спостереження, бесіди, анкетування.

Розділ I. Теоретичні аспекти використання прикладних задач в шкільному курсі математики

1.1. Поняття, зміст та функції прикладних задач

Завдання, які постають перед сучасною школою, передбачають підвищення ефективності навчання і забезпечення комп'ютерної грамотності учнів, що вимагає суттєвого оновлення навчального процесу. Одним із ключових напрямів такої перебудови є трансформація шкільного курсу математики, зокрема враховуючи його практичне, прикладне та політехнічне спрямування.

Практичне спрямування полягає в тому, щоб навчити учнів застосовувати набуті знання не лише в межах курсу математики, а й у процесі вивчення інших дисциплін, а також при розв'язанні реальних задач, що виникають у житті. Це сприяє формуванню в учнів раціональних прийомів аналізу та вирішення задач, а також здатності адаптувати теоретичні знання до різних контекстів.

Прикладне спрямування курсу орієнтоване на розвиток навичок математичного дослідження реальних явищ. Воно включає вміння моделювати завдання з реального життя, аналізувати отримані результати, а також зіставляти їх з фактичними даними. Це підходить для побудови математичних моделей і має важливе значення, оскільки дозволяє учням бачити прикладне застосування математики, яке може бути використане в різних галузях знань і життєвих ситуаціях.

Політехнічне спрямування, у свою чергу, передбачає використання математичних знань і навичок для розуміння й опису виробничих процесів, що робить вивчення математики важливим інструментом для підготовки до реальних професійних завдань. Таке спрямування дозволяє учням спостерігати, як математичні абстракції допомагають розуміти складні явища й процеси, що відбуваються у виробничій сфері.

Різноманітність прикладних задач у шкільному курсі допомагає досягати низки важливих цілей. Такі задачі сприяють не тільки підготовці учнів до реального аналізу природних явищ, але й дозволяють демонструвати зв'язок між теорією та практикою, розвивають наукове світосприйняття й поглиблюють інтерес до математики. Через прикладні задачі вчителі мають можливість стимулювати пізнавальну діяльність учнів, а також підвищувати їхній інтерес до предмета. Крім того, прикладні задачі мають важливе виховне значення, оскільки вони показують, що математика є не тільки формальною дисципліною, але й інструментом для розуміння навколишнього світу. Задачі практичного змісту, як правило, виникають поза межами суто математичних завдань, але для їх вирішення використовують математичні методи й способи, визначені в шкільному курсі. Це сприяє розвитку в учнів уміння осмислювати поняття, аналізувати й узагальнювати результати, розширює їхній кругозір і зміцнює інтерес до навчання.

У педагогічній літературі поняття прикладної задачі тлумачиться по-різному, зокрема як:

- 1) задача, для розв'язання якої потрібно переформулювати умову з природної мови на математичну;
- 2) задача, яка за формулюванням і методами розв'язання подібна до тих, що виникають на практиці;
- 3) сюжетна задача у вигляді проблемного завдання.

Завдання прикладного змісту також передбачають додаткові вимоги до змісту й оформлення. Вони мають відповідати таким критеріям:

- містити інформацію, яка має пізнавальну цінність;
- мати певний виховний потенціал для учнів;
- нематематичний матеріал повинен бути доступним і зрозумілим дітям відповідного віку;
- числові величини та їх значення, що описуються в умовах задач, повинні відповідати реальній ситуації.

Вони можуть бути представлені у формі стандартних текстових задач алгебраїчного або геометричного змісту, включати завдання на побудову

геометричних фігур, обчислення площі, периметра тощо. Також це можуть бути задачі фізичного змісту на обчислення швидкості, часу, шляху; задачі, пов'язані з географією, побутом або життям людини. Задачі експериментального характеру дозволяють учням самостійно здобувати дані шляхом вимірювання або експерименту.

Прикладний характер задач можна розширювати, включаючи до їх змісту:

- завдання на обчислення значень величин, які мають практичне застосування;
- вимоги, що до розрахунку параметрів реалізації описаного явища;
- побудову схем, графіків, діаграм;
- використання формул та виведення залежностей між величинами, що зустрічаються в повсякденному житті.

Усі ці різновиди сприяють розвитку здібностей до узагальнення, порівняння, висновків, формують навички обґрунтованого аналізу й розширюють світогляд учнів. Розв'язуючи такі завдання, учні не лише поглиблюють свої знання, але й краще усвідомлюють, як математика допомагає зрозуміти реальні процеси.

Історично математика виникла як відповідь на практичні потреби людства, а педагогічний досвід показує, що будь-яка прикладна задача, що використовується на певному етапі навчання, виконує різні функції, які виявляються як явно, так і приховано. Важливо підбирати задачі так, щоб вони виконували кілька функцій одночасно: освітню, розвиваючу, виховну.

Освітня функція прикладних задач полягає у формуванні системи знань, умінь і навичок, які учні засвоюють на різних етапах навчання.

Розвиваюча функція сприяє осмисленню змісту понять, застосуванню знань на практиці, вмінню аналізувати результати й робити узагальнення.

Виховна функція проявляється у формуванні наукового світогляду та систематизації знань через усвідомлення міжпредметних зв'язків [36].

Міжпредметні зв'язки, що утворюються через розв'язання прикладних задач, є ефективним способом забезпечення інтегрованого підходу до

навчання. Вони допомагають учням формувати цілісну картину природи, усвідомлювати єдність наукових знань і способів пізнання. Для уникнення помилкових уявлень про прикладне застосування математики варто показувати учням, що майже кожна задача може бути математичною моделлю реального завдання, а її розв'язання – допомагати знаходити відповіді на питання, поставлені життям.

Розкриття прикладного значення матеріалу, що вивчається, є одним із дієвих прийомів, який робить навчання математики більш доступним і зрозумілим для учнів. Такі задачі мотивують учнів до дослідження реальних об'єктів, дозволяють вчителям демонструвати, як математичні поняття та моделі можуть пояснювати й спрощувати складні явища. Наприклад, натуральні об'єкти, такі як дерева, будівлі, транспортні засоби, можна використовувати для демонстрації математичних понять (паралельність, перпендикулярність, лінійні кути між площинами тощо). Доречним є також використання традиційних задач, умов яких можна адаптувати до інтересів учнів, щоб зробити їх зміст ближчим до повсякденного життя й тим самим підвищити їх пізнавальну цінність.

Серед прикладних завдань окреме місце займають задачі без числових даних, або задачі-запитання, які чітко формулюють запитання, але не містять усіх потрібних даних. Такі задачі моделюють реальні ситуації, у яких людина повинна самостійно визначити необхідні дані для отримання відповіді й пояснити, як і звідки їх отримати. Це корисний спосіб розвивати аналітичне мислення та навички постановки питань, що виникають у реальному житті. Наприклад, завдання типу "Як знайти висоту дерева?" чи "Яким чином обчислити об'єм неправильної форми предмета?" дозволяють учням розуміти, які параметри необхідні для розв'язання задачі та як їх визначити. Такі задачі стимулюють розвиток критичного мислення, сприяють здатності знаходити оптимальні шляхи вирішення проблем і, що важливо, підтримують зв'язок математики з реальним життям.

Отже, включення прикладних задач у шкільний курс математики є важливим елементом, що не лише підвищує практичну цінність математичної

освіти, а й сприяє формуванню в учнів навичок та вмінь, корисних у повсякденному житті. Використання таких задач допомагає збагачувати зміст уроків, розширювати кругозір учнів і виховувати науковий підхід до аналізу явищ навколишнього світу. Це дозволяє виховувати всебічно розвинену особистість, здатну розв'язувати практичні завдання за допомогою математичних знань, що є запорукою успіху сучасного навчального процесу й відповідності освіти вимогам сьогодення.

1.2. Основні етапи розв'язування прикладних задач

Прикладні задачі є важливою частиною навчального процесу. Дослідники в педагогіці наголошують, що процес розв'язання задач повинен складатися з таких етапів [11]:

- 1) аналіз умови, щоб виділити, що відомо і що потрібно знайти;
- 2) розробка плану розв'язання;
- 3) реалізація цього плану, перевірка отриманого результату та обґрунтування його відповідності умовам задачі;
- 4) аналіз методу розв'язання для пошуку альтернативних способів.

Учні часто стикаються з труднощами при побудові математичної моделі задачі, особливо коли не вистачає знань для глибокого розуміння ситуації. Для таких випадків рекомендують методи

- моделювання;
- спроб і помилок;
- перебору;
- поступового ускладнення.

Прикладні задачі можна умовно поділити на дві групи: ті, де математична модель надається в умові, і ті, які потребують побудови моделі. Перша група задач значно легша і може бути розв'язана за класичними етапами навчальної задачі. Для другої, неформалізованої групи, потрібно врахувати додаткові кроки:

- 1) формулювання задачі;
- 2) переклад умов задачі на математичну мову;
- 3) створення математичної моделі;
- 4) визначення методу розв'язання в межах моделі;
- 5) реалізація цього методу, перевірка результатів;
- 6) інтерпретація результатів;
- 7) аналіз для оцінки раціональності методу і можливих альтернатив.

Історія науки демонструє значення математичного моделювання у відкритті нових явищ. Наприклад, завдяки обчисленням в астрономії у 1845–1846 роках було передбачено існування Нептуна, а у 1932 році в фізиці було передбачено існування позитрона.

Англійський вчений П. Дірак у 1928 році отримав рівняння руху електрона. З розв'язку цього рівняння випливало існування елементарної частинки, яка відрізняється від електрона лише знаком електричного заряду. Таку частинку у 1932 році відкрив фізик К. Д. Андерсон (США) і назвав її позитроном [61].

Метод математичного моделювання є ефективним інструментом для розв'язання задач, оскільки включає етапи: переклад задачі на математичну мову, дослідження моделі та інтерпретацію розв'язків. Етапи математичного моделювання за суттю в усіх дослідників схожі й досить широко висвітлені в науковій та навчальній літературі. Для прикладу, В. О. Швець виділяє такі етапи розв'язування прикладної задачі у школі методом математичного моделювання [60]:

1. *Створення математичної моделі*—переклад задачі з природної мови тієї галузі, де вона виникла, мовою математики.

2. *Дослідження математичної моделі*—розв'язування отриманої математичної задачі.

3. *Інтерпретація розв'язків* отриманих результатів, тобто переклад розв'язку математичної задачі з мови математики мовою тієї галузі, де вона виникла.

За відгуками вчителів, саме початковий етап найскладніший для учнів. Математизація прикладної задачі та побудова математичної моделі є досить серйозною проблемою для учнів, оскільки вони недостатньою мірою вміють здійснювати [15]:

- декодувати інформацію, закладену в умові прикладної задачі;
- абстрагуватись від неістотних властивостей об'єктів, що досліджуються в задачі;
- виявляти та правильно інтерпретувати взаємозв'язки між об'єктами, що розглядаються в умові задачі;
- формалізувати запитання задачі, виразивши шукані величини через відомі та введені змінні.

Фактором, який негативно впливає на навчання математичного моделювання у школі є його епізодичне використання, тому учні недостатньо практикуються у створенні моделей; відсутній системний підхід до формування навичок побудови моделей починаючи з середньої ланки школи; відсутність достатньої кількості прикладних задач у шкільних підручниках. Також, одним із чинників, що ускладнюють процес формування навичок математичного моделювання, є надання вчителем плану розв'язання задач синтетичним методом. Це створює враження легкості у виборі величини, яку потрібно позначити через x , а також у складанні рівняння. Але при необхідності самостійного розв'язання виникають труднощі та багато питань.

Критеріями підготовленості учнів до самостійної реалізації першого етапу розв'язування прикладної задачі методом математичного моделювання є сформованість у них відповідних умінь [15]:

- 1) виділяти істотні факти, що визначають досліджуване явище (процес);
- 2) визначати основні взаємозв'язки між компонентами досліджуваної проблеми;
- 3) аналізувати повноту даних, які є в умові задачі;
- 4) вибирати математичний апарат для побудови моделі тощо.

Для того, щоб перекласти умову задачі мовою математики, учні мають уважно її проаналізувати та правильно зрозуміти, виокремити запитання і

визначити необхідні величини за допомогою відомих і введених змінних. На цьому етапі у школярів часто виникають різноманітні труднощі. Подекуди вони зумовлені недостатнім розумінням певних термінів, законів або залежностей у фізиці, хімії чи економіці. Наприклад, не всі учні чітко усвідомлюють взаємозв'язок між швидкістю, часом і відстанню в умовах рівномірного чи нерівномірного руху, між концентрацією речовини і її часткою в суміші, а також між обсягом виконаної роботи та продуктивністю праці.

Учні стикаються з труднощами при визначенні швидкості зближення об'єктів під час руху назустріч або в одному напрямку, мало орієнтуються в задачах на рух по колу та часто заплутуються у виборі одиниць виміру під час розв'язування задач на спільну роботу. Крім того, під час створення математичної моделі учні можуть відволікатися на несуттєві характеристики об'єктів або другорядні умови, які не впливають на розв'язання задачі.

Розвивати навички математичного моделювання у розв'язанні прикладних задач слід починати вже з 5-6 класів. При побудові математичної моделі для таких задач корисно дотримуватися такої послідовності дій:

1. За допомогою допоміжних моделей виявити взаємозв'язки та суттєві характеристики об'єктів, описаних в умові задачі.
2. Використовуючи знаково-символічні моделі, створити неформальну модель, яка є описом зв'язків між об'єктами без суворої перевірки логічної послідовності їхніх властивостей.
3. Сформулювати математичну модель прикладної задачі мовою математики.

Переклад прикладної задачі на математичну мову відбувається у два етапи. Спершу текст задачі частково зберігається, де поряд із математичними знаками (знаками операцій і рівності) він слугує основою для майбутньої математичної моделі. Лише після цього природна мова повністю замінюється математичними виразами, і створюється остаточно математична модель.

Деякі задачі відображають природний принцип оптимізації зусиль для досягнення найбільшого результату за найменших затрат, а інші —

розвивають творчі здібності учнів у технічній сфері (наприклад, геометричні задачі на побудову). Розв'язання прикладних задач допомагає учням дізнаватися про роботу підприємств та галузей господарства, що сприяє орієнтації їхніх інтересів до певних професій.

Застосування прикладних задач дозволяє створювати на уроці проблемні ситуації, що стимулюють учнів до засвоєння нових знань і поповнення теоретичних знань із технічних та інших дисциплін. У сучасних умовах суспільного розвитку завдання реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є актуальним. Його ефективність залежить від майстерності вчителя та вміння учнів використовувати математичне моделювання для розв'язання як навчальних, так і практичних завдань.

1.3. Прикладна спрямованість стереометрії

Розглядаючи поняття прикладної спрямованості стереометрії, слід виокремити три ключові терміни:

- 1) прикладна складова стереометрії;
- 2) прикладна складова шкільного курсу стереометрії;
- 3) прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії.

Прикладна складова стереометрії — це гнучкий у часі, змісті та обсязі сегмент стереометрії, який, умовно відокремлений, присвячений розв'язанню задач, що виникають поза межами геометрії. Це охоплює моделі, що відображають об'єкти навколишнього світу, допомагаючи осмислити просторові аспекти різних реальних процесів і явищ [45].

Прикладна складова шкільної стереометрії, у свою чергу, є методично адаптованим відображенням основ прикладної стереометрії, узгодженим з віковими особливостями учнів. Вона об'єднує теоретичні знання та практичне застосування, що інтегрується зі змістом інших шкільних предметів. Фактично, це поєднання теоретичних концепцій з реальними життєвими прикладами, що зберігає зв'язок з повсякденним досвідом [45].

Щоб розібратися з прикладною спрямованістю шкільного курсу стереометрії, варто звернути увагу на семантичне значення його складових. «Стереометрія», згідно зі шкільними підручниками, — це розділ геометрії, що вивчає об'ємні фігури у просторі. Сам термін «стереометрія» походить від грецьких слів: *stereos* (твердий, просторовий) і *metron* (міра). Отже, термін «стереометрія» можна трактувати як *гармонію простору*. По-друге, слово «модель» походить від латинського *modulus* (міра, зразок). Тобто, стереометрію можна означити і як *модель простору*.

Курс, в освітньому контексті, означає послідовне вивчення певної дисципліни з практичним спрямуванням, що базується на зосередженості на досягненні певних цілей. Прикладний — прикладений до діла, той, що має практичне значення, у свою чергу практичний — це той, що відноситься до галузі життєвого досвіду, реальних потреб. Спрямованість — зосередженість думок, інтересів, направлених на досягнення певної мети. Тому, прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії, таким чином, полягає в наданні учням знань і вмінь для застосування методів математичного моделювання, які стануть корисними в різних сферах їхнього життя.

Дослідження вказують, що прикладних задач (ПЗ) у навчальному процесі стереометрії має бути близько 20-30 % від загальної кількості задач. Це розмежування теоретичної та прикладної частин у курсі стереометрії сприяє відповідному поділу задач на теоретичні та практичні, зокрема навчальні прикладні задачі. ПЗ можуть бути як практичного, так і теоретичного характеру.

Прикладна задача практичного характеру вимагає роботи з реальними об'єктами або їх моделями, проведення експериментів і вимірювань [16].

Теоретична прикладна задача, навпаки, зосереджується на абстрактних міркуваннях без прямого звернення до матеріальних об'єктів або моделей [16].

Серед прикладних задач (ПЗ) виділяють завдання на обчислення, побудову та так звані якісні задачі, що вимагають пояснення, дослідження або

обґрунтування певного факту чи положення, з можливим, але необов'язковим виконанням обчислень або побудов.

Переважає більшість таких задач стосується лише круглих тіл і многогранників. Теми, як-от «Аксіоми стереометрії та їх наслідки», «Паралельність і перпендикулярність прямих і площин у просторі», «Декартові координати та вектори у просторі», традиційно не охоплюються. Це зумовлено браком передумов для створення достатньої кількості прикладних задач за цими темами. По-перше, на початку систематичного вивчення стереометрії кількісні характеристики геометричних об'єктів, як-от об'єм чи площа поверхні геометричних тіл, майже не вивчаються, а відповідні формули розглядаються поверхово — спочатку в молодших класах, а згодом, лише оглядово, наприкінці 9-го класу. Як наслідок, перші уроки стереометрії часто зосереджені на якісних задачах (абстрактних і прикладних), обсяг яких обмежений. По-друге, усі перелічені теми належать до початкового етапу вивчення стереометрії, коли в учнів ще не сформовані уявлення про геометричні тіла, необхідні для ілюстрації та вирішення відповідних задач.

Серед наявних задач у збірниках спостерігається значна повторюваність. Сюжети також залишаються незмінними. Переважають завдання, як-от обчислення об'єму кімнати, кількості шпалер для обклеювання приміщення, маси цеглини для будівель, кількості фарби для стін, маси сіна в скирті, об'єму води у діжці тощо. Часто вже знайомі задачі подають із новим, умовно «оновленим» змістом, що, однак, не додає їм нової якості, а зв'язок із реальним життям залишається штучним.

ПЗ у збірниках часто класифікуються за моделями, що використовуються; сюжетом (ситуації з повсякденного життя, техніки, географії, фізики тощо); складністю; вимогами до учня (обчислити, пояснити, виготовити). ПЗ майже не зустрічаються на випускних іспитах та вступних випробуваннях до вищих навчальних закладів, що свідчить про недостатнє врахування прикладних аспектів у оцінюванні навчальних досягнень.

Аналіз літератури та практики навчання вказує на кілька способів посилення прикладної спрямованості стереометрії в школі:

1. Чітке виділення прикладного аспекту теоретичних знань і використання геометричних експериментів.
2. Показ зв'язків стереометрії з іншими дисциплінами, зокрема природничого циклу.
3. Введення математичного моделювання як основи розв'язування ПЗ.
4. Демонстрація універсальності стереометричних методів у контексті розв'язування прикладних задач.

Комплексне використання цих підходів створює систему прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії, що охоплює орієнтацію цілей, змісту та методів на практичне застосування.

Створення моделі, що визначає основний задум реалізації прикладного спрямування (ПС) шкільної стереометрії, обумовлене потребою ефективного її застосування в прикладному аспекті. У програмі з математики визначено рівень і обсяг обов'язкових для учнів умінь і навичок, а також перелік і обсяг матеріалу, який необхідно вивчати у школі відповідно до змістових ліній. Програма також пропонує можливий розподіл матеріалу по класах і орієнтовно вказує на кількість годин, необхідних для вивчення кожної теми. Підручники з математики містять виклад основних знань і методів діяльності, орієнтованих на цілі навчання, закріплені у програмі. Водночас ані в програмі, ані в підручнику не наведено конкретної технології організації навчального процесу для досягнення цих цілей, включаючи необхідність ПС навчання.

Основні ідеї реалізації ПС курсу стереометрії в школі охоплюють такі положення:

- посилення мотивації до вивчення стереометрії;
- застосування методу математичного моделювання під час вивчення курсу із наголосом на використанні правдоподібних міркувань у побудові математичних моделей;
- демонстрація важливості прикладної складової шкільної стереометрії;
- виявлення та використання прикладного потенціалу абстрактної складової курсу для розвитку креативного і логічного мислення,

формування навичок чіткого, послідовного й аргументованого викладу думок;

- розвиток суто математичних навичок, необхідних для розв'язування прикладних задач (наближена оцінка результату, приведення результату до числового виразу або формули тощо);
- застосування геометричного експерименту у процесі навчання;
- формування в учнів якостей, притаманних професійній діяльності, під час вивчення курсу стереометрії.

Концептуальна модель реалізації ПС шкільного курсу стереометрії являє собою систему теоретично обґрунтованих ідей для реалізації прикладного спрямування курсу. У часі розвиток цієї концептуальної моделі відбувається через чотири стадії, які будуть розглянуті далі. Основними компонентами цієї моделі є цілі курсу, орієнтовані на прикладний аспект; планування навчальної діяльності; структурований зміст курсу; прикладні задачі; засоби наочності; контроль результатів діяльності. Значну роль у реалізації цієї моделі відіграє використання інформаційно-комунікаційних технологій. Основою моделі є залучення учнів до процесу оволодіння методом математичного моделювання та його застосування у навчанні [45].

Для підсилення прикладного спрямування (ПС) курсу стереометрії доцільно розподілити матеріал на основі навчально-математичних теорій (НМТ). Ключовою базою поділу є математичні моделі, що відображають реальні об'єкти, явища чи процеси. У шкільному курсі стереометрії виділяють дев'ять НМТ:

1. Аксиоми стереометрії, паралельність і перпендикулярність прямих і площин (базова НМТ);
2. Координати та вектори у просторі;
3. Перетворення у просторі;
4. Геометричні тіла та їх комбінації;
5. Призма;
6. Піраміда;
7. Циліндр;

8. Конус;

9. Куля.

Запропонована послідовність НМТ не є строгим порядком їх вивчення, оскільки черговість опрацювання кожної теорії визначається чинною навчальною програмою. Відношення між НМТ можна представити як схему взаємозв'язків, що сприяє уявленню про структуру матеріалу. У різних умовах навчання кожна НМТ може бути розглянута з різною мірою повноти та наочності, залежно від дидактичних цілей та особливостей учнів.

Розділ II. Шляхи реалізації прикладної спрямованості курсу стереометрії у ЗЗСО

2.1. Прикладна спрямованість початків стереометрії

Перед вивченням основного теоретичного матеріалу: **«Аксиоми стереометрії. Паралельність і перпендикулярність прямих і площин»** важливо забезпечити міцну мотивацію учнів, оскільки ця теорія є ключовою для розуміння емпірично-дедуктивного характеру геометрії. Згідно з концепцією прикладного спрямування, початковий етап вивчення теоретичного матеріалу ґрунтується на емпіричній основі. Прикладна складова цього етапу спрямована на побудову математичної моделі, зокрема понять точки, прямої та площини. Учні вже знайомі з поняттями точки та прямої в курсі планіметрії, і це знання варто актуалізувати на початку вивчення стереометрії.

Обсяг етапу вивчення теоретичного матеріалу залишається обмеженим, оскільки кількість прикладних фактів, понять і задач, які були б доступні та водночас корисні для учнів, є невеликою.

Для закріплення матеріалу можна запропонувати учням такі прикладні задачі:

Задача 1: Які величини потрібно виміряти, щоб вказати розмір аркуша паперу. Яка з них найменша?

Відповідь: Ширина, висота і товщина. Товщина є найменшим розміром.

Задача 2: Під час виготовлення стільця важливо, щоб кінці чотирьох ніжок лежали в одній площині. Для перевірки цього столяр використовує дві нитки. Запропонуйте алгоритм дій столяра.

Відповідь: Прикріпити дві нитки до кінців ніжок, так щоб вони перетинались. Дві прямі, що перетинаються, визначають площину, і ця площина єдина.

Такі приклади демонструють учням прикладне застосування базових понять і встановлюють зв'язок теоретичних основ із реальними ситуаціями.

Паралельність у просторі.

Задача 3. 4000 років тому в Стародавньому Єгипті майстри при закладанні фундаменту піраміди вирубували рівний квадратний пласт та заливали його водою. Після цього вони вимірювали відстань від води до краю зрубу. Для чого вони це робили та якими знаннями користувалися?

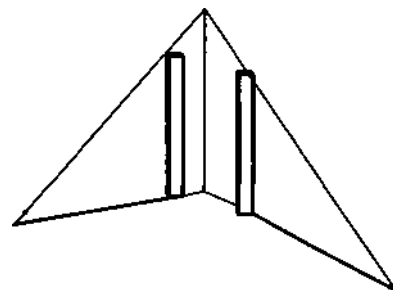
Розв'язання:

Цю технологію стародавні єгиптяни використовували для вирівнювання поверхні навколо фундаменту піраміди, а потім і для вирівнювання самого дна котловану.

Вони знали, що паралельні площини (вода та край зрубу) відсікають від паралельних прямих рівні відрізки.

Перпендикулярність у просторі

Задача 4. На ілюстрації в книзі зображено два вертикальні стовпи та їхні тіні на горизонтальній площині. Виходячи з цих даних, необхідно визначити положення джерела світла (лампи або ліхтаря) та його «основу» (проекцію джерела світла на горизонтальну площину). Потрібно розв'язати задачу і дати відповіді на додаткові запитання:



1. Чи є важливим те, що стовпи розташовані вертикально?
2. Чи важливо, що площина, на яку падають тіні, є горизонтальною?
3. Чи всі зображені на малюнку дані необхідні для розв'язання задачі?

Розв'язання

Конструкції, які потрібні для вирішення основної задачі, зображені на малюнку. Положення стовпів не впливає на визначення місця джерела світла; однак, для визначення основи джерела важливо, щоб стовпи були

вертикальними. Якщо стовпи вертикальні, а тіні падають на горизонтальну площину, для розв'язання задачі достатньо показати один стовп з тінню та лише напрямок тіні від другого стовпа.

Задача 5: Як перевірити, чи сусідні стіни в кімнаті перпендикулярні одна одній, використовуючи теорему Піфагора?

Розв'язання

Припустимо, що стіни у кімнаті вертикальні, а підлога горизонтальна. На нижньому краю стін, від точки, що знаходиться на лінії їхнього перетину, відкладемо відрізки АВ і АС довжиною 3 і 4 одиниці відповідно (наприклад, у дециметрах). Ці відрізки будуть перпендикулярні до лінії перетину площин стін. Тоді кут між побудованими відрізками є лінійним кутом двогранного кута між стінами, і цей кут буде прямим, якщо довжина відрізка ВС становитиме 5 одиниць.

Задача 6: Як перевірити вертикальність високого стовпа на недоступній височині за допомогою виска?

Розв'язання

Для перевірки вертикальності достатньо встановити, що стовп знаходиться в одній площині з певною вертикальною лінією, а також в іншій площині — з іншою вертикальною лінією. Якщо тримати висок так, щоб верхні кінці виска та стовпа знаходилися на одній лінії з оком, лінії виска і стовпа повинні збігатися. Цей метод перевірки обґрунтований тим, що вертикальний стовп обов'язково лежить в одній площині з будь-якою вертикальною лінією. Додатково, якщо дві паралельні прямі лежать у різних площинах, які перетинаються, ці прямі є паралельними лініям перетину цих площин.

Задача 7. Під час безвітряної погоди йде дощ під нахилом. Як, використовуючи лист фанери, можна виміряти кут між траєкторією крапель дощу та горизонтальною площиною? Створити схему для ілюстрації розв'язання.

Підказка. Розмістіть фанеру так, щоб її площина була майже перпендикулярною до площини, утвореної траєкторією краплі та її проекцією на горизонтальну площину. У такому положенні на горизонтальній поверхні утвориться прямокутник $ADFE$, який залишатиметься сухим, оскільки краплі дощу на нього не потрапляють. Далі виміряйте довжини PM та PN та обчисліть тангенс кута між ними.

Задача 8. Швидкість літака, що летить на сталій висоті, відома. Чи можна знайти цю висоту, якщо знаходитися на одному місці?

Розв'язання

Нехай спостерігач знаходиться в точці O , а літак у деякий момент часу знаходиться в точці A .

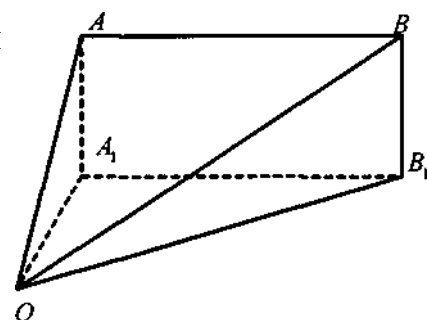
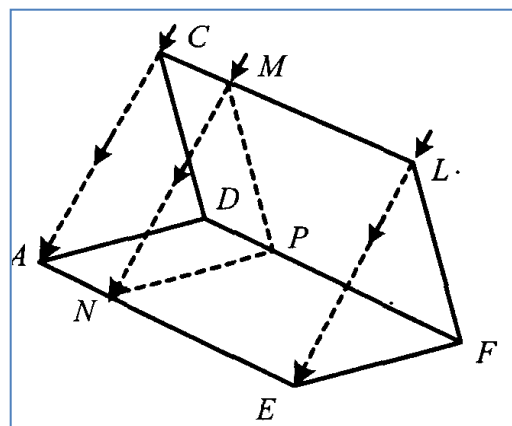
Виміряємо $\angle AOA_1 = \alpha$, де A_1 -горизонтальна проекція точки A . Через деякий час t літак переміститься в точку B , причому $AB=vt$, де v -швидкість літака. Виміряємо $\angle BOB_1 = \beta$, де B_1 -горизонтальна проекції точки B . Виміряємо $\angle A_1OB_1 = \varphi$ Нехай $AA_1 = BB_1 = x$ Тоді $OA_1 = x \operatorname{ctg} \alpha$, $OB_1 = x \operatorname{ctg} \beta$

Із трикутника A_1OB_1 за теоремою косинусів:

$$A_1B_1^2 = OA_1^2 + OB_1^2 - 2OA_1OB_1 \cos \varphi$$

$$(vt)^2 = (x \operatorname{ctg} \alpha)^2 + (x \operatorname{ctg} \beta)^2 - 2x^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \varphi,$$

$$\text{Звідки } x = \frac{vt}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta - 2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \varphi}}.$$



Тема «**Координати і вектори у просторі**» є базовою для розуміння багатьох фізичних понять та процесів. Під час опанування теоретичним матеріалом цієї теми відкриваються широкі можливості для використання аналогій, порівняння та узагальнення.

Поняття «вектор» охоплює великий клас величин, до яких належать, наприклад, сила, швидкість, переміщення. Звичайно, ці величини можуть бути

певним чином виміряні, але для їх повного опису недостатньо єдиного числового значення. Для повного їх опису вводиться поняття вектора. Вектор є математичною моделлю, яка використовується для фізичних, хімічних та інших величин, що мають як невід'ємне числове значення (модуль), так і напрям.

Варто зауважити, що у математиці розглядаються тільки вільні вектори, а у фізиці переважно - прикладені. Тільки в деяких випадках, наприклад під час вивчення поступальних рухів, фізики застосовують і вільні вектори. Вивчення ковзних векторів у школі не передбачено.

Вільний вектор однозначно визначається довжиною та напрямом. Два *вільних* вектори вважаються рівними тоді і тільки тоді, коли їх модулі рівні, а напрями однакові. Два *ковзних* вектори вважають рівними лише тоді, коли вони мають рівні модулі, однакові напрями та розміщені на одній прямій. Два *прикладених* вектори вважаються рівними тільки тоді, коли вони мають рівні модулі, однакові напрями та їх початки збігаються [3].

Зміст навчального матеріалу теми «**Перетворення у просторі**» має великий потенціал щодо реалізації міжпредметних зв'язків з фізикою, хімією, біологією та посилення зв'язків між планіметрією і стереометрією.

Дана тема вивчається у кінці 10-го класу. Її зміст має великий гуманітарний потенціал, розкрити який непросто. З одного боку, старшокласники вкотре переконуються в універсальності математичних способів дослідження навколишнього світу. З іншого, починають розуміти, що категорія прекрасного сумісна і зі стереометрією.

Одним із ключових понять цієї теми є *симетрія*. З грецької мови "симетрія" означає сумірність, пропорційність та однаковість у розташуванні частин. Строге математичне визначення симетрії сформувалося в XIX столітті. На сьогодні симетрію визначають так: об'єкт називається симетричним, якщо його можна певним чином змінювати, отримуючи той самий об'єкт, із якого починали [7].

У прикладних задачах цього типу важливу роль відіграє наочність. Навчальний матеріал теми «**Геометричні тіла та їх комбінації**» має

узагальнюючий характер. Її вивчення розтягнуто в часі, а зміст переплітається з теоретичними рівнями інших тем.

Зміст навчального матеріалу теми «Геометричні тіла та їх комбінації» у випадку емпіричної основи розкривається та конкретизується під час вивчення попереднього навчального матеріалу, який стосується многогранників та тіл обертання. Це пояснюється тим, що матеріал цієї теми розглядається протягом усього курсу стереометрії і поділяється на десять етапів у часі [6].

2.2. Задачі на многогранники, тілами обертання та їх комбінації

Задача 9. Обчисліть об'єм господарської будівлі, побудованої у формі прямокутного паралелепіпеда, у якої двопологий дах з прямим кутом між кроквами, якщо її розміри такі: довжина $a = 12,5\text{м}$, ширина $b = 7,6\text{м}$, висота стін $c = 3,5\text{м}$, висота всієї будівлі $h = 7,3\text{м}$.

Розв'язання:

1) Формула об'єму паралелепіпеда: $V_1 = a \cdot b \cdot c$.

$$V_1 = 7,6 \cdot 12,5 \cdot 3,5 = 332,5(\text{м}^3).$$

2) Дах, можна розглядати, у формі трикутної призми, в основі якої лежить прямокутний рівнобедрений трикутник.

2) Формула об'єму призми: $V_2 = S_o \cdot h$. Тоді висота призми $12,5\text{м}$, довжина гіпотенузи основи $7,6\text{м}$, а висота що проведена до гіпотенузи, дорівнює: $7,3 - 3,5 = 3,8(\text{м})$

$$V_2 = 3,8 \cdot 7,6 \cdot 12,5 = 180,5(\text{м}^3).$$

3) Тоді об'єм усього приміщення: $V = V_1 + V_2$

$$V = 180,5 + 332,5 = 513(\text{м}^3).$$

Відповідь: 513м^3 .

Задача 10. Галікарнаський мавзолей царя Масола являв собою трьохярусну споруду. На другому поверсі знаходилась усипальниця царя, оточена 39 колонами заввишки 11 м. Скільки конусів такої ж висоти, площі

основи і з такої ж кількості матеріалів можна було б побудувати замість наявних 39 колон.

Розв'язання:

Позначимо n -кількість циліндрів, а x -кількість конусів, які можна побудувати.

$$n = \frac{V_{ц}}{V_{к}} = \frac{\pi R^2 h}{\frac{1}{3} \pi R^2 h} = 3, \text{ тобто в один циліндр входить 3 конуси такої ж}$$

висоти і площі основи $x = 3 \cdot n = 3 \cdot 39 = 117$ (конусів).

Відповідь: 117 конусів.

Задача 11. Визначте скільки відсотків і у скільки разів меншим за об'ємом є барабан для білизни пральної машинки по відношенню до об'єму усієї пральної машинки. Діаметр барабану 43 см, а відстань між стінками округлої форми – 24,5 см? Зовнішні розміри машинки $61\text{см} \times 40\text{см} \times 85\text{см}$.

Розв'язання:

Насамперед знайдемо радіус основи барабану: $R = \frac{D}{2} = \frac{43}{2} = 21,5(\text{см})$.

Обчислимо об'єм барабану як об'єм циліндра за формулою:

$$V_{\text{барабану}} = V_{\text{циліндра}} = \pi R^2 h = 3,14 \cdot (21,5)^2 \cdot 24,5 \approx 35560(\text{см}^3).$$

Також обчислимо об'єм машини як об'єм прямокутного паралелепіпеда:

$$V_{\text{машини}} = V_{\text{п.парал.}} = S_{\text{основи}} h = 61 \cdot 40 \cdot 85 = 207400(\text{см}^3).$$

Шукані відсотки позначимо через x і отримаємо: $x = \frac{171840 \cdot 100}{207400} = 17\%.$

Звідси: $100\% : 17\% = 6$

Відповідь: 17 %, шосту частину.

Задача 12. Як розділити торт на 8 рівних частин, використовуючи лише три прямі розрізи, і яку форму він повинен мати?

Відповідь. Торт, що має однорідний склад і будь-яку форму, можна поділити на 8 рівних частин наступним чином: спершу виконати два вертикальні розрізи, які поділять його на 4 рівні частини, а потім горизонтальним розрізом розрізати ці частини навпіл.

2.3. Задачі пов'язані з опрацюванням окремих теоретичних положень

Задача 13. Як обчислити об'єм об'єкта неправильної форми, наприклад, каменя чи злитку заліза?

Відповідь. Помістіть об'єкт у посудину, наповнену водою, так щоб він був повністю покритий. Потім вийміть об'єкт і виміряйте, наскільки впав рівень води. Об'єм об'єкта дорівнює добутку цієї різниці на площу основи посудини.

Задача 14. Чому маленька тріска спалахує швидше, ніж велике поліно?

Розв'язання. Нагрівання починається з поверхні й поширюється всередину тіла. Тому для спалаху важливе співвідношення площі поверхні до об'єму. Якщо тріска і поліно мають однакову довжину та квадратний переріз, але поліно в 10 разів товстіше за тріску, то площа його бокової поверхні буде у 10 разів більша, а об'єм — у 100 разів більший. Таким чином, у тріски на кожен одиницю поверхні припадає вдесятеро менший об'єм, ніж у поліна. Це означає, що тріска потребує менше тепла для спалаху. Отже, вона загоряється швидше від того ж джерела тепла. Через невисоку теплопровідність дерева ці пропорції є наближеними і показують загальну тенденцію, а не точні числові значення.

Задача 15. Є два самовари – великий і малий, виготовлені з однакового матеріалу й однакової форми. Обидва наповнені кип'ятком. Який охолоне швидше?

Розв'язання. Охолодження відбувається через поверхню, тому швидше охолоне самовар, у якого на одиницю об'єму припадає більша площа поверхні. Якщо великий самовар в t разів вищий і ширший за малий, то його площа поверхні більша у t^2 разів, а об'єм – у t^3 рази. Це означає, що на одиницю поверхні в більшому самоварі припадає в t разів більший об'єм, що сповільнює охолодження. Отже, менший самовар остигне швидше.

Примітка. З тієї ж причини дитина на морозі замерзне швидше, ніж дорослий у тому самому одязі. Оскільки поверхня тіла у дитини, яка втрачає тепло, більша у співвідношенні до об'єму тіла, у неї відбувається швидша втрата тепла. Це також пояснює, чому пальці та ніс замерзають швидше, ніж інші частини тіла — їх поверхня значно більша відносно об'єму.

Відповідь: менший самовар.

Задача 16. Середня площа поверхні тіла дорослої людини з масою 65 кг становить 2 м^2 . Якою буде площа поверхні тіла людини з масою 50 кг?

Розв'язання. У середньому маса тіла пропорційна об'єму, тобто кубу лінійних розмірів (наприклад, висоти), а площа поверхні — квадрату висоти. Якщо об'єми людей пропорційні їх масам, тобто як 65 до 50, то їх висоти мають відноситися як кубічні корені з цих значень, а площі поверхні — як квадрати відношення висот.

Отже, шукана величина дорівнює: $2 \cdot \sqrt[3]{\frac{50^2}{65^2}} = 1,55(\text{м}^2)$.

Зауваження: Варіацією цієї задачі є обчислення середньої нормальної маси для людей різного зросту. Наприклад, для людини зростом 175 см середня нормальна маса становить 57 кг.

Задача 17. Середній палець гранітної статуї Мемнона в Єгипті має довжину 138 см. Знаючи, що граніт у 3 рази важчий від людського тіла, визначити, яку масу має ця статуя.

Розв'язання

Вимірюванням знаходимо довжину середнього пальця людини. Вона становить наближено 8 см. Отже, об'єм статуї перевищує об'єм людського тіла в $\left(\frac{138}{8}\right)^2$ разів. Людина має масу приблизно 60 кг; зроблена з граніту в натуральну величину вона мала б масу $60 \cdot 3 = 180(\text{кг})$. Отже, статуя Мемнона має масу: $180 \cdot \left(\frac{138^3}{8^3}\right) = 910414(\text{кг})$ або наближено 910 т.

Відповідь: 910 т.

Задача 18. У країні ліліпутів, яку також відвідав Гулівер, усі предмети мали лінійні розміри в 12 разів менші за звичайні. Чи зміг би Гулівер під час обіду з'їсти цілого ліліпутського бика?

Розв'язання: Візьмемо за середню масу звичайного бика 0,5 т. Тоді маса бика з країни ліліпутів буде меншою в 12^3 разів, тобто близько 300 г. Це кількість їжі, яку цілком реально з'їсти за один обід.

Зауваження: Проте, згідно з описом у книзі, навряд чи можливо, щоб одна людина могла з'їсти «20 возів з м'ясом».

Відповідь: Так, це можливо.

Задача 19. При зведенні дахів, мостів та інших конструкцій опорні балки часто скріплюють так, щоб вони формували систему трикутників. Чому саме трикутники надійніше забезпечують незмінність форми конструкції?

Розв'язання: Балки самі по собі майже не піддаються помітному стиску чи розтягненню. Під дією зовнішньої сили можлива лише зміна кутів між ними. Однак із трьома заданими сторонами можна побудувати тільки один трикутник, тому трикутники з відповідними рівними сторонами завжди рівні. Отже, якщо балки скріплено хоча б шарнірно у вигляді трикутників, то їхні кути залишаються незмінними, а отже, зберігається форма всієї конструкції.

Задача 20. Сировари стверджують, що сири, виготовлені у формі кулі, краще зберігають смакові якості, ніж сири у формі циліндра або куба, за однакових об'ємів. Чому це можливо?

Розв'язання: Спочатку форма не впливає на смакові якості сиру. Існує припущення, що вони погіршуються через випаровування та окислення, інтенсивність яких залежить від площі поверхні. Чим менша площа, тим повільніше проходять ці процеси. Тому варто порівняти площі поверхонь куль, циліндрів і кубів однакового об'єму. Звідки $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Отже,

$$S_{\text{кул.}} = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 2R = 6\pi R^2 = 6\pi \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}.$$

Нехай a - сторона куба. Тоді $V = V^3 = a^3$, звідки $a = \sqrt[3]{V}$. Отже,

$$S_{куба} = 6a^2 = 6\sqrt[3]{V^2}.$$

Нехай r - радіус кулі. Тоді $V = V_{кулі} = \frac{4}{3}\pi r^3$, звідки $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, тобто

$$S_{кулі} = 4\pi R^2 = 4\pi \sqrt[3]{\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^2}.$$

Потрібно порівняти площі поверхонь. Усі вони додатні, тому можна перейти до порівняння їх кубів:

$$S_{цил.}^3 = 6^3 \cdot \pi^3 \frac{V^2}{4\pi^2} = 54\pi V^2$$

$$S_{куба}^3 = 54 \cdot 4V^2,$$

$$S_{кулі}^3 = 4\pi V^2.$$

Оскільки $36\pi < 54\pi < 54 \cdot 4$, то $S_{кулі}^3 < S_{цил.}^3 < S_{куба}^3$, звідки

$$S_{кулі} < S_{цил.} < S_{куба}.$$

Отже, найменшою є площа поверхні кулі.

Задача 21. На практиці об'єм колоди часто визначають таким способом: вимірюють діаметр колоди посередині (в дюймах), підносять це значення до квадрату, потім множать на довжину колоди (в футах) і ділять результат на 183. Отримують об'єм колоди у футах. Перевірте цей метод, порівнявши отримане значення з результатом, який вийде, якщо розрахувати об'єм колоди як об'єм циліндра з діаметром, рівним середньому діаметру колоди, і висотою, що дорівнює її довжині.

Розв'язання

Позначимо діаметр колоди в дюймах через d , а довжину в футах через

l . Тоді об'єм колоди у футах у першому випадку дорівнює $\frac{d^2 l}{183}$, а в

другому випадку $\frac{\pi d^2 l}{4 \cdot 12^2}$. Поділимо перший вираз на другий.

$$\frac{576}{183\pi} = \frac{576}{574,91} = 1,0017.$$

Отже, спрощений прийом дає незначне збільшення (менше, ніж на 0,2 %).

2.4. Многогранники в контексті прикладної спрямованості

У середній школі учні вперше стикаються з поняттям призми, зокрема таких її форм, як куб і паралелепіпед, під час вивчення курсу математики. На практиці навчання з цієї теми поділяють на два періоди. Повний набір знань про призму учні отримують під час проходження теми «Многогранники» у 11 класі, а в основній школі з її загальним поняттям знайомляться у 6 класі. Зокрема, перші приклади призм, таких як куб і паралелепіпед, розглядаються ще у 5 класі [45].

Задача 22. Потрібно пофарбувати стелю та стіни у кімнаті з певними розмірами. У приміщенні є двоє дверей, висота яких становить 2,7 м, а ширина – 1,1 м. Скільки коштуватиме фарбування, якщо ціна за 1 м² становить 4 грн?

Розв’язання:

Щоб побілити кімнату необхідно дізнатися площу стелі як площу прямокутника: $S_{\text{стелі}} = S_{\text{прямокутника}} = 7 \cdot 3,5 = 24,5(\text{м}^2)$, і площу стіни як площу бічної поверхні призми: $S_{\text{стіни}} = S_{\text{б.призми}} = P_{\text{осн.}} \cdot H = 2(7 + 3,5) \cdot 3 = 63(\text{м}^2)$.

Для побілки стіни необхідно врахувати площу дверей як площу прямокутника $S_{\text{дверей}} = S_{\text{прямокутника}} = 2,7 \cdot 1,1 = 2,97(\text{м}^2)$.

Оскільки таких дверей двоє то площа стіни:

$$S_{\text{стіни}} = S_{\text{стіни}} - 2S_{\text{дверей}} = 63 - 2 \cdot 2,97 = 57,06(\text{м}^2).$$

$$\text{Звідси: } n = 4 \cdot (S_{\text{стелі}} + S_{\text{стіни}}) = 4 \cdot (24,5 + 57,06) = 4 \cdot 81,56 = 326,24 \approx 330(\text{грн})$$

Відповідь. 330 грн.

Задача 23. Садибну ділянку прямокутної форми завдовжки 153 м та заширки 115 м потрібно огородити парканом висотою 213 см. Малярі повинні пофарбувати паркан з обох боків, включаючи ворота і хвіртку. Відомо, що один маляр фарбує 40,9 м² паркану за день. Скільки днів потрібно чотирьом малярам для виконання цієї роботи?

Розв’язання

Обчислимо площу паркану, як площу бічної поверхні призми:

$$S_{\text{б.призми}} = P_{\text{осн.}} \cdot H = 2(153 + 115) \cdot 2,13 = 1141,68$$

Оскільки пофарбувати необхідно з двох сторін, то загальна площа, яку необхідно пофарбувати становить: $S_{\text{паркану}} = 2S_{\text{б.}} = 2 \cdot 1141,68 = 2283,36$.

За один день 4 малярі фарбують таку частину площі: $S = 40,9 \cdot 4 = 163,6$.

$$\text{Звідси } n = \frac{S_{\text{паркану}}}{S} = \frac{2283,36}{163,6} \approx 13,98 = 14 \text{ днів.}$$

Відповідь: 14 днів.

Задача 24. Під час фасування прального порошку в коробку його засипають в обсязі, що становить 80% від об'єму коробки. Скільки за об'ємом прального порошку міститься в коробці, якщо розміри коробки $14\text{см} \times 3,5\text{см} \times 19,5\text{см}$. ?

Розв'язання:

Об'єм коробки дорівнює об'єму призми:

$$V_{\text{коробки}} = V_{\text{призми}} = S_{\text{основи}} \cdot H = 14 \cdot 3,5 \cdot 19,5 = 955,5(\text{см}^3),$$

$$\text{звідси } V_{\text{порошку}} = V_{\text{коробки}} \cdot 0,8 = 955,5 \cdot 0,8 = 764,4(\text{см}^3).$$

Відповідь: $764,4(\text{см}^3)$.

Задача 25. Згідно санітарних норм на кожного учня у класі повинно припадати не менше 6 м^3 об'єм повітря. Виміри класу такі: довжин – 10 м, ширина – 6 м та висота 3,5 м. Скільки учнів можна розмістити в цьому класі без шкоди для їхнього здоров'я?

Розв'язання:

Об'єм кімнати дорівнює об'єму призми:

$$V_{\text{кімнати}} = V_{\text{призми}} = S_{\text{осн.}} \cdot H = 10 \cdot 6 \cdot 3,5 = 210(\text{м}^3).$$

$$\text{Звідси: } n = \frac{V_{\text{кімнати}}}{6} = \frac{210}{6} = 35(\text{учнів})$$

Відповідь: 35 учнів.

Задача 26. При кожному ударі серце людини виштовхує 175 см^3 крові. Серце робить 75 ударів за одну хвилину. Кубічну посудину яких розмірів потрібно було б мати, щоб вмістити кількість крові, яку перекачує серце за добу?

Розв'язання:

Позначимо ребро шуканої посудини за x . Тоді маємо:

$x^3 = 75 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 175$, $x = 260(\text{см})$, тобто ребро куба має дорівнювати 2,6 м.

Відповідь: 260.

Задача 27. Класні приміщення повинні бути розраховані так, щоб на кожного учня припадало не менше 6 м^3 повітря. Чи можна у класі, що має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами $8,3 \times 6,25 \times 3,6 \text{ м}$ розмістити 30 учнів, не порушуючи санітарних норм?

Розв'язання:

Кімната має форму паралелепіпеда, тому її об'єм: $V_{\text{паралелепіпеда}} = a \cdot b \cdot c$.

$$V = 8,3 \cdot 6,25 \cdot 3,6 = 186,75(\text{м}^3)$$

Об'єм повітря в кімнаті також дорівнює $186,75(\text{м}^3)$. На одного учня припадає такий об'єм: $V = 186,75 : 30 = 6,225(\text{м}^3)$.

Відповідь: $6,225(\text{м}^3)$.

Задача 28. Від статуї Зевса, яка згоріла в пожежі, залишилося кілька обвуглених кістяних пластин і оплавлених фрагментів невідомого металу. Визначте густину та назву матеріалу, з якого виготовлено плащ та волосся статуї, якщо відомо, що після переплавлення фрагменту отримали прямокутний паралелепіпед розмірами $10 \text{ см} \times 5 \text{ см} \times 3 \text{ см}$ і масою $1 \text{ кг } 932 \text{ г}$.

Розв'язання:

Насамперед, необхідно обчислити: $V = a \cdot b \cdot c = 2,5 \cdot 10 \cdot 4(\text{см}^3)$ - об'єм паралелепіпеда.

$$\text{Звідси } \rho = \frac{m}{V} = \frac{1932}{100} = 19,32 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \text{ (золото)}.$$

Відповідь: $19,32 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ (золото).

Задача 29. Чи можна плавати в басейні, розміри якого $5 \text{ м} \times 6 \text{ м} \times 2 \text{ м}$, якщо налити в нього 6000 л води?

Розв'язання:

Басейн має форму прямокутного паралелепіпеда. Тоді його об'єм обчислюється за формулою $V = S_o \cdot h$. Отже, $V = 5 \cdot 6 \cdot 2 = 60(\text{м}^3)$. Тоді 6000 л води це $6000 \cdot 0,001 = 6(\text{м}^3)$. Якщо у басейна висота буде 2 м , то води буде на 20 см , тобто можна буде лише ноги помити. Якщо висотою басейну буде 6 м , то

висота води буде 60 см, вода не дістане навіть до пояса людини, отже плавати не вдасться.

Відповідь: Ні.

У програмі для 5-6 класів не передбачено ознайомлення з поняттям піраміди. Однак деякі учні можуть мати певне уявлення про це геометричне тіло. Вивчення теми «**Піраміда**» в 11 класі також поділено на два етапи.

Навчальний матеріал цієї теми (як і інші, що стосуються конкретних геометричних тіл) містить практичний матеріал з багатьма цікавими фактами. Тому доречно структурувати навчальний процес за допомогою запитань, таких як: «Що таке піраміда?»; «Які асоціації виникають у вас з цим терміном?»; «Де в природі, побуті та архітектурі можна зустріти об'єкти пірамідальної форми?»; «Що пояснює таку поширеність цих форм?» [45].

Задача 30. Одним із чудес стародавнього світу, яке збереглося до наших днів, є піраміда, споруджена без використання сучасних технологій та механізмів, за допомогою яких будівельники давнини створили монумент, кожен блок якого важить декілька тон. Визначте площу, яку займає правильна чотирикутна піраміда Хеопса, а також довжину її основи, знаючи, що її висота становить 146,5 м, а об'єм дорівнює $2583283,3 \text{ м}^3$.

Розв'язання:

В основі піраміди лежить квадрат.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{основи}} \cdot h, \text{ звідси } S_{\text{основи}} = S_{\text{основи}} = \frac{3V}{h} = \frac{3 \cdot 2583283,3}{146,5} = 52900(\text{м}^2),$$

Оскільки в основі лежить квадрат то довжина її основи дорівнюватиме:

$$\sqrt{S_{\text{основи}}} = \sqrt{52900} = 230 \text{ м}$$

Відповідь: 52900 м^2 , 230 м .

Задача 31. Піраміда Хеопса — правильна чотирикутна піраміда, сторона основи якої дорівнює 500 ліктів (лікоть — одиниця вимірювання єгиптян, що дорівнює 466 мм), висота — 318 ліктів. Знайти об'єм піраміди.

Розв'язання:

Необхідно обчислити $h = 466 \cdot 318 = 148188(\text{мм}) = 148,188(\text{м})$ - висота піраміди.

$$466 \cdot 500 = 233000(\text{мм}) = 233\text{м} - \text{сторона основи піраміди.}$$

Оскільки основа квадрат, то площа дорівнює:

$S_{\text{основи}} = a^2 = 233^2 = 54289(\text{м}^2)$ то об'єм піраміди знайдеться за формулою:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{основи}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 54289 \cdot 148,188 = 2681659,3(\text{м}^3).$$

Відповідь: 2681659,3(м³).

2.5. Тіла обертання в контексті прикладної спрямованості

Учні основної школи знайомляться з поняттям циліндра у 6-му класі, а потім продовжують вивчення цієї теми в 9-му класі. Тому вивчення НМТ «Циліндр» у курсі стереометрії можна почати з повторення вже вивченого матеріалу. Спочатку варто нагадати, як утворюється циліндрична форма (в даному випадку прямий круговий циліндр), згадавши спосіб, який учні опановували раніше — обертання прямокутника навколо однієї з його сторін. Далі можна розглянути інший спосіб утворення циліндра, застосовуючи рух планіметричної фігури, зокрема, рух круга вздовж прямої, що перпендикулярна до площини цього круга [45]

Задача 32. Одна кружка, циліндричної форми, вдвічі вища за другу, але друга в 1,5 рази ширша. Знайти відношення об'єму другої кружки до об'єму першої.

Розв'язання:

Нехай R - радіус основи першої кружки, H - висота першої кружки.

Тоді $1,5R$ - радіус другої кружки, $\frac{H}{2}$ - висота другої кружки.

Обчислимо об'єми циліндра для першої кружки: $V_1 = \pi R^2 H$ і другої

$$V_2 = \pi (1,5R)^2 \frac{H}{2} = \frac{9\pi R^2 H}{8} = \frac{9V_1}{8}. \quad \text{Звідси: } \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{9V_1}{8}}{V_1} = \frac{9}{8} = 1,125.$$

Відповідь: 1,125.

Задача 33. В циліндричну посудину налили 1200см^3 води. Рівень води при цьому досягає 12 см. В рідину повністю занурили деталь. При цьому рівень води в посудині піднявся на 10 см. Чому дорівнює об'єм деталі?

Розв'язання:

Об'єм витісненої рідини дорівнює об'єму зануреної деталі.

До занурення вода займала об'єм $V = S_{\text{основи}} \cdot 12$, звідси отримаємо:

$$1200\text{см}^3 = S_{\text{основи}} \cdot 12 \text{ і } S_{\text{основи}} = \frac{1200}{12} = 100(\text{см}^2).$$

Тоді об'єм витісненої рідини, а отже і деталі дорівнюватиме:

$$V_{\text{деталі}} = S_{\text{основи}} \cdot 10 = 100 \cdot 10 = 1000(\text{см}^3)$$

Відповідь: 1000.

Задача 34. В циліндричній посудині рівень води досягає 27 см. На якій висоті буде знаходитись рівень води, якщо її перелити у другу посудину, діаметр якої в 3 рази більший.

Розв'язання:

Нехай радіус першої циліндричної посудини дорівнює R , тоді другої дорівнюватиме: $3R$.

В першій посудині вода займала об'єм $V_1 = \pi R^2 27(\text{см}^3)$.

У другій посудині вода займала такий же об'єм, при цьому:
 $V_2 = \pi(3R)^2 \cdot H(\text{см}^3)$, де H -рівень води.

Тоді: $\pi R^2 27 = \pi \cdot 9R^2 \cdot H$.

$$\text{Звідси } H = \frac{\pi R^2 \cdot 27}{9R^2} = 3(\text{рази}).$$

Відповідь: 3 рази.

Задача 35. Знайдіть площу круглої плями на поверхні моря, утвореної кубометром вилитої нафти, якщо товщина плівки 1 мм.

Розв'язання:

Утворена пляма- це циліндр висотою 0,001 м, що займає об'єм 1 м^3 .

$$V = \pi R^2 h \Rightarrow S_{\text{основи}} = \pi R^2 = \frac{V}{h}. \text{ Отже, } S_{\text{основи}} = \frac{1}{0,001} = 1000(\text{м}^2).$$

Відповідь: 1000м^2

Задача 36. Визначити місткість зернового елеватора, який має 55 резервуарів циліндричної форми з розмірами : висота – 40 м, діаметр основи – 8 м. об’ємна маса зерна $0,8 \text{ т/м}^3$.

Розв’язання:

Для обчислення об’єму циліндра скористаємось формулою: $V_1 = \pi R^2 H$. У

нас, $D = 8$, звідси: $R = \frac{D}{2} = \frac{8}{2} = 4(\text{м})$.

Отже, об’єм одного резервуару

$$V_{\text{рез.}} = V_{\text{ц.}} = 3,14 \cdot 4^2 \cdot 40 = 2009,6(\text{м}^3).$$

Тоді його маса буде обчислюватись за формулою:

$$m_{\text{рез.}} = V_{\text{рез.}} \cdot m_{\text{в.зерна}} = 2009,6 \cdot 0,8 = 1607,68 (\text{т}).$$

Резервуарів 55, отже місткість елеватору буде:

$$1607,68 \cdot 55 = 88422,4(\text{т}).$$

Відповідь: 88422,4 т.

Навчальний матеріал теми «**Конус**» важливий для реалізації міжпредметних зв’язків стереометрії з біологією.

Учні знайомляться з поняттям конуса та зрізаного конуса наприкінці 9-го класу під час вивчення початкових відомостей зі стереометрії. Однак доцільно не одразу приступати до формулювання визначення конуса, а спершу розглянути його властивості. Важливо виділити цю форму в навколишньому середовищі, дослідити її поширеність та значення. Це дозволяє здійснити перший етап навчальної діяльності — визначення мотивів та формулювання навчальних задач [45].

Задача 37. Скільки потрібно оленячих шкур, площею $3,8 \text{ м}^2$, для покриття чума, якщо діаметр основи 16м, а основна жердина $\sqrt{20}$ м.

Розв’язання:

Насамперед необхідно знайти радіус: $R = \frac{D}{2} = \frac{16}{2} = 8(\text{м})$.

Для знаходження твірної використаємо теорему Піфагора, знаходження гіпотенузи у прямокутному трикутнику:

$$l^2 = \sqrt{20^2 + 8^2} = \sqrt{84} \text{ звідси } l = \sqrt{84} = 2\sqrt{21} (\text{м})$$

Обчислимо площу чума як площу бічної поверхні конуса:

$$S_{\text{чума}} = S_{\text{б.конуса}} = \pi Rl = 3,14 \cdot 8 \cdot 2\sqrt{21} = 230,23(\text{м}^2).$$

$$\text{Звідси } n = \frac{S_{\text{чума}}}{S_{\text{шкур}}} = \frac{230,23}{3,8} = 60,6 \approx 61(\text{штук}).$$

Відповідь: 61 штука.

Задача 38. Нехай довжина основи конічної купи щебеню 12м. Довжина двох твірних 4,6 м. Знайти площу поверхні купи щебеню.

Розв'язання:

$$\text{Знайдемо довжину твірної: } l = \frac{l_2}{2} = \frac{4,6}{2} = 2,3(\text{м}).$$

Радіус знайдемо з довжини кола, тобто з основи: $C = 2\pi R$ звідси:

$$R = \frac{C}{2\pi} = \frac{12}{6,28} = 1,9(\text{м}).$$

Обчислимо площу купи як площу бічної поверхні конуса:

$$S_{\text{купи}} = S_{\text{б.конуса}} = \pi Rl = 3,14 \cdot 1,9 \cdot 2,3 = 13,7(\text{м}^2).$$

Відповідь: 13,7.

Задача 39. Верхня частина башні має форму конуса, радіус основи якого $\frac{11}{\pi}$ м, а твірна 9м. Бічну поверхню планують покрити мозаїкою. Скільки мішків клею потрібно купити для виконання цієї роботи, якщо витрати клею 5 кг на 1м^2 , а в одному мішку 25 кг клею?

Розв'язання:

$$S_{\text{башні}} = S_{\text{б.конуса}} = \pi Rl = 3,14 \cdot \frac{11}{3,14} \cdot 9 = 99(\text{м}^2).$$

Знайдемо: яку можна пофарбувати одним мішком: $S = 25 : 5 = 5(\text{м}^2)$

$$\text{Звідси: } n = \frac{S_{\text{башні}}}{S} = \frac{99}{5} = 19,8 \approx 20(\text{мішків}).$$

Відповідь: 20 мішків.

Задача 40. Горщик для кімнатної рослини має форму зрізаного конуса. Його основа займає 113 см^2 , висота дорівнює 20 см, а висота стінки від одного краю до іншого — 20,5 см. Господині треба пересадити кімнатні рослини. Горщиків у неї 10, а коріння займає приблизно 40 % об'єму. Скільки землі

господині треба купити, якщо земля повинна бути пухкою і її густина наближається до значення $1,5 \frac{г}{см^3}$?

Розв'язання:

Позначимо висоту через $OO_1 = h = 20 см$, меншої основи та твірну $AB = l = 20,5 см$ і радіус більшої основи через $AO_1 = R$. Опустимо з точки B перпендикуляр $BK = h$ на більшу основу конуса.

Оскільки, площа круга обчислюється за формулою: $S = \pi r^2$ то з даної формули знайдемо радіус меншої основи:

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{113}{\pi}} \approx 6(см).$$

3. За теоремою Піфагора з трикутника ABK визначимо $AK = \sqrt{20,5^2 - 20^2} = 4,5(см)$.

4. Знайдемо радіус більшої основи зрізаного конуса: $R = 4,5 + 6 = 10,5(см)$.

5. Знайдемо об'єм зрізаного конуса:.

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 20 (10,5^2 + 10,5 \cdot 6 + 6^2) \approx 4380(см^3).$$

6. Знайдемо об'єм, який займає речовина: $V_1 = \frac{4380 \cdot 60}{100} = 2628(см^3)$.

7. Обчислимо: $m_1 = 1,5 \cdot 2628 = 3942(г)$.

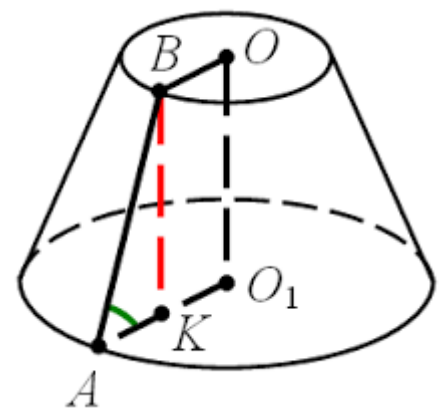
8. Обчислимо: $m_{10} = 10 \cdot 3942 = 39420(г) = 39(кг)$.

Господині треба купити 39 кг землі.

Відповідь: 36 кг.

Вивчення теми «Куля», як і інших, пов'язаних із тілами обертання, розділено на три часові проміжки. Це створює передумови для формування в учнів узагальнених понять і таких розумових дій, як порівняння, аналогія.

Що стосується емпіричної інформації про матеріальні тіла, то вона часто подається недостатньо. Тому важливо демонструвати приклади використання створених математичних моделей, зокрема, шляхом розв'язування прикладних задач. Це дозволяє не лише краще засвоїти



теоретичні концепції, але й зрозуміти, як вони застосовуються в реальних ситуаціях.

Задача 41. Зазвичай маса дощової краплі не перевищує 0,065 г. Однак на острові Ява середня маса крапель може досягати 0,16 г. Якщо вважати краплі кулястими, потрібно визначити їх діаметр. Відомо, що 1 см³ води важить 1 г.

Розв'язання:

0,065 г води займає 0,065 см³, що дорівнює 65 мм³. Для визначення діаметра кулі об'єму складемо рівняння: $\frac{1}{6} \pi \cdot x^3 \approx 65$, де x - діаметр у міліметрах.

Звідси $x = \sqrt[3]{\frac{6,65}{\pi}} \approx 5$ (мм). Отже, велика дощова крапля має діаметр близько 0,5 см. Діаметр найбільших вимірюваних крапель (масою 0,16 г) дорівнює 6,7 мм.

Відповідь: 6,7 мм.

Задача 42. Під час охолодження насиченої водяної пари з 15°C до 14°C з одного кубічного метра виділяється 0,75 г води. Відомо, що діаметр крапель, які при цьому утворюються, дорівнює 0,5 мм. Скільки крапель виділяється при охолодженні кубічного метра повітря?

Розв'язання:

Об'єм однієї краплі обчислюємо за формулою об'єму кулі: $\frac{1}{6} \pi \cdot 0,5^3 = \frac{1}{6} \cdot 3,14 \cdot 0,125 \approx 0,065$ (мм³). Маса такої краплі дорівнює 0,065 мг. Щоб визначити кількість крапель, які утворюються при охолодженні, поділяємо загальну кількість виділеної води на масу однієї краплі: $0,75 \cdot 1000 : 0,065 = 11\,000$ (крапель).

Зауваження. Товщина дощових хмар вимірюється сотнями метрів. З кожного квадратного метра нижньої поверхні такої хмари випадають мільйони крапель.

Задача 43. Шпаруватість ґрунтів зумовлена нещільним приляганням частинок, що призводить до утворення пор або проміжків між ними. Якщо уявити, що ґрунтові частинки мають вигляд кульок однакового розміру, то частинки можуть бути розташовані різними способами, що визначає рівень

пухкості ґрунту. У найпухкішому складі, кульки верхнього ряду будуть дотикатися з кульками нижнього ряду «верхівками», що дає максимальний об'єм пор. У щільному складі кожна кулька верхнього ряду міститься в проміжку між двома кульками нижнього ряду. Потрібно обчислити, який відсоток загального об'єму ґрунту складають пори при найпухкішому його складі.

Розв'язання:

У пухкому складі ґрунту, якщо кульки розташовані так, що кожна кулька торкається верхівками з кульками нижнього ряду, відсоток пор визначається через геометрію простору, що утворюється такими кульками. У випадку найпухкішого складу (найменша щільність частинок), частки об'єму, зайнятого кульками, є мінімальними, а більшу частину об'єму займають пори. Шукану величину знайдемо відніманням цього відношення від одиниці:

$$\frac{1}{6}\pi d^3 : d^3 = \frac{\pi}{6}; \quad 1 - \frac{\pi}{6} \approx 1 - 0,524 = 0,476 = 47,6\%.$$

Відповідь: 47,6%

Задача 44. Відомо, що між орбітами Марса і Юпітера рухаються близько 1000 малих планет (астероїдів). Існує гіпотеза, що вони могли утворитися через руйнування однієї планети. Визначити діаметр цієї ймовірної планети, припускаючи, що середній діаметр астероїдів становить 50 км і що відомі лише приблизно 10% усіх існуючих астероїдів.

Розв'язання:

Якщо куля має об'єм у 10 000 раз більший за об'єм кулі з діаметром 50 км, то і діаметр більшої повинен бути у $\sqrt[3]{10000}$ раз більший, тобто він дорівнює $50 \cdot 21,54 = 1077(\text{км})$.

Зауваження. Порівнявши планету з діаметром 1077 км і Місяць, можна зробити висновок, що вона у 3,5 рази менша від Місяця.

Задача 45. Чи зможе пустотіла мідна куля плавати у воді, якщо її зовнішній діаметр становить 12 см, а товщина стінок — 1,5 см? (Тіла плавають, якщо їх маса є меншою за масу такої ж кількості води, що має рівний об'єм).

Розв'язання:

Об'єм порожнистої кулі знайдемо віднявши від об'єму кулі діаметром 12 см та об'єм порожнини діаметром 9 см:

$$\frac{1}{6}\pi 12^3 - \frac{1}{6}\pi 9^3 \approx 523,7(\text{см}^3);$$

Її маса дорівнює $523,7 \cdot 9 \approx 4713 \approx 4713(\text{г})$. Маса водяної кулі однакового зовнішнього об'єму дорівнює $\frac{1}{6}\pi \cdot 12^3 = 904,78(\text{г})$.

Отже, така куля у воді не плаватиме.

Задача 46. Що буде економніше: придбати кавун радіусом 30 см і поділити його на п'ятьох або ж купити три кавуни з діаметром по 20 см та поділити на двох?

Розв'язання:

Об'єм кавуна знайдемо за формулою об'єму кулі: $V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3}\pi R^3$

Об'єм більшого кавуна дорівнює:

$$V_{\text{кавуна}} = V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 30^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 9000 \approx 36000(\text{см}^3).$$

$$3600 : 5 = 7200(\text{см}^3) - \text{кожному.}$$

$$\text{Радіус меншого кавуна: } R_{\text{мал.кавуна}} = \frac{D}{2} = \frac{20}{2} = 10(\text{см})$$

Об'єм трьох малих кавунів дорівнює

$$V_{\text{кавунів}} = V_{\text{кулі}} = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 1000 \approx 12000(\text{см}^3).$$

$$12000 : 2 = 6000(\text{см}^3) - \text{кожному.}$$

Задача 47. Задача. Під час запікання яблуко зморщується. Про що це свідчить?

Відповідь. Це вказує на те, що об'єм яблука зменшується, тоді як шкірка зберігає свій початковий розмір.

Зауваження. Можна виконати приблизні розрахунки і визначити, наприклад, скільки «зайвої» шкірки залишиться, якщо діаметр яблука 8 см зменшується на 4 мм через втрату води при нагріванні.

$$4\pi \cdot 40^2 - 4\pi \cdot 38^2 = 4\pi(40^2 - 38^2) = 4\pi \cdot 78 \cdot 2 \approx 1961(\text{мм}^2).$$

Отже, можна стверджувати, що загальна поверхня усіх зморшок печеного яблука вказаного розміру наближено дорівнює 20 см^2 .

Відповідь: 20 см^2

Задача 48. Якби всі люди, що жили в часи, коли будувався храм Артеміди взяли за руки, то вони обійняли б Земну кулю по екватору. Вважаючи, що розмах рук кожної людини дорівнює 2 м, а радіус Землі – 6 000 км, визначте, скільки людей проживало на планеті у 550 році до. н. е.

Розв’язання:

Оскільки, $R = 6000(\text{км})$, а розмах рук кожної людини позначимо через $l_1 = 2(\text{м})$, звідси $l = n \cdot l_1$. Також, $l = 2\pi R$ - довжина кола.

Отже, $l = 2\pi R = n \cdot l_1$

В результаті $n = \frac{2\pi R}{l_1} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6000000}{2} = 18840000$ (людей).

Задача 49. Якщо уявити, що людина може пройти пішки по екватору Землі, то при цьому маківка голови опише більший шлях, ніж ступні. На яку довжину ці шляхи різняться?

Розв’язання: Вважаючи зріст людини рівним 175 см та позначивши радіус Землі через R , отримаємо різницю шляхів у:

$$2\pi(R + 175) - 2\pi R = 2\pi \cdot 175 \approx 1099,56 \text{ (см)}, \text{ тобто близько } 11 \text{ м.}$$

Зауваження. Цікаво, що цей результат не залежить від радіуса кулі, тож він залишатиметься однаковим як для велетенського Сонця, так і для маленької кульки.

Відповідь: 11м.

2.6. Прикладний характер виникнення основних понять геометрії 10 класу

1. Аксиоми стереометрії. Паралельність і перпендикулярність прямих та площин.

Звичні всім вислови: *пряма мова, пряма дорога, прямий спадкоємець чи родич, пряме сполучення, прямі вибори, пряма вказівка, пряма протилежність, пряма користь* та інші використовують прикметник «прямий». Але в якому саме значенні? Ймовірно, мається на увазі рух чи зв'язок в одному напрямі, без розгалужень і з одним виміром. Також часто ми бачимо схеми планів будинків, що використовуються в професійній діяльності чи для перепланування будинку або квартири. Стіни на таких планах позначаються прямими лініями, хоча в реальності вони мають товщину. На схемах це не враховується, адже основна увага приділяється розташуванню кімнат, вікон тощо. Під час планування комунікацій, як-от електричних кабелів, їх теж позначають лініями без врахування товщини. Можна знайти ще чимало прикладів, коли матеріал, його якість або інші виміри, окрім довжини, не беруться до уваги.

Варто зазначити, що, незважаючи на умовність аксіоматичної системи, стереометрія є сукупністю тверджень, пов'язаних між собою логічно і незалежних від будь-яких зовнішніх обставин. Наприклад, визначні місця міста та його система вулиць і шляхів існують незалежно від того, який маршрут обере турист. Проте, обравши певний старт і напрямок, турист здатен охопити всі ці пам'ятки. Так само і в стереометрії: вибравши початкову точку — систему аксіом, ми починаємо шлях через логічні міркування, немовби по вулицях, для того, щоб ознайомитися з основними поняттями та особливостями цієї науки.

Однак, навіть під час опанування абстрактного матеріалу з стереометрії, важливо пам'ятати, що поняття перпендикулярності та паралельності прямих і площин лежать в основі будівельної геометрії; кути між прямими та площинами широко застосовуються на практиці. Про

значущість цих понять свідчать такі терміни, як кут нахилу орбіти супутника щодо площини екватора, кут падіння світлового променя на відбивну поверхню, кут підняття ствола гармати під час пострілу, нахил скату даху, а також географічні координати, такі як довгота та широта місця розташування на Землі.

Координати і вектори у просторі.

Слово «вектор» походить від латинського "vector", що означає "той, хто несе або транспортує". Поняття вектора виникло на початку XIX століття, а основи векторного числення були розроблені ірландським математиком В. Гамільтоном і німецьким математиком Г. Грасманом. До кінця XIX століття, зокрема завдяки роботам англійського фізика О. Хевісайда, це поняття набуло сучасної форми. Вектори знайшли застосування в класичній механіці, теорії відносності, квантовій фізиці, економіці та інших розділах природничих наук і математики.

Термін «координати» походить від латинських слів "co" (разом) та "ordinatus" (упорядкований). Його ввів у математику Г. Лейбніц у 1692 році. Прикладом простої системи координат є позначення рядів і місць у театральному залі або клітинок на шаховій дошці — це координатна система на площині.

Знання про координати знаходять широке застосування в реальному житті. Астрономи використовують їх для визначення положення небесних тіл, а пілоти — для навігації в повітряному просторі. Фізики, маркшейдери та оператори, що працюють з різними механізмами, застосовують координати для точного переміщення об'єктів або здійснення технічних операцій у визначених точках, наприклад, в цеху. Лікарі використовують координати для проведення дистанційних операцій, а робітники на верстатах та підйомних кранах — для точного налаштування обладнання і розташування вантажів.

Перетворення у просторі.

Одним із ключових понять цієї теми є симетрія, з якою людина стикається практично всюди: у природі, техніці, мистецтві та науці. Досить згадати про симетрію метелика або кленового листка, форм автомобіля та

літака, ритмічну структуру віршів і музичних творів, орнаментів, а також атомної будови молекул і кристалів.

Симетрія захоплює своєю всюдисущістю, відображаючи внутрішні зв'язки між об'єктами або явищами, які на перший погляд здаються непов'язаними: гра в більярд і стійкість електрона, розпад нейтрона та дзеркальне відображення, орнаменти та структура алмазу, форми сніжинок і квіток, а також структура гвинта й молекули ДНК.

Однак унікальність симетрії полягає не лише в її поширеності в різних об'єктах і явищах. Загальним для багатьох сфер є сам принцип симетрії, без якого неможливо розглянути жодної фундаментальної проблеми, включаючи дослідження життя на Землі або можливе спілкування з іншими цивілізаціями. Принципи симетрії лежать в основі теорії відносності, квантової механіки, фізики твердого тіла, атомної та ядерної фізики, а також фізики елементарних частинок. І це стосується не лише фізичних законів, а й законів природи загалом. Поняття симетрії, почавшись як суто геометричне, еволюціонувало в базове поняття, що лежить в основі природних законів, будучи основою світу навколо нас і його фундаментальних принципів [60].

Два види симетрії повторюються навколо нас. Одна ілюструє дзеркальну, або білатеральну, симетрію-«симетрія листка» (сам листок, гусениця, метелик, ми з читачем), інша є прикладом радіальної симетрії (ромашка, соняшник, гриби, дерева, фонтан). Дуже важливо зауважити, що на незірваних квітах і грибах, на деревах, що ростуть, на фонтані, що б'є струменем, площини симетрії завжди орієнтовані вертикально. Чому повторюються два види симетрії на всьому, що нас оточує? Бо воно в основному є результатом дії сили земного тяжіння [53].

Сформулюємо дещо у спрощеному вигляді закон, який яскраво та всюди проявляється в природі. Усе, що росте або рухається у вертикальній площині, тобто вгору або вниз відносно земної поверхні, підкоряється радіально-променевій («ромашково-грибній») симетрії у вигляді «віяла» площин симетрії, що перетинаються. Усе те, що росте та рухається горизонтально або похило щодо земної поверхні, підкоряється білатеральній

симетрії - «симетрії листка» (одна площина симетрії). Цей закон ілюструють не лише квіти, тварини, але й деякі тверді тіла [60].

Дотримання закону симетрії допомагає людині будувати міцні споруди та конструювати надійні механізми. Порушення цього закону часто призводить до того, що масштабні, але неправильно спроектовані конструкції стають нестабільними. Зазначимо, що більшість предметів побуту мають «симетрію листка» (наприклад, стілець, крісло, диван) або радіально-променеву симетрію (круглий стіл, табурет, настільні та підвісні лампи). Їхня форма відповідає симетрії гравітаційного поля Землі, що робить їх стійкими.

Розвиток теорії симетрії підтверджує важливість врахування симетрії щодо певної точки під час аналізу природних явищ. Ймовірно, першим, хто застосував це на практиці, був Архімед (бл. 287-212 рр. до н.е.). Вивчаючи принципи рівноваги важеля, він дійшов висновку, що однакові об'єкти, розташовані на рівноплечому важелі, залишатимуться в рівновазі.

Симетричні форми, такі як сферичні та тороїдні («бубликоподібні»), широко застосовуються в практиці. Наприклад, сфера виявилася оптимальною формою для вимірювання гальмівної сили верхніх розріджених шарів атмосфери, що зумовило сферичну форму першого супутника Землі.

Поняття центральної симетрії та її властивості широко застосовуються в дослідженні фізичних явищ і визначенні їх практичного значення. Наприклад, електричне поле зарядженої кулі є центрально-симетричним, що означає відсутність електричного поля всередині рівномірно зарядженої кулі. Це явище використовується для захисту людей та обладнання від електростатичного поля. Центральна симетрія також вплинула на сучасні уявлення про будову атомів та молекул. Вона є важливою при вивченні кристалічної структури речовин, оскільки наявність чи відсутність центра симетрії в кристалах позначається не тільки на їхній формі, але й на їх фізичних властивостях.

Принцип симетрії активно використовується при аналізі багатьох природних явищ. Земне тяжіння, як симетричне гравітаційне поле, впливає на процеси утворення морських та океанічних відкладень, що враховується при

дослідженні корисних копалин. Підводні хребти виступають як своєрідні площини симетрії, навколо яких ніби дзеркально розташовуються вулкани та особливості океанічного дна.

Симетрія подібності особливо помітна в природі, де всі живі організми зростають, зберігаючи схожість своїх частин. Наприклад, симетрію гомотетії спостерігають у формі черепашок деяких моллюсків та візерунках павутини. Приблизно 70% видимих галактик мають спіралеподібну форму, в тому числі й наша Галактика. Спіральна структура Галактики є одним із доказів швидкого обертання її диска. Спіралеподібну форму мають також циклони — зони висхідних потоків повітря, зокрема тропічні циклони, що становлять серйозну небезпеку. Знання про їхнє виникнення, розвиток і траєкторію є критично важливими для судноплавства, авіації та життя прибережного населення [60].

2.7. Прикладний характер виникнення основних понять геометрії 11 класу

Слово "куля" походить від грецького слова, яке означає "м'яч", "куб" — від "гральна кістка", "циліндр" — від "коток", "призма" — від "розпиляна", "конус" — від "соснова шишка", "кегля" або "верхівка шолома", а "пірамідою" давні єгиптяни називали гробниці своїх фараонів.

2.7.1 Геометричні тіла та їх комбінації.

Великий художник Поль Сезанн говорив: «Усе в природі сферичне та циліндричне». Серед радіолярій, досліджених Геккелем, зустрічаються всі п'ять правильних многогранників. У той же час, серед кристалічних форм мінералів відсутні правильний додекаедр та ікосаедр. Існує радіолярія, яка має структуру кульки з шістьма радіальними голками, що розходяться під прямими кутами, подібно до трьох координатних осей симетрії куба.

Серед морських організмів із формами геометричних тіл є "скляні губки", що мають прозору сітку з шістьма прямокутними осями, схожими на кристалічну форму куба чи октаедра. Кубічну форму мають і кубомедузи.

У 1857 році ірландський математик Вільям Гамільтон створив гру "подорож по додекаедру". Мета гри полягала в тому, щоб обійти всі вершини правильного додекаедра, рухаючись тільки його ребрами, при цьому жодну вершину не можна було відвідувати двічі.

Корали мають цікаву геометричну еволюцію. Доісторичні корали з квадратним перерізом зовсім зникли, поступившись восьмигранним, а потім - коралам із шестикутним перерізом [53].

Задачі, пов'язані з перерізами многогранників або інших тіл, регулярно виникають у кресленні та конструкторській діяльності.

У навіколишньому світі часто можна зустріти поєднання циліндричних і конічних поверхонь, утворюючи своєрідний "союз" між циліндром і конусом. Таку геометричну форму, де циліндр завершується конусом, широко використовували в архітектурі середньовіччя. Наприклад, башта Старого міста в Таллінні, відома як Товста Маргарита, і замок Шенонсо у Франції мають саме такі конструктивні елементи. З давніх часів до нас дійшло ще одне поєднання циліндра та конуса в архітектурі. Форма циліндра з вирізаним із нього зрізаним конусом використовувалася більше 2000 років тому в грецьких театрах, а потім і у Римі. Форму зрізаного конуса, «увінчаного» циліндром, мали середньовічні вежі. На сучасних атомних електростанціях є споруди у вигляді зрізаних конусів, що переходять зверху в циліндри. Їх називають *градирнями* і служать вони для повітряного охолодження води [53].

Цікавою архітектурною пам'яткою Стародавнього Риму є Пантеон, побудований на початку II століття н.е. за часів імператора Адріана. Основна частина споруди має форму циліндра (точніше, порожнистого циліндра), увінчаного бетонним куполом у вигляді півсфери. Внутрішній діаметр купола становить 44 метри, що дорівнює і висоті будівлі. Товщина купола становить 1 метр, а в його центрі розміщений круглий отвір діаметром 9 метрів, через який сонячне світло проникає у внутрішній простір Пантеону.

Щоб обчислити масу купола, розглянемо його геометричну модель як половину порожнистої сфери з зовнішнім радіусом. Об'єм такого тіла можна знайти за відповідною формулою:

$$V_1 = \frac{2\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3).$$

З отриманого об'єму необхідно відняти об'єм, що припадає на отвір у центрі купола, який наближено можна вважати об'ємом циліндра з діаметром

$$D = 9 \text{ м і висотою } H = 1 \text{ м } V_2 = \frac{\pi}{4} D^2 H. .$$

Враховуючи, що маса одного кубометра бетону складає 2,3 тонни, можемо отримати приблизну масу купола Пантеону, яка перевищує 7000 тонн. Це вражає, зважаючи на те, що купол є півсферою з порожнистою структурою і центральним отвором, який пропускає світло.

Елеватори – це великі залізобетонні споруди для зберігання зерна, конструкція яких складається з кількох геометричних форм, зокрема прямокутних паралелепіпедів, трикутних призм та циліндрів. Зерно зазвичай зберігають у круглих силосах діаметром 7–8 метрів і висотою до 30 метрів.

Щоб виміряти об'єм порожнистого тіла, можна налити в нього рідину за допомогою мірки. Для вимірювання об'єму твердого тіла його можна занурити у рідину, яка наповнює посудину до країв, і об'єм вилитої рідини дорівнюватиме об'єму тіла. Однак ці методи не завжди застосовні, особливо для великих об'єктів, як-от ящики чи будівлі, які неможливо заповнити водою або занурити в рідину. Тому вимірювання та обчислення є необхідними для визначення об'ємів тіл різних форм у таких випадках.

2.7.2 Призма

У стереометрії, на відміну від інших галузей знання, основна увага приділяється формам і розмірам предметів, а не їх матеріалу. Це дозволяє вивчати та аналізувати об'єкти з точки зору геометричних характеристик, що важливо для розуміння просторових властивостей.

Наприклад, Велика Китайська стіна, збудована у IV–III століттях до

нашої ери, є оборонною спорудою довжиною близько 5000 км, висотою в середньому 8 метрів і шириною близько 5 метрів. У стереометричному аналізі така конструкція розглядалась би як призматична форма із зазначеними лінійними розмірами.

Іншим цікавим прикладом є мінарети, які є баштами для заклику мусульман на молитву. Мінарети бувають різних форм: чотиригранні, що поширені в Північній Африці, та круглі на Близькому і Середньому Сході. Незалежно від матеріалу, з якого вони виготовлені, ці геометричні форми надають будівлям стійкості та естетичної виразності, а також відображають архітектурні особливості кожного регіону.

Дослідження культурних періодів далекого минулого показують, що перші людські споруди здебільшого мали неправильні форми, що віддзеркалює звичку ранньої людини використовувати природні укриття, такі як печери. Ця форма була обумовлена природним середовищем, яке давало готові укриття, з мінімальною потребою у змінах.

Проте з часом архітектура набула іншого вигляду. Більшість сучасних будівель, особливо житлових і комерційних, мають форму прямокутних паралелепіпедів. Така форма не випадкова: вона забезпечує структурну стійкість, ефективно використовує будівельні матеріали та відповідає простій прямокутній системі координат, яку легко вимірювати й розділяти на функціональні частини. Крім того, прямокутні конструкції є оптимальними для організації внутрішнього простору.

Людина поступово створила світ, побудований із прямих ліній і прямокутних об'єктів, використовуючи ресурси природи для задоволення своїх потреб. Така організація простору є продуктом її розуму, що свідчить про здатність адаптувати природне середовище під власні потреби й уявлення про зручність та функціональність.

Приклади інструментів у формі призми можна знайти у різних сферах діяльності:

1. *Масштабна лінійка* – інструмент, основна частина якого є чотирикутною призмою з трапецієподібним перерізом. Вона використовується для точного вимірювання та побудови масштабних креслень.

2. *Напилек* – слюсарний інструмент, призначений для обпилювання металевих виробів. Він має форму чотирикутної призми з ромбоподібним перерізом, що забезпечує зручне захоплення та ефективну роботу з різними матеріалами.

3. *Гайка* – кріпильна деталь у формі правильної шестикутної призми, яка разом із болтом використовується для надійного з'єднання деталей.

4. *Болт* – має круглий стрижень із головкою у вигляді правильної шестикутної призми. Для кріплення деталей із болтом та гайкою у них свердлиться круглий отвір, у який вставляється болт, що загвинчується гайкою.

У спорті також зустрічаються призматичні форми:

5. *Планка для стрибків у висоту* – дерев'яна планка трикутного перерізу (з розмірами сторін 3 см х 3 см х 3 см) або дюралева трубка, обидва кінці якої підсилені дерев'яними бушами трикутного або квадратного перерізу.

Цікава інформація! Дійсно, прямокутні форми в природі є рідкісними, адже природні об'єкти часто мають більш складні або асиметричні форми, зумовлені умовами їхнього утворення та еволюції. Наприклад, у природі зустрічаються різноманітні кристалічні структури, такі як кубічні кристали солі або шестигранні призми кварцу, але ці геометричні форми є результатом певних фізико-хімічних процесів, що відбуваються в організмах або мінералах.

Низький Велд та його «замки» — це ще один захоплюючий приклад геометричних форм у природі. Така форма валунів, яка нагадує штучні споруди, є результатом ерозії та різних процесів вивітрювання, що утворюють ці характерні прямокутні чи кубічні блоки.

Щодо папірусу, його стебла, хоча й мають тригранну форму, є досить рідким прикладом рослини з геометричними характеристиками, схожими на

форми, притаманні штучним тілесним об'єктам. Ці спостереження свідчать про цікаву взаємодію природних форм та умов їхнього розвитку [53].

Ще, також, шестигранна форма бджолиних стільників справді є яскравим прикладом оптимізації природи для досягнення максимального ефекту з мінімальними витратами ресурсів. Бджоли обирають правильну шестикутну призму для комірок, оскільки цей геометричний виріб дозволяє максимально ефективно використовувати віск, при цьому забезпечуючи великий об'єм при мінімальному периметрі стінок.

Ідея Піфагора про те, що тільки три правильні многокутники можуть без порожніх місць покривати площину, є важливою для розуміння цієї природної стратегії. Шестикутник має мінімальний периметр серед правильних многокутників для заданої площі, що дозволяє бджолам заощаджувати ресурси, зменшуючи витрати воску, але при цьому будуючи максимально просторе і ефективне житло.

Що стосується кришки комірки, то її форма має важливе значення. Виявляється, що оптимальна форма верхньої основи не є плоскою. Плоска кришка могла б призвести до надмірних витрат матеріалу, тоді як кришка, утворена трьома ромбами зі спільною вершиною, є найбільш економічною. Така форма дозволяє краще розподілити навантаження та мінімізувати використання воску, що також є ще одним прикладом високої ефективності природних структур. Цей інженерний підхід, реалізований бджолами, є чудовим прикладом математичної оптимізації в природі. [53].

2.7.3 Піраміда.

Термін «піраміда» має цікаве й багатогранне походження, яке пов'язано з кількома гіпотезами. Одна з них стосується давньоєгипетського слова «перемус», що означає діагональ основи, та могло стати основою для грецького терміна «пурамис». Єгиптяни використовували слово «перо» для позначення «великого будинку», саме так вони називали величезні кам'яні усипальниці фараонів. Звідси і виникло припущення, що грецьке слово «пурамис» походить саме від цього єгипетського терміна.

Інша теорія пов'язує слово «піраміда» з поняттям «вогонь». В середньовіччі, за ідеями Платона та інших мислителів, піраміди були асоційовані з вогняною стихією, оскільки їх форма нагадувала палаючий вогонь. Відтак, вони вважали піраміду «вогненним тілом», і вважали, що грецьке слово «пураміс» могло бути похідним від «пор», що означає «вогонь».

Ці гіпотези відображають складність і багатозначність терміна «піраміда», який в свою чергу має тісний зв'язок із важливими архітектурними та символічними аспектами різних цивілізацій.

Про піраміду в архітектурі та природі

Тіла пірамідальної форми дійсно мають важливе значення в архітектурі та часто зустрічаються в різних історичних та культурних контекстах. Ось кілька прикладів:

1. Шатро – це елемент архітектурного завершення для центричних споруд, таких як дзвіниці, храми, башти. Шатро має вигляд високої багатогранної піраміди, зазвичай чотиригранної, і використовується для надання будівлям більш виразної вертикальної форми.

2. Боробудур – буддійське святилище на Яві, побудоване в кінці VIII — на початку IX століття. Ця споруда має вигляд ступінчастої десятиярусної піраміди, яка символізує Всесвіт. Висота Боробудуру досягає 31,5 м, а довжина кожної зі сторін квадратної основи становить 123 м.

3. Гирька – декоративна архітектурна деталь у вигляді піраміди, виготовлена з цегли або каменю. Вона використовувалася в архітектурі XVI-XVII століть для декорування арок, воріт, вікон.

4. Зіккурат – культова ярусна споруда Давнього Вавилону, яка має вигляд зрізаних пірамід чи паралелепіпедів, побудованих з сирцю. Зіккурати використовувалися як храми, і вони складаються з кількох ярусів, що піднімаються вгору.

5. Обеліск – меморіальна споруда, що виникла в Давньому Єгипті, має вигляд загостреного кам'яного стовпа з пірамідальним верхом. Обеліски мали символічне значення та використовувалися для пам'ятних та релігійних цілей. Один із прикладів – пам'ятник Вічної Слави в Києві, який має форму

правильної чотирикутної піраміди на верхній частині і зрізаної піраміди в нижній частині.

Ці приклади показують, як різні культури використовували піраміду як архітектурну форму, надаючи їй різне символічне, релігійне та декоративне значення.

У природі тіла пірамідальної форми зустрічаються рідко. Відома груша пірамідальної форми. Це груша-кайон із Західного Паміру. Її плоди схожі на трикутні пірамідки, що мають масу до 700 г. [53].

Таємниці єгипетських пірамід, зокрема Великої піраміди Хеопса, справді привертали увагу багатьох вчених і дослідників протягом століть. Їхні геометричні та астрономічні властивості, а також можливі загадки щодо впливу на навколишнє середовище, стали основою численних теорій та досліджень. Ось деякі цікаві приклади:

1. *Пропорції Великої піраміди та астрономічні факти.* Вчений Чарльз Сміт дійсно звернув увагу на кілька важливих астрономічних фактів, які нібито заховані у пропорціях піраміди. Він стверджував, що периметр піраміди дорівнює довжині сонячного року, що відношення периметра до висоти основи дорівнює числу "пі", а висота, помножена на 109, співвідноситься з відстанню від Сонця до Землі. Ці теорії були популярні, але після детальних перевірок виявилось, що вони мають деякі неточності і не зовсім відповідають реальним вимірюванням.

2. *Сила пірамід і їх вплив на зберігання тварин та предметів.* Антуан Бовіс та інші дослідники звернули увагу на незвичайний феномен, що спостерігався всередині пірамід — тіла тварин не розкладалися, навіть коли всередині була висока вологість. Бовіс експериментував з пірамідальними коробками і помітив, що овочі краще зберігаються в них. Це стало основою для подальших досліджень про "пірамідальну енергію".

3. *Експерименти з лезами для гоління.* Інший чеський дослідник, Карел Дрбал, також проводив експерименти з пірамідальними коробками і виявив, що леза для гоління, поміщені в таку форму, знову стають гострими. Це було настільки вражаючим, що в 1959 році йому був виданий патент на

"пірамідальне заточування лез". Такі коробки до сих пір продаються в Чехії, а деякі користувачі також рекомендують направляти лезо вздовж магнітного поля Землі для досягнення кращих результатів.

4. *Магнітне поле та зростання кристалів.* Існують також гіпотези, що піраміди можуть створювати власне магнітне поле або енергетичне поле, яке має вплив на об'єкти, що знаходяться всередині. Це може бути причиною, чому такі явища, як зростання кристалів або заточування лез, спостерігаються. Механізм цих процесів не вивчений до кінця, і наразі це є темою для подальших досліджень.

Загалом, хоча багато з цих теорій не мають наукового підтвердження, вони продовжують захоплювати уяву людей і надихати на нові експерименти та дослідження. Вплив пірамідальної форми на навколишнє середовище — це ще одна з багатьох таємниць, яку не вдалося повністю розкрити.

Інтерес до пірамід не вщухає, і різноманітні гіпотези щодо їхнього походження та призначення продовжують збуджувати допитливі уми. Зокрема, гіпотези, що висунули севастопольські вчені В. Гох та І. Котелянц, про піраміди, знайдені в Криму, привертають увагу не тільки завдяки їх розташуванню, але й тому, що ці структури мають певні геометричні властивості, схожі на піраміди, виявлені в інших частинах світу. Вчені припускають, що ці піраміди можуть бути частиною глобальної мережі, пов'язаної з ядром Землі, і що їхнє розташування має особливе значення, можливо, навіть виконуючи стабілізуючу роль для планети в далекому минулому.

Основні ідеї гіпотези:

1. *Зв'язок з глобальними пірамідальними структурами:* Виявлені піраміди в Криму розташовані на прямій, яка йде в північно-західному напрямі, що нібито співпадає з лініями, на яких розташовані такі культові місця, як тибетські піраміди, острів Пасхи і навіть Бермудський трикутник. Це припущення, звичайно, викликає багато питань, адже всі ці місця різні за культурою, але ідея їхнього взаємного зв'язку з якимось універсальним принципом залишається привабливою для дослідників.

2. *Золотий переріз у пірамідах*: Співвідношення між основою і висотою цих пірамід, яке відповідає золотому перерізу, є важливою ознакою, оскільки цей математичний принцип використовується для досягнення максимальної гармонії та ефективності в різних формах природи і людської діяльності. Це підтверджує ще одну спільну рису пірамід у різних частинах світу.

3. *Гіпотеза про стабілізатор Землі*: Найцікавіша частина гіпотези полягає у припущенні, що піраміди могли бути частиною стародавнього механізму стабілізації руху Землі. Згідно з цією ідеєю, катастрофічні події в минулому, такі як повені та інші глобальні зміни, могли спричинити нестабільність планети. Тому було розроблено своєрідний "пірамідальний стабілізатор", що включав великі комплекси пірамід по всьому світу, метою яких було збереження рівноваги та стабільності Землі.

4. *Глобальні пірамідальні комплекси*: Крім кримських пірамід, вчені відзначають наявність пірамідальних структур в інших частинах світу: Австралії, Великій Британії, Тибеті, Мавританії, Намібії. Всі ці комплекси, як вважають дослідники, є невід'ємною частиною глобальної мережі пірамід, яка має певне призначення.

Ці припущення, звичайно, не мають достатнього наукового підтвердження і можуть бути сприйняті як спекуляції, але вони продовжують захоплювати уяву людей і стимулюють подальші дослідження. Можливо, майбутні наукові відкриття дозволять більше зрозуміти природу цих загадкових будівель і їх можливу роль в історії планети.

2.7.4 Циліндр

Циліндрична форма справді є однією з основних у природі і техніці, адже її простота та ефективність часто зумовлюють використання цього геометричного об'єкта в багатьох сферах.

Історичні та природні приклади циліндричної форми:

1. *Космологічні теорії*: Грецький філософ Анаксимандр дійсно вважав, що Земля має форму циліндра, і це було частиною його космологічної теорії. Циліндрична форма вважалася досконалою через свою симетрію та

стабільність. Таке сприйняття циліндра могло вплинути на пізніші розуміння геометрії і фізики.

2. *Природні об'єкти:* У природі можна побачити численні приклади циліндричних форм. Наприклад, стовбури дерев або кровоносні судини. Ці форми забезпечують оптимальне розподілення сил і ефективне використання простору. Циліндрична форма сприяє рівномірному росту та стабільності, що важливо для функціонування організмів.

3. *Адаптація в тварин:* У тварин форма тулуба також часто наближається до циліндричної. Це спостерігається в багатьох видів, зокрема в морських ссавців та змій, де така форма сприяє більшій аеродинамічності або рухливості в середовищі. В індіанців Перуанських Кордильєр циліндрична форма грудної клітки є результатом тривалої акліматизації до високогірних умов, де важливо збільшити обсяг легенів для кращого засвоєння кисню.

4. *Технічні застосування:* Циліндрична форма також є основною в технічних і архітектурних конструкціях. Вона використовується у багатьох механізмах, як-то колеса, труби, резервуари, що мають необхідність у структурній цілісності та ефективності використання простору.

Циліндри стали невід'ємною частиною технічного прогресу завдяки своїм властивостям: рівномірному розподілу тиску, простоті у виготовленні та здатності забезпечити максимальну функціональність з мінімальними витратами матеріалу.

Циліндрична форма є широко поширеною в природі та техніці, що робить її важливою для розуміння структури та функціональності різних об'єктів. Ось кілька прикладів, що підтверджують це:

Природа:

1. *Мікроорганізми.* У світі мікроорганізмів циліндрична форма спостерігається у паличкоподібних вірусів, таких як вірус тютюнової мозаїки або ряду інших бактеріофагів. Ці віруси мають форму, яка дозволяє їм ефективно проникати в клітини.

Рослинний світ:

✓ *Стебла багатьох рослин мають циліндричну форму.* Довжина стебел варіюється від кількох міліметрів, як у прісноводної вольфії, до 300 м у тропічних пальм ротанги.

✓ Баобаб, відомий своєю величезною масивною формою, має діаметр стовбура до 11 м.

✓ Циліндрична форма також спостерігається в кронах дерев, наприклад, у тянь-шанської ялини.

3. *Тваринний світ.* Циліндрична форма також характерна для деяких будівель тварин, таких як термітники. Величезні циліндричні башти термітників на півострові Сомалі досягають висоти 4,5 м, а найвищий термітник у Африці має висоту 12,8 м і діаметр 3 м. Такі конструкції є вражаючим прикладом використання циліндра в природі для побудови житла, що забезпечує термітам стабільність і комфорт.

Техніка:

1. *Механізми.* Циліндрична форма широко застосовується в механізмах для передачі руху, таких як вал, який служить для передачі обертаючого руху. Прямий круговий циліндр є основою для багатьох технічних пристроїв, включаючи вісь для вагонних коліс.

2. *Трубопроводи та контейнери.* Труби, які використовуються для транспортування води, пари та газу, мають порожнисту циліндричну форму, що дозволяє оптимально передавати рідини та гази з мінімальними втратами. Це ж стосується й основної частини космічної ракети, де циліндрична форма містить двигун та паливо.

3. *Зброя та боєприпаси.* Дуло зброї, а також артилерійські гільзи часто мають циліндричну форму. Такі об'єкти повинні бути стійкими до високих тисків і температур, що робить циліндр оптимальним варіантом для забезпечення безпеки та ефективності.

Циліндрична форма є універсальним елементом, що поєднує природну еволюцію з інженерними рішеннями, забезпечуючи простоту, ефективність і стабільність в різних системах. [53].

Циліндричні форми є важливою складовою архітектури, вони часто використовуються для створення монументальних та естетично гармонійних конструкцій. Їх поширеність можна пояснити не тільки технічними, але й естетичними мотивами, оскільки циліндричні форми надають будівлям витонченості, стійкості та відчуття простору. Ось кілька прикладів, що ілюструють використання циліндричних форм в архітектурі:

1. *Бочка-дах*. У російській архітектурі XVII—XVIII ст. популярною була форма даху у вигляді напівциліндра, відома як «бочка». Це дахи церков і інших споруд, які мають округлу форму та дозволяють рівномірно розподіляти навантаження. Вони також відзначаються естетичною привабливістю та гармонійно виглядають на фоні традиційних архітектурних стилів того часу.

2. *Олександрівська колона*. Це монументальний пам'ятник, розташований на Дворцовій площі в Санкт-Петербурзі, який є зразком використання циліндричних форм в архітектурі. Колона, виготовлена з червоного граніту, є монолітною конструкцією, що підкреслює велич і важливість події — перемоги у Вітчизняній війні 1812 р. Її висота та форма створюють враження стійкості і піднесеності, що є важливою характеристикою циліндра як форми.

3. *Парфенон*. Відомий храм на Акрополі в Афінах є класичним прикладом використання циліндричних форм у стародавній архітектурі. Колони Парфенону, що мають вигляд стовпів, є одним з найбільш яскравих прикладів застосування цієї форми в давньогрецькому стилі.

4. *Башта Тауера*. У Великій Британії башта Тауера також має циліндричні елементи в своїй архітектурі, які додають їй величі та водночас роблять конструкцію стійкою. Це ще один приклад того, як циліндрична форма використовується для забезпечення як функціональності, так і естетичної привабливості.

5. *Темп'єтто в Італії*. У цій каплиці також можна побачити використання циліндричних форм, зокрема в колоннах та інших архітектурних елементах, що допомагають створити враження легкості та гармонії.

Ці приклади демонструють не лише функціональну доцільність циліндричних форм, але й естетичну їх важливість в архітектурі. Вони додають величі, гармонії та ефекту простору, роблячи будівлі більш привабливими та виразними.

Циліндрична форма, як вже зазначалося, не тільки важлива з точки зору математичних властивостей, але й має практичне застосування в архітектурі, особливо в конструкціях, де економія матеріалів, теплоізоляція та ефективність простору є важливими аспектами.

1. *Економія матеріалів і енергії.* Як зазначено, прямий круговий циліндр, маючи максимальний об'єм для даної поверхні, дає можливість зменшити витрати матеріалів при одночасному збереженні простору. Оскільки площа стін зменшується, це також дозволяє мінімізувати втрати тепла взимку і зменшити нагрівання стін влітку.

2. *Радіальне розташування кімнат.* Таке розташування дозволяє скоротити переходи з однієї кімнати в іншу, що є корисним для великих будівель, таких як готелі чи установи, де важливо оптимізувати рух людей і час.

3. *Готель у Сестріфі.* Готель Дукі д'Аоста в Італії з діаметром 25 м і висотою 47 м є одним із прикладів практичного застосування циліндричної форми в архітектурі. Така конструкція забезпечує не лише естетичний вигляд, але й ефективне використання простору.

Циліндрична форма в мистецтві:

Малевич і інтенсивний колір. На рубежі 1900-1910 рр. художник Казимир Малевич працював з елементами кубізму, додаючи до своїх композицій яскраві кольори та циліндричні та конусовидні форми. Його роботи були частиною більш широкого руху, що прагнув поєднати абстракцію з динамізмом і емоційним вираженням, де геометричні форми, зокрема циліндри, використовувалися для створення структурних і візуальних ефектів.

Таким чином, циліндрична форма має широке застосування не тільки в технічних і функціональних аспектах архітектури, але й в мистецтві, де вона додає композиціям динаміки, виразності і глибини.».

2.7.5 Конус

Конус дійсно є цікавою та унікальною геометричною фігурою, яку можна зустріти в природі, хоча й не в чистому вигляді. Його форми часто спостерігаються в природних об'єктах, що мають потребу в компактності, стійкості та ефективності.

Природні конусоподібні форми:

1. *Бурульки.* Одна з найбільш очевидних природних форм, що нагадує конус, — це бурульки, які утворюються взимку, коли вода замерзає і знову зливається, утворюючи знизу гостру конічну форму. Бурульки демонструють не лише конусоподібну форму, але й природну еволюцію, що дозволяє їм зберігати баланс між стійкістю та легкістю.

2. *Ягоди.* Полуниця і суниця також можуть нагадувати конус за своєю формою. Вони мають округлу основу та звужуються вгорі, що є типовим для багатьох конусоподібних структур у природі.

Стовбури дерев, що нагадують конус:

1. *Баобаб.* Баобаб є ще одним чудовим прикладом рослини з конусоподібною формою, хоча й не в чистому вигляді. Його величезний стовбур розширюється в основі і звужується на верхівці, що нагадує форму конуса. Баобаб досягає неймовірного діаметра — до 3 м, і хоча стовбур виглядає дуже міцним, він вразливий до пробиття кулею, що додає цікавий контраст до його величезних розмірів.

2. *Гігантська секвоя «генерал Шерман».* Цей дивовижний представник природи є найбільшим деревом на Землі. Стовбур має обхват 24,1 м і висоту 83 м, що робить його неймовірно великим і важливим природним об'єктом. Хоча сам стовбур не є ідеально конусоподібним, його товщина на основі і поступове звуження до верхівки створюють ефект, який нагадує конус. Цей

величезний обсяг матеріалу може бути використаний для виготовлення безлічі різних виробів, як показує приклад виготовлення 5 млн сірників.

Таким чином, конус є надзвичайно корисною і часто зустрічається в природі формою, що забезпечує стабільність і ефективність росту або збереження структури. Тільки за рахунок своєї форми природні об'єкти можуть досягти певної стійкості, що дозволяє їм адаптуватися до різних умов навколишнього середовища. [13].

Конусоподібні форми широко зустрічаються в природі, техніці, архітектурі та навіть в астрономії, адже вони надають об'єктам необхідну стійкість і естетичну привабливість. Вулканічні структури є одним із найбільш яскравих прикладів природного конуса, що підкреслює силу і велич природних процесів.

Вулканічні конуси:

1. *Вулкан Вірунга (Африка)*: Ця група вулканів є домівкою для гірських горил, і найвищий з них, Карісімбі, з висотою 4507 м, має майже ідеальну конусоподібну форму. Це один з найгарніших вулканів світу.

2. *Курильські острови*. Вулкан Алаїд (2270 м) є прикладом майже досконалої конусоподібної форми вулкана. Курильські острови містять більше сотні вулканів, що мають різні варіації конічних форм.

3. *Вулкан Фудзіяма (Японія)*. Може бути символом Японії завдяки своїй конічній формі, яка стала національним ідеалом. Усі вулкани з подібною формою в Японії називаються Фудзі.

Природні об'єкти з конічною формою:

1. *Трепанги*. Морські тварини, що мають численні конічні вирости на своєму тілі, яке досягає 30-40 см в довжину.

2. *Шовковичний хробак (шовкопряд)*. Сплітає кокон у вигляді конуса, що має довжину до 1500 м і діаметр 0,022-0,04 мм. Кокон шовкопряда є прикладом природної конусоподібної структури, яка витримує значні навантаження.

Техніка і архітектура:

1. *Астрономія та техніка.* У ракетах, супутниках і вогнегасниках часто використовують конусоподібні форми, які забезпечують аеродинамічні властивості та ефективність використання. Наприклад, носова частина ракет має форму зрізаного конуса для зниження опору повітря.

2. *Архітектура.* У ряді архітектурних стилів, зокрема романському, конусоподібні форми стали популярними. У соборі Нотр-Дам дах має вигляд конуса, а подібні форми можна побачити в багатьох церквах і мечетях, де конічні бані є декоративним завершенням.

У повсякденному житті:

1. *Продукти харчування.* Цукерки, морозиво та інші продукти часто виробляються у вигляді конуса або зрізаного конуса, що додає естетичної привабливості і практичності.

2. *Мода.* У минулі століття жіночі спідниці часто мали конічну форму, що підкреслювалося спеціальними каркасами, особливо у XVI-XVIII століттях.

Конусоподібна форма, безумовно, є важливою у багатьох сферах життя, оскільки вона поєднує функціональність і красу. У природі та людських досягненнях ця форма сприяє стабільності та естетичному ефекту, роблячи об'єкти більш ефективними та привабливими.

2.7.6 Куля

Куля є геометричною фігурою з унікальними властивостями, що дозволяють їй ефективно використовуватись у різних сферах життя, від природи до техніки та архітектури. Вивчення цих властивостей допомагає зрозуміти причини, чому куля широко застосовується, хоча її використання в архітектурі не стало популярним.

Природа та біологія:

- Куля є формою, яку можна знайти в природі у багатьох організмах та явищах. Наприклад, цейлонські терміти будують свої гнізда у вигляді кулі, що дозволяє їм ефективно підтримувати тепло і захищати колонії.

- Виявлені мохові м'ячі, що є живими скупченнями мохів, також мають сферичну форму. Вони здатні витримувати суворі умови і зберігати свою форму, живлячись дощовою водою.
- У природі ми також можемо знайти численні інші приклади кульових форм, від ягід до крапель води.

Техніка і побут:

Ідея використання кульової форми в побуті має давню історію. Наприклад, піала і арібалл є посудинами, що мають напівсферичну або кулясту форму, що дозволяє їм зберігати тепло рідини.

Братина – традиційна куляста посуда, використовувана на бенкетах, демонструє естетичну привабливість цієї форми. Аналогічно, зернь – маленькі кульки, що використовуються для прикраси ювелірних виробів, свідчать про давнє використання кульових форм в декорі.

Архітектура:

Одним з найяскравіших прикладів є Римський пантеон, який має купол у вигляді півсфери. Цей архітектурний елемент дозволяє створювати величезні простори з мінімальною кількістю матеріалу, що робить будівлю одночасно естетично привабливою та економічною.

Ідея кульових будинків була популярною серед деяких архітекторів через її економічність та функціональність. Проте, ці будинки, такі як побудований у 1928 році будинок на Дрезденській виставці, не набули широкого поширення, незважаючи на свої переваги.

Причини, чому кулясті будинки не набули популярності:

1. Технічні та конструктивні труднощі: Куляста форма має певні складнощі в плануванні та розташуванні внутрішніх приміщень. Це ускладнює використання простору, оскільки приміщення мають бути організовані навколо центральної точки, що не завжди є практичним для житлових потреб.

2. Естетичні уподобання: Люди звикли до певних архітектурних стандартів, зокрема до прямокутних і кубічних форм будинків, що відповідають їхнім потребам у просторі та організації інтер'єру.

3. Високі витрати на будівництво: Хоча куляста форма може здаватися економічною, насправді для її реалізації можуть знадобитися особливі матеріали та технології будівництва, що робить такі проекти дорожчими за традиційні прямокутні конструкції.

Таким чином, незважаючи на всі переваги кульової форми в плані мінімізації площі поверхні та економії матеріалів, практичність і естетика більш традиційних форм все ж зберігаються переважно в архітектурі та будівництві.

Висновки

1. Акцент на практичну та прикладну підготовку учнів у процесі навчання математики є необхідним для їх всебічного розвитку. Це передбачає застосування математичних знань і вмінь для розв'язування завдань, що стосуються виробничих чи управлінських процесів. Політехнічний підхід до навчання передбачає постійне висвітлення взаємозв'язку теоретичної та прикладної математики. Навички розв'язування прикладних завдань допомагають подолати існуюче протиріччя між теоретичними знаннями учнів і їх здатністю застосовувати ці знання на практиці.

2. Прикладні задачі є потужним інструментом для реалізації міжпредметних зв'язків, за умови, що до їх складання та використання ставляться конкретні вимоги. Текст задачі має в першу чергу ілюструвати матеріал, що вивчається на уроці. Метод математичного моделювання є сучасним ефективним інструментом для розв'язування прикладних задач, який базується на використанні математичної моделі для дослідження реальних об'єктів, явищ чи процесів, включаючи послідовність певних етапів.

3. Процес розв'язування задачі можна розподілити на такі етапи:

- ✓ Аналіз формулювання задачі: виділення даних і того, що потрібно знайти, довести чи дослідити;
- ✓ Пошук плану розв'язку;
- ✓ Реалізація плану, перевірка та дослідження отриманого розв'язку, тобто доведення його відповідності вимогам задачі;
- ✓ Обговорення (аналіз) розв'язку з метою оцінки його ефективності та можливості застосування альтернативних методів чи способів.

4. Прикладна спрямованість курсу стереометрії передбачає орієнтацію на здобуття учнями знань, умінь і навичок, що матимуть практичне застосування в різних сферах життя. Поділ стереометрії на теоретичну (абстрактну) та прикладну частини формує відповідні складові в шкільному

курсi. Це дозволяє виділити задачі, які можна класифікувати на абстрактні та прикладні, серед яких виділяються навчальні прикладні задачі.

5. Для посилення прикладної спрямованості курсу стереометрії доцільно розподіляти матеріал за навчально-математичними теоріями. Поділ має ґрунтуватися на математичних моделях, що описують реальні об'єкти, явища або процеси. У шкільному курсі стереометрії виділяються дев'ять основних навчально-математичних теорій: «Аксіоми стереометрії. Паралельність і перпендикулярність прямих і площин», «Координати і вектори у просторі», «Перетворення у просторі», «Геометричні тіла та їх комбінації», «Призма», «Піраміда», «Циліндр», «Конус», «Куля».

Список використаних джерел

1. Астряб О. М., Хлебніков К. О., Шингарьова Р. М. Розв'язування стереометричних задач. – Київ: Рад. шк., 1936. – 157 с.
2. Афанасьєва О. М., Бродський Я. С., Павлов О. Л., Сліпенко. А. К. Геометрія. 10-11 класи: Пробний підручник. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003.
3. Афанасьєва О. М., Бродський Я. С., Павлов О. Л., Сліпенко. А. К. Дидактичні матеріали з геометрії. 10-11 класи: Навчальний посібник. – Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2003.
4. Бевз, Г. П. Геометрія: підручник для 10–11 кл. загальноосвітніх навчальних закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – Київ: Вежа, 2008. – 256 с.
5. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник. – Київ: Вища школа, 1989. – 367 с.
6. Бевз Г. П. Прикладна спрямованість шкільного курсу геометрії: Посіб. для вчителя. – Київ: Видавниче підприємство «Перше вересня», 1999. – 56с.
7. Богуславський І. П. Збірник практичних задач і вправ з геометрії (для восьмирічної школи): Посібник для вчителів. – Київ: Рад. шк., 1961 – 126 с.
8. Бродський Я. С., Гречук В. Ю., Павлов О. Л., Сліпенко. А. К. Стереометрія у старшій школі: Посібник для вчителя. – Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2005. – 258 с.
9. Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип.21. – Донецьк: Фірма Теан 2004.-с. (Міжнародна програма “Евристика та дидактика точних наук”).
10. Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 30. – Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2008. – 248 с.

11. Вивчення геометрії у загальноосвітній школі: Методичний лист / І. Ф. Тесленко.— Київ: Рад. шк., 1984.
12. Війчук Т. І. Навчання учнів створенню математичних моделей у процесі розв'язування прикладних задач у 5–9 класах [Електронний ресурс] / Т. І. Війчук // Народна освіта : електронне фахове видання. – 2012.—Вип. 3 (18).—<http://www.narodnaosvita.kiev.ua/vupysku/18/index18.htm>.
13. Возняк Г. М., Маланюк К. П. Прикладна спрямованість шкільного курсу математики: Розв'язування екстремальних задач: Метод, посібник. – Київ: Рад. шк., 1984. – 124
14. Возняк Г. М., Маланюк К. П. Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі вивчення математики: Посібник для вчителя.— Київ: Рад. шк. – 1989.
15. Геометрія: Підруч. для учнів 10-11 кл. з поглиб, вивч. математики в серед, загальноосвіт. закладах / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, В. М. Владіміров, Н. І. Владімірова. – Київ: Освіта, 2000.
16. Закон України "Про загальну середню освіту" // Освіта.—1997.—С. 6-11.
17. Кирилюк, Л. Л. Використання математичного моделювання при розв'язуванні задач у курсі алгебри основної школи / Л. Л.Кирилюк // Вересень. – 2009. – № 3-4 (48-49). – С. 72-78.
18. Кисельов А. П. Геометрія: В 2 ч.: Підручник для 1Х-Х класів середньої школи. – Київ: Рад. шк., 1957. – 142 с.
19. Клопський В. М., Скопец З. А, Ягодовський М.І. Геометрія: Навчальний посібник для 9 і 10 класів середньої школи. – Київ: Рад. шк., 1982.
20. Колягин Ю. М., Пикан В. В. О прикладной и практической направленности обучения математике.-Математика в школе. – 1985. – №6.— С. 27.
21. Лоповок Л. М. Збірник задач геометрії для 9-10 класів: Дидактичні матеріали / Під ред. І.Ф. Тесленко. – Київ: Рад. шк., 1984.
22. Мерзляк А. Г. Геометрія 11 клас: підр. для загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень, проф. рівень / А.Г. мерзляк, Д.

А. Номіровський, В. Б. Полонський, М.С. Якір – Харків: Гімназія, 2011. – 431с.

23. Найдьонова О. О., Канакіна Л. П. Педагогічні функції прикладних задач // Математика.–2004. – №3, січень. – С.12-21.

24. Неплях М. С. Збірник задач з геометрії на базі техніки: Посібник для вчителів: - К.: Рад. шк., 1965. 41. Нестеренко Т. Я. Методика вивчення стереометричного матеріалу у восьмирічній школі: Посібник для вчителів.- Київ: Рад. шк., 1961.

25. Панченко Л. В. Система прикладних задач як засіб формування вмінь математичного моделювання у майбутніх вчителів математики / Л. В. Панченко // Математика в школі. – 2004. – № 9-10. – С. 21-28.

26. Перельман Я. І. Жива геометрія: Теорія і завдання. – Харків: «Униздат», 1930.

27. Погорелов О. В. Геометрія: Планіметрія: Підруч. для 10-11 кл. серед. школ. / О. В. Погорелов. – Київ: Освіта, 1994. – 224с.

28. Прус А. В., Сверчевська І. А. Вчимося розв'язувати задачі зі стереометрії. Геометричні тіла у тестових завданнях: Навчальний посібник – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. – 32 с.

29. Прус А. В., Прикладна спрямованість стереометрії: 10— 11 кл. / А. Прус, В. Швець. – Київ: Шк. світ, 2007. – 128 с. – (Б-ка «Шк. світу»).– Бібліогр. : с. 124-127.

30. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник 2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища школа, 2006. – 582 с.

31. Тадеєв В. О. Геометрія. Основи стереометрії. Многогранники: Дворішчівий підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів / Заред. В. І. Михайловського – Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2003.

32. Тарасов Л. В. Геометрія навколишнього світу – Суми: Універсальна книга, 2003 – (Освітня модель «Екологія та розвиток») – с. 42.

33. Янченко Г.А. Алгебра: Підручник для 9 класу. серед. школ. / Янченко Г. А., Кравчук В.І., Підручна М.Я. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2009 – 256 с.